NYILATKOZAT

Név: VAJDA BALÁZS

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSC

NEPTUN azonosító: AH64KS

Szakdolgozat címe:

GRÁFOK ISMÉTLŐDÉSMENTES SZÍNEZÉSE

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.19.

Vajda Balázs

a hallgató aláírása

Gráfok ismétlődésmentes színezése

Szakdolgozat

Vajda Balázs

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Keszegh Balázs

ELTE Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni témavezetőmnek, Keszegh Balázsnak a segítségét, amely végig kísérte a munkámat. Köszönöm, hogy bemutatta nekem az ismétlődésmentes színezések témakörét és köszönöm, hogy bármikor fordulhattam hozzá tanácsért, ötletért.

Köszönettel tartozom még a véges matematika 1 előadómnak Sziklai Péter Tanár Úrnak, hogy megszerettette velem a gráfok világát.

Köszönöm a családomnak és a barátaimnak a sok-sok támogatást. Külön köszönet illeti Matúz Lórántot esztétikai jellegű meglátásaiért.

Bevezető

A szakdolgozatomban bemutatom az ismétlődésmentes sorozatokat és az implementálásukat a gráfszínezések témakörébe, mint ismétlődésmentes színezések. Ismertetem az egyszerűbb struktúrájú gráfok (például utak, körök, fák) Thue számait, amelyekkel lefektetem a dolgozatomban a későbbi összetettebb gráfcsaládok vizsgálatainak alapjait. Bemutatásra kerülnek többek között a k-fák Thue számai, melyek vizsgálata kiemelt fontosságú, mivel segítségükkel bármilyen G gráf Thue számára adhatunk egy felső becslést, feltéve, hogy ismerjük G favastagságát. Foglalkozunk a síkgráfok Thue számaival, melyek vizsgálatához definiálnunk kell az erősen ismétlődésmentesség és az erős gráfszorzás fogalmait is. Végül, de nem utolsó sorban pedig egy szintén jelentős témakört vizsgálunk meg: a fokszámkorlátos gráfok Thue számainak témakörét. Ennek fontossága szintén abban rejlik, hogy segítségével bármilyen G gráf Thue számát felülről becsülhetjük, ha ismerjük G maximális fokszámát.

1. Alapvető definíciók és jelölések

1.1 Definíció (Gráf)
A gráf csúcsok $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, és élek $E(G) = \{...., (v_i, v_j), ...\}$ véges halmaza, ahol $1 \leq i, j \leq n$.

1.2 Definíció (Fokszám)
Egy csúcs foka vagy fokszáma, azoknak az éleknek a száma, amelyek illeszkednek a csúcsra. Jelölje $d(v_i)$ a v_i csúcs fokszámát, valamint $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát. (Helyenként az egyszerűség kedvéért: $\Delta(G) = \Delta$.)

1.3 Definíció (Séta)
A séta a csúcsoknak egy $v_0, v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k$ sorozata, melyben minden i-re teljesül, hogy (v_{i-1}, v_i) él, ahol $i = 1, \ldots, k$.

1.4 Definíció (Út)
Az út olyan séta, amelyben bármely $i \neq j$-re $v_i \neq v_j$. P_n az n csúcsú utat jelöli.

1.5 Definíció (Körséta)
A körséta olyan séta, melyben az első és az utolsó csúcs megegyezik, azaz $v_0 = v_k$.

1.6 Definíció (Kör)
A kör egy olyan körséta, amelyben $v_0 = v_k$ kivételével nem ismétlődik csúcs. C_n az n csúcsú kört jelöli, ahol $n \geq 3$.

1.7 Definíció (Hurokél)
Egy $e \in E(G)$ él hurokél, ha $e = (v_i, v_i)$, valamely $v_i \in V(G)$-re, azaz a hurokél egy olyan él, amely egy csúcsot önmagával köt össze.

1.8 Definíció (Összefüggő gráf)
Egy G gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között létezik séta.

1.9 Definíció (Húrgráf)
Egy G gráf húrgráf, ha minden legalább 4 csúcsot tartalmazó körének van egy olyan éle, amely nem része a körnek, de összeköt kettő a körben lévő csúcsot.

1.10 Definíció (Fa)
A fa egy összefüggő és körmentes gráf.

1.11 Definíció (Teljes gráf)
A teljes gráf egy olyan gráf, melynek bármely két különböző csúcsa között létezik él. K_n az n csúcsú teljes gráfot jelöli.

1.12 Definíció (Részgráf)
R gráf egy G gráf részgráfja, ha R megkapható G-ből csúcsok és élek elhagyásával.

1.13 Definíció (Klikk)
A klikk egy teljes részgráf, azaz néhány csúcs, melyek között minden él be van húzva. A k-klikk a k csúcsú klikket jelenti.

1.14 Definíció (Távolság)

Két különböző u, v csúcsok egymástól vett távolsága a közöttük lévő egyik legrövidebb út élszáma. Amennyiben u és v között nem létezik út, a távolságukat végtelennek definiáljuk. u és v távolságát $d(u, v)$ jelöli.

1.15 Definíció (Gráf szintezése)

Egy összefüggő G gráf szintezése egy tetszőleges v_0 csúcs szerint egy olyan $S\colon V(G) \to \mathbb{Z}$ függvény amelyre $S(v_i) = d(v_0, v_i)$.

1.16 Definíció (Királygráf)

A királygráf egy a sakktábla mezőiből képzett olyan gráf, amelyben minden mező egy csúcsnak felel meg, és két csúcsot pontosan akkor köt össze él, ha mezőiknek létezik közös éle vagy közös csúcsa.

2. Ismétlődésmentes sorozatok

2.1 Definíció (Ismétlődésmentes/Thue sorozatok)
Egy $a = a_1a_2 \dots a_n$ ($a_i \in \{1,2,3,\dots\}$ adott méretű halmaz feletti) sorozat ismétlődésmentes, ha nincs benne kettő egymás mellett lévő a_i-(k)ből alkotott részsorozat, melyek azonosak.

- Ez például egy ismétlődésmentes sorozat: 123132123213
- Ez pedig egy **nem** ismétlődésmentes sorozat: 1232312, mivel tartalmaz két egymással szomszédos, azonos blokkot: 2323.

1. Maximum milyen hosszú ismétlődésmentes sorozatot lehet alkotni, ha $a_i \in \{1,2\}$?
Könnyen meggondolható, hogy erre a válasz 3, mivel:

Legyen az első tag 1:	1
Második helyre ekkor csak 2-t lehet írni:	12
Harmadik helyre pedig csak 1 kerülhet:	121

Negyedik helyre viszont már nem lehet se 2-t írni, mert akkor 1212 lenne az ismétlődés, se 1-et, mert akkor pedig az 11 lenne az ismétlődő rész. Ez ugyanígy meggondolható, ha 2-vel kezdjük a sorozatot. Azaz tényleg létezik 3 hosszú sorozat 2 elemű halmaz fölött, és ez tényleg a leghosszabb.

2. Maximum milyen hosszú ismétlődésmentes sorozatot lehet alkotni, ha $a_i \in \{1,2,3\}$?
E kérdésre a válasz már sokkal meglepőbb. 1906-ban Axel Thue [1] norvég matematikus bebizonyította, hogy 3 elemű halmaz fölött előállítható tetszőleges hosszú, ismétlődésmentes sorozat:

$$121321231213231321231213212313231 \dots$$

Thue bizonyítása konstruktív, és a sorozat tagjainak behelyettesítésére épül. Például a következő behelyettesítés:

$1 \rightarrow 12312$

$2 \rightarrow 131232$

$3 \rightarrow 1323132$

megőrzi az ismétlődésmentességét a sorozatnak az $\{1,2,3\}$ halmaz fölött. Azaz, kicserélve az eredeti ismétlődésmentes sorozat összes a_i elemét a fenti behelyettesítéssel, újból egy ismétlődésmentes sorozatot kapunk. Ez egyben azt is jelenti, hogy bármely egy elemű sorozatból kiindulva, a behelyettesítéseket kellően sokszor elvégezve tetszőlegesen hosszú ismétlődésmentes sorozatot kaphatunk.

Az ismétlődésmentes sorozatokat, mint gráfok útjainak ismétlődésmentes színezéseit is tekinthetjük. Innentől a szakdolgozatomban a Thue sorozatok ezen általánosítását fogom bemutatni részletesebben.

3. Gráfok ismétlődésmentes színezése

A Thue sorozatok elemeit rendelhetjük a gráf csúcsaihoz és az éleihez is; ennek függvényében beszélünk ismétlődésmentes csúcsszínezésről vagy éppen ismétlődésmentes élszínezésről is. Ebben a szakdolgozatban a hangsúlyt az ismétlődésmentes csúcsszínezésekre fektetem, viszont fontos definiálni az ismétlődésmentes élszínezést is, egyes – később szóba jövő – speciális esetek miatt. Innentől, ha csak ismétlődésmentes színezést írok, akkor ismétlődésmentes csúcsszínezést értek alatta.

3.1 Definíció (Ismétlődésmentes csúcsszínezés)

Egy $f\colon V \to N$ csúcsszínezés a G gráfon ismétlődésmentes, ha nincs olyan $r \geq 1$ konstans, és $v_1, \ldots, v_{2r}$ út a G gráfban, hogy $f(v_i) = f(v_{r+i})$ $\forall i = 1, \ldots, r$.

3.2 Definíció (Ismétlődésmentes élszínezés)

Egy $f\colon E \to N$ élszínezés a G gráfon ismétlődésmentes, ha nincs olyan $r \geq 1$ konstans, és $v_1, \ldots, v_{2r+1}$ út a G gráfban, hogy $f(v_i v_{i+1}) = f(v_{r+i} v_{r+i+1})$ $\forall i = 1, \ldots, r$.

A könnyebb vizualizáció érdekében N különböző elemeit különböző színeknek feleltetjük meg a továbbiakban. Azaz egy G gráf csúcsszínezése vagy élszínezése ismétlődésmentes, ha a G-ben vett bármely úton a színek sorozata ismétlődésmentes.

3.3 Definíció (Thue szám)

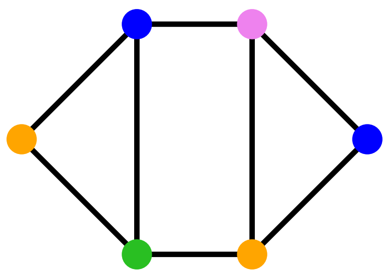
A G gráf ismétlődésmentes csúcsszínezéséhez kellő színek számának minimumát $\pi(G)$ jelöli és a gráf Thue számának hívják.

3.4 Definíció (Thue index)

A G gráf ismétlődésmentes élszínezéséhez kellő színek számának minimumát $\pi'(G)$ jelöli és a gráf Thue indexének hívják.

Azaz a 3.1. definíció szerint $\pi(G) = \min |f(V(G))|$, ahol f ismétlődésmentes. A Thue számokat Noga Alon [2] definiálta 2002-ben, és nevezte el Axel Thue után, az ismétlődésmentes sorozataiban elért eredményei miatt.

Vegyük észre, hogy $\pi(G)$ viszonylag egyszerű gráfokra se triviális:



1. ábra. Erre a gráfra $\pi(G) = 4$, mivel 3 színnel színezve biztosan lenne egy út G-ben, amely tartalmaz ismétlődést és 4 színnel való ismétlődésmentes színezése G-nek lehetséges a fenti módon.

Éppen ezért érdemes először a lehető legegyszerűbb példát megvizsgálni, azaz amikor $G = P_n$.

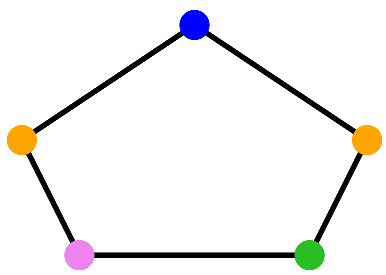
3.5 Tétel (Thue tétele [1])
Ha P_n egy út $n \geq 4$ csúcson, akkor $\pi(P_n) = 3$

Bizonyítás. Valóban, hiszen P_n ismétlődésmentesen csúcsszínezhető, a fenti (**2.**) tetszőlegesen hosszú sorozat bármely n hosszú szeletével (a 3 elemű halmaz tagjaihoz egy-egy színt megfeleltetve, és a sorozat tagjait pedig sorban a csúcsokra írva). Továbbá, a tételben szereplő $n \geq 4$ feltétel is egyből látszik miért szükséges, ha mint n hosszú sorozat gondolunk a P_n színezésére, és visszaemlékszünk a bevezetés első pontjára (**1.**). □

A leginkább vizsgált kérdés a gráfok Thue számaival kapcsolatban, az a következő: mi a kapcsolat $\pi(G)$ és $\Delta(G)$ között?

- Ha $\Delta(G) = 1$, akkor $\pi(G) \leq 2$, mivel G diszjunkt csúcspárok és diszjunkt csúcsok úniója.
- Ha $\Delta(G) = 2$ (utak, körök és diszjunkt csúcsok úniója), maximum mekkora lehet $\pi(G)$?

Láttuk, hogy $\pi(P_n) \leq 3$ és ennek következményeképpen könnyen beláthatjuk, hogy $\pi(C_n) \leq 4$, a következő módon. Vegyünk tetszőlegesen egy csúcsot C_n-ből és színezzük be az 1. féle színnel. Ekkor a maradék csúcsát a körnek felfoghatjuk úgy, mint egy $n-1$ hosszú utat, melyről már tudjuk, hogy n méretétől függetlenül be tudjuk színezni 3 féle színnel, mely most legyen a $2., 3.$, és 4. féle színünk. Ekkor jó ismétlődésmentes színezését kaptuk C_n-nek 4 színből. Ezenfelül valóban létezik olyan kör (2. ábra) amelyhez kell is a négy szín az ismétlődésmentes kiszínezéséhez, ezért $\pi(C_n) \leq 4$.



2. ábra. Például $\pi(C_5) = 4$

Ez azt jelenti, hogy olyan G gráfokra, melyekre $\Delta(G) = 2$, teljesül, hogy $\pi(G) \leq 4$.
Ezek után adja magát a kérdés: vajon $\Delta(G) \geq 3$ gráfok esetén milyen felső határt tudunk megszabni $\pi(G)$-nek?
Meglepően csak $\Delta(G) = 1$-re és $\Delta(G) = 2$-re tudunk pontos maximumot meghatározni $\pi(G)$-nek. Bármely $\Delta(G) \geq 3$ gráfcsoport esetén a pontos maximum $\pi(G)$ érték nem ismert! Sőt, az eddigiekből még az sem világos, hogy a legnagyobb $\pi(G)$, $\Delta(G) \geq 3$-ra egyáltalán egy véges szám lesz-e. Ez igazán érzékelteti, hogy már enyhén bonyolultabb gráfokra is, mennyire nehéz kiszámolnunk $\pi(G)$ pontos értékét. Éppen ezért sokszor csak becsléseket tudunk adni $\pi(G)$ értékére, G különböző tulajdonságai alapján. A szakdolgozatom következő és egyben fő fejezetében, ilyen becsléseket fogok bemutatni.

4. Becslések $\pi(G)$-re

Azaz minimum hány féle színre van szükségünk, hogy biztosan ki tudjunk ismétlődésmentesen színezni velük egy adott típusú gráfot?

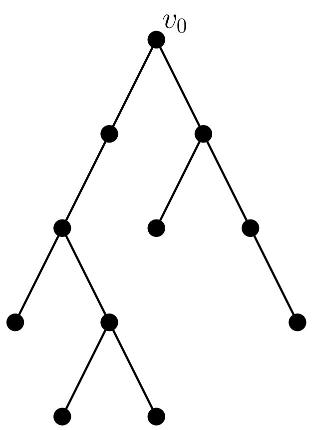
4.1. Körök Thue száma

A eddigiekben beláttuk, hogy $\pi(C_n) \leq 4$, minden n-re. Érdekes módon ez az egyenlőtlenség egyedül az $n = 5, 7, 9, 10, 14, 17$ értékekre pontos, és $\forall n \geq 18$-ra $\pi(C_n) = 3$.
Az egykori sejtés, hogy $n \geq 18$-ra, minden C_n ismétlődésmentesen 3-színezhető R. J. Simpsontól származik, és James Currie bizonyította be 2002-ben [3].

4.2. Fák Thue száma

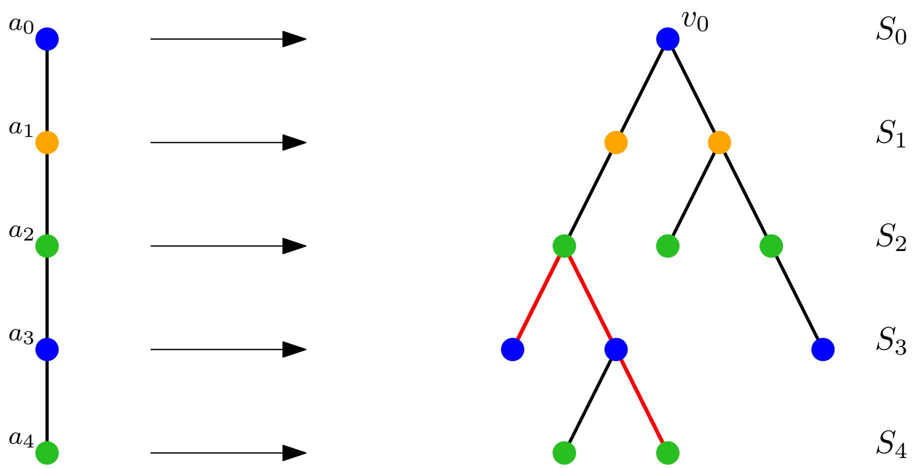
4.1 Tétel ([4])
$\pi(T) \leq 4$ *minden* T *fára.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges fát, és válasszuk egy tetszőleges v_0 csúcsát gyökérnek.



Intuíció:
Mivel egy fában is (csak mint a P_n gráfokban) bármely két csúcs között létezik út és ez az út egyértelmű, próbáljunk meg a P_n gráfokra kapott eredményünkből kiindulni.

Próba:
Illesszük egy út ismétlődésmentes színezését egy fára a következő módon, majd vizsgáljuk meg az eredményt. Legyen az út ismétlődésmentes színezése: $a_0, a_1, \ldots, a_n$, és bontsuk a fa csúcsait szintekre (S_i az i. szint) a gyökértől való távolságuk szerint: egy $v \in V(T)$ csúcsra $v \in S_i$, ha $d(v_0, v) = i, 0 \geq i \geq n$.



Láthatjuk, hogy ez a színezés nem jó, mivel például a piros élekből álló út színezése nem ismétlődésmentes. Mi is pontosan a probléma, amely miatt nem működik ez a fajta megfeleltetés P_n színezése és T színezése között? A baj az lehet, hogy egy fának létezhetnek olyan útjai is, amelyek kétszer is áthaladnak adott szinteken. Az ábrán például a rossz piros út az S_3 szinten halad át kétszer. Ez megfeleltethető annak, mintha a P_n gráfunkon elindultunk volna egy irányban, majd egy tetszőleges csúcsán megfordultunk volna és visszafelé folytattuk volna a bejárást. Azaz a probléma megoldható azzal, ha a P_n gráfot, amelyről implementáljuk a T színezését a következőképpen színezzük ki:

- Ismétlődésmentesen ÉS
- Palindrómamentesen, azaz semelyik részszelete se legyen ugyanaz az egyik végéről olvasva, mint a másik végéről olvasva.

Hívjunk egy T-beli utat visszafordulónak, ha a benne lévő csúcsok szintjeinek indexe nem egy monoton sorozatot alkot. Mivel T-ben minden visszaforduló ismétléses útnál találunk egy (legalább három hosszú) palindrómát a szintszínezésekben (azaz P_n-ben is, amelyről a szintszínezést implementáltuk), ezért ha nincs se palindróma se ismétléses út a szintszínezésekben, akkor T-ben sem lesz ismétléses út. Ilyen P_n-ről implementálva a színezést már megfelelő lesz a T gráfunk színezése is! A kérdés innentől, hogy hány színből tudunk egy P_n gráfot ismétlődésmentesen és palindrómamentesen kiszínezni. Egy $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozat palindrómamentességének szükséges és elégséges feltétele, hogy a_i, a_{i+1}, a_{i+2} páronként különböző legyen minden i-re, ahol $1 \geq i \geq n-2$.

4.2 Állítás
Ha $(a_n) = a_0, a_1, \ldots, a_n$ *egy ismétlődésmentes sorozat, akkor* $(a_n^*) = a_0, a_1, d, a_2, a_3, d, a_4, \ldots, a_n$ *egy ismétlődésmentes és palindrómamentes sorozat, ahol* d *egy az* (a_n) *sorozat színeitől különböző szín.*

Ezen állítás igaz, mert:

- Minden palindróma tartalmaz a közepén egy palindrómát, amely vagy xx vagy xyx alakú, így elegendő kizárnunk a 2 vagy 3 hosszú palindrómákat egy sorozatból, hogy azt állíthassuk róla, hogy palindrómamentes. Ez alapján azzal, hogy egy ismétlődésmentes sorozatban minden harmadik helyre beszúrtunk egy új, az eddigiektől különböző karaktert, (a_n^*) valóban palindrómamentes sorozat lesz, mivel a sorozat bármely 3 szomszédos karaktere páronként különböző, azaz nem palindróma.

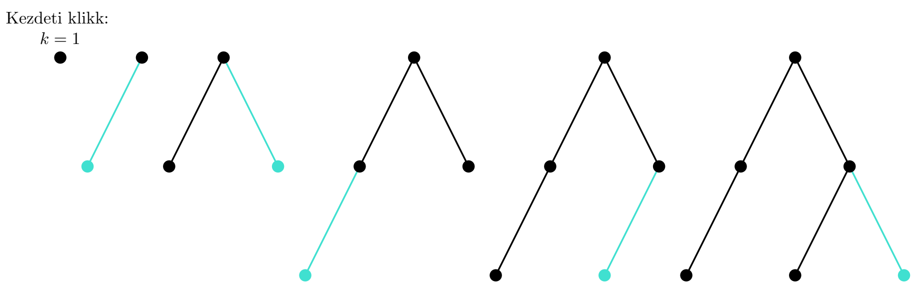
- Továbbá (a_n^*) is ismétlődésmentes sorozat lesz, mivel ha lenne benne ismétlődésesen színezett részsorozat, akkor abban a d-ken kívüli részeknek is ismétlődniük kellene, de azokról tudjuk, hogy ismétlődésmentesek (a_n) definíciója miatt.

Így a 3.5. tételből és a 4.2. állításból következik, hogy minden P_n gráfnak van legfeljebb 4 színt igénylő ismétlődésmentes és palindrómamentes színezése.
Ezzel beláttuk a 4.1. tételt, azaz, hogy minden T gráfnak létezik maximum 4 színt igénylő ismétlődésmentes színezése. □

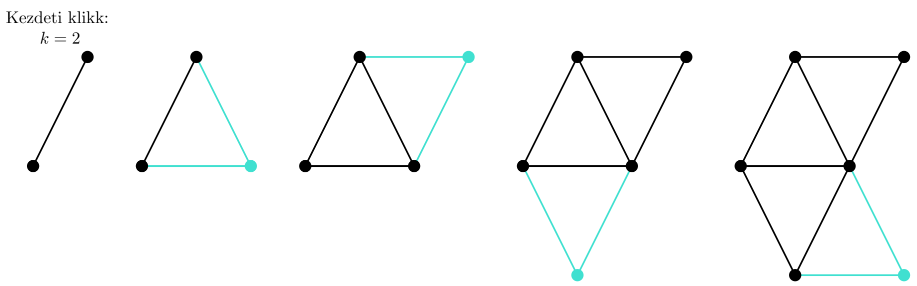
4.2.1. k-Fák Thue száma

4.3 Definíció (k-Fa)
Egy k-fa egy olyan gráf, amely előállítható egy k csúcsú klikkből a következő rekurzív lépéssel: egy új csúcs hozzávétele úgy, hogy hozzákapcsoljuk élekkel egy már a gráfban lévő k csúcsú klikkhez.

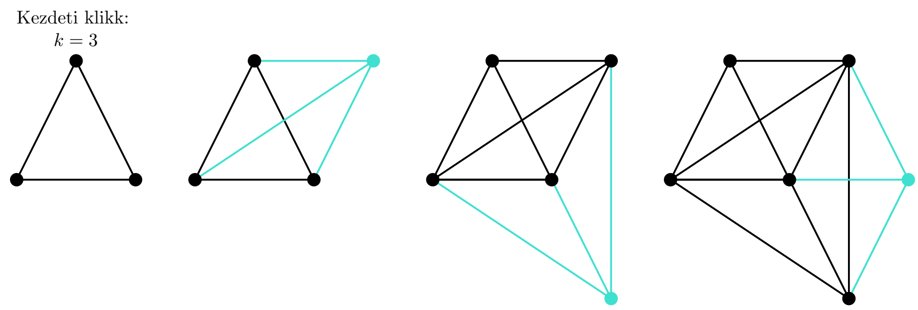
A következő ábrák e rekurziós lépést mutatják be $1,2$, és 3-fa példáján. A türkizkék csúcs és a hozzá kapcsolódó élek az újonnan hozzávett csúcsot és éleket jelölik. Az ábrákon balról jobbra haladva látszódik az adott fa építésének folyamata.



3. ábra. 1-fa építése. Látható, hogy az 1-fa megegyezik a szokásos fa-gráf fogalmával.



4. ábra. 2-fa építése



5. ábra. 3-fa építése

4.4 Definíció (Favastagság)
Egy G gráf favastagsága az a legkisebb k szám, amelyre G részgráfja egy k-fának.

A korlátos favastagságú gráfok az informatikában kiemelt fontosságúak, mivel szerkezetükből adódóan magukban hordozzák a fák kedvező strukturális tulajdonságait, így hatékonyabb algoritmusok írhatóak rájuk.

Érdemes foglalkoznunk a k-fák Thue számaival, mivel ha sikerül adnunk egy felső becslést rájuk, akkor ezzel együtt az összes k favastagságú gráf Thue számára is találtunk felső becslést. A következő kettő lemma a k-fák Thue számáról szóló tétel bizonyításához lesz szükséges.
4.5 Lemma ([9])
Ha a P gráf palindrómamentesen és ismétlődésmentesen van kiszínezve, és P' egy olyan gráf, amelyet P-ből kaptunk minden csúcshoz egy hurokél hozzávételével, akkor P'-ben minden ismétlődésesen színezett $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{2m}$ sétára teljesül, hogy $v_i = v_{m+i}$ minden i-re.

Bizonyítás. Nevezzük el g-nek P palindrómamentes és ismétlődésmentes színezését, továbbá legyen P'-ben az egyik tetszőleges ismétlődésesen színezett séta első fele $W_1 = v_1, v_2, \dots, v_m$, második fele pedig $W_2 = v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{2m}$. Ha belátjuk, hogy $W_1 = W_2$, akkor készen vagyunk, mivel ez pontosan azt jelenti, hogy az ismétlődésesen színezett sétában $v_i = v_{m+i}$ minden i-re. A lemmát m szerinti indukcióval látjuk be. Mivel g palindrómamentes, ezért:

1. $g(v_i) = g(v_{i+1})$, akkor és csak akkor, ha $v_i = v_{i+1}$ (mert különben xx alakú palindróma lenne), és
2. $g(v_i) = g(v_{i+2})$, akkor és csak akkor, ha $v_i = v_{i+2}$ (mert különben xyx alakú palindróma lenne).

Azaz ha $m = 1, 2$, akkor tényleg $W_1 = W_2$. Legyen $m \geq 3$. Tegyük fel, hogy $2m$-nél rövidebb sétákra teljesül, hogy $W_1 = W_2$.

- Tegyük fel, hogy $v_i = v_{i+1}$ valamely $i < m-1$-re. Ekkor mivel W_1 színezése megegyezik W_2 színezésével teljesül, hogy:

$$g(v_{m+i}) = g(v_i) = g(v_{i+1}) = g(v_{m+i+1}).$$

Ebből pedig következik g palindrómamentessége miatt, hogy $v_{m+i} = v_{m+i+1}$ (**1.**). Ekkor megtehetjük, hogy kihagyjuk W_1-ből v_i-t és W_2-ből v_{m+i}-t, így egy olyan $2m-2$ hosszú ismétlődésesen színezett $W_1'W_2' = v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+i-1}, v_{m+i+1}, \dots, v_{2m}$ sétát kapva, amelyre az indukciós feltevésünk miatt már tudjuk, hogy teljesül a $W_1' = W_2'$ egyenlőség. Ekkor viszont látható, hogy $W_1 = W_2$ is teljesül, mivel W_1'-ből és W_2'-ből úgy kapjuk W_1-et és W_2-őt, hogy mindkettőben ugyanazt a csúcsot duplázzuk meg, egy hurokél bevételével. Innentől tegyük fel, hogy $v_i \neq v_{i+1}$ semmilyen $i < m$-re, és hasonló indoklás miatt, semmilyen $m \leq i < 2m$-re sem.

- Tegyük fel, hogy valamelyik $i \leq m-2$-re $v_i = v_{i+2}$. Ekkor mivel W_1 színezése megegyezik W_2 színezésével, teljesül, hogy:

$$g(v_{m+i}) = g(v_i) = g(v_{i+2}) = g(v_{m+i+2}).$$

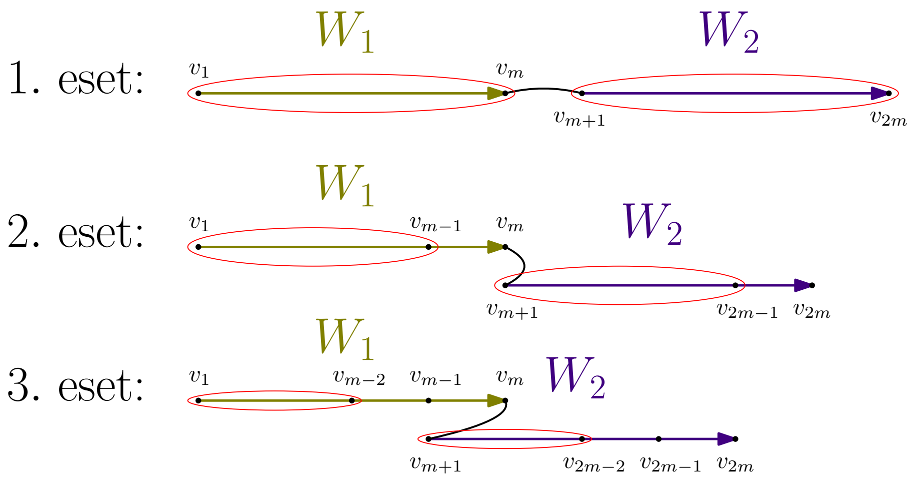
  Ebből pedig következik g palindrómamentessége miatt, hogy $v_{m+i} = v_{m+i+2}$ (**2.**). Ekkor megtehetjük, hogy kihagyjuk W_1-ből v_{i+1}-et és v_{i+2}-őt és W_2-ből v_{m+i+1}-et és v_{m+i+2}-őt, így egy $2m-4$ hosszú ismétlődésesen színezett $W_1'W_2'$ sétát kapunk. Az indukciós feltevés miatt ekkor $W_1' = W_2'$. Így már elegendő belátnunk azt, hogy $v_{i+1} = v_{m+i+1}$.
  Mivel $v_i = v_{m+i}$, $v_i \neq v_{i+1}$ és $v_{m+i} \neq v_{m+i+1}$, ezért $v_{i+1}v_iv_{m+i+1}$ egy séta P-ben. Továbbá, mivel $g(v_{i+1}) = g(v_{m+i+1})$, ezért $g(v_{i+1})g(v_i)g(v_{m+i+1})$ egy palindróma. Ebből kifolyólag $v_{i+1}v_iv_{m+i+1}$ nem egy út, így $v_{i+1} = v_{m+i+1}$.

- Ha W_1W_2-ben se xx, se xyx alakú rész nincsen, akkor W_1W_2 palindrómamentes és hurokélt sem tartalmaz, így W_1 és W_2 P részútjai. Ekkor W_1W_2 hatféleképpen nézhet ki. Ha W_1 és W_2 azonos irányba haladó utak P-ben, akkor ezen belül három különböző esetet tudunk vizsgálni (6. ábra). A következő három eset mindegyikében ellentmondásra jutunk abból, hogy míg W_1W_2 ismétlődésesen színezett, P színezése a 4.5. lemma szerint ismétlődésmentes kell, hogy legyen, így ilyen W_1W_2 séták nem létezhetnek.

  – 1. eset: v_{m+1} nem egyenlő se v_m-mel, se v_{m-1}-gyel. Ekkor W_1W_2 egy részútja lenne P-nek, amely ellentmondás.

  – 2. eset: v_{m+1} egyenlő v_m-mel. Ekkor $(W_1 - v_m)(W_2 - v_{2m})$ egy ismétlődésesen színezett részútja lenne P-nek, amely ellentmondás.

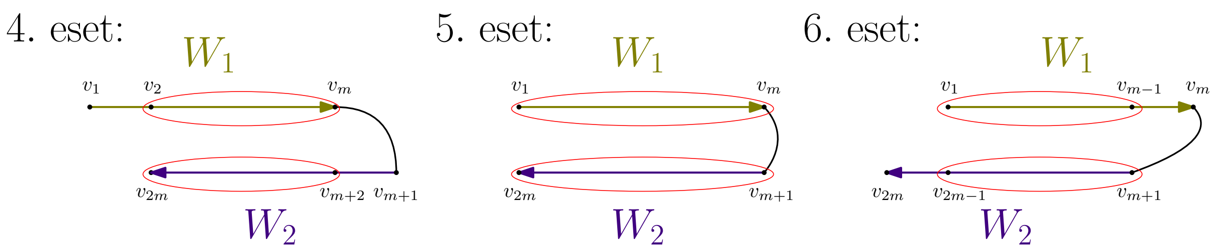
  – 3. eset: v_{m+1} egyenlő v_{m-1}-el. Ekkor $(W_1 - v_{m-1} - v_m)(W_2 - v_{2m-1} - v_{2m})$ egy ismétlődésesen színezett részútja lenne P-nek, amely ellentmondás.



6. ábra. Az ellentmondásra vezető ismétlődő részek első és második felei az ábrán a piros oválisokban láthatóak.

Ha W_1 és W_2 egymással ellentétes irányú utak P-ben, akkor ezen belül szintén további három esetet különíthetünk el (7. ábra). A következő három eset mindegyikében szintén ellentmondásra fogunk jutni abból, hogy W_1W_2 ismétlődéses színezése miatt nem futhat egymással ellentétes irányban W_1 és W_2 P ugyanazon csúcsain, mivel ez egy palindrómát feltételezne P-ben, de P színezése a 4.5. lemma szerint palindrómamentes kell, hogy legyen, így ilyen W_1W_2 séták sem létezhetnek.

- 4. eset: v_{m+1} nem egyenlő se v_m-mel, se v_{m-1}-gyel. Ekkor az egymással ellentétes irányú, P ugyanazon a csúcsain futó $(W_1 - v_1)$ és $(W_2 - v_{m+1})$ vezet ellentmondásra.
- 5. eset: v_{m+1} egyenlő v_m-mel. Ekkor az egymással ellentétes irányú, P ugyanazon a csúcsain futó W_1 és W_2 vezet ellentmondásra.
- 6. eset: v_{m+1} egyenlő v_{m-1}-gyel. Ekkor az egymással ellentétes irányú, P ugyanazon a csúcsain futó $(W_1 - v_m)$ és $(W_2 - v_{2m})$ vezet ellentmondásra.



7. ábra. Az ellentmondásra vezető palindrómák egyik irányú és másik irányú bejárásai az ábrán a piros oválisokban láthatóak.

Ezzel beláttuk, hogy P'-ben csak akkor létezhet ismétlődésesen színezett W_1W_2 séta, ha $W_1 = W_2$. □

4.6 Lemma (Palindróma lemma[5])

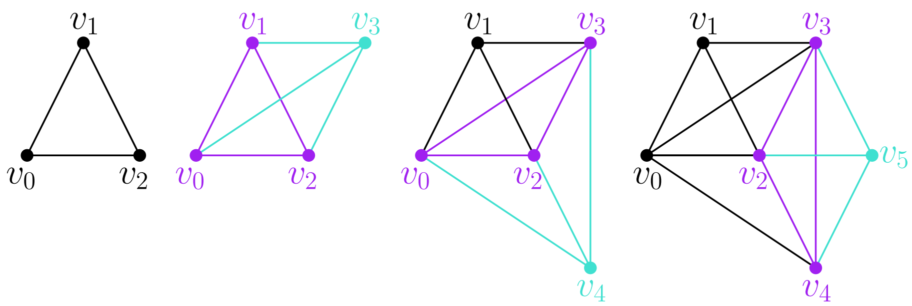
Egy G gráf minden S szintezésére létezik G-nek egy olyan 4-színezése, amelyben minden ismétlődésesen színezett $v_1, \dots, v_{2r}$ útra teljesül, hogy $S(v_i) = S(v_{i+r})$, minden $i = 1, \dots, r$-re.

Bizonyítás. Legyen $P = p_0, p_1, \ldots, p_n$ egy olyan út, amely minden csúcsát G egy-egy szintjének feleltessük meg: $p_0 = S_0, p_1 = S_1, p_2 = S_2, \ldots, p_n = S_n$. Továbbá legyen P' egy olyan gráf, amelyet P-ből kaptunk minden csúcshoz egy hurokél hozzávételével. Ekkor G-ben egy út szintsorozata egy sétának felel meg P'-ben. Legyen P-nek a 4-színezése egy palindróma- és ismétlődésmentes színezés; 4.2. lemmában beláttuk, hogy létezik ilyen. Továbbá G csúcsai P színezése szerint legyenek kiszínezve: S_i-beli csúcsok színe egyezzen meg $v_i \in P$ színével. Ekkor G-ben egy séta csúcsainak P_1P_2 szintsorozata megegyezik egy W_1W_2 sétával P'-ben. Ekkor ha $v_1, \ldots, v_{2r}$ egy ismétlődésesen színezett út G-ben, akkor a hozzá tartozó W_1W_2 séta is ismétlődésesen színezett P'-ben. Így a 4.5. lemma szerint $W_1 = W_2$, és emiatt $S(v_i) = S(v_{i+r})$ minden $i = 1, \ldots, r$-re. □

4.7 Tétel (Kündgen és Pelsmajer[5])
$\pi(G) \leq 4^k$, minden G k-fára.

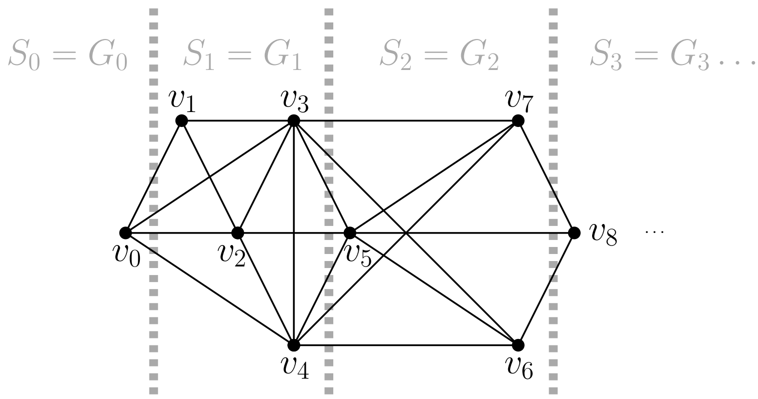
Bizonyítás. A tételt k szerinti indukcióval fogjuk belátni. $k = 1$-re láttuk, hogy teljesül, mivel megfigyeltük, hogy az 1-fa fogalma megegyezik a fa fogalommal, a fákra pedig a 4.1. tétel kimondta, hogy $\pi(T) \leq 4$. Ha $k \geq 2$, akkor tegyük fel, hogy $k-1$-ig teljesül a tétel. Bizonyítsuk be, hogy k-ra is teljesülni fog:

Adjunk egy számozást a G k-fa csúcsainak a következő módon: minden $i = 0, \ldots, n$-re, v_i csúcs olyan szomszédjai, melyek i-nél kisebb indexűek, egy k-klikket alkossanak. Ilyen számozás mindig lehetséges a k-fa definíciójában látott rekurzív építés miatt, mivel ha mindig növekvő sorrendben a következő indexet a következő hozzávett csúcshoz rendeljük hozzá, pont egy ilyen számozást kapunk. Nevezzük ezt a számozását a csúcsoknak szimpla számozásnak.



8. ábra. A csúcsszámozás egy 3-fa példáján bemutatva. Az ábra a 4.2.1. ábrához hasonlóan értelmezendő. A számozást a csúcsokhoz fenti bekezdés szerint rendeltük. Jól látszódik, hogy a csúcsoknak a náluk kisebb indexű szomszédjai valóban egy k-klikket alkotnak, melyek az ábrán lilával jelölve láthatóak.

Vegyük a k-fának egy v_0 csúcs szerinti S szintezését. A gráfunk S_i szintjének csúcsait és az őket összekötő éleket nevezzük el G_i részgráfnak. Példa gráf $k = 3$-ra:



4.8 Állítás

Ekkor minden G_i egy $(k-1)$-fa részgráfja.

Bizonyítás. A bizonyítást indukcióval fogjuk elvégezni, miután beláttunk egy fontos segédállítást hozzá. A bizonyítás során nevezzük egy csúcs olyan szomszédjait, amelyek a szimpla számozás szerint kisebb indexűek, a csúcs visszaszomszédjainak. A szimpla számozás és a k-fa definíciójából következik, hogy egy k-fában minden csúcsnak pontosan k visszaszomszédja van, így az is teljesül, hogy egy k-fa részgráfjában (azaz más szóval egy maximum k favastagságú gráfban) minden csúcsnak maximum k visszaszomszédja van. Azt állítom, hogy minden G_i-n lévő csúcsnak létezik minimum egy darab visszaszomszédja, amely G_{i-1}-en helyezkedik el. Ez igaz mert:

1. Egyrészt a szintezés definíciója miatt minden $S_i = G_i$ szinten lévő csúcsnak biztosan létezik szomszédja, amely $S_{i-1} = G_{i-1}$-en helyezkedik el.
2. Másrészt ezek a S_{i-1}-en elhelyezkedő szomszédjaik biztosan visszaszomszédok, mert:
   Tegyük fel, hogy létezik q, y csúcs, ahol $q \in S_i$ és $y \in S_{i-1}$, amelyekre nem teljesül, hogy y q-nak visszaszomszédja. Ekkor keressük meg azt az ilyen q, y párt, amelyben y a lehető legkisebb szinten van. Először is y indexe nem lehet 1, mert akkor ő lenne a gyökér a szimpla számozás szerint, viszont a gyökér minden szomszédjának nagyobb az indexe, így q-nak is nagyobb indexűnek kéne lennie, azaz ekkor y visszaszomszédja lenne q-nak. Tehát y nem a legelső szinten van. Ekkor a szintezés definíciója miatt y-nak van egy c visszaszomszédja az S_{i-2}-edik szinten. Tudjuk, hogy c visszaszomszédja y-nak, mivel ha nagyobb indexű lenne, akkor a c, y párt vettük volna a legkisebb szinten lévő ilyen pár keresésénél, nem a q, y-t. Ekkor mivel y-nak kisebb indexű szomszédja c és q is, ezért a szimpla számozás miatt a cq élnek léteznie kéne, viszont $|S(q) - S(c)| > 1$, ezért a szintezés definíciója szerint ilyen él nem létezhet. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így y biztosan kisebb indexű, mint q, azaz y biztosan visszaszomszédja q-nak.

Azaz ha mindegyik G_i-n lévő csúcsnak összesen k darab visszaszomszédja van (mert G k-fa), és biztosan létezik egy visszaszomszédja, amely G_{i-1}-en helyezkedik el (a fenti **1.** és **2.** indoklások miatt), akkor levonhatjuk a következtetést, hogy G_i-re megszorítva maximum $k-1$ visszaszomszédja van egy G_i-ben lévő csúcsnak. Ezen felül azt is tudjuk a szimpla számozás és a k-fa definíciójából, hogy egy csúcs visszaszomszédjai teljes gráfot feszítenek. Próbáljuk meg G_i-t kiegészíteni élekkel úgy, hogy egy $k-1$-fát kapjunk, ezzel belátva, hogy G_i valóban egy $k-1$-fa részgráfja. A kiegészített gráfot jelölje G^+.

Ha G_i-ben maximum k darab csúcs van, akkor - amennyiben szükséges - új élek és új csúcsok hozzávételével kiegészítjük G_i-t egy K_k teljes részgráffá. Ekkor ez egy $k-1$-fa, mivel megkaptunk egy K_{k-1} kezdő klikket és egy csúcsot, amelynek pontosan $k-1$ G_i^+-beli visszaszomszédja van (és a visszaszomszédjai egy K_{k-1}-et alkotnak), így G_i valóban egy $k-1$-fa részgráfja volt.

Ha G_i-ben több, mint k darab csúcs van, akkor a következőképpen járunk el:

Először szintén kiegészítjük - amennyiben szükséges - új élek hozzávételével a szimpla számozás szerinti első k csúcsot egy K_k teljes részgráffá. Ezzel kapunk egy k méretű részgráfot G_i^+-n belül, amiről már tudjuk, hogy egy $k-1$-fa. Legyen az indukciós feltevésünk, hogy a szimpla számozás szerint haladva már az első n darab G_i^+-beli csúcsra tudjuk, hogy egy $k-1$-fát feszítenek.

Ekkor a szimpla számozás szerint haladva az első $n+1$ darab csúcsról is belátható, hogy $k-1$-fát feszítenek. Legyen $v \in V(G_i)$ az $n+1$. csúcs. Jelölje z_i a v csúcs visszaszomszédjainak számát G_i-re megszorítva.

- Ha $z_i = 0$, akkor vegyünk hozzá $k-1$ darab új élet v-hez, amelyek másik végpontjai a szimpla számozás szerinti első $k-1$ darab csúcsok legyenek. Mivel ezeket már kiegészítettük egy teljes részgráffá, ezért így v-nek lett $k-1$ darab visszaszomszédja, amelyek teljes gráfot alkotnak. Így már valóban a szimpla számozás szerinti első $n+1$ darab csúcs is egy $k-1$-fát feszít.
- Ha $z_i = k-1$, akkor mivel G egy k-fa, v G_i-re megszorított visszaszomszédjai egy K_{k-1} teljes részgráfot feszítenek. Így a szimpla számozás szerinti első $n+1$ darab csúcs is egy $k-1$-fát feszít.
- Ha $0 < z_i < k-1$, akkor a következőképpen egészítjük ki G_i-t úgy, hogy egy $k-1$-fát kapjunk. Definiáljuk:
  - Az $X := G_i[N_{vissza}(v)]$ halmazt, azaz a v csúcs visszaszomszédjai, G_i-re megszorítva. Ekkor $0 < |X| < k-1$.
  - Az $Y := G_i^+[N_{vissza}(w)]$ halmazt, azaz a w csúcs visszaszomszédjai a kiegészítés után G_i^+-re megszorítva, ahol w a legnagyobb indexű visszaszomszédja v-nek. Ekkor $|Y| = k-1$.
  - És az X^+ halmazt, amely X és pár $v \in Y$ csúcs uniója úgy, hogy $|X^+| = k-1$ legyen.

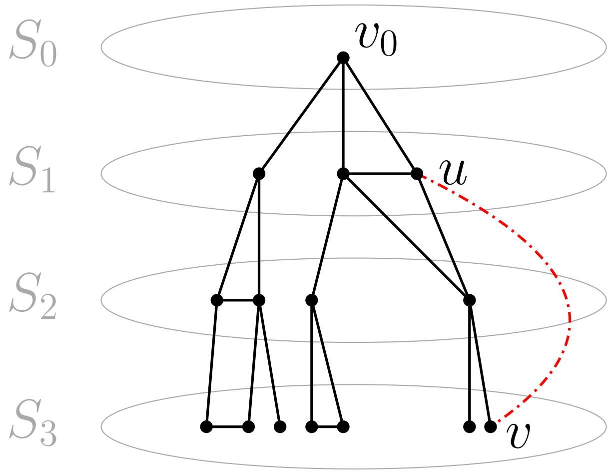
  Az indukciós lépés miatt w-nek $k-1$ visszaszomszédja van, melyek teljes részgráfot feszítenek. Mivel minden X^+-beli visszaszomszédja w-nek (vagy maga w), ezért $X^+ \subset Y \cup \{w\}$. Ekkor mivel $Y \cup \{w\}$ teljes részgráfot feszít, ezért X^+ is teljes részgráfot feszít, méghozzá X^+ egy $k-1$ csúcsú teljes részgráf. Így a szimpla számozás szerinti első $n+1$ darab csúcs is egy $k-1$-fát feszít.
  Kivételes eset, amikor w a szimpla számozás szerinti első k csúcs része. Az első k csúcs a kezdő K_k klikket alkotja G_i^+-ban. Ilyen w esetén előfordulhat, hogy kevesebb visszaszomszédja van, mint $k-2$, ekkor $|Y| < k-2$ lenne, így nem lenne alkalmas $|X^+| = k-1$ előállítására. Ebben az esetben másképpen kell eljárni: v hiányzó visszaszomszédjait a $V(K_k) \setminus w$ csúcshalmazból pótoljuk addig, amíg $k-1$ darab visszaszomszédja nem lesz (ahol K_k a szimpla számozás szerinti első k csúcsból

alkotott klikk). Ezzel v visszaszomszédjainak a száma kiegészíthető $k-1$-re - amely visszaszomszédok méghozzá egy K_{k-1} klikket alkotnak -, ezzel az első $n+1$ darab csúcs is egy $k-1$ fát feszít.

Ezzel beláttuk, hogy minden esetben kiegészíthető G_i úgy, hogy egy $k-1$-fát kapjunk, azaz G_i tényleg egy $k-1$-fa részgráfja. □

Ez azt jelenti az indukciós feltevésünk miatt, hogy minden G_i-nek létezik egy maximum 4^{k-1} színt használó ismétlődésmentes színezése. Legyen $h(v)$ az a színezése G-nek, amely minden G_i részgráfot ismétlődésmentesen színez ki, és minden részgráfban ugyanabból a 4^{k-1} féle színből dolgozik.

Fontos még megjegyeznünk, hogy ekkor a G k-fánkban a fenti S szintezéssel, minden uv élre igaz, hogy $|S(u)-S(v)| \leq 1$, azaz egy él végpontjainak szintjeinek indexe maximum eggyel térhet el. Ez azért igaz, mert ha lenne él, amelynek végpontjai nem szomszédos szinteken (vagy nem ugyanazon a szinten) helyezkednének el, akkor a szintezés definíciójával ellentmondásra jutnánk:
A v_0-tól távolabbi végpontja az élnek a szintezés definíciója szerint azért van az S_i-edik szinten, mert legrövidebben egy i hosszú úttal tudunk eljutni v_0-ból bele. Mivel ezzel a több szintet áthidaló éllel találnánk egy i-nél rövidebb utat v_0-ból bele, ezért ilyen él nem létezhet a gráfunkban.



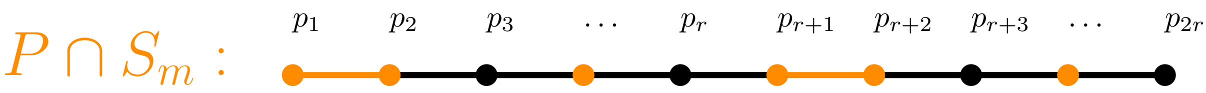
9. ábra. A piros pöttyözött él például egy több szintet áthidaló tilos él.

Legyen $g(v)$ a k-fánknak egy 4-színezése, amely kielégíti a 4.6. lemmát.

Ekkor a k-fánkat színezzük ki $f(v) = (g(v), h(v))$-vel, azaz a kettő színezés direkt szorzatával. Mivel $h(v)$ 4^{k-1} féle színt, $g(v)$ pedig 4 féle színt használ, ezért összesen 4^k féle színt tudnak kikeverni, így $f(v)$ összesen 4^k darab színt fog használni.

Ekkor $f(v)$ lesz a kívánt 4^k db színt használó ismétlődésmentes színezésünk. Ahhoz, hogy belássuk, hogy valóban ismétlődésmentes, indirekt bizonyítást fogunk alkalmazni. Tegyük fel, hogy $f(v)$ nem ismétlődésmentes, és vizsgáljuk ezen $f(v)$ színezés mellett valamely ismétlődésesen színezett $P = p_1, \ldots, p_{2r}$ útját G-nek. Legyen m a legkisebb szint indexe, amelyen van csúcsa P-nek, $P \cap S_m$ pedig a

P-nek az S_m-en elhelyezkedő része.



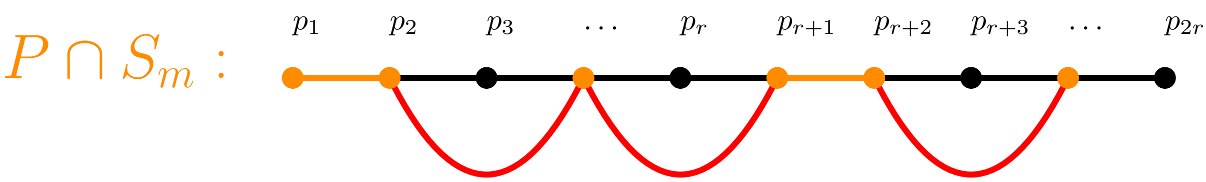
10. ábra. A narancssárga csúcsok jelölik a metszetet.

Ekkor teljesül, hogy:

- A metszet nem üres, mivel pontosan úgy definiáltuk, hogy ez egy olyan szint legyen, melyen helyezkedik el csúcsa P-nek.
- A metszet nem az egész P, mivel ha az egész P S_m-en helyezkedne el, akkor nem lehetne ismétlődésesen színezett a $h(v)$ definíciója miatt.
- $p_i \in P \cap S_m$ akkor és csak akkor, ha $p_{r+i} \in P \cap S_m \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, azaz P első és második felében ugyanúgy helyezkednek el az S_m szinten lévő csúcsok. Ez azért lesz igaz, mivel ahhoz, hogy ismétlődéses legyen P-nek $f(v) = (g(v), h(v))$ szerinti színezése, ahhoz $g(v)$ szerint is annak kell lennie, $f(v)$ előállítása miatt. $g(v)$ szerint pedig (a 4.6 lemma miatt) csak akkor lehet ismétlődésesen színezett, ha teljesül rá, hogy $S(p_i) = S(p_{i+r})$, minden $i = 1, \dots, r$-re. Azaz P csúcsainak a szint-sorozata is ismétlődő, azaz valóban az S_m szinten lévő csúcsok is ugyanúgy helyezkednek el az út első és második felében.

4.9 Állítás

Az így kapott S_m-re megszorított része P-nek egy út, azaz léteznek a következő ábrán a pirossal jelölt élek:



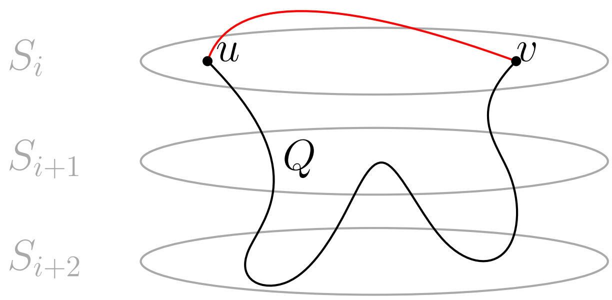
11. ábra.

Bizonyítás. Ha ezt az állítást belátnánk, akkor készen is lennénk, mivel ez egy ellentmondásra vezetne: találnánk egy egy szinten belül haladó ismétlődésesen színezett utat.

Bizonyítsuk be, hogy valóban minden lehetséges esetben léteznek ezek a piros élek. Ehhez használni fogunk egy segéd lemmát:

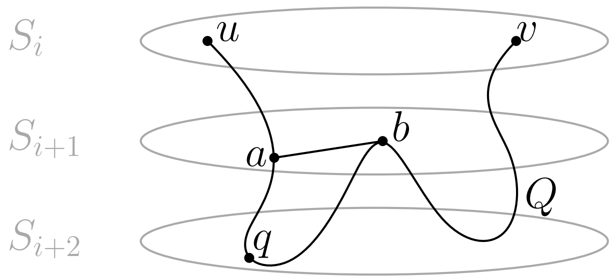
4.10 Lemma

Ha létezik Q uv út, amelyben $u, v \in S_i$ és minden más csúcsa Q-nak S_{i+1}-en, vagy nála nagyobb indexű szinten helyezkedik el, akkor létezik uv él.

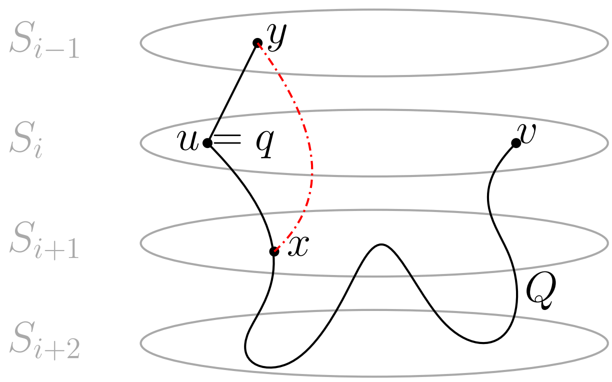


Bizonyítás. Ennek a lemmának a bizonyításához vegyük a legrövidebb ilyen Q utat, és vizsgáljuk ennek a Q útnak a legnagyobb indexű csúcsát, q-t. Ahhoz, hogy belássuk, hogy létezik uv él, felhasználjuk a bizonyítás elején meghatározott szimpla számozást.

Első eset: $q \neq u, v$. Ekkor a q Q-beli 2 szomszédja, a és b kisebb indexű q-nál, mivel q a legnagyobb indexű csúcs Q-ban. Így a csúcsok szimpla számozása miatt létezik él a és b között. Ezzel találtunk egy Q-nál rövidebb utat, amely teljesíti a lemma feltételeit, így ellentmondásra jutottunk.



Második eset: $q = u$. Ekkor q-nak egy darab Q-beli szomszédja van, amely kisebb indexű és az S_{i+1}-edik szinten helyezkedik el, nevezzük el x-nek. Ezenkívül a csúcsok szimpla számozása és a szintezés definíciója miatt q-nak biztosan létezik még egy S_{i-1}-en elhelyezkedő szomszédja, amely szintén kisebb indexű, nevezzük el y-nak (y létezéséről részletesebb indoklás itt: **1.** és **2.**). Viszont ez megint csak ellentmondásra vezet, mivel a szimpla számozás alapján q e két szomszédja között kell, hogy fusson él, viszont az egy nem megengedett él lenne, mivel $|S(x) - S(y)| > 1$ lenne.



Harmadik eset: $q = v$. Ez ugyanazzal a módszerrel vezet ellentmondásra, mint a második eset, mivel G egy irányítatlan gráf, így jelenleg mindegy, hogy éppen melyik végét vizsgáljuk az útnak.

Így beláttuk, hogy Q nem állhat több, mint 1 élből, mert mindenképpen ellentmondásra vezet. Ezzel már csak az az eset maradt, amikor Q 1 darab élből áll összesen. Ez természetesen lehetséges, mivel ez csak egy szimpla él, melynek mindkét végpontja egy szinten belül helyezkedik el, és 1 élnél rövidebb Q utat sem tudunk már találni, így ellentmondásra sem fog vezetni. Ezzel beláttuk, hogy létezik uv él, beláttuk a 4.10. lemmát. □

Ez azt jelenti, hogy igaz a fenti 4.9. állítás, mivel a lemmát $P \cap S_m$ megfelelő csúcspáraira alkalmazva, megkapjuk, hogy valóban léteznek a piros élek (11. ábra). □

Ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel P ismétlődéses színezése és a P csúcsainak szimmetrikus S_m-en való elhelyezkedése miatt, a piros és narancssárga élekkel kapott S_m-beli $P \cap S_m$ csúcsait használó út is ismétlődésesen színezett, amely nem lehet, mivel a színezésünk úgy lett definiálva, hogy nem létezhet olyan ismétlődésesen színezett út, amely csak egy szinten (jelenleg S_m-en) belül fut. Ez azt jelenti, hogy $f(n)$ ismétlődésmentes színezés, és minden G k-fára maximum 4^k színt használ, amivel bebizonyítottuk a tételt. □

Így már bármely G egyszerű gráf Thue számára tudunk adni felső becslést, ha ismerjük G favastagságát.

4.3. Teljes gráfok Thue száma

A teljes gráfok esetében $\pi(K_n) = n$ minden esetben, azaz mindig szükség van csúcsszámnyi színre az ismétlődésmentes csúcsszínezésükhöz. Ez abból következik, hogy bármely kettő csúcs között létezik él, így ha bármely kettő csúcs egyszínű lenne, az már magában egy 2 csúcsból álló ismétlődésesen színezett utat alkotna.

Éppen ezért vizsgáljuk inkább a teljes gráfok Thue indexét, amely az ismétlődésmentes élszínezésükhöz kellő minimális színmennyiséget jelenti.

4.4. Teljes gráfok Thue indexe

4.11 Tétel ([6])
$\pi'(K_n) \leq 2n-3$ *minden teljes gráfra.*

Bizonyítás. Bizonyítsuk be, hogy $\pi'(K_{2^k}) = 2^k - 1 \quad \forall k \geq 1$ minden K_{2^k} teljes gráfra. Ha ez teljesül, akkor $\pi'(K_n) \leq 2n-3$ igaz minden teljes gráfra, mivel:

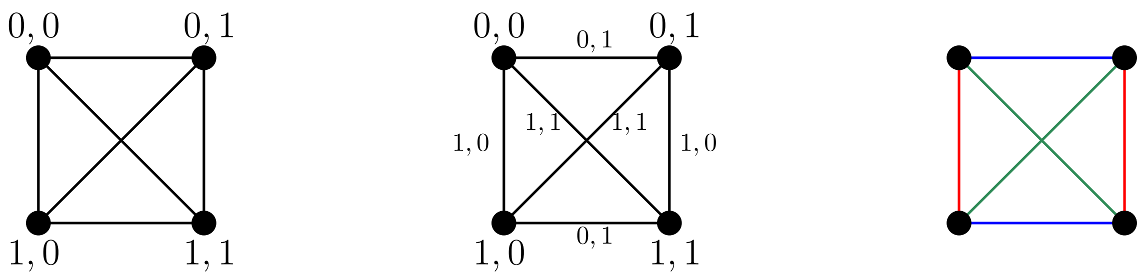
- Minden n-re az n-nél nem kisebb legközelebbi kettőhatvány maximum $2n-2$ méretű.
- És ekkor, ha egy $2n-2$ méretű gráfra bebizonyítjuk, hogy mennyi a Thue száma, akkor a nála kisebb csúcsú teljes gráfoknak szükségképpen szintén maximum annyi lehet, mivel egy gráfból élek és csúcsok elhagyásával a Thue száma csak változatlan maradhat vagy csökkenhet.

Azt tudjuk, hogy szükségünk van $2^k - 1$ féle élcímkére, mivel ha vesszük a gráfunk egy csúcsát és a hozzá kapcsolódó éleket, akkor ezeknek mind páronként különböző él-címkéjűeknek kell lenniük, mert ha lenne 2 egyforma, akkor ezek egy 2 hosszú ismétlődésesen színezett utat alkotnának. Mivel a gráfunk egy teljes gráf, így minden csúcshoz pontosan $2^k - 1$ él csatlakozik, így ennyi féle él-címkére mindenképp szükségünk van.

Először is címkézzük fel a K_{2^k} gráfunk csúcsait páronként különböző k hosszú 0 és 1 elemekből álló számsorozatokkal. Ez lehetséges, mivel ilyen sorozatokból pont 2^k darab különböző van. Ezután az éleket is felcímkézzük a következő szabály szerint: minden uv élre

$$c(uv) = u + v \mod 2$$

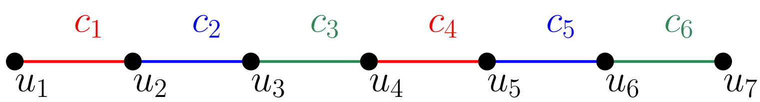
ahol u és v az u-ra és v-re írt k hosszú számsort jelenti, és a modulo 2 összeadás pedig koordinátánként van értelmezve. Például a $0,1,1,0$ és $1,0,1,0$ csúcs-címkék modulo 2 összege: $1,1,0,0$.



12. ábra. Ez az ábra a csúcs- és él-címkézés folyamatát mutatja be a K_4 példáján, azaz a $k = 2$ esetben, balról jobbra haladva. Először a csúcsokat látjuk el címkékkel, majd ezekből kiszámoljuk az élek címkéit, és végül minden fajta él-címkéhez egy színt rendelünk, így beszélhetünk majd élszínezésről.

Így maximum $2^k - 1$ féle él-címkét kapunk, mert maximum 2^k darab különböző k hosszú $0,1$ sorozat lehetséges, viszont a csupa 0 él-címkét nem kaphatjuk meg, mivel ahhoz kettő azonos csúcs-címkét kellett volna összeadnunk, amely nem lehetséges, mivel az összes csúcs-címkénk páronként különböző.

Amit még be kell bizonyítanunk, hogy ezzel az élszínezéssel K_{2^k} minden útja ismétlődésmentes. Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy ismétlődésesen színezett út a gráfunkban, amelyben az ismétlődés a következőképpen néz ki:



- Ekkor egyrészt, $c_1 + c_2 + c_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 2(c_1 + c_2 + c_3) = \{\text{csupa nulla}\}$ a modulo 2 összeadás miatt.
- Másrészt, pedig, mivel $c_1 = u_1 + u_2$; $c_2 = u_2 + u_3$; ... és így tovább, ezért a fenti összeg felírható a következőképpen is: $u_1 + u_2 + u_2 + u_3 + u_3 + u_4 + \ldots + u_6 + u_7$. Ezen összegben minden tag u_1 és

u_7 kivételével kétszer szerepel, így a modulo 2 összeadásban kiesnek:

$$u_1 + u_2 + u_2 + u_3 + u_3 + u_4 + \ldots + u_6 + u_7 = u_1 + u_7$$

$u_1 + u_7$ pedig bármi lehet, csak csupa nulla nem, mivel ahhoz $u_1 = u_7$ kellene legyen, amely lehetetlen, mivel minden csúcs-címke páronként különböző, és u_1, u_7 két különböző csúcs, mivel egy útról beszélünk, amelyben nem lehet ismétlődő csúcs.

Ez egy ellentmondás, mivel a fenti összeg egyszerre csupa nulla is kellene legyen és nem csupa nulla is. Így beláttuk, hogy ezen $2^k - 1$ színt használó élszínezése K_{2^k}-nak valóban ismétlődésmentes. □

4.5. Síkgráfok Thue száma

Az ismétlődésmentes színezések területének egyik legfontosabb kérdése, hogy minden síkgráfnak véges-e a Thue száma. Adható-e egy nem végtelen felső becslés a szükséges színek számára, amelyekkel már az összes lehetséges síkgráfot ki tudjuk csúcsszínezni ismétlődésmentesen.

Mint azt látni fogjuk, igen, adható ilyen felső becslés; be fogjuk bizonyítani, hogy minden síkgráf ismétlődésmentesen csúcsszínezhető maximum 768 színnel [7]. Ennek belátásához két új fogalmat (erősen ismétlődésmentes színezés, gráfok erős szorzása), két lemmát és egy tételt kell belátnunk, megértenünk.

4.5.1. Erősen ismétlődésmentesség

Mindenekelőtt meg kell ismernünk pár fogalmat, amelyek segítségével fogjuk tudni kimondani az erősen ismétlődésmentesség definícióját.
Képzeljük el, hogy G gráfunk minden csúcsához behúzunk egy hurokélt, majd ezen a G' gráfon veszünk egy sétát. Ekkor e séta a G gráf **lusta sétája**, mivel e séta egy olyan sétát reprezentál G-ben, amelyben megtehetjük, hogy egy lépésben nem haladunk tovább másik csúcsra, hanem a G'-ben lévő hurokél segítségével ugyanarra a csúcsra lépünk, ahonnan kezdtük a lépést, azaz nem haladunk tovább. Formálisan:

4.12 Definíció (Lusta séta)
G-ben a $v_1, \ldots, v_k$ csúcsoknak egy olyan sorozata, amelyben minden $i \in \{1, \ldots, k\}$-ra $v_i v_{i+1}$ vagy éle G-nek, vagy $v_i = v_{i+1}$.

4.13 Definíció (Ismétlődésesen színezett lusta séta)
G gráfnak egy Φ színezésében, egy $v_1, \ldots, v_{2k}$ lusta séta akkor Φ-ismétlődéses, ha $\Phi(v_i) = \Phi(v_{i+k}) \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$

Most, hogy megismertük a lusta séta fogalmát, definiálhatjuk az erősen ismétlődésmentességet. Egy Φ színezésre akkor mondjuk, hogy erősen ismétlődésmentes, ha minden $2k$ hosszú Φ-ismétlődéses lusta sétára szükségképpen teljesül, hogy létezik v_i csúcsa, amelynek nemcsak hogy megegyezik a színe v_{i+k} színével (mivel egy ismétlődéses sétáról beszélünk), hanem a két csúcs egy és ugyanaz. Formálisan:

4.14 Definíció (Erősen ismétlődésmentes színezés)
A Φ színezés erősen ismétlődésmentes, ha minden Φ-ismétlődéses $v_1, \dots, v_{2k}$ lusta sétához létezik $i \in \{1, \dots, k\}$, amelyre $v_i = v_{i+k}$.

Egy G gráf erősen ismétlődésmentes színezéséhez szükséges színek számának minimumát pedig jelölje: $\pi^*(G)$.

Mivel egy útnak nincsen ismétlődő csúcsa, ezért minden erősen ismétlődésmentes színezés egyben ismétlődésmentes színezés is, így $\pi(G) \leq \pi^*(G)$ minden G-re. Ez egy fontos tulajdonság lesz a bizonyítás szempontjából.

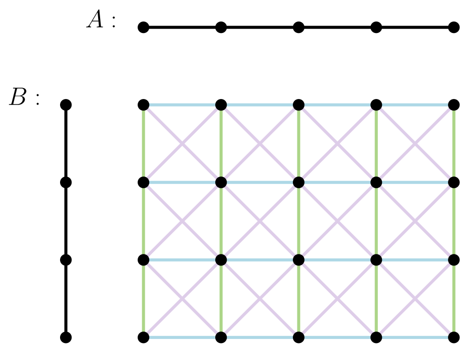
Végül pedig definiáljuk az unalmas lusta séta fogalmát. Az **unalmas lusta séta** egy olyan lusta séta, amelyet bárhogyan is színezünk ki, mindig ismétlődéses színezést fogunk kapni, mivel az i. és az $i+k$. csúcsai páronként megegyező csúcsok, azaz maguk a csúcsok azok, amelyek egy ismétlődéses sorozatot alkotnak. Formálisan:
4.15 Definíció (Unalmas lusta séta)
Egy $v_1, \dots, v_{2k}$ lusta séta unalmas, ha $v_i = v_{i+k}$ minden $i \in \{1, \dots, k\}$-re.

4.5.2. Gráfok erős szorzása

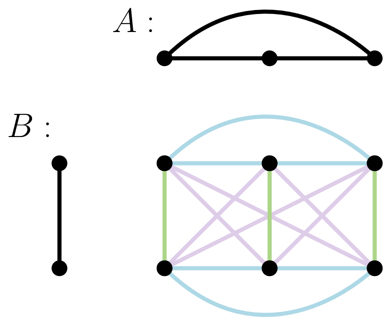
A gráfok erős szorzatát Sabidussi vezette be 1960-ban [8]. Az erős gráfszorzás egy kétváltozós gráfművelet, amely gráfok rendezett párjaihoz egy új gráfot rendel. A művelet jele $\boxtimes$.
4.16 Definíció (*A* és *B* gráfok erős szorzata)
A és *B* gráfok erős szorzata a következő paraméterekkel rendelkező kimeneti gráf:

- Csúcsai: $V(A) \times V(B)$ (ahol $\times$ egy Descartes-szorzat)
- Élei: egymástól különböző $(v,x),(w,y) \in V(A) \times V(B)$ csúcsokat összekötjük egy éllel, ha:
  - $v = w$ és $xy \in E(B)$
  - $x = y$ és $vw \in E(A)$
  - $vw \in E(A)$ és $xy \in E(B)$

Azaz a szorzatgráf két egymástól különböző csúcsa akkor és csak akkor van összekötve, ha mindkét bemeneti gráfban teljesül, hogy a vizsgált csúcs/csúcsok vagy azonosak vagy szomszédosak.



13. ábra. Ezen a példagráfon két út - A és B - erős szorzatát láthatjuk, amelyek így egy királygráfot alkotnak. A szorzatgráf élei a fenti ábrán csakis a megértés segítése céljából lettek kiszínezve. A sárga élek a 4.16. definíció első esetei, azaz ahol az A bemeneti gráf csúcsai megegyeznek és a B bemeneti gráf csúcsai szomszédosak, a világoskék élek a definíció második esetei, ahol éppen fordítva: B csúcsai azonosak és A csúcsai szomszédosak, a lila élek pedig a definíció harmadik esetei, ahol A és B csúcsai is szomszédosak.



14. ábra. Ezen az ábrán szintén két gráf (A és B) erős szorzatát láthatjuk, a színezés ugyanúgy értelmezendő, mint a 10. ábrán.

Felmerülhet bennünk a kérdés, hogy vajon ha tudjuk becsülni a bemeneti gráfok Thue számát, akkor tudunk-e mondani felső becslést a szorzatgráf Thue számára? A legegyszerűbb példa a már fent is bemutatott szorzatgráf, melynek a 2 db bemeneti gráfja 2 db út. Vajon az így kapott királygráf Thue számára milyen becslést adhatunk? Többek között ezzel a kérdéssel is foglalkozott Kündgen és Pelsmajer [9], akik megmutatták, hogy t db út erős szorzata 4^t színnel ismétlődésmentesen kiszínezhető. Azaz az eredményeik alapján például a királygráf ismétlődésmentesen kiszínezhető 16 db színnel, mivel ez éppen a $t = 2$ eset.

Sajnos ahhoz, hogy felső becslést adjunk a síkgráfok Thue számára, ez az eredmény még nem lesz elegendő, mivel nem áll elő minden síkgráf utak erős szorzataként. Ahhoz, hogy a síkgráfokra is tudjunk adni felső becslést még be kell látnunk a következő kettő lemmát és tételt.

4.5.3. A bizonyításhoz szükséges lemmák és tételek

4.17 Lemma ([10])
Legyen H egy gráf és Φ_2 H-nak egy olyan l-színezése, amelyben minden Φ_2-ismétlődéses lusta séta egyben unalmas lusta séta is. Ekkor minden G gráfra:

$$\pi^*(G \boxtimes H) \leq l\pi^*(G).$$

Bizonyítás. Legyen Φ_1 egy erősen ismétlődésmentes színezése G-nek, amely $\pi^*(G)$ színt használ. Emellett minden $u \in V(G)$ és $v \in V(H)$ csúcspárra $(u,v) \in V(G \boxtimes H)$ szorzatgráf csúcsainak színezése legyen $\Phi(u,v)$, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$\Phi(u,v) := (\Phi_1(u), \Phi_2(v)).$$

Azt fogjuk bebizonyítani, hogy ez a Φ színezés erősen ismétlődésmentes színezése a szorzatgráfnak. Tegyük fel indirekten, hogy Φ nem erősen ismétlődésmentes színezés, azaz létezik egy Φ-ismétlődéses $L = (u_1,v_1),\ldots,(u_{2k},v_{2k})$ lusta séta $G \boxtimes H$-ban, amelyre létezik $i \in \{1,\ldots,k\}$, melyre $v_i \neq v_{i+k}$. Az erősszorzás és a Φ színezés definíciója miatt:

- $L_G = (u_1,u_2,\ldots,u_{2k})$, azaz L projekciója G-n egy Φ_1-ismétlődéses lusta séta G-ben, és
- $L_H = (v_1,v_2,\ldots,v_{2k})$, azaz L projekciója H-n egy Φ_2-ismétlődéses lusta séta H-ban.

Továbbá mivel Φ_1 egy erősen ismétlődésmentes színezés, ezért $\exists i$ index, amelyre $u_i = u_{i+k}$. Emelett Φ_2 definíciójából tudjuk, hogy $v_j = v_{j+k}$ minden $j \in \{1,\ldots,k\}$-re, mivel L_H egy Φ_2-ismétlődéses séta H-ban.
Azaz a fentiek alapján $\exists i \in \{1,\ldots,k\}$, amelyre $(u_i,v_i) = (u_{i+k},v_{i+k})$, azaz Φ mégis erősen ismétlődésmentes színezés. Ezzel beláttuk magát a lemmát is azaz, hogy $\pi^*(G \boxtimes H) \leq l\pi^*(G)$, mivel:

- Φ definíció szerint Φ_1 és Φ_2 direkt szorzata, azaz maximum $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ színt használhat.
- Tudjuk, hogy Φ_1 $\pi^*(G)$ darab színt használ, Φ_2 pedig l darab színt, így Φ valóban maximum $l \cdot \pi^*(G)$ féle színt használhat.

□

Ezt a 4.17. lemmát alkalmazhatjuk konkrét esetekre is, például $H = K_n$-re. Ekkor mivel K_n-nek létezik egy n-színezése, amelyben minden lusta séta unalmas, így a 4.17. lemma miatt szintén igaz, hogy:

$$\pi^*(G \boxtimes K_n) \leq n \cdot \pi^*(G) \tag{1}$$

4.18 Lemma ([15])
Minden P útnak létezik Φ 4-színezése, amelyben minden Φ-ismétlődéses lusta séta unalmas.

Bizonyítás. E lemma ugyanazt állítja, mint a korábbi 4.5. lemma, az azóta bevezetett fogalmakat használva:

- A lusta séta fogalma megegyezik a 4.5. lemmában vizsgált P' gráfon vett séta fogalmával
- Az unalmas séta fogalma pedig megegyezik a 4.5. lemmában vizsgált $W_1 = W_2$ eseménnyel.

A 4.5. lemmát már beláttuk, így azzal ezt is bizonyítottuk. □

Ekkor a 4.17. és 4.18. lemmákból következik, hogy minden G gráfra és P útra:

$$\pi^*(G \boxtimes P) \leq 4\pi^*(G). \tag{2}$$

Már csak mindössze kettő tételre van szükségünk ahhoz, hogy belássuk, hogy minden síkgráf kiszínezgető 768 színnel ismétlődésmentesen. Az első 4.19. tétel Dujmović és társszerzői [11] munkája gyümölcseként látott világot 2019-ben, azaz egy meglehetősen új eredményről beszélünk.

4.19 Tétel ([11])

Minden síkgráf részgráfja egy $H \boxtimes P \boxtimes K_3$ alakú gráfnak, ahol H favastagsága maximum 3, és P egy közönséges út.

A következő tétel is Dujmović és társszerzői munkájának eredménye, és hasonlóan új eredmény, mint az előbbi tétel.

4.20 Tétel ([10])

$\pi^*(G) \leq 4^k$, *minden G k-fára.*

Bizonyítás. A bizonyítást k szerinti indukcióval végezzük el. Ha $k = 0$, akkor G-nek nincs éle, így 1 színnel kiszínezhető erősen ismétlődésmentesen. Innentől a bizonyítás során tegyük fel, hogy $k \geq 1$. Tegyük fel, hogy G összefüggő, húrgráf, és maximum $k+1$ méretű klikkel rendelkezik. Ha szükséges, akkor G-hez hozzávehetünk éleket, hogy teljesítse a fenti feltételeket.

Legyen S egy tetszőleges v_0 csúcs szerinti szintezése G-nek, ahol S_i az i. szintet jelöli. A 4.8. állításból láthatjuk, hogy egy k-fa szintezésével, a kapott szintek $k-1$-fáknak részgráfjai. Így G-ben is minden S_i szint egy $k-1$-fa részgráfja, azaz az indukciós feltevésünk miatt létezik 4^{k-1} színt használó, minden S_i részgráfot erősen ismétlődésmentesen színező Φ_1 színezése G-nek.

Ezenkívül rendeljünk egy $P = p_0, p_1, \ldots, p_n$ utat G-hez, amelynek minden p_i csúcsa reprezentálja a G S_i szintjében lévő csúcsokat: a P-beli p_i színe egyezzen meg minden G-beli $v_i \in S_i$ csúcs színével. Legyen P színezése egy olyan 4-színezés, amelyben minden lusta séta unalmas. A 4.18. lemma szerint ilyen színezés létezik. Ekkor P-nek ezen színezése szerinti színezését G-nek hívjuk Φ_2-nek.

Állítsuk elő G színezését Φ_1 és Φ_2 direkt szorzatából: $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$. Ekkor a Φ színezés maximum $4 \cdot 4^{k-1} = 4^k$ színt használ.

Be kell látnunk, hogy Φ erősen ismétlődésmentes színezése G-nek. Legyen $W = v_1, \ldots, v_{2k}$ egy tetszőleges Φ-ismétlődéses lusta séta. Ha belátjuk, hogy létezik $j \in \{1, \ldots, k\}$ index, amelyre $v_j = v_{j+k}$, akkor kész a bizonyítás, mivel ez definíció szerint azt jelenti, hogy Φ erősen ismétlődésmentes. Legyen m a legkisebb szint indexe, amelyen helyezkedik el csúcsa W-nek, és $W' = W \cap S_m$. Ekkor a 4.10. lemmából következik, hogy W' is egy lusta séta, amely S_m-ben fut.

Mivel a G Φ_2 színezése egy olyan P-ről lett implementálva, amelyben minden ismétlődéses lusta séta unalmas (és $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$), ezért minden $2k$ hosszú Φ-ismétlődéses lusta séta csúcsainak szintsorozatára teljesül, hogy v_j és v_{j+k} ugyanazon a szinten helyezkedik el. Jelen esetben ez W-re teljesül, így W' előállításánál v_j pontosan akkor lett eltávolítva, ha v_{j+k} is.

Mivel W Φ-ismétlődéses, ezért a fentiek alapján W' is Φ-ismétlődéses. Φ_1 definíciója alapján pedig minden S_i szint erősen ismétlődésmentesen színezett, ezért W'-ben biztosan létezik egy $j \in \{1, \ldots, k\}$ index, amelyre $v_j = v_{j+k}$ (mivel W' egy szinten belül halad). Ezzel pedig a tételt is beláttuk, mivel ha W'-ben létezik egy $j \in \{1, \ldots, k\}$ index, amelyre $v_j = v_{j+k}$, akkor ugyanez elmondható W-ről is, hiszen ha $v_j, v_{j+k} \in W'$, akkor $v_j, v_{j+k} \in W$ is teljesül. Azaz Φ valóban egy maximum 4^k színt használó erősen ismétlődésmentes színezése G-nek. □

Ennek ismeretében, bármilyen G gráfhoz tudunk mondani egy felső becslést, amennyi féle színből már biztosan ki tudjuk színezni erősen ismétlődésmentesen, ha ismerjük G favastagságát.

4.5.4. A felsőkorlát

Ekkor a fenti 4.17. és 4.18. lemmákból és a 4.19. és 4.20. tételekből levonhatjuk, hogy minden G síkgráfra teljesül a következő:

$$\pi(G) \leq \pi^*(G) \leq \pi^*(H \boxtimes P \boxtimes K_3) \leq 3 \cdot \pi^*(H \boxtimes P) \leq 3 \cdot 4\pi^*(H) \leq 3 \cdot 4 \cdot 4^3 = 768. \qquad (3)$$

- $\pi(G) \leq \pi^*(G)$ teljesül, mivel: 4.5.1. definíció utáni kettő bekezdés.
- $\pi^*(G) \leq \pi^*(H \boxtimes P \boxtimes K_3)$ igaz, mivel: 4.19. tétel
- $\pi^*(H \boxtimes P \boxtimes K_3) \leq 3 \cdot \pi^*(H \boxtimes P)$ teljesül, mert: 1. következtetés
- $3 \cdot \pi^*(H \boxtimes P) \leq 3 \cdot 4\pi^*(H)$ igaz, mert: 2. következtetés
- $3 \cdot 4\pi^*(H) \leq 3 \cdot 4 \cdot 4^3$ is teljesül, mivel: 4.20. tétel
- $3 \cdot 4 \cdot 4^3 = 768$ is teljesül. Ezzel sikerült egy felsőkorlátot adnunk az összes sík gráf Thue számára.

4.6. Fokszámkorlátos gráfok Thue száma

$\Delta(G) \geq 3$ gráfok esetén a pontos maximum $\pi(G)$ érték nem ismert (3.). Ahhoz, hogy tudjunk mondani egy számot, amennyi szín már biztosan elég lesz az ismétlődésmentes színezéséhez bármely maximum Δ

fokszámú G-nek, felső becslést kell alkalmaznunk. Noga Alon és társszerzői [12] bebizonyították, hogy minden G gráfra Δ maximum fokszámmal $\pi(G) \leq c \cdot \Delta^2$, ahol c egy konstans. Mi egy ennél erősebb tételt fogunk belátni a Lovász Lokális Lemma segítségével: be fogjuk látni, hogy $c = 16$-ra is mindig teljesül az állítás.

4.21 Lemma ([14] Lovász Lokális Lemma)

Legyenek A_i-k $i = 1, \ldots, n$ események valamilyen valószínűségi mezőn. Rendeljünk hozzájuk egy $D = (V, E)$ összefüggőségi gráfot a következő módon:

- *$V_i = A_i$, azaz minden csúcsa egy eseménynek felel meg, és*
- *Minden i-re és j-re A_i és A_j között nem fut él, ha A_j és A_i függetlenek egymástól.*

Legyen $V_r : P(A_i) = p_r$, azaz a V_r-ek azonos valószínűségű események csoportjai. Legyen Δ_{rs} egy felső becslés arra, hogy maximum hány darab olyan V_s-beli csúcs van, amelynek létezik V_r-beli szomszédja. Ha léteznek $0 \leq x_1 \leq, \ldots, \leq x_k < 1$ valós számok, amelyekre teljesül, hogy:

$$p_r \leq x_r \prod_{s=1}^{k} (1 - x_s)^{\Delta_{rs}},$$

akkor:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) > 0.$$

Szemléletesen a lemma azt fogalmazza meg, hogy egymástól nem független események együttes bekövetkezésének a valószínűsége nem 0, ha felülről becsüljük, „mennyire függhetnek egymástól".

4.22 Tétel ([13])

Ha G maximum fokszáma Δ, akkor $\pi(G) \leq 16 \cdot \Delta^2$.

Bizonyítás. Legyen G egy gráf amelynek fokszáma maximum d. Vegyük a csúcsainak egy random színezését $N = 16d^2$ féle színnel. G minden P útjára A_P legyen az az esemény, hogy P első fele ugyanúgy lett kiszínezve, mint P második fele. Legyen V_r az olyan A_P események halmaza, amelyekben P pontosan $2r$ csúcsból áll, azaz $V_r := \{A_P : |P| = 2r\}$.

Ekkor $P(A_P) = N^{-r}$, mivel:

- A_i definíció szerint az az esemény, hogy egy $2r$ hosszú $v_1, \ldots, v_{2r}$ út első fele ugyanúgy lett színezve, mint a második fele. Ennek valószínűsége pedig valóban $(1/16d^2)^r = (1/N)^r = N^{-r}$, mivel az első r csúcs bármilyen színű lehet, viszont a második r csúcs már csak ugyanolyan színezésű lehet, mint az első r.
  Továbbá $P(c(v_i) = c(v_{r+i})) = 1/N$ egy darab i-re,
  ezért $P(c(v_i) = c(v_{r+i}) \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}\text{-re}) = 1/N^r$, mivel független események.

Konstruáljuk meg az összefüggőségi gráfunkat, $D = (V, E)$-t is:

- $V_i = A_i$, és
- A_P és A_Q szomszédosak $\Longleftrightarrow P \cap Q \neq \emptyset$, ahol P és Q utak, azaz létezik közös csúcsa P-nek és Q-nak.

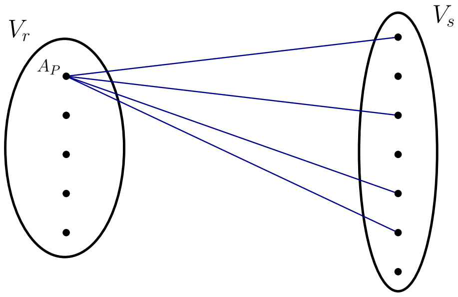
Ekkor ez valóban egy összefüggőségi gráf, mivel két csúcs D-ben akkor nincs összekötve, ha a hozzájuk tartozó G-beli utaknak nincs közös csúcsuk, azaz akkor, ha függetlenek egymástól a hozzájuk tartozó utak színezéseinek az eseményei. Ez azért igaz, mert egy út színezése csak a benne lévő csúcsok színezéseitől függ, így ha nincsen közös csúcsa két útnak, a színezéseik független események.

Ha a 4.21. lemma feltételeit belátjuk, akkor a lemma szerint teljesül, hogy $P(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i) > 0$, azaz pozitív valószínűséggel létezik színezés, melyben egyik út sem ismétlődésesen színezett $\Rightarrow$ létezik ismétlődésmentes színezés $16d^2$ színnel. Tudjuk, hogy $P(A_P) := 1/(16d^2)^r \Rightarrow p_r := 1/(16d^2)^r = 1/N^r$. Még kell olyan Δ_{rs} felső becslés és $0 \leq x_s < 1$ valós számok, amelyekkel teljesül a $p_r \leq x_r \prod_{s=1}^{k}(1-x_s)^{\Delta_{rs}}$ feltétel.

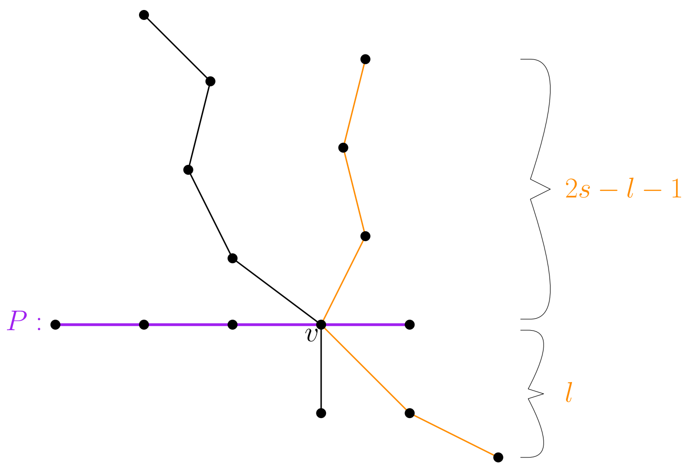
4.23 Állítás

Egy $2r$ csúcsból álló útnak maximum másik $2rsd^{2s}$ darab $2s$ hosszú úttal lesz közös csúcsa. Azaz $\Delta_{rs} = 2rsd^{2s}$ jó felső becslés.

Bizonyítás. Először is vegyünk egy $2r$ hosszú P utat G-ben..



15. ábra. Az ábra a D összefüggőségi gráf V_r és V_s közötti részét mutatja. A kérdés, hogy hány olyan $2s$ hosszú út van, amellyel van közös csúcsa P-nek, azaz hány sötétkék él van A_P és V_s csúcsai között.



16. ábra. Az ábra a G gráfban lévő P utat (lila), a P út éppen vizsgált v csúcsát és a többi v-re illeszkedő utakat ábrázolja. A narancssárgával feltüntetett út az éppen vizsgált v-re illeszkedő $2s$ hosszú út.

Ekkor P egy adott csúcsa maximum hány $2s$ hosszú úton lehet rajta? Ehhez két dolgot kell figyelembe vennünk:

- Egyrészt, hogy hányadik csúcsa a $2s$ hosszú útnak (a rövidebbik felétől számolva) a csúcs, amellyel érinti P-t.
- Másrészt pedig a vizsgált csúcs fokszámát: d-t.

Így $d^0 \cdot d^{2s-1} + d^1 \cdot d^{2s-2} + \ldots + d^s \cdot d^{s-1} = s \cdot d^{2s-1}$. Itt az s szorzó felelős azért, hogy a $2s$ hosszú út hányadik csúcsa a rövidebbik felétől a P-vel keresztező csúcs, a d^{2s-1} pedig azt mutatja, hogy hányféle $2s-l-1 \quad l = \{1, \ldots, s\}$ hosszú hosszabbik fele lehet a $2s$ hosszú keresztező útnak (14. ábrán a narancssárga út például egy ilyen keresztező út.)
Most pedig ahhoz, hogy kiszámoljuk, hogy P maximum hány $2s$ hosszú úton lehet rajta, csak egyszerűen szorozzuk be $2r$-el az eredményünket, mivel P minden csúcsára elvégezhető a fenti gondolatmenet.
Ezzel $2rsd^{2s-1}$-t kapunk. Mivel $2rsd^{2s-1} \leq 2rsd^{2s}$, ezért a $\Delta_{rs} = 2rsd^{2s}$ valóban egy helyes felső becslés lesz, ahogy az a 4.23. állításban szerepelt. □

Azaz A_P maximum $2rsd^{2s}$ csúccsal szomszédos V_s-ből. Érdemes megjegyezni, hogy például lehetséges olyan keresztező út, amely több P-beli csúcson is áthalad. Az ilyen utakat többször is beleszámoltuk Δ_{rs}-be. Ez természetesen nem probléma, mivel nem pontos értéket, hanem felső becslést szerettünk volna kiszámolni, viszont ez mutatja, hogy könnyen előfordulhat olyan eset, amikor a felső becslésünk nem egyenlő a pontos értékkel.
Már csak valamilyen valós $0 \leq x_s < 1$-ekre van szükségünk, amelyekkel teljesül: $p_r \leq x_r \prod_{s=1}^{k}(1-x_s)^{\Delta_{rs}}$.

4.24 Állítás
$x_s = (3d)^{-2s}$ teljesíti az $N^{-r} \leq x_r \prod_{s=1}^{k}(1-x_s)^{2rsd^{2s}}$ feltételt és $0 \leq x_s < \frac{1}{2}$ minden s-re.

Bizonyítás. Egyrészt a $0 \leq x_s < \frac{1}{2}$ feltételt valóban teljesíti, mivel:

1. A $(3d)^{-2s}$ kifejezés, (ahol $d \geq 1$ és $s \geq 1$) annál nagyobb, minél kisebb d és s, így a maximuma $(3 \cdot 1)^{-2 \cdot 1} = \frac{1}{9}$, azaz $x_s < \frac{1}{2}$ teljesül minden s-re.
2. Egy pozitív szám egy negatív számra emelve sose lesz negatív, azaz $0 \leq x_s$ is teljesül minden s-re.

Másrészt be kell látnunk az $N^{-r} \leq x_r \prod_{s=1}^{k}(1-x_s)^{2rsd^{2s}}$ feltételt. Ennek a levezetéséhez lesz szükségünk a következő állításra:

4.25 Állítás
$(1-x) \geq e^{-2x} \quad \forall x \leq \frac{1}{2}$.

Bizonyítás. Az állítás belátásához vizsgáljuk e^{-2x} sorfejtését:

$$e^{-2x} = 1-(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots$$

$1-(2x)+\frac{(2x)^2}{2!} \leq (1-x)$, mivel:

$$\frac{(2x)^2}{2!} \leq x \Leftrightarrow (2x)^2 \leq 2x \Leftrightarrow 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

Azaz pontosan akkor lesz a sorfejtés harmadik tagig vett részösszege kisebb vagy egyenlő, mint $(1-x)$, ha $x \leq \frac{1}{2}$, amely valóban mindig teljesül (**1.**) miatt. Ezen felül ha $x \leq \frac{1}{2}$, akkor a sorfejtés további tagjaira igaz, hogy:

- A tagok abszolútértéke csökken, mivel egy 1-nél kisebb számnak vesszük egyre nagyobb hatványát, és osztjuk le egyre nagyobb számmal.
- A 4. tag negatív előjelű, és a tagok váltakozó előjelűek.

Ebből a kettő észrevételből pedig belátható, hogy mindig teljesül a következő állítás:
A sorfejtés egy részösszege a következő taggal bővítve, pontosan az előző kettő részösszeg közé fog esni. Azaz a teljes végtelen összeg is a 3. és 4. részösszeg közé esik, amely 3. tagig vett részösszegnél kisebb (4. tag negatív előjele miatt). Ezzel a 4.25. állítást beláttuk. □

Így a fenti eredményeket behelyettesítve a lemma feltételébe, a következő alsó becslést kapjuk:

$$x_r \prod_{s=1}^{k}(1-x_s)^{\Delta_{rs}} \geq (3d)^{-2r} \prod_{s=1}^{k} e^{-4rs3^{-2s}} > (3d)^{-2r} \exp\left(-2r \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2s}{3^{2s}}\right). \tag{4}$$

Vizsgáljuk a $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{2s}{3^{2s}}$ végtelen sort. A hányados-kritérium alkalmazásával belátható, hogy a sorösszeg konvergens. Számoljuk ki a határértékét. Először emeljük ki a konstans tagot és egyszerűsítsük a kifejezést:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{2s}{3^{2s}} = 2 \sum_{s=1}^{\infty} s \cdot 9^{-s}$$

Mivel $\sum\limits_{s=1}^{\infty} x_0^n = \dfrac{x_0}{1-x_0}$, ezért a két oldal lederiválásával és ezután x_0-al való felszorzással a következő egyenlőséget kapjuk: $\sum\limits_{s=1}^{\infty} n \cdot x_0^n = \dfrac{x_0}{(x_0-1)^2}$. Ekkor (mivel $s=1$-re $s \cdot 9^{-s} = \dfrac{1}{9}$) $x_0 = \dfrac{1}{9}$ behelyettesítéssel a következő eredményt kapjuk a sorösszeg határértékére:

$$2\sum_{s=1}^{\infty} s \cdot 9^{-s} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{(\frac{1}{9}-1)^2} = 2 \cdot \frac{9}{64} = \frac{9}{32}.$$

Így, hogy már tudjuk a sorösszeg határértékét, folytathatjuk a lemma feltételének alsó becslését (4):

$$(3d)^{-2r} \exp\left(-2r\sum_{s=1}^{\infty} \frac{2s}{3^{2s}}\right) \geq (3d \cdot e^{\frac{9}{32}})^{-2r} > 4d^{-2r} = 1/(16d^2)^r = 1/N^r = p_r.$$

Azaz tényleg teljesül, hogy $p_r \leq x_r \prod_{s=1}^{k}(1-x_s)^{2rsd^{2s}}$, ha $x_s = (3d)^{-2s}$, így a 4.24. állítást is beláttuk. □

Ezzel beláttuk, hogy a 4.21. Lemma összes feltétele teljesül, azaz a Lemma szerint teljesül a következő egyenlőtlenség is:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) > 0.$$

Mivel A_i jelentése az, hogy egy $2i$ hosszú út első fele ugyanolyan színezésű, mint a második fele, ezért $\bar{A}_i$ jelentése az, hogy az adott $2i$ hosszú út első fele másképp van színezve, mint a második fele. Ekkor ha minden i-re a gráf összes útjára nézzük az ilyen $\bar{A}_i$ események metszetének valószínűségét, az pontosan annak a valószínűségét jelenti, hogy a gráf ismétlődésmentesen van kiszínezve. A 4.21. lemma szerint ez a valószínűség nagyobb, mint 0, így biztosan létezik ismétlődésmentes színezés is.

Azaz bebizonyítottuk, hogy $16d^2$ féle színnel mindig létezik ismétlődésmentes színezése egy maximum d fokú gráfnak. □

Hivatkozások

[1] A. THUE, *Über unendliche Zeichenreichen*, Norske Vid. Selsk. Skr. I. Mat. Nat. Kl. Christiana, **7**, Pages 1–22 (1906)

[2] N. ALON, Jaros Law Grytczuk, Mariusz Ha Luszczak, Oliver Riordan "Nonrepetitive colorings of graphs", *Random Structures & Algorithms* — Special issue: Proceedings of the tenth international conference ”Random structures and algorithms” archive Volume **21** Issue 3-4, (2002) Pages 336–346

[3] J. CURRIE, *There are ternary circular square-free words of length n for* $n \geq 18$, 3–6 (2002)

[4] JAROSŁAW GRYTCZUK, *Review Article*, Nonrepetitive Colorings of Graphs—A Survey, 3. o., (2006)

[5] A. KÜNDGEN and M. J. PELSMAJER, “Nonrepetitive colorings of graphs of bounded treewidth,” preprint, (2003)

[6] NOGA ALON, JAROS LAW GRYTCZUK, MARIUSZ HA LUSZCZAK and OLIVER RIORDAN, Non-Repetitive Colorings Of Graphs, 4. o.

[7] VIDA DUJMOVIĆ and LOUIS ESPERET and GWENAËL JORET and BARTOSZ WALCZAK and DAVID R. WOOD, "Planar graphs have bounded nonrepetitive chromatic number", (2019)

[8] SABIDUSSI, G. "Graph multiplication”. Math. Z. **72**, 446—457. o., (1960)

[9] ANDRÉ KÜNDGEN AND MICHAEL J. PELSMAJER. Nonrepetitive colorings of graphs of bounded tree-width. *Discrete Math.*, 308(19):4473–4478, 2008. doi: 10.1016/j.disc.2007.08.043. MR: 2433774.

[10] VIDA DUJMOVIĆ and LOUIS ESPERET and GWENAËL JORET and BARTOSZ WALCZAK and DAVID R. WOOD, "Planar graphs have bounded nonrepetitive chromatic number", 4–5. o. (2019)

[11] VIDA DUJMOVIĆ, GWENAËL JORET, PIOTR MICEK, PAT MORIN, TORSTEN UECKERDT, and DAVID R. WOOD. Planar graphs have bounded queue-number, 2019. arXiv: 1904.04791.

[12] N. ALON, J. GRYTCZUK, M. HAŁUSZCZAK, and O. RIORDAN, “Nonrepetitive colorings of graphs,” Random Structures and Algorithms, vol. 21, no. 3-4, pp. 336–346, 2002

[13] JAROSŁAW GRYTCZUK, *Review Article*, Nonrepetitive Colorings of Graphs—A Survey, 2. o., (2006)

[14] N. ALON and J. H. SPENCER, *The Probabilistic Method*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2nd edition, 2000.

[15] ANDRÉ KÜNDGEN and MICHAEL J. PELSMAJER. Nonrepetitive colorings of graphs of bounded tree-width. *Discrete Math.*, 308(19):4473–4478, 2008. doi: 10.1016/j.disc.2007.08.043. MR: 2433774.