NYILATKOZAT

Név: Harmados Ádám

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika

NEPTUN azonosító: IM8GIK

Szakdolgozat címe: Differenciálegyenletek a közgazdaságtanban

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. 05. 31

Harmados Ádám

a hallgató aláírása

Differenciálegyenletek a közgazdaságtanban

Szakdolgozat

Készítette: Harmados Ádám Zsolt
Témavezető: Neogrády-Kiss Márton

Matematika BSc
Alkalmazott matematius szakirány

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2022

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani annak a rengeteg személynek, akik segítettek a dolgozatom elkészültéhez vezető, olykor rögösnek tűnő úton. Rendkívül hálás vagyok a családomnak mind a szellemi, mind a lelki támaszért, hiszen a szüleim, testvérem és nagyszüleim támogatása nélkül nem készülhetett volna el ez a dolgozat. Ezek mellett szeretném még kiemelni a párom és barátaim türelmét és segítségét, melyekért szintén köszönettel tartozom. Nagyon hálás vagyok továbbá a témavezetőmnek nem csak a területet érintő rendkívüli hozzáértéséért, de azért is, hogy a félév során mindig készséggel segített, bármikor fordulhattam hozzá felmerült kérdéseimmel, tanácsai és útmutatása nélkülözhetetlenek voltak a dolgozat elkészültéhez.

Harmados Ádám Zsolt

Bevezetés

A közgazdasági jelenségek a jelenlegi, modernkori világunkban hozott valamennyi lényeges gazdasági döntést áthatják, így elengedhetetlen részét képezik életünknek. A bennünket körbevevő, rendkívül szerteágazó folyamatok minél precízebb ábrázolására és esetleges előrejelzésére életre hívhatóak a közgazdaságtan és a matematika által kínált elemzési eszközök.

A közgazdaságtudomány olyan társadalomtudományi diszciplína tehát, amely a társadalom egyik meghatározó alrendszerével, a gazdasággal, a gazdálkodás általános törvényszerűségeivel, illetve a gazdaság alapvető folyamataival foglalkozik.

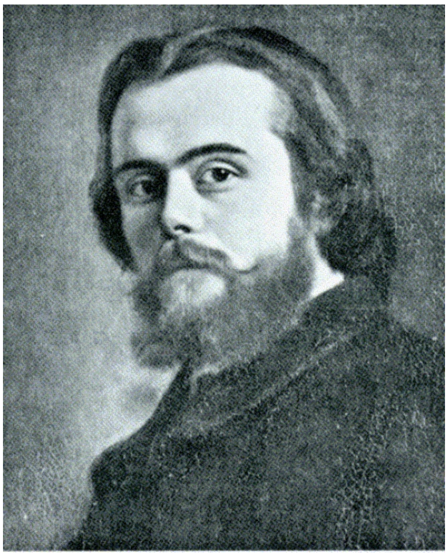
Már az ókori görögöket és rómaiakat is foglalkoztatta ezen jelenségek kutatása, mely időszakban azonban még csak az olyan kezdetlegesebb, egyszerűbb, magától értetődőbb kérdésekkel foglalkoztak, mint például a pénz fogalma, a kereslet és kínálat alakulása, valamint a munkamegosztás, illetve ezek összefüggései. Később az újkorban önállósult a tudomány, és vált az egyéb társadalomtudományoktól elkülönült területté, mely időszakban már az ezzel foglalkozó kutatók számára nem az erkölcsi, hanem az egyénekre, vállalkozásokra és az államra ható, vagyis a privát és az állami szektort befolyásoló számszerű összefüggések voltak az elsődlegesen vizsgálandó szempontok.

E folyamat következménye volt azon felismerés, hogy az egyes közgazdaságtani jelenségek matematikai eszközökkel is leírhatóak, a matematikai módszerekkel történő vizsgálódás hasznossága pedig általános meggyőződéssé vált a területen.

A közgazdaságtanban alkalmazott matematikai módszerek egyik leggyakrabban használt fajtája a modellezés, ami a valóság leegyszerűsített másának vizsgálatán keresztül lehetővé teszi, hogy annak teljes komplexitásának vizsgálata helyett csak az adott konkrét kérdés, illetve felmerült probléma kerülhessen a vizsgálat fókuszába, ezzel elérve, hogy az esetleges egyéb tényezők ne befolyásolhassák azt.

Szakdolgozatom témája ezen modellezési módszerek differenciálegyenletek eszközével történő bemutatása, melynek során igazolást nyernek a fent állítottak, miszerint megfelelően definiált hipotézissel és paraméterekkel a komplex valóság meghatározott elemei hatékonyan ábrázolhatóak és adott esetben előre jelezhetőek. A szakdolgozatom néhány ilyen modellt ismertet differenciálegyenletek eszközeit felhasználva.
A dolgozat során a végi a Dinamikus modellek a közgazdaságban (1 hivatkozásban megjelölt) című könyv 3. Nemlineáris differenciálegyenletek fejezetének 3.5. Alkalmazások alfejezetének tematikáját és tartalmát követtem.

1. Walras-féle piacmodell



A holland származású francia közgazdász, Marie-Ésprit Léon Walras (1834-1910) a neoklasszikus közgazdaságtan egyik fő képviselője volt. Az általa képviselt iskola meghatározó ismérve, hogy a közgazdasági megismerést fejlett matematikai elemzési technikák segítségével olyan tiszta elméletté tudta alakítani, amely az egzakt fizikai-matematikai megismeréshez hasonlított, és így minden tekintetben megfelelt a korszak „igaz tudománnyal” szemben megfogalmazott elvárásainak.

1.1. Bevezetés

Az általunk vizsgált piac esetén tegyük fel, hogy m áru van jelen, melyek árai rendre $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t)$ (t nemnegatív) időtől függő, differenciálható függvények. Továbbá vezessük be ezekre a függvényekre a következő egyszerűsítő jelölést, $p_i(t) \doteq p_i$.

1.1. Definíció. ***Túlkeresletről*** *akkor beszélünk, ha a kereslet magasabb mint a kínálat. A dolgozat során $E_i(p_1, p_2, \ldots p_m)$ az i-edik árura vonatkozó túlkereslet, amit a továbbiakban $E_i \doteq E_i(p_1, p_2, \ldots p_m)$jelölésre egyszerűsítünk, ahol $E_i : [0, \infty)^m \to \mathbb{R}$ és differenciálható.*

Túlkínálatról *pedig nyilván a fordított helyzetben van szó, azaz ha a kínálat magasabb, mint a kereslet.*

A közgazdasági fogalmak és a differenciálegyenletek kapcsolatát egy egyszerű példával is szeretném demonstrálni, mielőtt a mélyebb fogalmakkal és modellekkel megismerkednénk.

1.1. Példa. *Legyen egy hoki ütőnek az ára a t időpontban $p(t)$, ahol p kétszer folytonosan differenciálható függvény. Legyenek a feladat során a termék p árához tartozó keresleti, illetve kínálati függvényeket jellemző képletek a következők:*

$$D = D(p(t)) = 3p'' - p' - p + 25$$
$$S = S(p(t)) = 4p'' + p' + p + 5,$$

ahol p' az ár kialakulásának irányát a p'' pedig az ár változásának ritmusát mutatja. Továbbá tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban $p(0) = 12$, $D(0) = 20$, $S(0) = 20$ esetén szeretnénk a $p(t)$ árfüggvényt $t > 0$-ra meghatározni.

Megoldás Mivel a piac abban az esetben van egyensúlyban, ha a kereslet és kínálat egyenlő, így vegyük a következő $D = S$ egyenlőséget, jelen esetben a következő másodrendű differenciálegyenletet kapjuk egyszerűsítés után

$$p'' + 2p' + 2p = 20. \tag{1.1.1}$$

Megoldását a homogén differenciálegyenlet kiszámításával kezdjük, ahol a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Így az általános megoldása a homogén differenciálegyenletnek:

$$P_{\text{áh}} = c_1 \cdot e^{-t} \cos t + c_2 \cdot e^{-t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Abban az esetben, ha 1.1.1 egyenlet jobb oldalán egyetlen konstans zavaró függvény található, akkor az alakja az inhomogén partikuláris megoldásnak a következő:

$$p_{\text{ip}}(t) = B_1 \in \mathbb{R}, \quad p' = 0, \quad p'' = 0,$$

amit behelyettesítve 1.1.1-be $p_{\text{ih}}(t) = 10$-et kapunk. Így az általános megoldása 1.1.1-nek a következő módon írható fel:

$$P_{\text{iá}} = c_1 \cdot e^{-t} \cos t + c_2 \cdot e^{-t} \sin t + 10, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

aminél figyelembe véve a kezdeti értékeket kapjuk:

$$p(t) = 2e^{-t} \cos t + c_2 \cdot e^{-t} \sin t + 10. \tag{1.1.2}$$

Ezt deriválva

$$p'(t) = -2e^{-t}(2\cos t + c_2 \sin t) + e^{-t}(-2\sin t + c_2 \cos t) =$$

$$= e^{-t}\{(c_2 - 2)\cos t - (c_2 + 2)\sin t\} \quad p'(0) = c_2 - 2 \tag{1.1.3}$$

$$p''(t) = -e^{-t}\{(c_2-2)\cos t - (c_2+2)\sin t\}+$$
$$+e^{-t}\{-(c_2-2)\sin t - (c_2+2)\cos t\} =$$
$$= e^{-t}\{-2c_2\cos t + 4\sin t\} \quad p''(0) = 2c_2$$

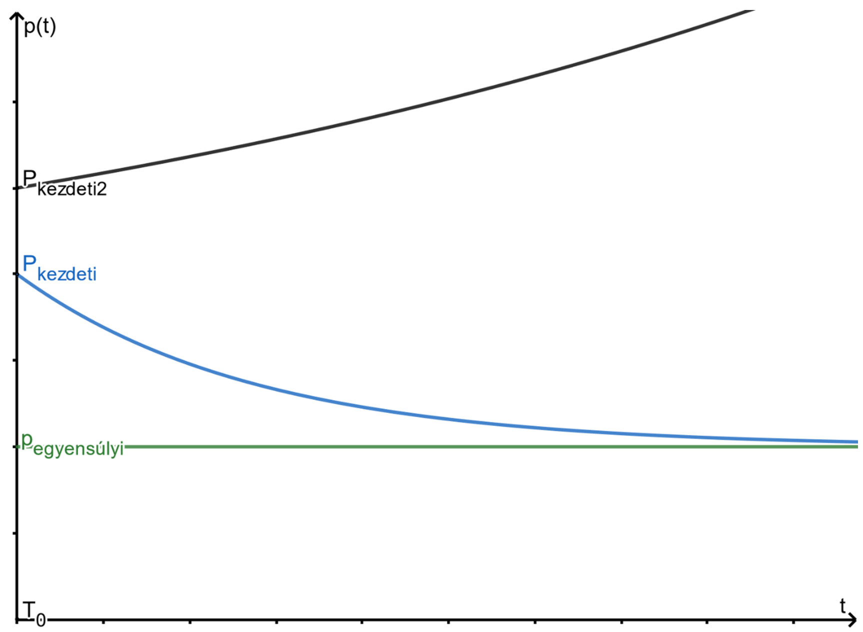
Végül $D = S$ egyenlőséget a $t = 0$ pontban a 1.1.2, illetve 1.1.3 kifejezések figyelembevételével azt kapjuk, hogy c_2 tetszőlegesnek választható. Így

$$p(t) = 2e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t + 10, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to\infty} p(t) = 10.$$

Tehát az így megkapott árfüggvény például a $c_2 = 0$ esetén:

$$p(t) = 2e^{-t}\cos t + 10.$$

Ez azt jeleni számunkra, hogy a $p(t)$ ár a p^e egyensúlyi árhoz tart és akkor, ha $\lim_{t\to\infty}|p(t)| = p^e$ azt mondjuk, hogy az egyensúlyi ár stabil.
Máskülönben, ha a $p(t)$ nem lenne korlátos, akkor $\lim_{t\to\infty}|p(t)| = \infty$ és ekkor pedig instabil egyensúlyi árról lenne szó. Ezekre a fogalmakra világít rá az 1-es ábra.



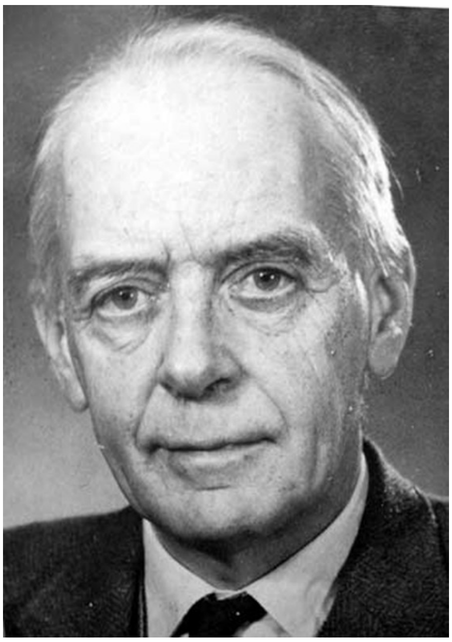
1. ábra. A $p = p^e$ stabil, a $p_{kezdeti}$-ből és instabik a $p_{kezdeti2}$-ből induló

1.1. Tétel. *A piac alaptörvénye azt mondja ki, hogy a túlkereslet emeli az árat, míg a túlkínálat csökkenti azt. Ez azt jelenti, hogy abban az esetben amikor az $E_i > 0$, akkor a p_i nő, illetve $E_i < 0$ esetén pedig p_i csökken.*

1.1. Megjegyzés. *A fenti tétel azokra az árukra, amelyek esetén a vevők azt gondolják, hogy az áru minél drágább, annál jobb, nem teljesül. Ilyenek például a ritka műalkotások, dizájnerruhák és sportautók, azonban ezeket a dolgozat során nem vesszük figyelembe.*

A Walras-féle piacmodellben, primitív piaccal foglalkozunk, ami azt jelenti, hogy $E_i = E_i\left(p_i\right)$, azaz az adott áru túlkeresleti függvénye csak az áru árától függ, a többitől nem. Ez a valóságban általában nem teljesül mivel vannak kiegészítő, illetve helyettesítő termékek, például bicikli, sisak vagy narancs és mandarin.

1.2. Definíció. *Akkor beszélünk* ***egyensúlyi árrendszerről****, ha a $(p_1^e, p_2^e, \ldots, p_m^e) \in \mathbb{R}^m$ pont esetén minden $(i = 1, 2, \ldots m)$-re az $E_i\left(p_1^e, p_2^e, \ldots, p_m^e\right) = 0$ teljesül, tehát se túlkereslet se túlkínálat nem teljesül.*



A 20. századi közgazdaságtan egyik legmeghatározóbb szereplője Sir John Richards Hicks (1904 – 1989), angol születésű közgazdász volt. Munkájának legnagyobb elismeréseként 1972-ben Kenneth Arrow-val közösen közgazdasági Nobel-emlékdíjat kaptak „A gazdasági egyensúly általános elméletével és a jólét elméletével kapcsolatos úttörő munkájukért”. Hicks emellett Value and capital című, 1939-ben megjelent könyvében megvizsgálta, hogy a túlkeresleti függvények milyen alakúak lehetnek.

A következő jelöléseket véve:

- $\Delta E_i\left(p_1^e, p_2^e, \ldots, p_m^e\right) = E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right) - E_i\left(p_1^e, p_2^e, \ldots, p_m^e\right)$ és
- $\Delta p_i = p_i - p_i^e$

vizsgáljuk meg a túlkeresleti függvényt, abban az esetben

1. Ha az E_i lineáris függvény, akkor a következő alakban írhatjuk fel:

$$E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right) = a_{i1}p_{i1} + \ldots + a_{im}p_{im},$$

ahol $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $j = 1, 2, \ldots, m$ állandók. Így ebben az esetben

$$\Delta E_i\left(p_1^e, p_2^e, \ldots, p_m^e\right) = E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right) - E_i\left(p_1^e, p_2^e, \ldots, p_m^e\right) =$$

$$= a_{i1}\Delta p_1 + \ldots + a_{im}\Delta p_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Delta p_i$$

2. Ha E_i nemlineáris, akkor linearizálni szeretnénk, ezért tegyük fel az E_i differenciálhatóságát a $\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right)$ pontban. Ekkor E_i-hez léteznek $a_{i1}, \ldots, a_{im} \in \mathbb{R}$ állandók. Továbbá $w_{i1}, \ldots, w_{im}$ differenciálható függvények, amelyekre teljesül, hogy $w_{ij} : [0, \infty)^m \to \mathbb{R}$ és

$$\lim_{(p_1,\ldots,p_m)\to\left(p_1^e,\ldots,p_m^e\right)} w_{ik}\left(p_1, \ldots, p_m\right) = 0, \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Ekkor E_i alakja:

$$E_i\left(p_1, \ldots, p_m\right) = a_{i1}p_1 + \ldots + a_{im}p_m + w_{i1}\left(p_1, \ldots, p_m\right)p_1 + \ldots + w_{im}\left(p_1, \ldots, p_m\right)p_m.$$

Tehát

$$\Delta E_i\left(p_1^e, p_2^e, \ldots, p_m^e\right) = \underbrace{a_{i1}\left(p_1 - p_1^e\right) + \ldots + a_{im}\left(p_m - p_m^e\right)}_{\text{lineáris főrész}} +$$

$$+ \underbrace{w_{i1}\left(p_1, \ldots, p_m\right)\Delta p_1 + \ldots + w_{im}\left(p_1, \ldots, p_m\right)\Delta p_m}_{\text{magasabbrendű tagok, hibatagok}}$$

Ekkor

$$a_{ik} = \lim_{p_k \to p_k^e} \frac{E_i\left(p_1^e, \ldots, p_{k-1}^e, p_k, p_{k+1}^e, \ldots, p_m^e\right) - E_i\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right)}{\Delta p_k} =$$

$$= \frac{\partial E_i}{\partial p_k}\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right)$$

Ezeket felhasználva kapjuk:

$$\Delta E_i\left(p_1, \ldots, p_m\right) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial E_i}{\partial p_l}\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right) \Delta p_l + \sum_{l=1}^{m} w_{il}\left(p_1, \ldots, p_m\right) \delta p_l. \tag{1.1.4}$$

Végül legyen

$$dE_i\left(p_1, \ldots, p_m\right) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial E_i}{\partial p_l}\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right) dp_l = \sum_{l=1}^{m} a_{il} dp_l.$$

1.2. Stabilitásfogalmak

Az előzőekhez képest azonban a piac az esetek túlnyomó részében nem egy egyensúlyi állapotban van, ezért a későbbiekben arra törekszünk, hogy legalább az egyensúlyi állapot közelébe hozzuk azt. Ezzel a témakörrel foglalkoznak a stabilitásvizsgálatok. Emellett azonban azt is fontos szem előtt tartani, hogy a megalkotott fogalmakhoz közgazdasági értelmezés is társítható legyen.

Hicks megfogalmazása szerint: p_j változása ellenkező irányú változást idéz elő E_i-ben. A továbbiakban a stabilitásfogalmakat vesszük szemügyre és definiáljuk őket. Ezeket a fogalmakat a következőképp kategorizáljuk:

$$
\begin{tikzcd}
 & & Imperfekt \\
 & Statikus \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\text{Stabilitásfogalmak} \arrow[ur] \arrow[dr] & & Perfekt \\
 & Dinamikus &
\end{tikzcd}
$$

1.2.1. Imperfekt stabilitás

1.3. Definíció. *A* $(p_1^e, \ldots, p_m^e)$ *egyensúlyi árrendszer* ***imperfekt módon stabil****, ha minden* $(i \in 1, \ldots m)$*-re*

$$E_i\,(p_1, \ldots, p_m) \quad \textit{monoton csökken } (\searrow),$$

ha p_i *nő a* p_i^e *környezetében, és ha* $p_1 \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots p_m$ *úgy változnak, hogy*

$$\Delta E_j\,(p_1, \ldots, p_m) = 0 \quad (i \neq j) \tag{1.2.1}$$

teljesül, ahol $p_i = p_i^e$*.*

Ez közgazdasági szemlélettel úgy fogalmazható meg, hogy az i-edik árura vonatkozó E_i (túlkereslet) csökken, ha az áru ára (p_i) nő, és a többi árura a túlkereslet nem változik.

Az első stabilitásfogalom, amit szeretnénk megvizsgálni az Imperfekt stabilitás, melynek érdemleges tárgyalásához, illetve szükséges és elégséges feltételének kimondásához, bizonyításához előbb néhány fontos tételt kell ismertetnem.

1.4. Definíció. *Az* $A \in L\,(X, Y)$ *leképezés invertálható, ha bijektív, és ha* A^{-1} *is folytonos:* $A^{-1} \in L\,(X, Y)$*.*

1.5. Definíció. *Legyenek* $U \subset X$ *és* $V \subset Y$ *nyílt halmazok. Az* $f : U \to V$ *bijekciót* C^k*-diffeomorfizmusnak nevezzük, ha* $f \in C^k$ *és* $f^{-1} \in C^k$*.*

1.2. Tétel (Inverz függvény tétel)**.** *Legyen $f : X \to Y$ egy C^k-beli függvény, ahol X, Y Banach-terek és $k \geq 1$. Ha valamilyen $a \in D(f)$ pontban $f'(a) \in L(X, Y)$ invertálható, akkor vannak a-nak és $f(a)$-nak olyan U, V nyílt környezetei, hogy $f\big|_U$ C^k-diffeomorfizmus U-ról V-re.*

1.6. Definíció. *Az X tér az R, S zárt lineáris alterek direkt összege, ha*

$$R \cap S = \{0\} \quad \text{és} \quad R + S = X.$$

1.3. Tétel (Implicit függvény tétel)**.** *Legyen $f : X \to Y$ C^k-beli függvény, ahol X, Y Banach-terek és $k \geq 1$. Tekintsük valamely $a \in D$ pontra a*

$$\Gamma \doteq \{x \in D(f) : f(x) = f(a)\}$$

halmazt. Tegyük fel, hogy X valamilyen $X = R + S$ direkt összegnek felbontására $f'(a)\big|_S \in L(S, Y)$ invertálható. Akkor van a-nak olyan U környezete és olyan C^k-beli $g : R \to S$ függvény, hogy

$$U \cap \Gamma = \{(r, g(r)) : r \in D(g)\}.$$

Bizonyítás. A tételt négy lépésben látjuk be.

1. Az

   $$F(r, s) = (r, f(r, s))$$

   egyenlőség egy C^k-beli $F : D \to R \times Y$ függvényt definiál. Vezessük be a következő jelöléseket:

   $$A \doteq f'(a)\big|_R \quad \text{és} \quad B \doteq f'(a)\big|_S,$$

   ahol

   $$x = r + s \quad (r \in R, \quad s \in S)$$

   esetén $f'(a)x = Ar + Bs$, azaz

   $$F'(a) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

   Feltéve, hogy B-nek létezik B^{-1}, ekkor az $F'(a)$ invertálható, és

   $$F'(a)^{-1}(r, y) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}A & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix},$$

   ami a mátrix invertálásából egyszerűen adódik.

   Most használjuk fel az inverz függvény tételt, ami alapján léteznek $a \in X$-nek és $F(a) \in R \times Y$-nak olyan U, V nyílt környezetei, hogy $F\big|_U$ C^k-diffeomorfizmus U-ról V-re.

2. Azt kell belátnunk, hogy $U \cap \Gamma$ egy alkalmas $g : R \to S$ függvény gráfja. Ehhez elég azt igazolnunk, hogy ha

$$(r, s), (r, \widetilde{s}) \in U \quad \text{és} \quad f(r, s) = f(r, \widetilde{s}),$$

akkor $s = \widetilde{s}$. Ez pedig $F\big|_U$ injektivitásából adódik, ugyanis

$$F(r, s) = (r, f(r, s)) = (r, f(r, \widetilde{s})) = F(r, \widetilde{s}).$$

3. Következő lépésként a g értelmezési tartományának nyíltságát kell belátnunk. Ekkor

$$D(g) = \{r \in R : \text{alkalmas} \quad s \in S\text{-re} \quad (r, s) \in U \quad \text{és} \quad f(r, s) = f(a)\} =$$

$$= \{r \in R : \text{alkalmas} \quad s \in S\text{-re} \quad (r, s) \in U \quad \text{és} \quad F(r, s) = (r, f(a))\} =$$

$$\{r \in R : (r, f(a)) \in V\}.$$

Mivel V nyílt halmaz, így az egyenlőségekből következik $D(g)$-, azaz g értelmezési tartományának nyíltsága.

4. Végül ha $r \in D(g)$, akkor

$$F(r, g(r)) = (r, f(r, g(r))) = (r, f(r)),$$

ebből

$$\left(F\big|_U\right)^{-1}(r, f(a)) = (r, g(r)).$$

Ugyanis $\left(F\big|_U\right)^{-1} \in C^k$, és g ennek a függvénynek a komponense, azaz $g \in C^k$.

□

1.4. Tétel. *Imperfekt stabilitás akkor és csak akkor beszélünk, ha $sgnD = -sgnD_{jj}$, $\{j = 1, \ldots m\}$, ahol az A együttható mátrix legyen. Jelölje $A \doteq (a_ij)_{i,j=1}^m$ és D ennek a mátrixnak a determinánsát, illetve D_{jj} pedig az A mátrix a_{jj} együtthatóhoz tartozó előjeles aldeterminánsát.*

Bizonyítás. Mivel

$$D_{jj} \neq 0 \quad \text{és} \quad \Delta E_k(p_1, \ldots, p_m) = 0$$

miatt alkalmazhatjuk az **implicit-függvény tételt** (1.3-as tétel). A tétel miatt $(p_1^e, \ldots, p_m^e)$ egy környezetében egyértelműen kifejezhetők a $(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_m)$ árak p_j függvényében, tehát léteznek olyan

$$g_1, \ldots, g_{j-1}, g_{j+1}, \ldots, g_m : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

differenciálható függvények, hogy

$$p_k = g_k(p_j) \quad (k \neq j), \quad p_k^e = g_k\left(p_j^e\right).$$

Ezeket a függvényeket használva az imperfekt stabilitás feltétele felírható:

$$\frac{d}{dp_j} E_j\left(g_1(p_j), \ldots, g_{j-1}(p_j), p_j, \ldots, g_{j+1}(p_j), \ldots, g_m(p_j)\right)\Big|_{p_j = p_j^e} < 0.$$

Vezessük be a $g_j(p_j) \doteq p_j$ jelölést és legyen

$$x = \frac{d}{dp_j} E_j\left(g_1(p_1^e), \ldots, g_m(p_m^e)\right).$$

Így az új jelölésekkel és az 1.1.4, illetve 1.2.1 egyenlőségek felhasználásával kapjuk:

$$a_{j1} g_1'\left(p_j^e\right) + \ldots + a_{jj-1} g_{j-1}'\left(p_j^e\right) + a_{jj} + a_{jj+1} g_{j+1}'\left(p_j^e\right) + \ldots + a_{jm} g_m'\left(p_j^e\right) = x$$

továbbá

$$a_{k1} g_1'\left(p_j^e\right) + \ldots + a_{km} g_m'\left(p_j^e\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \quad (j \neq k))$$

Ekkor egy lineáris egyenletrendszerhez jutottunk, $g_1'\left(p_j^e\right), \ldots, g_m'\left(p_j^e\right)$-el, amiből a Cramer-szabály felhasználásával következik, hogy

$$1 = g_j'\left(p_j^e\right) = \frac{x(-1)^{2j} D_{jj}}{D} \Rightarrow x = \frac{D}{D_{jj}}.$$

Tehát

$$x = \frac{d}{dp_j} E_j\left(g_1(p_1^e), \ldots, g_m(p_m^e)\right) < 0 \;\Leftrightarrow D \text{ és } D_{jj} \text{ előjeles ellentétek.}$$

□

1.2.2. Perfekt stabilitás

1.7. Definíció. *A $(p_1^e, \ldots, p_m^e)$ egyensúlyi árrendszer **perfekt módon stabil**, ha minden $j \in \{1, \ldots, m\}$ indexre*

$$E_j(p_1, \ldots, p_m) \quad (\searrow),$$

ha a p_j függvény növekszik p_j^e pont egy környezetében továbbá, ha tetszőleges $0 \leq k \leq m-1$ db ár függvény, amely nem tartalmazza a j-ediket, úgy változik, hogy a nekik megfelelő ΔE_j-k megegyeznek nullákkal, míg a többi ár állandó azaz a nekik megfelelő p_k^e-el egyenlők.

1.2. Megjegyzés. *Látszik továbbá, hogy a perfekt stabilitás egy erősebb fogalom, mint az imperfekt, ugyanis $k = m-1$ -re az imperfekt stabilitást teljesítő feltételeket kapjuk.*

1.5. Tétel. *Perfek stabilitás pontosan akkor létezik, ha minden különböző $j, j_1, j_2, \ldots$ indexre teljesül:*

$$a_{jj} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} & a_{jj_2} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2} \\ a_{j_2j} & a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2} \end{vmatrix} < 0, \ldots$$

Bizonyítás. A tétel bizonyítását teljes indukcióval végezzük el. Ennek megfelelően vizsgáljuk meg először a $k = 0$ esetet:
$k = 0$ esetben:

$$E_j\left(p_1^e, \ldots, p_{j-1}^e, p_j, p_{j+1}^e, \ldots, p_m^e\right) \searrow \;\Rightarrow\; \frac{\partial E_j}{\partial p_j}\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right) = a_{jj} < 0$$

$k = 1$ esetén: Vezessünk be egy új jelölést

$$\widetilde{E_k}\left(p_j, p_{j_1}\right) \doteq E_k\left(p_1^e, \ldots, p_{j-1}^e, p_j, p_{j+1}^e, \ldots, p_{j_1-1}^e, p_{j_1}, p_{j_1+1}^e, \ldots, p_m^e\right) \quad k = j, j_1.$$

Ekkor a $\Delta\widetilde{E_{j_1}}\left(p_j, p_{j_1}\right) = 0$ és $a_{j_1j_1} \neq 0$-ból, illetve felhasználva az implicitfüggvénytételt következik, hogy létezik pontosan egy olyan g függvény, úgy, hogy $p_{j_1} = g\left(p_j\right)$. Ebből pedig $\widetilde{E_{j_1}}\left(p_j, g\left(p_j\right)\right) = 0$ és $g\left(p_j^e\right) = p_{j_1}^e$. Legyen továbbá

$$x = \frac{d}{dp_j}\widetilde{E_j}\left(p_j^e, p_j^e\right)$$

Ekkor

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{jj} + a_{jj_1}g'\left(p_j^e\right) \\ 0 &= a_{j_1j} + a_{j_1j_1}g'\left(p_j^e\right) \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; g'\left(p_j^e\right) = -\frac{a_{j_1j}}{a_{j_1j_1}} \Rightarrow x = a_{jj} + a_{jj_1}\left(-\frac{a_{j_1j}}{a_{j_1j_1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_{j_1j_1}}\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} \end{vmatrix} < 0$$

És az előző esetnél láttuk, hogy $a_{j_1j_1} < 0$, így

$$x < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} \end{vmatrix} > 0.$$

Következő lépésként tegyük fel, hogy már $k = n$ esetén tudjuk, hogy a tétel teljesül, és most vizsgáljuk meg az $k = n + 1$ esetén is:

Legyen az előzőhöz hasonlóan

$$\widetilde{E_k}\left(p_j, p_{j_1}, \ldots, pj_{n+1}\right) \doteq$$
$$E_k\left(p_1^e, \ldots, p_{j-1}^e, p_j, p_{j+1}^e, \ldots, p_{j_1-1}^e, p_{j_1}, p_{j_1+1}^e, \ldots, p_{j_{n+1}-1}^e, p_{j_{n+1}}, p_{j_{n+1}+1}^e, \ldots p_m^e\right),$$
$$ahol \quad (k = j, j_1, \ldots, j_{n+1}).$$

Ebben az esetben a $\Delta\widetilde{E_k}\left(p_j, p_{j_1}, \quad \ldots, p_{j_{n+1}}\right) = 0, (k = j, j_1, \ldots, j_{n+1})$ és

$$\begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & \cdots & a_{j_1 j_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_{n+1} j_1} & \cdots & a_{j_{n+1} j_{n+1}} \end{vmatrix} \neq 0\text{-ból}$$

az implicitfüggvény-tétel segítségével következik, hogy egyértelműen léteznek a $g_{j_1}, \ldots, g_{j_{n+1}}$ függvények, melyekre

$$p_k = g_k\left(p_j\right) \quad \text{és} \quad p_k^e = g_k\left(p_j^e\right), \quad (k = j_1, j_2, \ldots, j_{n+1}).$$

Ezekből következik továbbá, hogy

$$\Delta\widetilde{E_k}\left(p_j, g_{j_1}\left(p_j\right), \ldots, g_{j_{n+1}}\left(p_j\right)\right) = 0, \quad (k = j_1, \ldots, j_{n+1}).$$

Hasonlóan az eddigiekhez legyen

$$x = \frac{d}{dp_j}\widetilde{E_j}\left(p_j^e, g_{j_1}\left(p_j^e\right), \ldots, g_{j_{n+1}}\left(p_j^e\right)\right).$$

Ekkor

$$x = a_{jj} + a_{jj_1} g'_{j_1}\left(p_j^e\right) + \ldots + a_{jj_{n+1}} g'_{j_{n+1}}\left(p_j^e\right)$$

és

$$0 = a_{kj} + a_{kj_1} g'_{j_1}\left(p_j^e\right) + \ldots + a_{kj_{n+1}} g'_{j_{n+1}}\left(p_j^e\right), \quad (k = j_1, \ldots, j_{n+1}).$$

Most használjuk fel a Cramer-szabályt és így a következő egyenlőséghez jutunk:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{jj_1} & \cdots & a_{jj_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_{n+1} j_1} & \cdots & a_{j_{n+1} j_{n+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & \cdots & a_{j_1 j_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_{n+1} j_1} & \cdots & a_{j_{n+1} j_{n+1}} \end{vmatrix}}$$

Ekkor x-re pontosan akkor teljesül, hogy $x < 0$, ha a számlálóban vagy a nevezőben szereplő kifejezés előjele különböző.

□

1.2.3. Dinamikus stabilitás

1.8. Definíció. *A* $(p_1^e, \ldots, p_m^e)$ *egyensúlyi árrendszer* ***dinamikusan stabil****, ha a* $(p_1^e, \ldots, p_m^e)$ *egyensúlyi helyzet a*

$$p_j' = F_j\left(E_j\left(p_1, \ldots, p_m\right)\right), \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.2.2}$$

differenciálegyenlet rendszer aszimptotikusan stabil megoldása.

A differenciálegyenletben szereplő F_j függvények mutatják meg a mértékét a túlkeresleti függvény visszahatásának a többi árra a piac alaptörvénye értelmében.

Az $F_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény amelyre az alábbiak igazak $(j = 1, \ldots, m)$ esetén:

1. $F_j(0)$, ami azt jelenti, hogy ha nincs se túlkereslet se túlkínálat, akkor az árak egyensúlyban vannak.
2. $rF_j(r) > 0$, ha $r \neq 0$ vagyis túlkereslet esetén az árak nőnek, túlkínálat esetén az árak csökkennek.
3. $F_j'(0) > 0$ azaz, az egyensúlyi helyzettől való eltérés esetén a túlkeresleti függvény azonnal érezteti hatását.

Ha E_j, F_j adott függvények, akkor vizsgáljuk meg, hogy mi a dinamikus stabilitás feltétele. Linearizáljuk a $(p_1^e, \ldots, p_m^e)$ egyensúlyi helyzet körül:

$$F_j\left(E_j\left(p_1, \ldots, p_m\right)\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j\left(E_j\right)}{\partial p_k}\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right) \Delta p_k + hibatag$$

Legyen $x_j(t) = p_j(t) - p_j^e$, így

$$x_j'(t) = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} x_j'(t) + hibatag,$$

ahol

$$b_{jk} = \frac{\partial F_j\left(E_j\right)}{\partial p_k}\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right) = F'(0) \cdot \frac{\partial E_j}{\partial p_k}\left(p_1^e, \ldots, p_m^e\right) = F_j'(0)\, a_{jk}.$$

Ekkor a hibatagok elhagyásával:

$$y_j'(t) = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} y_j(t) \quad y' = By.$$

1.6. Tétel. *Legyen $N \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ adott mátrix és*

$$x'(t) = Ax(t)$$

*állandó együtthatós differenciálegyenlet rendszer pontosan akkor **aszimptotikusan stabil**, ha minden $\lambda \in \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ az A mátrix sajátértékeinek halmaza) esetén a $Re(\lambda) < 0$.*

Ezek alapján a következő tételt tudjuk megfogalmazni:

1.7. Tétel. *Legyen*

$$b_{ij} \doteq \frac{\partial F_j(E_j)}{\partial p_k}(p_1^e, \ldots, p_m^e) = F'(0) \cdot \frac{\partial E_j}{\partial p_k}(p_1^e, \ldots, p_m^e) = F_j'(0)\, a_{jk}$$

Vegyük a a következő egyenletet:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

1. *Az egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabil, ha a karakterisztikus polinom minden gyökének valós része negatív.*

2. *Ha létezik pozitív valós részű gyök, akkor nincs dinamikus stabilitás.*

Bizonyítás. Válasszuk meg B-t és F-et a következő módon:

$$B \doteq (b_{ij})_{i,j=1}^{m}, \quad F \doteq \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Így tehát F derivált mátrixa az $(p_1^e, \ldots, p_m^e)$ egyensúlyi pontban pont a B mátrixnak felel meg, ezért a derivált mátrix sajátértékei a fenti karakterisztikus egyenlet gyökei, így az 1.6 tételt alkalmazva pont a kívánt eredményhez jutottunk.

□

1.2.4. Algebrából ismert segédtételek és a hozzá kapcsolódó tételek

A következőkben néhány algebrai tétel és fogalom ismertetésével foglalkozom, amelyek az alapját biztosítják a későbbiekben bemutatandó fontos közgazdasági eredményeknek.

1.9. Definíció. *Egy B mátrixot akkor nevezünk stabilnak, ha a* $\det(B-\lambda I)=0$ *karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív.*

1.8. Tétel. *Ha B szimmetrikus (azaz $b_{ij}=b_{ji}$), akkor B pontosan akkor stabil, ha*

$$b_{11}<0,\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}<0,\quad \ldots,\quad (-1)^m \det B>0. \qquad (*)$$

1.9. Tétel. *Ha $b_{ik}\geq 0$ minden $j\neq k$ esetén, akkor B stabil pontosan akkor, ha $(*)$ teljesül.*

1.10. Tétel. *Ha $b_{jj}<0,\quad (j=1,2,\ldots,n)$ és a főátlóban lévő elemek sordominánsak*

$$|b_{jj}|>\sum_{k=1,k\neq j}^{m}|b_{jk}|$$

vagy oszlopdominánsak

$$|b_{jj}|>\sum_{k=1,k\neq j}^{m}|b_{kj}|,$$

akkor B stabil.

A következő tételeket fogalmazták meg a közgazdászok az előbbiek eredményeképpen:

1.11. Tétel (Samuelson). *Ha B szimmetrikus és $(*)$ teljesül, akkor az egyensúlyi helyzet dinamikusan stabil.*

1.3. Megjegyzés. *A gyakorlatban B szimmetriájához azt az értelmezést lehet társítani, hogy az i-edik áru árváltozásának hatása a j-edik áru árára ugyanakkora, mint a j-edik áru árváltozásának hatása az i-edik áru árára. E helyzet pedig mind helyettesítő, mind kiegészítő áruk esetén általánosnak mondható.*

1.12. Tétel (Metzer). *Ha $b_{ij}\geq 0$ minden $i\neq j$ esetén, és $(*)$ teljesül, akkor az egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabil.*

1.4. Megjegyzés. *A $b_{ij} > 0$ pontosan akkor, ha $a_{ij} > 0$, tehát a j-edik áru árának az i-edik keresletét növeli, azaz a helyettesítő áruk fogalma lesz ebben az esetben a kézenfekvő.*

1.13. Tétel (Walras). *Ha $b_{jj} < 0$ bármely j esetén, és a főátlóban lévő elemek sor- vagy oszlop dominánsak, akkor az egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabilis.*

1.5. Megjegyzés. *Az oszlopdominanciához azt a jelentést tudjuk társítani, hogy a j-edik áru árának változása összességében kisebb hatással van a többi áru árának változására, mint a sajátjára.*
A sordominancia pedig azt jelenti, hogy a j-edik árut kivéve az összes többi áru árának változása összességében kisebb hatással van a j-edik áru árára, mint a saját változása.
Mindkét eset valójában azzal a jelentéssel bír, hogy a j-edik áru árának változását, leginkább a saját árának változása határozza meg, ami szintúgy igen természetesnek hat, hiszen ha matematika könyvet szeretnék vásárolni, akkor a foci labda árának változása legfeljebb kis mértékben befolyásolja döntésem.

1.3. Stabilitásfogalmak kapcsolatai

Most vizsgáljuk meg az eddig tárgyalt stabilitásfogalmak egymás közötti kapcsolatát.

1. **Perfekt**:

   (a) perfekt $\Rightarrow$ imperfekt:
   Definícióból következik $k = m - 1$-re.

   (b) perfekt $\Rightarrow$ dinamikus $m = 2$ esetén:
   Mivel, perfekt stabilitás esetén

   $$b_{11} < 0, \quad b_{22} < 0, \quad \det B > 0$$

   1.5 tétel alapján, így a karakterisztikus polinom minden együtthatója pozitív. Ebből viszont következik, hogy a karakterisztikus polinom minden gyökének valós része negatív, tehát dinamikusan stabil.
   Azonban vegyük a következő B mátrixot:

   $$B \doteq \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

ahol $\varepsilon > 0$ megfelelően kicsi, például $\varepsilon \doteq 0.005$, akkor:

$$\begin{pmatrix} -0.005 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.005 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.005 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -0.005 \end{pmatrix},$$

esetén a determinánsok kiszámítása után látható, hogy perfekt, de ha vesszük a mátrixunk karakterisztikus polinomját, amely a következő:

$$\lambda^4 + 0.02\lambda^3 + 1.0002\lambda^2 + 1.01\lambda + 1.005,$$

mely negyedfokú polinómnak gyökei:
$\lambda_1 = 0.524 + 1.1209i$
$\lambda_2 = 0.524 - 1.1209i$
$\lambda_3 = -0.5524 + 0.5857i$
$\lambda_4 = -0.5524 - 0.5857i$.
Ezek alapján látszik, hogy nem mindegyik gyök esetén negatív a valós rész, tehát nem dinamikusan stabil.

2. **Imperfekt:**

   (a) imperfekt $\not\Rightarrow$ perfekt.
   Vegyük a következő mátrixot:

   $$B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

   ahol ha ε-t úgy választjuk meg hogy, $\varepsilon > 1$, akkor a determináns értéke negatív lesz, míg a főátló elemeihez tartozó adjungált aldetermináns pozitív, tehát az 1.4 tétel alapján az imperfekt stabilitás feltételei teljesülnek. Azonban ha megvizsgáljuk a perfek stabilitás feltételeit, akkor látjuk, hogy $b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0$, így nem lehet perfekt módon stabil.

   (b) imperfekt $\not\Rightarrow$ dinamikusan perfekt ,hiszen vegyük az előbbi B mátrix koncepcióját $\varepsilon = 16$ esetén:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 1 \end{pmatrix},$$

   ekkor a karakterisztikus polinomja: $(1-\lambda)^2 - 16$, ami a nevezetes azonosság miatt nyilván $(\lambda + 3)(\lambda - 5) = 0$ egyenlethez vezet, amiből látszik, hogy nem lehet minden gyökének valós része negatív, így dinamikus stabilitás sem áll fent.

3. **Dinamikus:**

   (a) dinamikus $\not\Rightarrow$ pefekt:
   Most a következő mátrixot vizsgáljuk meg:

   $$\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   aminek a karakterisztikus egyenlete:

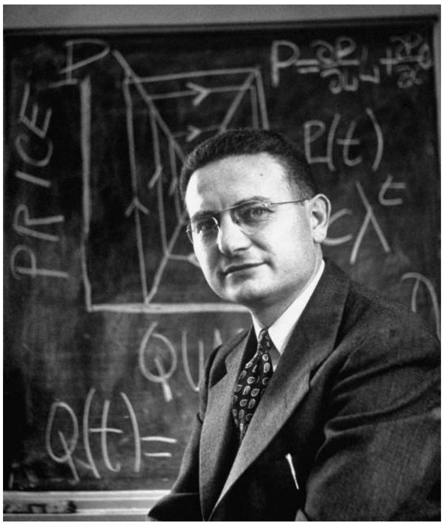
   $$(-5-\lambda)(1-\lambda)+9=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2,$$

   tehát minden gyöke negatív, azaz dinamikusan stabil, viszont az is azonnal megállapítható, hogy a főátlóban lévő elemek nem mind negatívak, így nem lehet perfekt módon stabil.

   (b) dinamikus $\not\Rightarrow$ impefekt:
   Itt is vegyük az előző mátrixot, ahol a $\det B = 4 > 0$, és $b_{22} > 0$ is pozitív, ami ellentmond az imperfekt stabilitásnak.

2. Hicks-Samuelson-modell

Paul Samuelson (1915-2009) amerikai közgazdász, a modern közgazdaságtan egyik megalapozója és számos elismerés birtokosa volt, és már fiatalon is hírnévre tett szert tudományos dolgozata révén. Munkásságára jellemző volt, hogy matematikai modszerek segítségével próbálta megoldani az egyes közgazdaságtanban femerülő kérdéseket. A közgazdasági területen vézett munkáját honorálva, az első amerikaiként vehette át Nobel-díjat a statikai és dinamikai közgazdaságtani elmélet kidolgozásáért, és a közgazdasági elméletben való tudományos elemzések szintjének növeléséért folytatott tevékenységéért.



Sir John Richards Hicks 1939-ben írt, Value and Capital című művében úttörő gondolatokat fogalmazott meg a Keynes-i elmélet értelmezésével kapcsolatban. E munkájában a közgazdász sikerrel ötvözte a korai holisztikus, makrogazdasági jellegű általános egyensúlyi modelleket a neoklasszikus mikroökonómia racionális gazdasági döntéseket feltételező, határelemzésen nyugvó (marginalista) modellekkel. Ezenkívül Paul A. Samuelson ugyancsak ehhez hasonló irányú gondolatokat fogalmazott meg a közgazdaságtani elemzés alapjai vonatkozásában 1947-ben megjelent művében, melyben a professzor alapvetően a klasszikus termodinamika függvénytani módszertanát adaptálta a közgazdaságtani elemzésekre.

Ebben a fejezetben az úgynevezett "jól viselkedő" (melynek pontos jelentését csak később fogjuk meghatározni) piacot fogjuk közelebbről szemügyre venni, illetve a hozzá kapcsolodó különböző feltételeket, a Hick-Samuelson-féle modell bevezetésével.

2.1. A modell bevezetése

Legyen hasonlóan az eddigiekhez m darab áru a piacon, melyeknek árai $(p_1, \ldots, p_m, \ \ (p_i \geq 0))$ és $E_i\left(p_1, \ldots, p_m\right)$ a túlkeresleti függvény minden $(i = 1, \ldots, n)$-re. Emellett legyen egy $k_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ konstansunk (ár-homogenitás), így az árak szintje a feltételek által nem meghatározott, hanem szabadon megválasztható. Ekkor a

$$p_i' = k_i E_i\left(p_1, \ldots, p_m\right), \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.1.1}$$

egyenlet határozza meg a piac magatartását. A túlkereslet bizonyos hányada növeli az árat $(k_i > 0)$. Ehhez az egyenletrendszerhez úgy jutunk, ha a

$$p_i' = F_i\left(E_i\left(p_1, \ldots, p_m\right)\right), \quad i = 1, \ldots, m$$

egyenletrendszerből az F_i függvényeket lineárisnak tekintjük, ezt pedig az egyensúlyi helyzet környezetében (ahol $E_i = 0$) történő linearizálással érhetjük el.

2.1. Definíció. *Egy E:* $[0, \infty)^n \to \mathbb{R}$ *függvényt* ***k-ad fokú homogén függvénynek*** *nevezzük, ha minden* $\mu > 0$ *esetén teljesül, hogy*

$$E\left(\mu p\right) = \mu^k E\left(p\right).$$

2.1. Megjegyzés. *Most számunkra a* $k = 0$ *eset lesz fontos az előző 2.1 definícióból, ami úgy hangzik, hogy egy E függvényt nulladfokú homogén függvénynek nevezünk, ha az* $E\left(\mu p\right) = E\left(p\right)$ *egyenlőség, minden* $\mu > 0$ *esetén teljesül.*

Ennél a modellnél azonban felmerül az a probléma, hogy nem tudjuk mikor lesz a p^e egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabil. Ahhoz, hogy ezt orvosolni tudjuk olyan axiómákat kell felvennünk, melyek a gyakorlattól sem térnek el.
Ezeknek megfelelően a Hicks-Samuelson-modell a következő axiómák meglétét követeli meg:

1. **Walras-törvény:**

$$\langle p, E\left(p\right)\rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i E_i\left(p\right) = 0,$$

ami a gyakorlatban olyan jelentéssel bír, hogy az egyes árukra vonatkozó túlkereslet pénzben kifejezett összege 0, azaz a piacon lévő összes pénzt elköltik.

2. **Az E_i-k nulladfokú homogén függvények.** Ezt a közgazdaságtan nyelvére lefordítva azt kapjuk, hogy a piacon (ahol a munkaerő is jelen van, mint áru) az összes áru nominális[1] ára ugyanannyiszorosára nő, ennek ellenére az áruk reálértékben[2] változatlanok, a kereslet ezekre a termékekre változatlan.

3. **Létezik egyensúlyi árrendszer,** azaz $p^e = (p_1, \ldots, p_m) \geq 0$ árrendszer miközben az $E_i(p^e) = 0, \quad (i = 1, \ldots, m)$. A stabilitásvizsgálat során nyilván szükségünk lesz egyensúlyi árrendszerre, melynek stabilitásáról beszélhetünk. A piaci szereplők szemszögéből vizsgálva az egyensúlyi árrendszer a legoptimálisabb, legkiszámíthatóbb, hiszen ekkor az áruk árai nem változatlanok.

2.2. Megjegyzés. *Az utolsó axióma olykor egy enyhébb változatában is elő szokott fordulni, amely a következőt mondja ki:*
Létezik egy olyan $p^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)$ általánosított egyensúlyi árrendszer, amire $E_i(p^*) \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, és ha $E_i(p^*) < 0$ valamilyen i-re, akkor $p_i^* = 0$. Ennek azt a magyarázatot adhatjuk, hogy egyrészt nem létezik egytlen árura sem túlkereslet, másrészt egy áru túlkínálata esetén az ára 0 lesz, ebből következik, hogy az ára ennél alacsonyabbra nem mehet.

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a Walras-törvény fennáll. Ekkor a*

$$p'(t) = k_i E_i(p(t))$$

$$p_i(0) = p_i$$

$(i = 1, \ldots, m)$ kezdetiérték-probléma megoldása létezik és korlátos $[0, \infty)$-ben.

---

[1] aktuális árat jelent, infláció vagy más tényezők figyelembevétele nélkül
[2] általános árszint időbeli változásai miatt korrigált érték

Bizonyítás. Elég a korlátosságot belátnunk, hiszen a Pcard-Lindelöf tétel alapján az unicitás és az egzisztecia már következik.
Vegyük a

$$W(t) \doteq \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2(t)}{k_i}$$

függvényt. Ekkor

$$\frac{d}{dt}W(t) = 2\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i(t)}{k_i} p_i'(t) = 2\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i(t)}{k_i} k_i E_i(p(t)) = 2\sum_{i=1}^{m} p_i(t) E_i(p(t)),$$

ami a Walras-tétel miatt 0. Így $W(t)$ állandó, $W(t) \equiv W(0) \geq 0$. Tehát a megoldások rajtamaradnak a $W(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2}{k_i}$ ellipszoidon, azaz korlátosak.

$\square$

2.2. A piac jól viselkedése kinyilvánított preferenciák gyenge feltétele esetén

2.2. Definíció. *A piac teljesíti a* ***kinyilvánított preferenciák gyenge axiómáját*** *(későbbiekben kpgya) (weak axiom of revealed preference), ha* $p \neq \mu p^e \quad (\mu > 0)$ *esetén* $\langle p^e, E(p)\rangle > 0$.

2.3. Definíció. *Legyen* p, p' *két árrendszer úgy, hogy teljesül* $p \neq \mu p' \quad (\mu > 0)$ *egyenlőség.*
Ekkor p ***preferált*** p'*-höz képest, ha* $0 = \langle p, E(p)\rangle < \langle p, E(p')\rangle$ *. Speciálisan, ha a kpgya teljesülése esetén* p^e *preferált minden* $p' \neq \mu p^e$*-hoz képest.*

A gyakorlatban ehhez azt az értelmezést társítjuk, hogy p abban az esetben preferált p'-höz képest, ha $E_1(p'), \ldots, E_m(p')$ túlkeresleteknek a $p_1, \ldots, p_m$ árak szerint súlyozott összeg nagyobb, mint 0. Ehhez fel kell hogy legyen téve, hogy p és p' közül nem mindkettő preferált a másikkal szemben, ugyanis p és p' prferencia szempontjából való összehasonlításnak csak ekkor tulajdonítunk értelmet. A túlkeresleteket a következő $\langle p, E(p)\rangle < \langle p, E(p')\rangle$ reláció hasonlítja össze.

2.1. Állítás. *A* p^e *(általánosított) egyensúlyi árrendszer konstans szorzótól eltekintve egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $p^* \neq \mu p^e$ és $E(p^*) \geq 0$. A kpgya-ja alapján ekkor $\langle p^e, E(p*)\rangle > 0$, ami ellent mond $E(p^*) \leq 0$-nak, hiszen $p^e \geq 0$.

$\square$

2.2. Tétel (Ljapunov stabilitási tétele)**.** *Ha megadható a* $p \in M$ *egyensúlyi pont valamilyen nyílt* $U \subset M$ *környezetén olyan* $V : U \to \mathbb{R}$ *folytonos differenciálható függvény, melyre*

1. $V(p) < V(q) \quad \forall q \in U - \{p\}$ *pontban, és*
2. $(L_f V)(q) \leq 0 \quad \forall q \in U - \{p\}$ *pontban,*

akkor a p *egyensúlyi pont stabil. Ha* $(L_f V)(q) < 0 \quad \forall q \in U - \{p\}$ *pontban, akkor a* p *egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil.*

2.3. Tétel. *A* p^e *egyensúlyi árrendszer stabil.*

Bizonyítás. Vegyük

$$V(p) \doteq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} (\Delta p_i)^2 .$$

Ekkor $V(p^e) = 0$, és ha $p \neq p^e$, akkor $V(p) > 0$. Ebből következik a pozitív definitség a V függvényre a p^e pontban. A V függvény (1) egyenlet menti deriváltja a következőt teljesíti:

$$V'_{(1)}(p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial p_i} p'_i = 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} \Delta p_i k_i E_i(p) =$$

$$= \underbrace{2\langle p, E(p)\rangle}_{=0} - \underbrace{2\langle p^e, E(p)\rangle}_{\substack{>0,\, ha \;\; p \neq \mu p^e \\ =0,\, ha \;\; p = \mu p^e}} \leq 0$$

egyenlőtlenség és a 2.2 tétel alapján következik a stabilitás.

□

2.4. Definíció. *Legyen* $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ *állapotok halmaza és* $T \subset S \times S$*, a követkzőképp definiálva:*
$(s_i, s_j) \in T$ *pontosan akkor, ha* s_i *állapotból át tudjuk transzformálni* s_j*-be. Egy invariáns a* T *halmazon egy olyan függvény, amelyre* $f : S \to \mathbb{R}$ *esetén, ha* $(s_i, s_j) \in T$ *akkor* $f(s_i) = f(s_j)$*.*

A továbbiakban az invariancia elvét fogjuk alkalmazni a Hicks-Samuelson-féle modellben.

2.4. Tétel. *A három fentebb említett axiómák és a kpgya megkövetelése esetén, bármilyen $p^0 = (p_1^0, \ldots, p_m^0)$ kezdeti árrendszerre teljesül:*

$$\lim_{t \to \infty} p\left(t, p^0\right) = \nu p^e,$$

ahol $\nu > 0$ olyan, hogy a következő egyenlet:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(p_i^0\right)^2}{k_i} = \nu^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(p_i^e\right)^2}{k_i}$$

igaznak bizonyul.

Bizonyítás. Vegyük a következő $V(p)$-t

$$V(p) \doteq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} \left(p_i - p_i^e\right)^2,$$

ekkor $V(p) \geq 0$ és $V(p) = 0$ pontosan akkor, ha $p = p^e$, azaz pozitív definit p^e-re tekintve. Így

$$V'_{(1)}(p) = -2 \left\langle p^e, E(p) \right\rangle \begin{cases} < 0, ha & p \neq \mu p^e \\ = 0, ha & p = \mu p^e \end{cases},$$

azaz

$$M = \{p : V'(p) = 0\} = \{p : \exists \mu \geq 0 \text{ úgy, hogy } p = \mu p^e\}.$$

Most felhasználva az invariancia-elvét azt kapjuk, hogy $d(p(t), M) \to 0$, $t \to \infty$ esetén. Továbbá tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2(t)}{k_i}$ állandó, ebből

$$p(t) \in \underbrace{\left\{ (p_1, \ldots, p_m) : \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2}{k_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(p_i^0\right)^2}{k_i} \right\}}_{\text{többdimenziós ellipszoid}}.$$

Ez az ellipszoid, illetve az M halmazunk pontosan csak a νp^e pontban metszik egymást, tehát $p(t) \to \nu p^e$.

$\square$

A 2.2 és 2.3 definíciókból következik a piac jól viselkedése, azaz a piac egy egyensúlyi árrendszeréhez konvergál, a kezdeti árrendszer választásától függetlenül, ha a kpgya teljesül.

2.3. A piac jól viselkedése általános helyettesíthetőségi feltétel esetén

A továbbiakban az előbb megfogalmazott megállapítást szeretnénk új feltételek esetén is igazolni. Vizsgáljuk meg rehát azt a következő feltételek mellett:

2.5. Definíció. *Az **általános helyettesíthetőségi feltételt** akkor teljesíti egy piac, ha teljesül tetszőleges olyan i-re, amire $i \neq j, \quad i, j \in (1, 2, \ldots, m)$, hogy $\frac{\partial E_i}{\partial p_j} > 0$.*

Ennek a tulajdonságnak a gyakorlatban azt feleltethetjük meg, hogy ha egy áru árát a piacon növeljük, akkor ebből nyilván következik, hogy a bizonyos áru iránti kereslet csökkenni fog. Tehát a piacon több pénz marad, amiből adódik, hogy a picon lévő többi áru esetén a kereslet pedig megnövekedni fog. Azonban itt is meg kell említeni, hogy e megállapítás is csak a kiegészítő áruktól eltekintve irányadó, hiszen az elektromos fogkefe és a fogkrém esetén ez már teljesen magától értetődő módon nem mondható el. Ebből az okból kifolyólag a feltétel teljesen konisztens, és azt jelenti, amit a neve is állít: tetszőlegesen választott áru helyettesíthető egy másik tetszőlegesen választott áruval.

Az eddigiekhez hasonlóan vegyük a következő:

$$\begin{cases} p_i' = k_i E_i(p) \\ p_i(0) = p_i^0 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

kezdetiérék feladatot.

2.5. Tétel (Euler-tétel)**.** *Legyen $E(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ függvény folytonos és differenciálható. Továbbá $E(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ k-ad fokú homogén, pontosan akkor, ha*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial E}{\partial p_i} p_i = kE(p_1, p_2, \ldots, p_m). \tag{$*$}$$

Bizonyítás. Először a $(\Rightarrow)$ irányt látjuk be. Tegyük fel, hogy E k-adfokú homogén függvény és fixáljuk $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ -et. Definiájunk egy $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$-től függő függvényt a következőképpen:

$$g(\mu) \doteq E(\mu p_1, \mu p_2, \ldots, \mu p_m) - \mu^k E(p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

Vegyük figyelembe, hogy minden $\mu \geq 0$ esetén

$$g(\mu) = 0.$$

Ennél fogva

$$g'(\mu) = 0 \quad \forall \mu > 0.$$

Azonban a láncszabály alapján,

$$g'(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(\mu p_1, \mu p_2, \ldots, \mu p_m)}{\partial p_i} p_i - k\mu^{k-1} E(p_1, p_2, \ldots, p_m).$$

Ekkor $\mu = 1$ esetén látszik, hogy a $*$ egyenlőség teljesül, így ezt az irányt beláttuk.

Másik ($\Leftarrow$) irány esetén tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial E}{\partial p_i} p_i = kE(p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

teljesül. Ismét fixáljunk egy $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$-et és definiáljunk hozzá egy olyan $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$-től függő függvényt a következő képpen:

$$g(\mu) \doteq E(\mu p_1, \mu p_2, \ldots, \mu p_m) - \mu^k E(p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

és vegyük figyelembe, hogy $g(1) = 0$. Ekkor

$$g'(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(\mu p_1, \mu p_2, \ldots, \mu p_m)}{\partial p_i} p_i - k\mu^{k-1} E(p_1, p_2, \ldots, p_m) =$$

$$= \mu^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(\mu p_1, \mu p_2, \ldots, \mu p_m)}{\partial p_i} \mu p_i \right) - k\mu^{k-1} E(p_1, p_2, \ldots, p_m) =$$

$$= \mu^{-1} kE(\mu p_1, \mu p_2, \ldots, \mu p_m) - k\mu^{k-1} E(p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

tehát

$$\mu g'(\mu) = k\left(E(\mu p_1, \mu p_2, \ldots, \mu p_m) - \mu^k E(p_1, p_2, \ldots, p_m)\right) = kg(\mu).$$

Mivel μ tetszőleges és g kielégiti az alábbi differenciálegyenletet

$$g'(\mu) - \frac{k}{\mu} g(\mu) = 0,$$

illetve $g(1) = 0$ esetén megoldva a differenciálegyenletet, kapjuk, hogy

$$g(\mu) = 0 \cdot e^{A(\mu)} + e^{-A(\mu)} \int_1^{\mu} 0 \cdot e^{A(t)} dt = 0,$$

ahol irrelenváns módon $A(\mu) = \int_1^{\mu} \frac{k}{t} dt = -k \ln \mu$. Így $g \equiv 0$, továbbá E homogén $\mathbb{R}_+^n$-en.

$\square$

2.3. Megjegyzés. *Az előző tétel alapján a következő tétel teljesül:*
Ha az $E(p_1, p_2, \dots, p_m)$ függvényre teljesül, hogy nulladfokú homogén, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial E}{\partial p_i} p_i = 0.$$

Mely tétel esetén a bizonyításra egy másik módszer lehet a következő:
Bizonyítás. *Itt csak kettő változó esetén látjuk be az Euler-tételt, azonban több változó esetén is hasonlóan kell eljárni. Használjuk fel a Lagrange-középérték tételt, ekkor*

$$0 = \frac{E_i(p_1 + \mu p_1, p_2 + \mu p_2) - E_i(p_1, p_2)}{\mu} =$$

$$= \frac{E_i(p_1 + \mu p_1, p_2 + \mu p_2) - E_i(p_1 + \mu p_1, p_2) + E_i(p_1 + \mu p_1, p_2) - E_i(p_1, p_2)}{\mu} =$$

$$= \frac{\partial E_i(p_1 + \mu p_1, p_2 + \mu p_2)}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial E_i(p_1 + \xi p_1, p_2)}{\partial p_1} p_1,$$

ez pedig tart a

$$\frac{\partial E_i}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial E_i}{\partial p_2} p_2 \quad \text{-höz}, \quad \text{ha} \quad \mu \to 0,$$

ami bizonyítja a tételt.

□

2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy az általános helyettesíthetőségi feltétel fennáll. Ekkor*

1. *Ha $q = p + \mu e_j$, e_j az m dimenziós tér j-edik báziseleme, $\mu > 0$, $i \neq j$, akkor $E_i(q) > E_i(p)$, azaz egy áru árának növelése esetén vövekedni fog a többi áru iránti kereslet.*

2. *Nem létezik olyan p_i, amelyre teljesülne, hogy $p_i = 0$, vagyis hogy szabad áru lenne.*

3. *A p^e egyensúlyi ár egyértelmű a konstans szorzótól eltekintve.*

Bizonyítás.

1.
$$E_i(q) - E_i(p) = \int_0^1 \frac{d}{dt} E_i(p + t\mu e_j)\, dt =$$
$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial E_i}{\partial p_k}(p + t\mu e_j)\, \delta_{kj} \mu dt =$$
$$= \mu \int_0^1 \frac{\partial E_i}{\partial p_k}(p + t\mu e_j)\, dt > 0,$$

ahol
$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = j \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

2. Ha $p_i = 0$, akkor két eset van. Az egyik, ha minden árura teljesül, hogy az ára nulla vagy tegyük fel indirekten, hogy a következő teljesül:
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial E_i}{\partial p_j} p_j = \sum_{j=1,\ j \neq i}^{m} \frac{\partial E_i}{\partial p_j} p_j > 0.$$
Azonban kihasználva, hogy az E_j egy nulladfokú homogén függvény, felhasználhatjuk az Euler- tételt, tehát
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial E_i}{\partial p_j} p_j = 0,$$
ami ellentmond az előbbieknek.

3. Tegyük fel ismét indirekten, hogy $q^e \neq \mu p^e$, $(\mu > 0)$.
Vegyük μ-t maximálisnak, úgy, hogy teljesüljön $q^e \geq p^e$, ekkor
$$\left.\begin{array}{r} \exists i \in \{1, 2, \ldots, m\} : q_i^e = \mu p_i^e \\ \exists j \neq i : q_i^e > \mu p_i^e \end{array}\right\} \to E_i(q^e) > E_i(\mu p^e) = 0, \tag{2.3.3}$$
ez a következtetés a lemma első állítása miatt teljesül, ezért q^e nem lehet egyensúlyi ár.

Ezek alapján már ki tudjuk mondani és be tudjuk látni az általános helyettesíthetőségi feltételhez kapcsolódó tételt.

2.6. Tétel. *A 2.1, axiómák és az általános helyettesíthetőségi feltétel megkövetelése esetén tetszőleges $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ kezdeti árrendszerre*

$$\lim_{t\to\infty} p\left(t, p^0\right) = \nu p^e,$$

ahol a $\nu > 0$ olyan, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(p_i^0\right)^2}{k_i} = \nu^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(p_i^e\right)^2}{k_i}.$$

Bizonyítás. Már korábban láttuk, hogy a $p(t)$ rajta van a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{k_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(p_i^0\right)^2}{k_i}$$

ellipszoidon $t \geq 0$ esetén és νp^e az egyetlen olyan egyensúlyi ár, amire igaz, hogy az ellipszoidon van rajta.
Definiáljuk $V(p)$-t és $v(t)$-t a következő módon:

$$V(p) \doteq \max_{1\leq i\leq m} \frac{p_i}{p_i^e},$$

illetve

$$v(t) \doteq V\left(p\left(t, p^0\right)\right) \quad \text{és} t_1 \quad \text{rögzített.} \quad v(t_1) \geq \frac{p_i\left(t_1, p^0\right)}{p_i^e},$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$ a definició alapján. Ekkor a következő eseteket kell megvizsgálnunk:

1. Ha $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ esetén $p_i\left(t_1, p^0\right) = v(t_1)\, p_i^e$, akkor a t_i időpillanatban $p_i\left(t_1, p^0\right) = \mu p_i^e$, $\mu = v(t_i)$, vagyis az árak egyensúlyban vannak a t_1 időpontban. Minden t-re a megoldások unicitásából következik, hogy $p_i\left(t_1, p^0\right) = \mu_i^e$, tehát

$$v(t) \equiv \mu = \nu \quad \text{és} \quad v'(t_1) \doteq V'_{(1)}\left(p\left(t, p^0\right)\right) = 0.$$

2. Ha $\exists j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, hogy $p_j\left(t_1, p^0\right) < v(t_1)\, p_j^e$, akkor a V definicióját felhasználva az is következik, hogy $\exists k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $p_k\left(t_1, p^0\right) = v(t_1)\, p_k^e$, illetve

$$v'(t_1) = \frac{d}{dt} \frac{p_k\left(t, p^0\right)}{p_k^e}\Bigg|_{t=t_1}$$

Másfelől

$$v'(t_1) = V'_{(1)}\left(p\left(t,p^0\right)\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V\left(p\left(t_1,p^0\right)\right)}{\partial p_i} p'_i\left(t_1,p^0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V\left(p\left(t_1,p^0\right)\right)}{\partial p_i} k_i E_i\left(p\left(t_1,p^0\right)\right) = \frac{d}{dt}\frac{p_k\left(t,p^0\right)}{p_k^e}\bigg|_{t=t_1} =$$

$$= \frac{k_k}{p_k^e} E_k\left(p\left(t_1,p^0\right)\right) < \frac{k_k}{p_k^e} E_k\left(v\left(t_1\right)p^e\right) = 0,$$

hiszen $\left(p\left(t_1,p^0\right)\right) \leq \left(v\left(t_1\right)p^e\right)$, $\quad \left(p_j\left(t_1,p^0\right)\right) < \left(v\left(t_1\right)p_j^e\right)$ és a 2.1-es lemma első pontját alkalmazva,

$$v'(t_1) = V'_{(1)}\left(p\left(t_1,p^0\right)\right) < 0.$$

Végül alkalmazva az invariancia-elvet a V alulról való korlátossága következik a 2.1-lemma második pontja miatt, ugyanis $p_i = 0$ nem lehetséges, illetve $p_i(t) > 0, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$-re.

$$V'_{(1)}(p) \begin{cases} = 0, & \text{ha} p = \mu p^e \\ < 0, & \text{ha} p \neq \mu p^e \end{cases} \tag{2.3.4}$$

$$M = \{p : V'_{(1)}(p) = 0\} = \{p : \exists \mu > 0 : p = \mu p^e\}.$$

Így az invariancia-elvet felhasználva $d\left(p\left(t\right), M\right) \to \nu p^e, \quad (t \to \infty)$, hiszen csak ez a pont van M és az ellipszoid metszetében. Így az eredményt bizonyítottuk globálisan, mivel a bizonyítás menete nem csak a $\mu p^e\,(\mu > 0)$ egyensúlyi helyzethez közeli p^0-ra teljesül, hanem minden p^0 kezdetiértékre.

□

Hivatkozások

[1] Hatvani László-Krisztin Tibor-Makay Géza: *Dinamikus modellek a közgazdaságban.* Polygon, Szeged (2001).

[2] Komornik Vilmos: *Valós analízis előadások.* TypoTEX, Budapest (2003).

[3] Zalai Ernő: *Matematikai Közgazdaságtan II.* Akadémiai Kiadó, (2020).

[4] Luptovics János Sándor: *Gazdasági Rendszerek Kvalitatív Vizsgálata* Budapest, (2012)

[5] Dr. Rontó Miklós: *Dinamikus gazdasági modellek* Miskolci Egyetem Matematikai Intézet Analítis tanszék, (2006).

[6] Apostol, T. M. 1967. Calculus, 2d. ed., volume 1. Waltham, Massachusetts: Blaisde

[7] https://hu.wikipedia.org/wiki/*Paul_Samuelson*
https://en.wikipedia.org/wiki/*Paul_Samuelson*

[8] https://hu.wikipedia.org/wiki/*L%C3%A9on_Walras*
https://en.wikipedia.org/wiki/*L%C3%A9on_Walras*

[9] https://hu.wikipedia.org/wiki/*John_Hicks*
https://en.wikipedia.org/wiki/*John_Hicks*

[10] Hausmann Péter: *Bevezetés a közgazdaságtudományba* Pécs, (2009)