NYILATKOZAT

Név: Demeter Adrienn

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: C8MUL9

Szakdolgozat címe:
Gráfok szaturálása

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. május 30.

Demeter Adrienn

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Gráfok szaturálása

Szakdolgozat

Demeter Adrienn

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Keszegh Balázs

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2022

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Keszegh Balázsnak, a sok segítséget, konzultációkat és a jó tanácsokat, melyekkel nagyban hozzájárult dolgozatom létrejöttéhez, valamint köszönöm, hogy bármikor bármilyen kérdéssel fordulhattam hozzá.

Ezenkívül köszönettel tartozom a családomnak és a barátaimnak, akik nem csak a szakdolgozat elkészülése alatt, hanem az egyetemi tanulmányaim során végig mellettem álltak, és támogattak mindenben.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Ha adott egy F úgynevezett tiltott gráf, akkor mennyi annak az n csúcsú G gráfnak a minimális élszáma, amely nem tartalmazza F-et, de G bármely nem-élét behúzva keletkezik benne F egy másolata? Ez az extremális gráfelméletben jól ismert tiltott részgráf probléma egyik változata, melyben mi a maximális élszám helyett a minimálisra vagyunk kíváncsiak. Ezt fogjuk szaturálásnak nevezni.

Erdős Pál, Hajnal András és J. W. Moon [1] voltak az elsők, akik a szaturált függvénnyel foglalkoztak, és meghatározták a minimális élszámot abban az esetben, amikor a tiltott gráf egy k csúcsú teljes gráf. Azóta már számos más gráfcsaládra is sikerült a szaturációs számot meghatározni, pédául csillag gráfra, fákra vagy utakra. A legismertebb általános felső korlátot Kászonyi László és Tuza Zsolt [2] adták 1986-ban. Ezekről az eredményekről Jill R. Faudree, Ralph J. Faudree és John R. Schmitt [3] nem olyan régen egy tanulmányt tettek közzé.

Dolgozatom során ezen eredményekből fogok néhányat bemutatni. A második fejezetben az ismertebb gráfcsaládokról lesz szó: teljes gráfok, ezen belül is kitérek a teljes páros gráfokra, ezt követően a csillagok, utak, fák és körök szaturálását ismertetem. A harmadik fejezetben már nem határozom meg, hogy a tiltott gráf pontosan milyen gráf, tetszőleges F esetén vizsgálom egy F-szaturált gráf élszámát. Végül, az utolsó fejezetben különböző rendezett gráfokat fogok bemutatni, melyek relatíve friss eredmények az előzőekhez képest, ezáltal a szakdolgozatom aktuális kérdéseket is tárgyal. Először a rendezett páros gráfokkal, másnéven a $(0,1)$-mátrixokkal foglalkozom, majd áttérek a lineárisan és a ciklikusan rendezett gráfokra. Mindhárom esetben bebizonyítom a dichotómiát, és mutatok példákat is az egyes viselkedéstípusokra.

2. Alapvető gráfcsaládok

Először megismerkedünk a szaturáltság fogalmával, majd néhány ismertebb gráftípus esetén megvizsgáljuk a szaturált függvényt. Nem emeljük ki minden egyes alkalommal, de végig egyszerű gráfokkal foglalkozunk. Az egész dolgozat során jelölje K_k, S_k, P_k, T_k, C_k, és G_k a k csúcsú teljes, csillag, út, fa, kör, illetve tetszőleges gráfot. Ezalól kivétel, ha külön hangsúlyozva van, hogy mást jelöl.

2.1. Definíció. Legyen F egy tetszőleges gráf. A G gráfot *F-szaturáltnak* nevezzük, ha nem tartalmaz F-et részgráfként, de bármely élét behúzva keletkezik benne F egy másolata.

2.2. Definíció. $sat(n,F) = min\{|E(G)| : G\ F\text{-szaturált}, |V(G)| = n\}$, azaz az n csúcsú, F-szaturált gráfok éleinek minimális száma.

2.3. Definíció. $Sat(n,F) = \{G : |V(G)| = n,\ |E(G)| = sat(n,F),\ G\ F\text{-szaturált}\}$.

2.1. Teljes gráfok

Mielőtt kimondanánk a gráfszaturálás egyik legismertebb és egyben legkorábbi tételét, amely a teljes gráfok szaturált függvényére vonatkozik, nézzük meg Bollobás-tételét, melyet utána felhasználunk a 2.5 tétel bizonyításában.

2.4. Tétel (Bollobás)**.** *[13] Legyen $A_1,\ldots,A_m$ és $B_1,\ldots,B_m$ a-elemű és b-elemű halmazok sorozatai. Tegyük fel, hogy $A_i \cap B_i = \emptyset$, és $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, ha $i \neq j$. Ekkor $m \leq \binom{a+b}{a}$.*

Bizonyítás. [14] Legyen X az összes A_i és B_i uniója. Tekintsük X egy tetszőleges π permutációját. Azt állítjuk, hogy legfeljebb egy olyan (A_i,B_i) pár van, melynél A_i minden eleme megelőzi B_i minden elemét a π permutációban. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz, hogy létezik két ilyen pár, (A_i,B_i) és (A_j,B_j). Az általánosság elvesztése nélkül tegyük fel, hogy A_i utolsó eleme A_j utolsó eleme előtt vagy ugyanott van a π-ben. Ez azonban azt jelenti, hogy A_i összes eleme B_j elemei előtt jelenik meg π-ben. Ezért A_i és B_j diszjunktak, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Most vegyünk egy tetszőleges (A_i,B_i) párt. Kérdés, hogy X-nek hány olyan π permutációja van, amely esetén A_i elemei megelőzik B_i elemeit. Tegyük fel, hogy X-nek n eleme van. $A_i \cup B_i$ $\binom{n}{a+b}$ helyre kerülhet $[n]$-ben. Mivel A_i elemeinek meg kell előzni B_i elemeit, ezért A_i elemeit az első a helyre kell rakjuk, amit $a!$ féleképp tehetünk meg. Hasonlóan, B_i elemei $b!$ féleképp kerülhetnek π-be. Végül, a maradék elemeket pedig $(n-a-b)!$ féleképpen lehet π-be rakni. Ezért

$$\binom{n}{a+b}a!b!(n-a-b)! = \frac{n!a!b!}{(a+b)!} = n!\binom{a+b}{a}^{-1}$$

darab olyan π permutáció van, ahol A_i elemei megelőzik B_i elemeit. Korábbi megfigyelésünk szerint, ha ezt a mennyiséget összeadjuk minden (A_i, B_i) párra, nem léphetjük túl X lehetséges permutációinak számát, azaz $n!$-t. Ezért $mn!\binom{a+b}{a}^{-1} \leq n!$, amiből következik, hogy $m \leq \binom{a+b}{a}$. ■

2.5. Tétel. *[3] Ha $2 \leq k \leq n$, akkor $sat(n, K_k) = (k-2)(n-k+2) + \binom{k-2}{2} = \binom{n}{2} - \binom{n-k+2}{2}$.*

Bizonyítás. Legyen G egy n csúcsú K_k-szaturált gráf. Megmutatjuk, hogy G-ben az l nem-élek száma legfeljebb $\binom{n-k+2}{2}$. Legyenek $A_1, \dots A_l$ azon csúcspárok halmazai, melyek G nem-éleihez tartoznak, azaz $|A_i| = 2$ minden i-re. Minden A_i-hez létezik egy megfelelő k-csúcsú C_i halmaz, amely tartalmazza A_i-t, és $V(C_i)$ egy $K_k - e$-t, úgynevezett majdnem klikket alkot, ahol e az adott A_i-beli csúcsok közötti nem-él. Jelölje B_i a C_i komplementerét $V(G)$-ben, így minden $|B_i| = n-k$.

Azt állítjuk, hogy ekkor a 2.4 tételben szereplő mindkét feltétel teljesül. $A_i \cap B_i = \emptyset$ nyilván igaz, hiszen így definiáltuk a halmazokat. Indirekt tegyük fel, hogy az $A_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Ez pont azt jelenti, hogy $A_i \subseteq \overline{B}_j = C_j$. Viszont C_j éppen egy majdnem klikk, amelyben az A_j egy nem-élnek felel meg. Mivel egy majdnem klikkben pontosan egy nem-él lehet, ezért szükségképpen $A_i = A_j$, ami ellentmond a feltevésünknek. Így alkalmazhatjuk a tételt, azaz $l \leq \binom{n-k+2}{2}$, vagyis $sat(n, K_k) \geq \binom{n}{2} - \binom{n-k+2}{2}$.

A $sat(n, K_k) \leq \binom{n}{2} - \binom{n-k+2}{2}$ teljesüléséhez mutatunk egy konstrukciót, melyről belátjuk, hogy K_k-szaturált. Legyen G egy K_{k-2} és egy $\overline{K}_{n-k+2}$ diszjunkt uniójából álló gráf, amelyben K_{k-2} és $\overline{K}_{n-k+2}$ között minden élet behúzunk. Könnyen látszik, hogy ez a konstrukció nem tartalmaz K_k-t, hiszen legalább $k-1$ fokszámú csúcsból csak $k-2$ darab van. Adjunk hozzá G-hez egy e élet. e csak két $\overline{K}_{n-k+2}$-beli csúcs közti él lehet. Mivel ezen csúcsok fokszáma $k-2$, és az e él pontosan két csúcs fokszámát növeli 1-gyel, ezért keletkezni fog 2 darab $k-1$ fokú csúcs. Ezek a K_{k-2}-beli csúcsokkal együtt egy K_k-t alkotnak, ezért G tényleg K_k-szaturált.

Mivel $sat(n, K_k) \geq \binom{n}{2} - \binom{n-k+2}{2}$ és $sat(n, K_k) \leq \binom{n}{2} - \binom{n-k+2}{2}$ is fennáll, ezért igaz a tételben szereplő egyenlőség. ■

2.1.1. Teljes páros gráfok

Legyen $G_{n,m}$ egy olyan páros gráf, amelynek n zöld és m kék csúcsa van, és élek csak a különböző színű csúcsok között mehetnek. Egy $K_{k,l}$ teljes páros gráf, ha minden kék és zöld csúcsa össze van kötve.

2.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $G_{n,m}$ páros gráf $K_{k,l}$*-szaturált*, ha $G_{n,m}$ nem tartalmaz részgráfként $K_{k,l}$-et, de bármely új él behúzása a két csúcsosztály között létrehoz $G_{n,m}$-ben egy $K_{k,l}$ másolatot. Természetesen feltesszük, hogy $k \leq n$, $l \leq m$.

2.7. Tétel. *[6] Minden minimális páros $K_{k,l}$-szaturált gráf élszáma éppen $(k-1)m+(l-1)n-(k-1)(l-1)$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ez ugyanaz, mintha azt mondanánk, hogy $G_{n,m}$-ből pontosan $(n-k+1)(m-l+1)$ él hiányozhat. Először azt látjuk be, hogy legfeljebb ennyi él hiányozhat.

Indukciót fogunk használni k-ra (a szimmetria miatt elég csak az egyik csúcshalmazra). $k=l=1$ esetén triviális az állítás. Tegyük fel, hogy k-ig igaz a tétel, és nézzük meg $k+1$-re.

Legyen $G=G_{n,m}$ egy $K_{k+1,l}$-szaturált gráf és legyen $\overline{G}$ a G komplementere úgy, hogy $\overline{G}$ csúcshalmaza azonos G csúcshalmazával, és $\overline{G}$-ben két különböző színű csúcs akkor, és csak akkor van összekötve, ha G-ben nincsenek, viszont az azonos színű csúcsok között $\overline{G}$-ben sem megy él. Legyenek α_i $(i=1,\ldots,\mu)$ a $\overline{G}$ élei. Azt szeretnénk belátni, hogy $\mu \leq (n-k)(m-l+1)$. Mivel G egy $K_{k+1,l}$-szaturált gráf, ezért $\overline{G}$-ben minden α_i élhez válaszhatunk egy olyan $k+1$ kék és l zöld csúcsból álló G_i csúcshalmazt, hogy α_i legyen az egyetlen él G_i-ben. Legyenek G_i kék csúcsai $x_0^i, x_1^i, \ldots, x_k^i$, ahol x_0^i az α_i egyik végpontja. Ekkor α_i rendeljen $n-k$ súlyt x_0^i-hoz, és 1 súlyt x_j^i-hez $(j=1,\ldots,k)$ minden $i=1,\ldots,\mu$-re.

Megmutatjuk, hogy az α_i-k összesen legfeljebb $(n-k)(m-l+1)$ súlyt rendelnek egy a tetszőleges kék csúcshoz. Tegyük fel, hogy $\overline{G}$-ben r darab él indul ki a-ból. Ekkor ez az r él $r(n-k)$ súlyt rendel a-hoz, ahol $r \leq m-l+1$ (azaz G-ben a legalább $l-1$ darab zöld csúccsal van összekötve).

$\overline{G}$ többi éle, amelyek súlyt rendelnek a-hoz, nem lehetnek szomszédosak ezzel az r éllel, különben lenne olyan G_i, amely legalább 2 élet tartalmaz. Ezért ezek $\overline{G}$ egy $(n-1,m-r)$ csúcsú páros részgráfjának a részét alkotják, nevezzük ezt G^*-nak. Sőt, ha G^* egy α_i éle súlyt (nyilván 1 súlyt) rendel a-hoz, akkor G_i minden csúcsa, kivéve a-t,

G^*-ban kell legyen. Ezért G^* minden α_i éléhez létezik G^*-nak egy olyan (k,l) csúcsú páros részgráfja, amelynek egyetlen éle α_i. Így az indukciós feltevés miatt G^* α_i éleinek a száma legfeljebb $(n-k)(m-r-l+1)$. Ebből következik, hogy az a-hoz rendelt súly legfeljebb $r(n-k)+(n-k)(m-r-l+1)=(n-k)(m-l+1)$.

Rendeljünk minden α_i-hez $(i=1,\dots,\mu)$ n súlyt. Láttuk, hogy egy csúcsra legfeljebb $(n-k)(m-l+1)$ súly jut, így az élekre és csúcsokra is összegezve a súlyokat azt kapjuk, hogy

$$n\mu \leq n(n-k)(m-l+1),$$

amiből következik, hogy $\mu \leq (n-k)(m-l+1)$.

Egy jó konstrukcióval megmutatjuk, hogy az élszám legfeljebb $(k-1)m+(l-1)n-(k-1)(l-1)$. Az n zöld csúcs közül kössünk össze $k-1$-et minden kék csúccsal, az m kék csúcs közül pedig $l-1$-et kössünk össze minden zöld csúccsal. Az így létrejövő páros gráf élszáma éppen $(k-1)m+(l-1)n-(k-1)(l-1)$. Azt állítjuk, hogy ez a gráf $K_{k,l}$-szaturált. Nem tartalmaz $K_{k,l}$-et, hiszen csak $k-1$, illetve $l-1$ csúcsnak a fokszáma legalább l, illetve k, a többinek pontosan $l-1$, illetve $k-1$. Mivel egy új él behúzása a két csúcsosztály között pontosan két csúcs fokszámát növeli eggyel-eggyel, így keletkezik egy $K_{k,l}$, azaz a gráf valóban $K_{k,l}$-szaturált.

Mivel beláttuk, hogy legalább ennyi él szükséges, de legfeljebb ennyi él elég is, ezért ebből következik, hogy pontosan ennyi éle van egy $K_{k,l}$-szaturált páros gráfnak. ■

Érdemes megemlíteni, hogy teljes többpartíciós gráfokhoz is létezik becslés a minimális élszámra. Jelölje $K_{s_1,\dots,s_r}$ a többpartíciós gráfot, ahol $s_1,\dots,s_r$, $r \geq 2$ a partíciók elemszáma.

2.8. Tétel. *[5] Legyen $r \geq 2$, $s_r \geq \ldots \geq s_1 \geq 1$, $F = K_{s_1,\dots,s_r}$ és $p = s_1+\ldots+s_{r-1}-1$. Ekkor minden elég nagy n esetén*

$$sat(n,F) \leq \binom{p}{2} + p(n-p) + \left\lceil \frac{(s_r-1)(n-p)}{2} - \frac{s_r^2}{8} \right\rceil.$$

Megmutatjuk az ehhez tartozó konstrukciót, viszont a bizonyításra a dolgozat során nem kerül sor.

Legyen $F = K_{s_1,\dots,s_r}$, $p = s_1+\ldots+s_{r-1}-1$, $q = p+s_r-1 = s_1+\ldots+s_r-2$. Legyen G' az a gráf, amelyet egy $A \subseteq \{1,\dots,n-p\}$ $\lfloor s_r/2 \rfloor$ méretű klikkből kapunk úgy, hogy A és $B = \{1,\dots,n-p\} \backslash A$ között legfeljebb 1 élet húzunk be, a B-beli éleket pedig úgy húzzuk be, hogy $G'(B)$ ne tartalmazzon K_{t,s_r+1-t}-t, $1 < t < s_r$, valamint G'-ben minden

B-beli csúcs fokszáma $s_r - 1$ legyen. (Ilyen G' létezik minden nagy n esetén.) Ekkor G' egy K_{1,s_r}-szaturált gráf az $\{1,\dots,n-p\}$ csúcshalmazon. Végül, legyen $G = K_p * G'$, ahol a $*$ azt jelöli, hogy K_p és G' diszjunkt csúcshalmazok, köztük minden élet behúzunk. Ekkor G F-szaturált.

2.2. Csillag gráf

A következő tételben az S_{t+1} jelölje azt a csillagot, amelynek t darab levele van.

2.9. Tétel. *[2]*

$$sat(n, S_{t+1}) = \begin{cases} \frac{t-1}{2}n - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{t^2}{4} \right\rfloor & ha\ n \geq t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \\ \\ \binom{t}{2} + \binom{n-t}{2} & ha\ t+1 \leq n < t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen G egy S_{t+1}-szaturált gráf. Mivel G-ben nincs S_{t+1}, ezért minden pont foka legfeljebb $t-1$. A szaturálás miatt pedig, ha G-ben tetszőlegesen behúzunk egy élet két olyan csúcs között, amelyek nincsenek összekötve, keletkezik S_{t+1}, így a két csúcs közül legalább az egyiknek a foka $t-1$ volt az élbehúzás előtt. Tehát minden legfeljebb $t-2$ fokú pont össze kell legyen kötve egymással, ezeknek a számát jelölje k, azaz $k = |\{x \in V(G) : d(x) \leq t-2\}|$. Ezek így egy K_k-t alkotnak, ahol $k \leq t$ (különben lenne S_{t+1} G-ben), a többi csúcs foka pedig $t-1$ kell legyen. A k csúcsú teljes gráfnak $\binom{k}{2}$ éle van, és mivel $t-1$ fokú csúcsból $n-k$ darab van, ezért még legalább $\frac{(n-k)(t-1)}{2}$ él van a gráfban (hiszen egy él legfeljebb 2 csúcs fokszámához járul hozzá), vagyis

$$|E(G)| \geq \binom{k}{2} + \left(\frac{t-1}{2}\right)(n-k). \tag{1}$$

Legyen $p(k) = \binom{k}{2} + \left(\frac{t-1}{2}\right)(n-k) = \frac{k^2-tk+nt-n}{2}$. Három esetet kell megvizsgálni:

1.eset: Ha $n \geq t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$, akkor a $p(k)$ másodfokú polinom $k = \frac{t}{2}$-ben veszi fel a minimumát. Ezt az (1) egyenlőtlenségben k helyére behelyettesítve, megkapjuk, hogy

$$|E(G)| \geq \frac{t-1}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

Mivel k egész, ezért páros t esetén $k = \frac{t}{2}$-ben vétetik fel a minimum, páratlan t esetén pedig, ha $k = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$-t vagy $k = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$-t helyettesítünk be és ezeknek vesszük a minimumát. Ekkor páros és páratlan t esetén is igaz lesz, hogy

$$|E(G)| \geq \frac{t-1}{2}n - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{t^2}{4} \right\rfloor. \tag{2}$$

2.eset: Ha $n < t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$, és $n - k \geq t$. Az (1) korlát még mindig fennáll, és $p(k)$-nak a minimuma továbbra is $k = \frac{t}{2}$-ben van, viszont a feltétel szerint $k \leq n - t \leq \frac{t}{2}$, ezért a minimumot a lehető legnagyobb k esetén éri el, ami az $n - k \geq t$ feltevés miatt $k = n - t$-ben lesz. Ezt az (1) képletbe behelyettesítve, a következőt kapjuk:

$$|E(G)| \geq \binom{t}{2} + \binom{n-t}{2}. \tag{3}$$

3.eset: Ha $n < t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ és $n - k < t$. Ekkor van egy $n - k$ méretű részgráf, amin belül minden csúcs foka maximum $n - k - 1$, így egy-egy csúcs esetén a maradék $t - (n - k)$ belőle kimenő él mindenképp a K_k-ba kell menjen. Ezért ebben a részgráfban összeadva a fokokat legalább ennyi élet egyszer számolunk. Ebből adódóan az $n-k$-as részen belül, valamint a két részgráf között az összélszám minimum $(n-k)(t-n+k) + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. Ehhez még hozzáadódik a K_k-ban lévő élek száma, ami az alábbi becslést adja:

$$|E(G)| \geq (t-1)(n-k) - \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}. \tag{4}$$

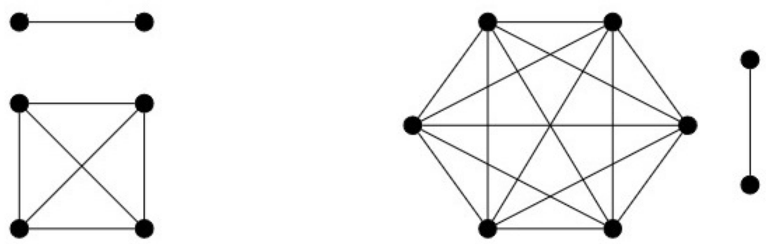
Legyen

$$q(k) = (t-1)(n-k) - \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2} = nk - tk + nt - \frac{n^2+n}{2}.$$

Mivel feltettük, hogy $n - k \leq t$, ezért a polinom a $k = n - t$ helyen fogja felvenni a minimumát, ezért k heyére $(n - t)$-t írva nem rontunk a becslésen, ezért

$$|E(G)| \geq \binom{t}{2} + \binom{n-t}{2}.$$

■



1. ábra. Példa (2)-re, ahol $n = 6$, $t = 4$, és (3)-ra, ahol $n = 8$, $t = 6$

2.3. Utak és fák

Először egy konkrét csúcsszámú út esetén vizsgáljuk az útszaturálást, uána kimondjuk a tételt általánosan is.

2.10. Tétel. *[2]*

$$sat(n, P_4) = \begin{cases} k, & ha\ n = 2k \\ \\ k+1, & ha\ n = 2k-1 \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen G egy n csúcsú minimális P_4-szaturált gráf. Azt állítjuk, hogy G $n = 2k$ esetén k darab K_2 diszjunkt uniójából, $n = 2k-1$ esetén $k-2$ darab K_2 és egy K_3 diszjunkt uniójából áll. A konstrukcióból egyértelműen látszik, hogy G-ben nincsen P_4. Legyen $x \in V(K_{2_i})$ és $y \in V(K_{2_j})$, bármely $i \neq j$-re. Ekkor az xy élet behúzva keletkezik P_4. Legyen $z \in V(K_3)$. Ha az xz élet húzzuk be, szintén létrejön egy P_4, ezért G P_4-szaturált.

Már csak azt kell belátni, hogy ha G minimális, akkor van maximum ennyi élű szaturált G', hogy G' minden komponense csak K_2 vagy K_3, és K_3-ból legfeljebb egy darab lehet. Vegyük észre, hogy ha G-nek lenne olyan l csúcsú komponense, ahol $l \geq 4$, akkor az csak csillag gráf lehetne, különben nem teljesülne a szaturáltság. Mivel egy csillag gráf páros l esetén $\frac{l}{2}$ darab K_2-re, páratlan l esetén pedig $\frac{l-3}{2}$ darab K_2-re és egy K_3-ra bontható, ezért az $l-1$ él lecserélhető $\frac{l}{2} < l-1$, illetve $\frac{l-3}{2} + 3 \leq l-1$ élre (a második esetben egyenlőség csak $l = 5$ esetén lehet). Nyilvánvaló, hogy G a csere után sem tartalmaz P_4-et, valamint bármely új élet behúzva keletkezik P_4, azaz szaturált is marad. Így 3-nál nagyobb csúcsszámú komponens nem lehet G-ben. Mivel G P_4-szaturált, minden legfeljebb 3 csúcsszámú komponense teljes kell legyen. Tegyük fel, hogy G tartalmaz

K_1-et is. Mivel egy izolált csúcs és egy K_3 lecserélhető 2 darab K_2-re, ami csak 2 élet tartalmaz 3 helyett, ezért ebben az esetben G nem lenne minimális. Egy izolált csúcsot és egy K_2-t összekötve nem keletkezne P_4, ami a szaturáltságnak mond ellent, ezért G nem tartalmazhat izolált csúcsot sem. Ha G-ben lenne több K_3, akkor 2 darab K_3 lecserélhető lenne 3 K_2-re, ami 6 él helyett 3-at eredményezne. Ezért a feljebb leírt konstrukció valóban minimális. ∎

2.11. Tétel. *[8] Legyen $n \geq m$.*

1. *Páros m esetén, ahol $m \in \{22, 30, 38, 40, 42, 46, 48, 50\}$ vagy $m \geq 54$*

$$sat(n, P_m) \leq n + \frac{m}{2} - 1.$$

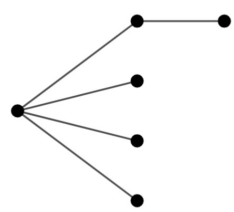
2. *Páratlan m esetén, ahol $m \in \{23, 31, 39, 41, 43, 47, 49, 51\}$ vagy $m \geq 55$*

$$sat(n, P_m) \leq \frac{3}{2}n.$$

Megjegyzés. Ennek a tételnek a bizonyítása Hamilton-út segítségével történik, de erre a dolgozatban nem kerül sor.

Most térjünk át a fák szaturálására. Ehhez szükségünk lesz egy speciális fára, melyet T_k^*-nak fogunk nevezni, ahol k a csúcsszámot jelöli.

A T_k^*, $k \geq 4$ egy olyan k csúcsú fa gráf, amelyet egy $k-1$ csúcsú csillag gráfból kapunk úgy, hogy egyik élét egy új csúccsal két részre osztjuk. Így T_k^*-nak lesz egy $k-2$-fokú csúcsa, egy 2-fokú és $k-2$ darab 1-fokú. Ezt a 2. ábrán egy példával szemléltetem.



2. ábra. T_6^*

A következő lemmával megmutatjuk, hogy T_k^* az egyetlen T_k fa, amelyhez létezik azonos csúcsszámú T_k-szaturált fa, majd ennek felhasználásával belátjuk, hogy $Sat(n, T_k^*)$ csillag gráfok erdője.

2.12. Lemma. [7] Ha létezik olyan k csúcsú T_k és $T_k^{'}$ fa, hogy $T_k^{'}$ T_k-szaturált, akkor minden $k \geq 4$ esetén $T_k = T_k^*$ és $T_k^{'} = S_k$.

Bizonyítás. Ha $k = 4$, akkor csak két fa létezik, T_k^* és S_4, így ebben az esetben könnyen látszik, hogy igaz az állítás. Ha $k = 5$, akkor 3 fa létezik, ezek közül pedig csak S_5-re teljesül, hogy T_5^*-szaturált, tehát ekkor is igaz a lemma.

Tegyük fel, hogy $k \geq 6$ és $T_k^{'} \neq S_k$. Ekkor $T_k^{'}$ biztosan tartalmaz egy legalább 4 csúcsból álló utat. Továbbá, mivel $T_k^{'}$ T_k-szaturált, és a csúcsszámuk megegyezik, ezért minden $e \notin T_k^{'}$-hoz létezik $e' \in T_k^{'}$, hogy $T_k^{'} + e - e' = T_k$. Válasszunk ki egy P leghosszabb utat $T_k^{'}$-ben: $P = (x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}, x_q)$, $q \geq 4$. Ekkor két eset lehetséges:

1.eset: Tegyük fel, hogy $d(x_2) \geq 3$ vagy $d(x_{q-1}) \geq 3$. Vizsgáljuk mondjuk a $d(x_2) \geq 3$ esetet (ezzel nem veszítünk az általánosságból). Legyen y egy x_1-től és x_3-tól eltérő, x_2-vel szomszédos csúcs, amelynek fokszáma 1. Ilyen y biztosan létezik, hiszen $d(x_2) \geq 3$, T_k'-ben nincs kör, P pedig egy leghosszabb út, ezért ha x_2-nek nem lenne levél szomszédja, akkor ez nem lenne leghosszabb út. Legyen $e = x_1 y \notin E(T_k^{'})$, $e' = y x_2$ (ezen e' választással nem veszítünk az általánosságból). Mivel $T_k^{'} + e - e' = T_k$-nak teljesülnie kell, ezért arra a következtetésre jutunk, hogy T_k'-nek pontosan eggyel több 1-fokú csúcsa van, mint T_k-nak. Most figyeljük meg, hogy ha $T_k^{'}$ tartalmazna két nem szomszédos, legalább 2-fokú u és v csúcsot, akkor a $T_k' + uv$-ben keletkező T_k másolat legalább annyi 1-fokú csúcsot tartalmazna, mint T_k', így az előbbi megállapításunk nem teljesülne. Ezért $T_k^{'}$-ben minden legalább 2-fokú csúcspár szomszédos, ami pont azt jelenti, hogy $T_k^{'}$-nek maximum 2 darab legalább 2-fokú csúcsa van, és mivel $T_k^{'} \neq S_k$, ezért pontosan 2, u és v. Ezenkívül, u és v fokszáma meg kell egyezzen, hiszen az u szomszédai között behúzott él által keletkező T_k izomorf kell legyen a v szomszédai között behúzott él által keletkezővel. Emiatt $T_k^{'}$ szükségképpen egy szimmetrikus kettőscsillag.

Legyen most e egy leghosszabb út végpontjai közötti nem-él. Ekkor nincs olyan e' él, amelynek törlése olyan fát eredményezne, mely izomorf egy olyan fával, amit úgy kapunk, hogy e-t közös szomszéddal rendelkező csúcsok között húzzuk be. Így $T_k^{'}$ semmilyen fára nem T_k-szaturált, ami ellentmondás.

2.eset: Tegyük fel, hogy $d(x_2) = d(x_{q-1}) = 2$. Legyen $e = x_1 x_3 \notin E(T_k^{'})$. Azért, hogy ne ugyanazt a T_k'-t kapjuk vissza, mint amiből kiindultunk, $e' = x_1 x_2$ kell legyen. Ekkor T_k-nak eggyel több levele van, mint T_k'-nek. Vizsgáljuk meg $T_k^{'} + x_1 x_q$-t is. Ahhoz, hogy a megfelelő számú levél keletkezzen, kéne találnunk egy olyan $T_k^{'} + x_1 x_q$-beli élet, amelynek törlése 3 darab 1-fokú csúcsot eredményezne. Ez viszont lehetetlen, hiszen egy él legfeljebb 2 csúcs fokszámához járul hozzá.

Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, ezért $T_k^{'}$ nem tartalmazhat 4, vagy annál több csúcsból álló utat, ezért mindenképp egy csillag kell legyen. Ebből pedig következik, hogy T_k csak a T_k^* lehet. ■

2.13. Tétel. *[7] Bármely T_k, $k \geq 5$ fára és bármely $n \geq k+2$-re $sat(n,T_k) \geq n - \left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor$. Sőt, T_k^* az egyetlen olyan fa, amely minden n esetén eléri ezt a minimumot.*

Bizonyítás. Legyen $G \in Sat(n,T_k)$ egy rögzített, $k \geq 5$ csúcsú T_k fára. Figyeljük meg, hogy G bármely kevesebb, mint k csúcsú komponense egy teljes gráf kell legyen, és bármely két komponens uniója legalább k csúcsot kell tartalmazzon. Mivel $k \geq 5$, ezért G-nek legfeljebb egy K_i $i = \{1,2\}$ komponense lehet.

Ezért, ha $T_k \neq T_k^*$, akkor a 2.12 lemma miatt G-nek bármely fa komponense legalább $k+1$ csúcsú, kivéve az előbb említett 2 vagy 1 csúcsú komponenst, így

$$sat(n,T_k) = |E(G)| \geq n - \left\lfloor \frac{n-1}{k+1} \right\rfloor - 1 \geq n - \left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség éles, ha $n \geq k^2+k+2$.

Tegyük fel, hogy $T_k = T_k^*$. Ha $|E(G)| < n - \left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor$, akkor G-nek több, mint $\left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor$ komponense van. Ha $n = \left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor k+1$ alakú, akkor G-nek lehet $\left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor$-nél több komponense úgy, hogy $\left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor$ darab k csúcsú csillag komponense és egy izolált csúcsa van. Viszont egy izolált csúcsot egy $k-1$ fokú csúccsal összekötve nem keletkezik T_k^*. Ezért az egyik k csúcsú komponenst és az izolált csúcsot le kell cserélni egy $k+1$ csúcsú csillag gráfra, így az élszám legalább $n - \left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor$. Ha n nem ilyen alakú, akkor legalább 2 komponensnek szigorúan kevesebb, mint k csúcsa van. Mivel ezek csak teljes gráfok lehetnek, melyekről tudjuk, hogy együtt több mint k csúccsal rendelkeznek, ezért ezt a két komponenst helyettesíthetjük egy azonos csúcsszámú csillag gráffal. Így létrejön egy G' gráf, amely szintén T_k^*-szaturált, viszont kevesebb éle van, ami ellentmond annak, hogy $G \in Sat(n,T_k)$.

Már csak azt kell megmutatni, hogy $T_k = T_k^*$ esetén ezt a minimumot el is éri. Legyen most G egy olyan n csúcsú erdő, amely $\frac{n}{k}$ darab S_k diszjunkt uniója, ha $n \equiv 0 \mod k$, $\frac{n-k-1}{k}$ darab S_k és egy S_{k+1} diszjunkt uniója, ha $n \equiv 1 \mod k$, és $\frac{n-k-p}{k}$ darab S_k, egy S_2 és egy S_{k+p-2} diszjunkt uniója, ha $n \equiv p \mod k$ minden $2 \leq p \leq k-1$-re. Ekkor G-nek pontosan $\left\lfloor \frac{n+k-2}{k} \right\rfloor$ komponense van. Nyilvánvaló, hogy G egyik komponense sem tartalmaz T_k^*-ot, tehát G sem. Láttuk, hogy bármely legalább k csúcsú komponensen belüli élet behúzva keletkezik T_k^*. Bármely két komponens közti élet behúzva is létrejön egy

T_k^*, mert minden legalább k csúcsú komponensen belül a legnagyobb fokszámú csúcs legalább $k-1$, az 1-fokú csúcsokból legalább eggyel több van a szükségesnél, és az új él behúzásával egy legalább 2-fokú csúcs is keletkezik, ezért G T_k^*-szaturált. Mivel G egy $\lfloor \frac{n+k-2}{k} \rfloor$ komponensű erdő, ezért G éleinek a száma pont $n - \lfloor \frac{n+k-2}{k} \rfloor$, így valóban eléri a minimumot bármely n esetén. ∎

2.4. Körök

Egy C_k-szaturált gráf éleinek a számára az eddig ismert legjobb becslést a következő tétel mondja ki. Jelenleg még nyitott kérdés, hogy ez optimális-e. Mindenesetre, bebizonyítjuk, hogy ez a konstrukció a szaturáltságot már teljesíti. (A következő bizonyítás során ahol hosszúságot írunk, ott az élszámra gondolunk, ezért ebben az esetben az alsóindex az élszámot jelöli.)

2.14. Tétel. *[12] Minden $k \geq 7$ és $n \geq 2k-5$-re*

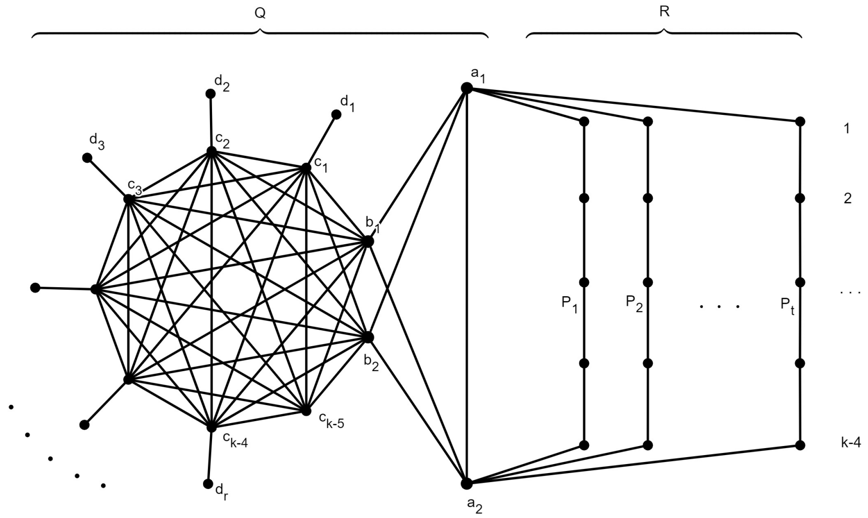
$$sat(n, C_k) < \left(1 + \frac{1}{k-4}\right)n + \binom{k-4}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $H = H_{k,n}$ egy n csúcsú C_k-szaturált gráf, $n > k \geq 7$ és $n = (k-1) + r + t(k-4)$, ahol $t \geq 1$ egész szám és $0 \leq r \leq k-5$. Legyen $V(H) = A \cup B \cup C \cup D \cup R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_t$, ahol A, B, C, D és R_i $(1 \leq i \leq t)$ páronként diszjunkt csúcshalmazok, valamint $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{k-5}\}$, $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$, $R_\alpha = \{r_{\alpha,1}, r_{\alpha,2}, \ldots, r_{\alpha,k-4}\}$ minden α-ra. Jelölje $Q = A \cup B \cup C \cup D$ és $R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_t$. H élhalmaza a következő: $b_1 b_2$ él nincs behúzva, így $C \cup B$ egy majdnem K_{k-3}, $B \cup A$ egy majdnem K_4, ezenkívül pedig r darab él megy c_i és d_i között, valamint t darab $k-3$ hosszú P_α út, amelynek a csúcsai az $A \cup R_\alpha$ halmaz elemei az a_1, a_2 végpontokkal. Ezt a konstrukciót a 3.ábra szemlélteti.

Ekkor az élszámra a következő egyenlőség teljesül:

$$|E(G)| = \binom{k-3}{2} + 4 + r + t(k-3).$$

Ezt átalakítva megkapjuk, a tételben szereplő felső becslést. Még meg kell mutatni, hogy ez valóban C_k-szaturált. Ehhez először azt bizonyítjuk be, hogy H nem tartalmaz C_k-t. Ha egy Y csúcshalmazú kör Q-ban van, akkor az csak $A \cup B \cup C$ része lehet, így $|Y| \leq k-1$.



3. ábra. C_k-szaturált gráf szerkezete

Ha Y tartalmaz egy $r_{\alpha,i}$-t, akkor $A \cup R_\alpha \subset Y$, ezért a $k-3$ hosszú P_α út biztosan része a körnek. Azonban figyeljük meg, hogy ugyan

$$\exists T_l \subset Q \; l \text{ hosszú út, } l \in \{1,2,4,5,\ldots,k-3,k-2\}, \; a_1, a_2 \text{ végpontokkal,} \qquad (5)$$

viszont $l = 3$ nem lehetséges, ezért $|Y| \neq k$. Azaz, H nem tartalmaz C_k-t.

Húzzunk be H-ban egy e élet. Megmutatjuk, hogy így keletkezik C_k. Ehhez először vegyük észre, hogy Q-ban minden a_i $(i = 1,2)$ és $q \in Q \setminus \{a_i\}$ csúcs össze van kötve egy $U^i(m)$ m hosszú úttal, ahol $\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \leq m \leq k-2$, azaz

$$\exists U^i(m) \subset Q \; m \text{ hosszú út, } m \in \{\lceil (k+1)/2 \rceil, \ldots, k-3, k-2\}, \qquad (6)$$

ahol a végpontok $a_i, q \in Q$.

4 esetet kell megvizsgálni.

1.eset: Ha $e \in A \cup R_\alpha$ és egyik vége a_i, akkor egy v hosszú $A \cup R_\alpha$-beli $a_1 \to a_2$ utat kapunk, ahol $2 \leq v \leq k-4$. Ez az út T_{k-v}-vel egy k hosszú kört alkot.

2.eset: e végpontjai $r_{\alpha,i}$ és $r_{\beta,j}$, $\alpha \neq \beta$, $1 \leq i \leq j \leq k-4$. Az $r_{\alpha,i}$ csúcs a P_α utat két részre osztja, az a_1-ből induló i hosszú P^1_α-ra, és az a_2-ben végződő $k-3-i$ hosszú P^2_α-ra. Legyen $\pi = P^1_\alpha e P^2_\beta$ út. Ennek hossza $k-2-j+i$. Mivel ez a hossz 3 és $k-2$ közé esik, ezért (5)-öt alkalmazva a megfelelő T_{j-i+2}-vel π kiegészíthető C_k-ra, hacsaknem

$j-i+2=3$. Ez utóbbi esetben az a_1a_2 él P^1_β, e, P^2_α-val alkot egy C_k-t.

3.eset: Ha e végpontjai $r_{\alpha,i}$ és $q \in (B \cup C \cup D)$, akkor a szimmetria miatt (valamint U^i_m definíciója miatt) feltehetjük, hogy $i \leq (k-3)/2$, így P^1_α hossza legfeljebb $\lfloor (k-3)/2 \rfloor$. Ekkor (6) miatt létezik egy olyan $U^1(m)$, hogy P^1_α, e és $U^1(m)$ egy C_k-t alkot.

4.eset: Ha $e \in Q$:

- $e = a_1c_1$ esetén P_1-et használva $a_1c_1b_1a_2P_1$-ben keletkezik C_k,
  (c_1 helyére bármely c_i írható)
- $e = a_1d_1$ esetén $d_1c_1c_2 \ldots c_{k-5}b_2a_2b_1a_1$-ben jön létre egy C_k,
  (d_1 helyére bármely d_j írható, csak a c_i-k sorrendje fog változni)
- $e = b_1b_2$ esetén $b_2a_1P_1a_2b_1$ által keletkezik egy C_k,
- $e = b_1d_1$ esetén $d_1c_1c_2 \ldots c_{k-5}b_2a_2a_1b_1$ alkot egy C_k-t,
  (d_1 helyére bármely d_j írható, csak a c_i-k sorrendje fog változni)
- $e = c_1d_2$ esetén $c_1d_2c_2 \ldots c_{k-5}b_2a_2a_1b_1$-ben lesz C_k,
  (c_1 helyére bármely c_i és d_2 helyére bármely d_j $(j \neq i)$ írható, csak a c_i-k sorrendje fog változni)
- végül pedig $e = d_1d_2$ esetén $c_1d_1d_2c_2 \ldots c_{k-5}b_2a_2b_1$ hoz létre egy C_k-t.
  (d_1 és d_2 helyére bármely d_k és d_j $(k \neq j)$ írható, csak a c_i-k sorrendje fog változni)

Mivel bármely él behúzása C_k egy másolatát eredményezi, ezért H valóban C_k-szaturált.

■

3. Tetszőleges gráfok

Ebben a részben a tetszőleges **F**-szaturált gráfok éleinek minimális számával fogunk foglalkozni, általános becsléseket adunk a szaturált függvényre, valamint mutatunk néhány olyan példát, amikor a szaturált függvényre teljesül, vagy épp nem teljesül a monotonitás. A későbbiekben bevezetünk egy súlyfüggvényt, melynek segítségével újabb korlátot tudunk adni egy tetszőleges F-szaturált gráf élszámára.

3.1. Definíció. Legyen $\mathbf{F} = \{F_1, \ldots\}$ a tiltott gráfok osztálya. Egy G gráf **F**-*szaturált*, ha $\nexists F_i \in \mathbf{F}$, amely G-nek részgráfja, de G-ben egy tetszőleges élet behúzva keletkezik benne tiltott részgráf.

Jelölje $sat(n, \mathbf{F})$ az n csúcsú, **F**-szaturált gráfok éleinek minimális számát. Egy **F**-szaturált gráfot, melynek $sat(n, \mathbf{F})$ éle van, **F**-minimálisnak nevezünk.

Megjegyzés. Ha $\mathbf{F} = \{F\}$, akkor $sat(n, F)$-et írunk $sat(n, \{F\})$ helyett.

Először nézzük meg a dichotómiát tetszőleges gráfokra.

3.2. Tétel. *[2] Legyen F egy olyan gráf, amely tartalmaz izolált élet. Ekkor létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > n_0$-ra $sat(n, F) = sat(n_0, F)$, különben $sat(n, F) = \Theta(n)$.*

Bizonyítás. Jelölje k az izolált csúcsok számát F-ben, és legyen $p = |V(F)| - 1 - k$. Figyeljük meg, hogy ekkor egy K_p $n - p$ izolált csúcs hozzávételével F-szaturált lesz, ezért $sat(n, F) \leq \binom{p}{2}$, ha $n \geq |V(F)|$.

Legyen G egy n csúcsú F-et szaturáló minimális élszámú gráf. Tegyük fel, hogy $n > (p^2 - p) + k + 2$. Az előző bekezdés alapján G-nek legfeljebb $\binom{p}{2}$ éle van, és mivel $n > (p^2 - p) + k + 2$, ezért G biztosan több, mint $k + 2$ izolált csúcsot tartalmaz. Töröljünk ki egy v izolált csúcsot G-ből, az így keletkező gráf pedig legyen G', amelynek van legalább $k + 2$ izolált csúcsa. Azt állítjuk, hogy G' is szaturálja F-et. Nyilvánvaló, hogy G' nem tartalmaz F-et. Másrészt, G' egy tetszőleges e nem-élét kiválasztva, és ezt behúzva G'-ben, keletkezik benne F. Ennek belátásához húzzuk be az e-nek megfelelő élet G-ben is, amit az egyszerűség kedvéért szintén e-vel jelölünk. Ekkor keletkezik F egy másolata $G + e$-ben is. Mivel $G + e$-nek több, mint k izolált csúcsa van, F-nek pedig legfeljebb k, ezért feltehető, hogy F-nek ez a másolata nem tartalmazza v-t, különben v felcserélhető G-nek egy F-en kívüli izolált csúcsával, hogy egy v-t nem használó F másolatot kapjunk. Így F $G + e$-beli másolata megfelel F $G' + e$-beli másolatának, vagyis

G' valóban F-szaturált. Hasonlóan belátható, hogy G-hez hozzávéve egy izolált csúcsot, szintén egy F-szaturált gráfot kapunk.

Mivel feltettük, hogy $|E(G)| = sat(n,F)$, ebből következik, hogy $sat(n-1,F) \leq sat(n,F)$ és $sat(n+1,F) \leq sat(n,F)$, tehát a fent megválasztott n-től kezdve a függvény konstans.

Legyen $n < (p^2 - p) + k + 2$. Ekkor G-ben nincs legalább kettővel több izolált csúcs, így nyilvánvaló, hogy $sat(n,F) = \Omega(n)$. $sat(n,F) = O(n)$ teljesülését a 3.6 tételben fogjuk látni. Ezekből következik, hogy $sat(n,F) = \Theta(n)$. ■

Nézzünk néhány olyan példát is, ahol a szaturált függvény az extremális függvénnyel ellentétben nem mindig lesz monoton. Ezt ellenpéldákkal fogjuk igazolni.

3.3. Definíció. $ex(n,\mathbf{F}) = \max\{|E(G)| : G\ \mathbf{F}\text{-szaturált}, |V(G)| = n\}$

3.4. Példa. *[2]* Tudjuk, hogy az

$$ex(n,\mathbf{F}) \leq ex(n+1,\mathbf{F})$$

egyenlőtlenség minden n és $\mathbf{F}$ esetén teljesül. Ezzel szemben a szaturált függvénynél a következő esetben ez nem lesz igaz. Legyen $\mathbf{F} = \{P_4\}$. Ekkor

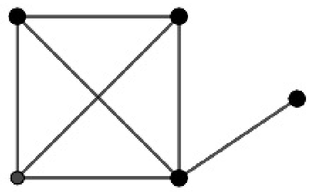
$$sat(2n-1,\mathbf{F}) = n+1, \quad \text{míg} \quad sat(2n,\mathbf{F}) = n.$$

Ez a 2.10 tétel következménye.

3.5. Példa. *[2]* Ha F_1 részgráfja F_2-nek, akkor minden n-re $ex(n,F_1) \leq ex(n,F_2)$. Viszont, ha $F_1 = K_4$, F_2 pedig a 4.ábra szerinti gráf, akkor

$$sat(n,F_1) = 2n-3, \qquad sat(n,F_2) \leq \frac{3}{2}n,$$

ugyanis egy K_4-szaturált gráf minimális élszámát úgy kapjuk meg, hogy két csúcsot összekötünk, majd ezt a kettőt összekötjük az összes többi csúccsal. Így $(n-2)2+1 = 2n-3$ élünk lesz. Viszont K_4-hez hozzávéve egy izolált csúcsot, már F_2-szaturált gráfot kapunk, vagyis egy K_4 és K_{n-4} diszjunkt uniója adja a minimális élszámot, erre pedig jó felső korlát a $\frac{3}{2}n$. $n = 8$ esetén már láthatjuk, hogy ez kisebb lesz, mint a $2n-3$. Azaz a monotonitás valóban nem teljesül.



4. ábra.

Ahhoz, hogy egy egész gráfcsaládra tudjunk adni egy explicit felső becslést, vezessük be a következő jelöléseket. Adott az $\mathbf{F}$, a tiltott gráfok osztálya. Legyen

$$u = u(\mathbf{F}) = min\{|V(F)| - \alpha(F) - 1 : F \in \mathbf{F}, \alpha(F) \text{az } F \text{ független csúcsainak maximális száma}\},$$

$$t = t(\mathbf{F}) = min\{|E(F')| : F' \subseteq F \in \mathbf{F}, \text{ ahol } F' \text{ egy } S \text{ maximális méretű független csúcshalmaz, } S \subset V(F), |S| = |V(F)| - u - 1 \text{ és egy } x \in V(F) \setminus S \text{ csúcs feszített részgráfja}\}$$

3.6. Tétel. *[2] $sat(n,\boldsymbol{F}) \leq un + \frac{1}{2}(t-1)(n-u) - \binom{u+1}{2}$, ha n elég nagy.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz két lemmára, úgyhogy először foglalkozzunk ezekkel:

3.7. Lemma. [2] Ha minden $F_i \in \mathbf{F}$ összefüggő és G $\mathbf{F}$-szaturált, akkor G minden (összefüggő) komponense $\mathbf{F}$-szaturált.

Bizonyítás. Mivel G $\mathbf{F}$-szaturált, ezért egyik komponense sem tartalmazhat $F_i \in \mathbf{F}$-et semmilyen i-re. Legyen G egyik ilyen komponense G'. Tegyük fel, hogy létezik $uv \notin E(G)$. Mivel $G + uv$-ben létre kell jöjjön valamely $F_i \in \mathbf{F}$ másolata, és F_i-ről is feltettük, hogy összefüggő, ezért F_i ezen másolatának egésze $G' + uv$-ben kell keletkezzen. Emiatt G' is $\mathbf{F}$-szaturált. ∎

3.8. Lemma. [2] Legyen $\mathbf{F}' = \{F_i \setminus \{u\} : u \in V(F_i),\ F_i \in \mathbf{F}\}$, és tegyük fel, hogy létezik $x \in V(G_n) : d(x) = n-1$. Ekkor G_n akkor, és csak akkor $\mathbf{F}$-szaturált, ha $G_n \setminus \{x\}$ $\mathbf{F}'$-szaturált.

Bizonyítás. Legyen G_n az az n csúcsú gráf, amelynek létezik olyan $x \in V(G_n)$ csúcsa, hogy $d(x) = n-1$, valamint legyen $G_{n-1} = G_n \setminus \{x\}$, ahol $d(x) = n-1$ és jelölje

$F_i' = F_i \setminus \{u\}$, $F_i \in \mathbf{F}$, $u \in V(F_i)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Legyen G_n $\mathbf{F}$-szaturált. Először megmutatjuk, hogy G_{n-1} nem tartalmazza $\mathbf{F}'$ egyetlen elemét sem. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $F_i' \in \mathbf{F}'$, amelynek másolata megtalálható G_{n-1}-ben. Vegyük hozzá G_{n-1}-hez a G_{n-1} definíciójában szereplő x csúcsot, és húzzuk be az éleket. Mivel $d(x) = n-1$ (viszont $d(u) \leq n-1$), és feltettük, hogy G_{n-1} tartalmaz F_i'-t, ezért G_n biztosan tartalmazni fogja F_i egy másolatát. Ez pedig ellentmondás, hiszen feltettük, hogy G_n $\mathbf{F}$-szaturált.

Most belátjuk, hogy G_{n-1}-ben bármely élet behúzva, keletkezik valamely F_i' egy másolata. Vegyünk $\overline{G}$-ből egy e élet. Mivel G_n $\mathbf{F}$-szaturált, $G_n + e$-nek tartalmaznia kell valamely F_i egy példányát. Ha x része az F_i G_n-beli másolatának, akkor G_{n-1}-ben az e-nek megfelelő élet behúzva (amit szintén e-vel jelölünk) F_i' egy másolata is megtalálható lesz $G_{n-1} + e$-ben (mert ekkor x feleltethető meg u-nak). Ha x nem része ennek az F_i másolatnak $G_n + e$-ben, akkor $G_{n-1} + e$-ben F_i másolata keletkezik. Emiatt viszont F_i' egy másolata is benne lesz. Azaz G_{n-1} $\mathbf{F}'$-szaturált.

$\boxed{\Leftarrow}$ Legyen G_{n-1} $\mathbf{F}'$-szaturált. Ismét, először azt látjuk be, hogy G_n nem tartalmaz semmilyen $F_i \in \mathbf{F}$ másolatot. Indirekt tegyük fel, hogy tartalmaz. Mivel $F_i' = F_i \setminus \{u\}$, ezért G_{n-1} tartalmazza F_i' egy másolatát. Ez viszont ellentmond G_{n-1} $\mathbf{F}'$-szaturáltságának.

Már csak azt kell megmutatni, hogy bármely $\overline{G}_n$-beli e esetén $G_n + e$ tartalmazza valamely F_i egy másolatát. Mivel $F_i = F_i' \cup \{u\}$, ahol u ugyanaz az u, mint F_i' definíciójában, valamint tudjuk, hogy $G_{n-1} + e$-ben van F_i', ezért $G_n + e$-ben biztosan keletkezik F_i, hiszen $d(x) = n-1$, míg $d(u) \leq n-1$. Ezért G_n $\mathbf{F}$-szaturált. ■

3.6 tétel bizonyítása. Először tegyük fel, hogy $u = 0$. Ekkor létezik olyan $F \in \mathbf{F}$, ami egy S_{t+1} és izolált csúcsok diszjunkt uniójából áll. Ebből következik, hogy ha G_n $\mathbf{F}$-szaturált, akkor minden $x \in V(G_n)$-re, ahol $n \geq |V(F)|$ teljesül, hogy $d(x) \leq t-1$, hiszen ha lenne ennél nagyobb fokszámú csúcs, akkor lenne benne S_{t+1}, ami ellentmond a szaturáltságnak, vagyis

$$|E(G_n)| \leq \frac{t-1}{2} n,$$

azaz ebben az esetben igaz a tétel állítása.

Most tegyük fel, hogy $u \geq 1$. Ekkor egyetlen $F \in \mathbf{F}$ sem lehet egy csillag gráf, hiszen ebben az esetben a független csúcsok maximális száma kisebb kell legyen, mint $|V(F)| - 1$. Legyen $V(G_n) = \{x_1, \ldots x_n\}$, és $d(x_n) = n-1$. Ekkor a 3.8 lemma miatt tudjuk, hogy G_n akkor, és csak akkor $\mathbf{F}$-szaturált, ha G_{n-1} $\mathbf{F}'$-szaturált. Legyen $d(x_n) = d(x_{n-1}) = \ldots = d(x_{n-u+1}) = n-1$, és egyesével konstruáljuk meg az $\mathbf{F}', \mathbf{F}'', \ldots, \mathbf{F}^{(\mathbf{u})}$ osztályokat ($\mathbf{F}'' = (\mathbf{F}')'$, stb). Újra és újra felhasználva a 3.8 lemmát, megkapjuk, hogy G_n akkor, és csak akkor $\mathbf{F}$-szaturált, ha G_{n-u} $\mathbf{F}^{(\mathbf{u})}$-szaturált. u és t definíciójából következik, hogy $S_{t+1} \in \mathbf{F}^{(\mathbf{u})}$. Ebből pedig egyértelműen adódik, hogy egy tetszőleges $\mathbf{F}^{(\mathbf{u})}$-szaturált G_{n-u} gráfnak legfeljebb $\frac{1}{2}(n-u)(t-1)$ éle lehet. Mivel az $x_n, \ldots, x_{n-u+1}$ csúcsok fokszáma pontosan $n-1$, ezért a belőlük kiinduló élek száma $u(n-1) - \binom{u}{2} = un - \binom{u+1}{2}$, így ezeket összeadva pont a tételben szereplő felső becslést kapjuk. ■

Becslés súlyfüggvénnyel

Most egy picit másképpen fogjuk a szaturálást vizsgálni, ugyanis ehhez egy másik függvényt is felhasználunk, ez lesz a súlyfüggvény. Először is, vezessük be a témához szükséges alapfogalmakat.

3.9. Definíció. A G gráf egy x csúcsának a *nyílt szomszédságán* azon csúcsok halmazát értjük, amelyekből megy él x-be, azaz $N_G(x) = \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$. Az x csúcs *zárt szomszédsága* $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$.

Jelölje $d_G(x) = |N_G(x)|$ az x csúcs fokszámát, valamint $d_{G,S}(x) = |N_G(x) \cap S|$ az x S-beli szomszédainak a számát, ahol $S \subseteq V(G)$. Ha a szövegkörnyezetből egyértelműen kiderül, hogy melyik gráfról van szó, akkor G-t elhagyhatjuk az alsó indexből, így a jelölések $N(x)$, $d(x)$, $d_S(x)$-re egyszerűsödnek.

3.10. Definíció. Legyen $uv \in E(G)$, ahol $u, v \in V(G)$ és $d(u) \leq d(v)$. Ekkor jelölje $wt(uv) = 2|N(u) \cap N(v)| + |N(v) - N(u)|$ az uv él *súlyát.*

Legyen az F gráf súlya $wt(F) = \min\limits_{uv \in E(F)} wt(uv)$. Ha $E(F) = \emptyset$, akkor $wt(F) = \infty$.

3.11. Tétel. *[4] Minden F gráfhoz létezik c'_F konstans, hogy*

$$sat(n,F) \geq \frac{wt(F)-1}{2} n - c'_F.$$

Bizonyítás. Először is, vegyük észre, hogy $wt(F) \geq 1$, minden F esetén, valamint, hogy a tétel triviális, ha $wt(F) = 1$. Mivel $wt(F)$ mindenképp egy egész szám, feltehetjük, hogy $wt(F) \geq 2$.

Legyen G egy F-szaturált gráf, x^* egy legkisebb fokszámú csúcsa G-nek, $B = N_G(x^*)$, vagyis $|B| = d_G(x^*)$. Figyeljük meg, hogy ha $d_G(x^*) \geq wt(F) - 1$, akkor mivel minden gráfra tudjuk, hogy a fokszámok összege megegyezik az élszám kétszeresével, így az

$$|E(G)| \geq \frac{wt(F)-1}{2}n$$

képlet azonnal adódik, ezért foglalkozzunk a $d_G(x^*) < wt(F) - 1$ esettel. Mivel tudjuk, hogy $d_G(x^*)$ és $wt(F)$ értéke is egész szám, ezért feltehető, hogy $d_G(x^*) \leq wt(F) - 2$.

Tekintsük bármely $y \in V(G) - N[x^*]$ csúcsot. Ekkor a szaturált függvény definíciójából következik, hogy $G + (x^*y)$ tartalmaz F-et. Legyen $\phi : V(F) \longrightarrow V(G + x^*y)$ az F $G + (x^*y)$-ba történő beágyazódását leíró függvény. Mivel tudjuk, hogy G nem tartalmaz F-et, ezért az új x^*y él egy $uv \in E(F)$ élnek feleltethető meg. Tegyük fel, hogy $d_F(u) \leq d_F(v)$, és legyen $b = |N_F(u) \cap N_F(v)|$, valamint $a = d_F(v) - b$. Ekkor $wt(uv) = a + 2b$ alakban áll elő.

Először azt állítjuk, hogy $d_G(y) \geq a + b - 1$. Ehhez két esetet kell megvizsgálni:
1.eset: Ha $y = \phi(u)$, akkor

$$d_G(y) \geq d_G(x^*) \geq d_F(v) - 1 = a + b - 1.$$

2.eset: Hasonlóan, ha $y = \phi(v)$, akkor

$$d_G(y) \geq d_F(v) - 1 \geq a + b - 1.$$

Mi pedig pont ezt állítottuk.

Most figyeljük meg, hogy függetlenül attól, hogy $y = \phi(u)$, vagy $y = \phi(v)$,

$$\phi(N_F(u) \cap N_F(v)) \subseteq N_G(x^*) = B,$$

azaz a G gráfban az y csúcsnak biztosan van b darab szomszédja a B halmazból, ezen kívül pedig legalább $a - 1$ további él indul ki belőle, így minden $y \in \overline{B} - \{x^*\}$-ra teljesül, hogy

$$2d_{G,B}(y) + d_{G,\overline{B}}(y) \geq 2b + a - 1 = wt(uv) - 1 \geq wt(F) - 1.$$

Most vegyük észre, hogy

$$\sum_{x \in B} d_G(x) \geq \sum_{y \in \overline{B}} d_{G,B}(y).$$

Ebből következik, hogy

$$
\begin{aligned}
|E(G)| &= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{x\in B} d_G(x) + \sum_{y\in\overline{B}} d_G(y)\right)\\
&\geq \tfrac{1}{2}\left(\sum_{y\in\overline{B}} d_{G,B}(y) + \sum_{y\in\overline{B}} d_{G,B}(y)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{y\in\overline{B}}\left(2d_{G,B}(y) + d_{G,\overline{B}}(y)\right)\\
&\geq \tfrac{2d_G(x^*)+(wt(F)-1)|\overline{B}-\{x^*\}|}{2}\\
&= \tfrac{2d_G(x^*)+(wt(F)-1)(n-1-d_G(x^*))}{2}\\
&= \tfrac{(wt(F)-1)}{2}n - c'_F
\end{aligned}
$$

ahol $c'_F = \frac{d_G(x^*)(wt(F)-3)+(wt(F)-1)}{2}$.

Mivel azt tettük fel, hogy $0 \leq d_G(x^*) \leq wt(F)-2$, ezért a c'_F érték a $d_G(x^*) = wt(F)-2$-ben maximalizálható, ahol $wt(F) \geq 2$. Ebből adódik, hogy

$$sat(n,F) \geq \frac{wt(F)-1}{2}n - \frac{wt(F)^2-4wt(F)+5}{2},$$

minden $wt(F) \geq 2$-re. ■

3.12. Példa. Legyen $F = K_3$. Ekkor $wt(F) = 3$. A képletbe behelyettesítve minden n-re azt kapjuk, hogy $sat(n,F) \geq n-1$. Ez igaz, sőt ebben az esetben éles a becslés, hiszen egy csillag gráf a minimális élű K_3-szaturált gráf. Az n csúcsú csillag gráfokról pedig tudjuk, hogy pontosan $n-1$ élük van.

4. Rendezett gráfok szaturálása

A közelmúltban nagy figyelmet kapott a $(0,1)$-mátrixok szaturálásának problémája, ami valójában tekinthető a rendezett páros gráfok szaturálási problémájának. Ez fog minket elvezetni a lineárisan, valamint a ciklikusan rendezett gráfok vizsgálatához. Mindhárom esetben bebizonyítjuk a dichotómiát, majd mutatunk néhány példát korlátos és lineáris szaturált függvényekre is.

4.1. (0,1)-mátrixok

4.1. Definíció. Azokat a mátrixokat, amelyeknek minden eleme 0 vagy 1, $(0,1)$-*mátrixoknak* nevezzük.

A következőkben legyen $P^{r\times s}$ és $M^{m\times n}$ egy $(0,1)$-mátrix, $r \leq m$ és $s \leq n$.

4.2. Definíció. Az M mátrix *tartalmazza* a P mátrixot (ami nem egy csupa 0-ból álló $(0,1)$-mátrix), ha M tartalmaz egy olyan P' részmátrixot, amely P-vé alakítható néhány (esetleg 0) 1-es 0-ra cserélésével. *M elkerüli P*-t, ha nem tartalmazza P-t.

4.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az M mátrix *P-szaturált*, ha M nem tartalmaz P-t részmátrixként, és M bármely 0 elemét 1-re cserélve az így keletkező M' tartalmaz P-t.

Az M-beli 1-ek számát M súlyának nevezzük. A minimális súlyú P-szaturált M mátrixot jelölje $sat(m,n,P)$, a maximálisat pedig $ex(m,n,P)$. Legyen $sat(n,P) = sat(n,n,P)$ és $ex(n,P) = ex(n,n,P)$.

P-t általában tiltott mátrixnak nevezzük. Ha P egy olyan négyzetes mátrix, amelynek minden sorában és oszlopában pontosan egy darab 1 van, akkor P-t permutációs mátrixnak hívjuk.

4.1. Megfigyelés. A definícióból adódik, hogy $sat(m,n,P) \leq ex(m,n,P)$.

4.4. Definíció. Egy $M = [m_{ij}]$ $m \times n$-es $(0,1)$-mátrixban *teljes jobbról-balra cikcakk útnak* (röviden teljes $R-L$ cikcakk út) nevezzük azt az utat, amelyben

i) $m+n-1$ darab 1 van,

ii) $m_{1n} = m_{m1} = 1$,

iii) $m_{m1} = 1$-et kivéve minden M-beli 1-nek van egy 1 szomszédja vagy közvetlenül tőle balra, vagy közvetlenül alatta (mindkét irányban nem lehet).

A teljes $L-R$ cikcakk út hasonlóan definiálható $m_{11} = m_{mn} = 1$-gyel.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. ábra. Példa teljes $R-L$ cikcakk útra egy (8×8)-as mátrixban

4.5. Tétel. *[11] Legyen I_k egy $k\times k$-as egységmátrix. Ekkor $sat(m,n,I_k) = ex(m,n,I_k) = (k-1)(m+n-(k-1))$, ha $m,n \geq k \geq 3$.*

Bizonyítás. Először az ex függvényre bizonyítjuk a tételt. Legyen M egy $m\times n$-es I_k-szaturált $(0,1)$-mátrix. Tudjuk, hogy M-nek összesen $(m+n-1)$ darab átlója van, és minden átlójában az 1-ek száma legfeljebb $(k-1)$. Nevezzük ezt az átló hosszának. A mátrix sarkaiból indulva mindkét oldalon $1-1$ $1,2,\ldots,k-2$ hosszú átló lehetséges, így ezekben legfeljebb $2\frac{(k-2)(k-1)}{2} = (k-2)(k-1)$ 1 fordulhat elő. Ezenkívül még $(m+n-1-2(k-2))$ darab $(k-1)$ hosszú átló lehet. Ezeket összeadva, legfeljebb

$$(k-1)(k-2)+(k-1)(m+n-1-2(k-2)) = (k-1)(m+n-(k-1))$$

darab 1-et tartalmazhat az M. Az $ex(m,n,I_k) = (k-1)(m+n-(k-1))$ teljesüléséhez még be kell látni, hogy $sat(m,n,I_k) \geq (k-1)(m+n-(k-1))$.

Legyen $M = [m_{ij}]$ egy I_k-szaturált $m\times n$-es mátrix, amelyben kevesebb, mint $(k-1)(m+n-(k-1))$ 1 van. Tekintsük M minden sorában a legbaloldalibb 1-eket. Ha létezik ezeken a legbaloldalibb 1-eken átmenő, m_{1n}-et m_{m1}-gyel összekötő teljes $R-L$ cikcakk út, akkor az út során felhasznált 1-eket 0-ra cserélve, majd az első sort és oszlopot kitörölve, egy maximális 1-et tartalmazó, I_{k-1}-et elkerülő $(m-1)\times(n-1)$-es

$(0,1)$-mátrixot kapunk (mert a teljes $R-L$ cikcakk út minden eleme különböző átlóban volt, így azok 0-ra cserélésével pontosan egy darab 1 tűnik el minden átlóból, ezért ha az így keletkező mátrix nem lenne I_{k-1}-szaturált, az eredeti sem lehetne I_k-szaturált, ami ellentmondás). Erre indukciószerűen használjuk ezt az eljárást, ameddig tudjuk.

Tegyük fel, hogy ezeken a legbaloldalibb 1-eken keresztül már nem létezik ilyen cikcakk út. Az m_{1n}-ből indulva követjük a cikcakk utat úgy, hogy mindig a lehető legtöbbet balra, majd a lehető legtöbbet lefele lépünk. Így elérünk egy olyan $m_{kl} = 1$-et, amelyre igaz, hogy $m_{k,l-1} = 0$ és $m_{k+1,l} = 0$. Tegyük fel, hogy van $m_{kp} = 1$, ahol $1 \geq p \geq l-2$. Ekkor $m_{k,l-1}$ alatt jobbra nem létezhet I_{k-1}, különben M-ben lett volna I_k. Ezért $m_{k,p+1} = \ldots = m_{kl} = 1$ kell legyen (hogy teljesüljön a szaturáltság), és így folytathatjuk a cikcakk utat. Ha pedig $m_{k+1,l} = 0$-t cseréljük egy 1-re, akkor nem jöhet létre I_{k-1}, hiszen ha keletkezne, akkor $m_{k+1,l}$ az eredeti M mátrixban is egy I_k része lett volna. Ezért az 1-ek számát minden esetben növelhetjük, ha M kevesebb, mint $(k-1)(m+n-(k-1)$ darab 1-et tartalmazott, így $sat(m,n,I_k) \geq (k-1)(m+n-(k-1))$.

Mivel beláttuk, hogy legalább ennyi 1 szükséges, valamint azt is, hogy legfeljebb ennyi lehet, ezért $ex(m,n,I_k) = (k-1)(m+n-(k-1))$ teljesül. A $sat(m,n,I_k)$-ra pedig a 4.1 megfigyelésből következik az egyenlőség. ∎

Az egyenlőség teljesülése miatt az alábbi algoritmus minden lefutása ugyanannyi 1-et tartalmazó $m \times n$-es mátrixot eredményez, melyek közül ezzel az eljárással az összes megkapható.

Algoritmus: Maximális I_k-t elkerülő mátrix

---

1. Legyen M egy $m \times n$-es csupa 0 mátrix.
2. Amíg M-ben kevesebb, mint $(k-1)(m+n-(k-1))$ darab 1 van, keressünk egy olyan 0 elemet, amelyet 1-re cserélve I_k-t elkerülő mátrixot kapunk, és cseréljük ki.
3. Output M.

Most nézzük meg ezt a korlátot nem (feltétlenül) permutációs mátrixra is. Ezzel együtt fogjuk vizsgálni a dichotómiát.

4.6. Tétel. *[9] Bármely $k \times l$-es P mátrixra, és bármely fix n_0, m_0-ra*

$$sat(m,n,P) \leq (k-1)n + (l-1)m - (k-1)(l-1),$$

$$sat(n,P) = O(1) \text{ vagy } sat(n,P) = \Theta(n),$$
$$sat(m_0,n,P) = O(1) \text{ vagy } sat(m_0,n,P) = \Theta(n),$$
$$sat(m,n_0,P) = O(1) \text{ vagy } sat(m,n_0,P) = \Theta(m).$$

Továbbá, ha $sat(m_0,n,P) = O(1)$, akkor $sat(m_1,n,P) = O(1)$ minden $m_1 > m_0$-re, és hasonlóan, ha $sat(m,n_0,P) = O(1)$, akkor $sat(m,n_1,P) = O(1)$ minden $n_1 > n_0$-ra.

Megjegyzés. Ha $n < k$ vagy $m < l$, akkor minden csupa 1-ből álló $m \times n$ mátrix elkerüli P-t, ezért $sat(m,n,P) = mn$, ami azt mutatja, hogy $n_0 < k$ és $m_0 < l$ esetben az 4.6 tételben $sat(m_0,n,P) = \Theta(n)$ és $sat(m,n_0,P) = \Theta(m)$ triviális.

Bizonyítás. Legyen P egy $k \times l$-es nem csupa 0 mátrix, amely k'. sorának l'. oszlopában van egy 1. Legyen M egy olyan $m \times n$-es mátrix, amelynek az első $k'-1$ és az utolsó $k-k'$ sorában, valamint az első $l'-1$ és az utolsó $l-l'$ oszlopában egyesek állnak. Könnyen látszik, hogy ekkor M szaturálja P-t. Az M-ben lévő 1-eket megszámolva

$$sat(m,n,P) \leq (k-1)n + (l-1)m - (k-1)(l-1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami azt mutatja, hogy $sat(n,n,P)$, $sat(m_0,n,P)$ és $sat(m,n_0,P)$ legfeljebb lineárisan növekedhet.

Most bebizonyítjuk, hogy ez a függvény vagy korlátos, vagy lineáris.

Legyen k' =max(k,l). Tegyük fel, hogy $sat(n_0,n_0,P) < \frac{n_0}{k'-1}$, ahol $n_0 \geq k'-1$. Meg akarjuk mutatni, hogy ebben az esetben $sat(n,n,P) \leq sat(n_0,n_0,P)$ minden $n \geq n_0$-ra. Ebben az esetben létezik egy M_0 $n_0 \times n_0$ ($n_0 \geq k'$) méretű P-t szaturáló mátrix, amelynek a súlya kisebb, mint $\frac{n_0}{k'-1}$. Ekkor M_0-ban biztosan van $k-1$ egymást követő üres sor és $l-1$ egymást követő üres oszlop. Minden $n \geq n_0$-ra legyen M egy $n \times n$-es mátrix, melyet M_0-ból kapunk oly módon, hogy ezeket az üres sorokat és oszlopokat annyi új üres sorra és oszlopra cseréljük, amennyi szükséges.

Azt állítjuk, hogy M is egy szaturáló mátrix. Először is, nem tartalmazza P egy másolatát, mert (kihasználva, hogy P nem üres) ez a másolat legfeljebb $k-1$ új üres sort és $l-1$ üres oszlopot használ. Ez viszont épp azt jelenti, hogy P már M_0-ban is benne kellett volna legyen, ami ellentmondás. Másrészt, azt állítjuk, hogy M egy maximális P-t elkerülő mátrix. Valóban, ugyanis ha M-ben egy 0-t lecserélnénk egy 1-re, akkor találnánk egy ennek megfelelő 0-t M_0-ban is, így ha M nem lenne P-szaturált, akkor M_0 se lenne az, ami szintén ellentmondás.

Hasonlóan (vagy csak az üres sorokat, vagy csak az üres oszlopokat megtöbbszörözve) láthatjuk, hogy ha $sat(m_0,n_0,P) < \frac{n_0}{k-1}$, $n_0 \geq k-1$ és $m_0 \geq l-1$, akkor $sat(m_0,n,P) \leq sat(m_0,n_0,P)$ $(n \geq n_0)$, és ha $sat(m_0,n_0,P) < \frac{m_0}{l-1}$, $n_0 \geq k$ és $m_0 \geq l$, akkor $sat(m,n_0,P) \leq sat(m_0,n_0,P)$ $(m \geq m_0)$. ■

Nézzünk egy példát a lineáris viselkedésre:

4.7. Tétel. *[9] Ha* $P = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ *minta, ahol* $A,B \neq \mathbf{0}$ $(0,1)$*-részmátrixok, akkor*

$$sat(n,P) = \Theta(n).$$

Megjegyzés. Ennek a tételnek a megfordítása működik permutációs mátrixok esetén, viszont erre a bizonyítás hosszúsága miatt a dolgozatban nem kerül sor.

Bizonyítás. Legyen M egy $n \times n$-es P-t szaturáló $(0,1)$-mátrix, azaz amely elkerüli P-t, viszont bármely 0 elemét 1-re cserélve egy olyan M' mátrix keletkezik, amely tartalmazza P-t. Bebizonyítjuk, hogy M-nek nem lehet csupa 0 sora vagy oszlopa, ami természetesen a tételt is bizonyítja.

Indirekt tegyük fel, hogy $M = (m_{ij})$ tartalmaz egy csupa 0 sort (a csupa 0 oszlop nemlétének bizonyítása analóg módon történik). Legyen M l. sora ez a csupa 0 sor. Tetszőleges k-ra $(1 \leq k \leq n)$ az m_{lk} elemet 1-re cserélve megkapjuk a P-t tartalmazó M_k mátrixot. Figyeljük meg, hogy m_{l1}-et biztosan az M_1-ben létrejövő P mátrix A részmátrixa fogja tartalmazni, míg m_{ln}-et biztosan valamely M_k B részmátrixa.

Ebből következik, hogy létezik egy olyan $1 \leq k' < n$ maximális index, amelyre még az $M_{k'}$-ben keletkező P mátrix másolatának (P') A részmátrixa tartalmazza $m_{lk'}$-et. Jelölje B' a P' által tartalmazott B-t, A' pedig az A-t. $m_{l(k'+1)}$ már az $M_{k'+1}$-ben létrejövő P'' B'' részmátrixának a része. Hasonlóan, legyen A'' a P'' A-nak megfelelő részmátrixa.

Mivel A'' és B' egy M-beli P-t eredményez, ami ellentmond M P-szaturált tulajdonságának, ezért M valóban nem tartalmazhat csupa 0 sort. ■

4.2. Lineárisan rendezett gráfok

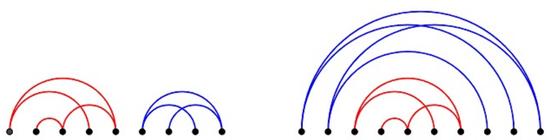
Innentől G-t gazdagráfnak, F-et pedig tiltott gráfnak nevezzük, és végig feltesszük, hogy F nem üres.

Egy rendezett gráf olyan gráf, amelynek csúcshalmaza lineárisan rendezett. Egy n csúcsú rendezett gráf esetén a csúcsokat az $1, 2, \ldots, n$ pozitív egész számokkal azonosítjuk oly módon, hogy a csúcsok sorrendje megegyezzen a megfelelő pozitív egész számok sorrendjével. Ezt úgy képzeljük el, hogy a csúcsok egy vízszintes vonalon fekszenek, balról jobbra rendezve. Az $e = uv$ él esetén mindig feltesszük, hogy $u < v$, valamint $l(e) = u$ és $r(e) = v$ az e él bal és jobb oldali végpontja.

Egy F rendezett gráf esetén legyen $sat_<(n, F)$ egy n csúcsú G rendezett gráf éleinek minimális száma úgy, hogy G ne tartalmazza F-et rendezett részgráfjaként, de bármely élet hozzáadva keletkezzen benne F egy másolata.

4.8. Definíció. F-ben két szomszédos csúcsot összekötő izolált élet *minimális élnek* nevezzük.
F-nek egy uv éle *szuperél*, ha létezik egy olyan xy él, hogy $u < x < y < v$.

4.9. Definíció. Egy F gráf *szétválasztható*, ha nem üres éldiszjunkt F_1 és F_2 gráfokra bontható úgy, hogy F_1 minden u_1v_1 élére, és F_2 minden u_2v_2 élére teljesüljön, hogy $u_1 < v_1 < u_2 < v_2$.
Egy F gráf *fészek alakú*, ha nem üres éldiszjunkt F_1 és F_2 gráfokra bontható úgy, hogy F_1 minden u_1v_1 élére, és F_2 minden u_2v_2 élére teljesüljön, hogy $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$.



6. ábra. Szétválasztható és fészek alakú gráf

4.10. Tétel. *[10] Ha adott egy F rendezett gráf, akkor $sat_<(n, F) = O(1)$ vagy $sat_<(n, F) = \Theta(n)$.*

Bizonyítás. Legyen G_n az n csúcsú F-et szaturáló gazdagráf, amelynek $sat_<(n, F)$ éle van. Ha F-nek nincsenek izolált csúcsai, akkor ha létezik olyan n_0, amelyre G_{n_0} két szomszédos izolált csúcsot tartalmaz, akkor ezeket a csúcsokat megtöbbszörözhetjük, hogy egy $n > n_0$ csúcsszámú gazdagráfot kapjunk, melynek élszáma azonos a G_{n_0} gazdagráf élszámával, megmutatva ezzel, hogy $sat_<(n,F) \leq sat_<(n_0,F) = O(1)$ minden $n \geq n_0$-ra. Ha F tartalmaz izolált csúcsokat, akkor 2 helyett $|V(F)|$ darab egymást követő izolált csúcs szükséges.

Így vagy $sat_<(n,F) = O(1)$, vagy ha nincs 2 (ill. $|V(F)|$) darab egymást követő izolált csúcs a gazdagráfban, akkor az pont azt jelenti, hogy $sat_<(n,F) = \Omega(n)$.

Már csak azt kell belátni, hogy $sat_<(n,F) = O(n)$ mindig teljesül. Ehhez vegyük F egy tetszőleges uv, $u < v$ élét úgy, hogy ne létezzen másik $u'v'$ él, hogy $u \leq u' < v' \leq v$. Jelöljük az u előtti csúcsok számát számát a-val, az u és v közöttiek számát b-vel, a v utániak számát pedig c-vel (így $a+b+c+2 = |V(F)|$).

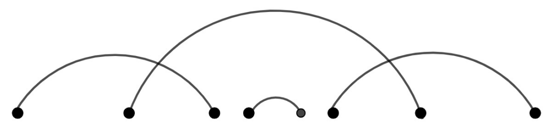
Minden $n > |V(F)|$ esetén legyen G_n egy olyan n csúcsú gráf, amelynek az első a és az utolsó c csúcsa össze van kötve minden csúccsal, valamint húzzuk be az összes olyan ij élet, ahol legfeljebb $b-1$ csúcs van i és j között. Ekkor G_n-nek $O(n)$ éle van. Azt állítjuk, hogy ez a gazdagráf F-szaturált.

Először is, G nem tartalmaz F-et: tegyük fel az ellenkezőjét, és vegyük F-nek egy G-ben található másolatát. F ezen példányában legyenek i és j az u és v szerepét betöltő csúcsok (G csúcskészlete $[n]$). Ha $i \leq a$, akkor G-ben nem található meg az F-ben szereplő a darab u előtti csúcs. Ha $j \geq n-c+1$, akkor G-ben az F-beli c darab v utáni csúcs nem lesz benne. Végül, ha $j-i < b$, akkor az F-ben szereplő u és v közötti b darab csúcsot nem tudjuk megtalálni G-ben. Azaz, minden eset ellentmondáshoz vezet.

Másodszor, G-hez hozzáadva egy tetszőleges ij élet az $i > a$, $j < n-c+1$ és $j-i \leq b$ feltételek teljesülni fognak, így az első a, az utolsó c és az i és j közti b csúcsot véve F egy másolata megtalálható lesz $G+uv$-ben. ∎

Példák mindkét esetre: (bizonyítás nélkül)

- Ha F nem tartalmaz minimális élet, akkor $sat_<(n,F) = \Theta(n)$.
- Ha F minden éle minimális él vagy szuperél, akkor $sat_<(n,F) = \Theta(n)$.
- Ha az F rendezett gráf szétválasztható vagy fészek alakú, akkor $sat_<(n,F) = \Theta(n)$.
- Ha F-ben az első (vagy az utolsó) csúcs minden szomszédjának a fokszáma nagyobb, mint 1, akkor $sat_<(n,F) = \Theta(n)$.
- $sat_<(n,\Gamma_{\{0,1,0\}}) = O(1)$.



7. ábra. $\Gamma_{\{0,1,0\}}$

4.3. Ciklikusan rendezett gráfok

Most a ciklikusan rendezett gráfok szaturált függvényére is bebizonyítjuk a dichotómiát.

C egy ciklikusan rendezett gráf, ha minden $u,v,x,\ \ u<x<v$ csúcsára teljesül, hogy u-ból az óramutató járásával megegyező irányba indulva először x-szel, majd v-vel találkozunk, ezzel meghatározva egy $I_{u,v}=\{x\in V(C): u<x<v\}$ nyílt intervallumot.

Egy F ciklikusan rendezett gráf esetén legyen $sat_{\circlearrowright}(n,F)$ egy n csúcsú G ciklikusan rendezett gráf éleinek minimális száma úgy, hogy G ne tartalmazza F-et ciklikusan rendezett részgráfként, de bármely élet hozzáadva keletkezzen benne F egy másolata.

4.11. Tétel. *[10] Ha adott egy C ciklikusan rendezett gráf, akkor $sat_{\circlearrowright}(n,C)=O(1)$ vagy $sat_{\circlearrowright}(n,C)=\Theta(n)$.*

Bizonyítás. A bizonyítás első része szinte ugyanaz, mint a 4.10. tételnél. Legyen G_n az n csúcsú C-szaturált gazdagráf, amelynek $sat_{\circlearrowright}(n,C)$ éle van. Ha C-nek nincsenek izolált csúcsai, akkor ha létezik olyan n_0, amelyre G_{n_0} két szomszédos izolált csúcsot tartalmaz, akkor ezeket a csúcsokat megtöbbszörözhetjük, hogy egy $n>n_0$ csúcsszámú gazdagráfot kapjunk, melynek élszáma azonos a G_{n_0} gazdagráf élszámával, megmutatva ezzel, hogy $sat_{\circlearrowright}(n,C)\leq sat_{\circlearrowright}(n_0,C)=O(1)$ minden $n\geq n_0$-ra. Ha C tartalmaz izolált csúcsokat, akkor 2 helyett $|V(C)|$ darab egymást követő izolált csúcs szükséges.

Így vagy $sat_{\circlearrowright}(n,C)=O(1)$, vagy ha nincs 2 (ill. $|V(C)|$) darab egymást követő izolált csúcs a gazdagráfban, akkor az pont azt jelenti, hogy $sat_{\circlearrowright}(n,C)=\Omega(n)$.

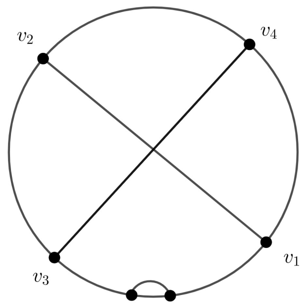
Már csak azt kell belátni, hogy $sat_{\circlearrowright}(n,C)=O(n)$ mindig teljesül. Tegyük fel, hogy C-nek k darab izolált csúcsa van. Legyen s egy C csúcsain vett I intervallum minimális hossza úgy, hogy az intervallum csúcsai C minden élét lefogják.

Legyen G az n csúcsú ciklikusan rendezett gráf, a csúcsok egy J , $|J|=s-1$ intervalluma minden más csúccsal össze van kötve, és ezeken kívül nincs más él G-ben. Ez a G nem tartalmaz C-t s definíciója miatt. Továbbá, G-nek legfeljebb $(s-1)n = O(n)$ éle van. Most mohón adjunk hozzá éleket G-hez, amíg egy C-szaturált G' gráfot nem kapunk. Azt állítjuk, hogy G'-ben minden olyan csúcsnak, amely nem J-ben van, legfeljebb $2k-s-3$ a fokszáma, ami éppen azt jelenti, hogy G'-nek $O(n)$ éle van, ahogy akartuk.

Indirekt tegyük fel, hogy J-n kívül van egy v csúcs, amelynek foka legalább $2k-s-2$. G $J \cup \{v\}$-n kívüli csúcsai két intervallumot alkotnak. Ezen intervallumok legalább egyikében v-nek legalább $\lceil (2k-s-2-(s-1))/2 \rceil = k-s$ szomszédja van. Így $J \cup \{v\}$-n és ezen a $k-s$ csúcson létrejön C-nek egy másolata, ahol $J \cup \{v\}$ csúcsok töltik be az I intervallum szerepét. Ez pedig ellentmondás. ■

Példa mindkét esetre: (bizonyítás nélkül)

- Ha C nem tartalmaz minimális élet $\big(uv = \{uv \in E(C)$: vagy $I_{u,v}$ vagy $I_{v,u}$ üres, $deg(u), deg(v) = 1\}\big)$, akkor $sat_{\circlearrowright}(n, C) = \Theta(n)$.
- $sat_{\circlearrowright}(n, X_1) = O(1)$ minden $k \geq 1$-re.



8. ábra. X_1

Hivatkozások

[1] P. Erdős, A. Hajnal, J. W. Moon. A Problem in Graph Theory. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 71, No. 10, 1107-1110, 1964.

[2] László Kászonyi and Zsolt Tuza. Saturated Graphs with Minimal Number of Edges. *Journal of Graph Theory*, Vol.10, 203-210, 1986.

[3] Bryan L. Currie, Jill R. Faudree, Ralph J. Faudree, John R. Schmitt. A Survey of Minimum Saturated Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Issue: Dynamic Surveys, 98 pages, This Version: DS19: Oct 11, 2021.

[4] Alex Cameron and Gregory J. Puleo. A Lower Bound on The Saturation Number, And Graphs For Which It Is Sharp. *Discrete Mathematics*, Vol 345, Iss 7, 2021. arXiv:2004.05410v2

[5] Tom Bohman, Maria Fonoberova and Oleg Pikhurko. The Saturation Function of Complete Partite Graphs. *Journal of Combinatorics*. Volume 1, Number 2, 149–170, 2010.

[6] B. Bollobás. On a Conjecture of Erdős, Hajnal and Moon. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 74, No. 2, pp. 178-179, 1967.

[7] Jill Faudree, Ralph J. Faudree, Ronald J. Gould, and Michael S. Jacobson. Saturation Numbers for Trees. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Volume 16, Issue 1, Article Number R91, 19 pages, 2009.

[8] Aneta Dudek, A. Paweł Wojda. P_m-Saturated Graphs With Minimum Size. *Opuscula Mathematica*, Vol. 24/1, 43-55, 2004.

[9] Radoslav Fulek, Balázs Keszegh. Saturation Problems About Forbidden 0-1 Submatrices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 35, Iss. 33, 18 pages, 2020. arXiv:2010.08256v1

[10] Vladimir Boškovic, Balázs Keszegh. *Saturation of Ordered Graphs*, 33 pages, 2022. arXiv:2203.05307v1

[11] Richard Brualdi, Lei Cao. *Pattern-Avoiding (0,1)-Matrices*, 21 pages, 2020. arXiv:2005.00379v2

[12] Zoltán Füredi, Younjin Kim. Cycle-saturated Graphs with Minimum Number of Edges. *Journal of Graph Theory*, Volume 73, Issue 2, 203-2015, 2011. arXiv:1103.0067v1

[13] Béla Bollobás. On generalized graphs. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 16:447-452, 1965.

[14] `https://uniformlyatrandom.wordpress.com/2008/11/15/a-theorem-of-bollobas/`