A 2016. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai
október 24. — november 2.

1. Milyen α komplex számhoz van olyan teljesen multiplikatív, komplex értékű f számelméleti függvény, amelyre
$$\sum_{n<x} f(n) = \alpha x + O(1)\,?$$

2. Legyen $K = (V, E)$ véges, egyszerű, teljes gráf. Legyen d pozitív egész. Legyen $\phi\colon E \to \mathbb{R}^d$ olyan leképezése az élhalmaznak az euklideszi térbe, hogy az értékkészlet bármely pontjának őseképe összefüggő gráfot alkot az egész V csúcshalmazon, továbbá a K bármely háromszögének éleihez rendelt pontok egy egyenesen vannak. Mutassuk meg, hogy ϕ értékkészlete egy egyenesen van.

3. Igazoljuk, hogy minden P valós együtthatós polinomhoz és minden pozitív egész n-hez van olyan Q valós együtthatós polinom, amelyre $P^2(x) + Q^2(x)$ osztható $(1 + x^2)^n$-nel.

4. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan valós számokbol álló $a(1), a(2), \dots, a(n), \dots$ sorozat, amelyre
$$a(n+m) \le a(n) + a(m) + \frac{n+m}{\log(n+m)}$$
minden $m, n \ge 1$ egészre, és amelyre az $\{a(n)/n : n \ge 1\}$ halmaz mindenütt sűrű az egész számegyenesen.

   Megjegyzés: de Bruijn és Erdős tétele kimondja, hogy ha a fenti egyenlőtlenség a jobboldal utolsó tagja helyett $f(n+m)$-mel teljesül, ahol $f(n) \ge 0$ monoton növő és $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)/n^2 < \infty$, akkor $a(n)/n$ konvergál, vagy $(-\infty)$-hez tart.

5. Létezik-e olyan szakaszonként lineáris, folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre bármilyen $a_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$ kétirányban végtelen sorozathoz van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy
$$\limsup_{K\to\infty} \frac{\#\{k \le K \,:\, k \in \mathbb{N},\ f^k(x) \in [n, n+1)\}}{K} = a_n$$
teljesül minden $n \in \mathbb{Z}$-re, ahol $f^k = f \circ \ldots \circ f$ az f függvény k-adik iteráltja?

6. Legyen $\Gamma(s)$ az Euler-féle gamma-függvény. Konstruáljunk olyan nem azonosan eltűnő $F(s)$ páros egészfüggvényt, amelyre az $F(s)/\Gamma(s)$ hányados korlátos a $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ jobb félsíkban.

7. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}P^\infty$ tér feletti tautologikus (univerzális) komplex vonalnyaláb önmagával vett r-szeres direkt összegének egységgömbnyalábja homotopikusan ekvivalens $\mathbb{C}P^{r-1}$-gyel.

8. Milyen $n > 1$ egész számra van olyan téglalap, amely fölbontható n darab hozzá hasonló, de páronként nem egybevágó téglalapra?

9. Ha $p_0, \dots, p_d \in \mathbb{R}^d$, legyen

$$S(p_0, \dots, p_d) = \left\{ \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_d p_d : \alpha_i \le 1,\ \sum_{i=0}^{d} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Legyen π tetszőleges valószínűségeloszlás $\mathbb{R}^d$-n, és válasszuk a $p_0, \dots, p_d$ pontokat függetlenül π szerint. Bizonyítsuk be, hogy $\pi(S(p_0, \dots, p_d))$ várható értéke legalább $1/(d+2)$.

10. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású véletlen pontok az $\mathbb{R}^3$-beli egységgömbfelületen. Az X milyen eloszlása mellett lesz X és Y (euklideszi) távolságának várható értéke maximális?

A Schweitzer Miklós Emlékversenyen részt vehetnek mindazok, akik a verseny megrendezésekor Magyarországon vagy magyar állampolgárként külföldön valamely egyetem, főiskola hallgatói, vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny megrendezésének évében szereztek egyetemi, főiskolai oklevelet. PhD-hallgatók csak akkor vehetnek részt, ha egyetemi, főiskolai diplomájukat a verseny megrendezésének évében szerezték. A versenyből ki vannak zárva azok, akik a verseny megrendezésének événél korábban MSc-szintű oklevelet szereztek matematikus, informatikus, programtervező matematikus vagy matematikatanári szakon akár itthon, akár külföldön.

A megoldásokat magyar nyelven, jól olvashatóan, feladatonként külön papírra írva 2016. november 2-án 12.00 óráig

a Bolyai János Matematikai Társulat titkárságán
(1055 Budapest, Falk Miksa u. 12., I emelet 4., 19-es kapucsengő),

vagy

az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet titkárságán
(1053 Budapest, Reáltanoda u. 13-15.)

kell benyújtani, vagy ugyanezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére:

Frenkel Péter, ELTE TTK Mat. Intézet, Algebra és Számelmélet Tanszék,
1117 Budapest, Pázmány P. stny. 1/c,

vagy elektronikusan, PDF formátumban elküldeni a

`frenkelp265@gmail.com`

címre. Minden lapon szerepeljen a versenyző neve, és az egyik lapon az évfolyama, végzettsége, lakcíme és e-mail címe is. Az egyetemi tananyagban nem szereplő ismeretre való hivatkozás esetén a versenybizottság számára elérhető forrás megjelölése szükséges.

A megoldásokat november 7-én 16:15 órakor az ELTE Északi tömb 1.71 termében megbeszéljük. A verseny eredményhirdetése várhatóan december 14-én 14 órakor a Rényi Intézet Nagytermében lesz (1053 Bp., Reáltanoda utca 13-15.), de az ott folyó munkálatok miatt ez változhat. Mindenkit szívesen látunk!

További információ a `bolyai.hu/schweitzer.htm` oldalon található.