

NYILATKOZAT

Név: *Markó Anna Erzsébet*
ELTE Természettudományi Kar, szak: *Matematika*
NEPTUN azonosító: *MTEZDD*
Szakdolgozat címe: *Egész spektrumú grafok*

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. 05. 31.

Markó

a hallgató aláírása

SZAKDOLGOZAT

Egész spektrumú gráfok

Markó Anna Erzsébet

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Dr. Ágoston István
egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék



ELTE
2022

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak a szakdolgozat megírásában nyújtott segítséget.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés a spektrális gráfelméletbe	4
2. Egész spektrumú fák	14
2.1. Utak	14
2.2. Csillaggráfok	18
2.3. Csillagszerű fák	18
2.4. Tetszőlegesen nagy átmérőjű, egész spektrumú fák	21
3. Reguláris gráfok	29
3.1. 3-reguláris gráfok	31
3.2. 4-reguláris gráfok	32
4. Az n csúcsú egész spektrumú gráfok számának becslése	33

Bevezető

A spektrális gráfelmélet az algebrai gráfelmélet egy fontos ága, amely gráfok mátrix reprezentációinak karakterisztikus polinomján, sajátértékein és sajátvektorain keresztül vizsgál gráftulajdonságokat. A spektrum alapján eldönthető például, hogy páros-e az adott gráf, de ilyen tulajdonság lehet a kromatikus szám is, amiről a szomszédsági mátrix legkisebb sajátértéke ad információt. [11].

Egész spektrumú gráfoknak nevezzük azokat a gráfokat melyekre igaz, hogy a szomszédsági mátrixuk $\Phi_G(\lambda)$ karakterisztikus polinomjának minden gyöke egész. A fogalmat 1973-ban vezette be F. Harary és A. Schwenk. Az elmúlt évtizedekben számos olyan eredmény született, amely meghatározta egyes gráfosztályok egész spektrumú gráfjait; ide tartoznak például azok a gráfok amelyek legnagyobb fokszáma három, vagy azok a nem reguláris gráfok, melyek maximális fokszáma négy [1].

A szakirodalomban fellelni nagyszámú konstrukciót tetszőlegesen nagy, egész spektrumú gráfokra [6][7], ezzel szemben ezek a gráfok nagyon ritkák.

A szakdolgozat első fejezetében bevezetjük a spektrális gráfelmélet alapfogalmait, ismertetünk pár, a témához elengedhetetlen, állítást, illetve tételt. A második fejezetben karakterizáljuk a fák néhány osztályát és adunk egy konstrukciót tetszőlegesen nagy, páros átmérőjű egész spektrumú fákra. Ezután, a harmadik fejezetben ismertetünk pár eredményt az egész spektrumú reguláris gráfokról. Az utolsó fejezetben adunk egy felső becslést az n csúcsú egész spektrumú gráfok számára.

A dolgozat során kizárólag többszörösél- és hurokélmentes gráfokkal foglalkozunk.

1. fejezet

Bevezetés a spektrális gráfelméletbe

1.1. Definíció (Szomszédsági mátrix). Egy $G=(E,V)$ n csúcsú gráf *szomszédsági mátrixának* nevezzük azt az $A_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot, ahol: $(A_G)_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{ha } uv \in E \\ 0, & \text{ha } uv \notin E \end{cases}$.

1.2. Megjegyzés. Irányítatlan gráfoknak az A_G szomszédsági mátrixa szimmetrikus, így sajátértékei valósak. A valós értékű, szimmetrikus mátrixok önadjungáltak, így ortonormált bázisban diagonalizálhatóak: létezik S ortogonális mátrix, oszlopaiban a sajátvektorokkal, hogy $S^{-1}A_G S = D$, ahol D diagonális mátrix, főátlóban a sajátértékekkel. Tehát minden irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának létezik n darab valós sajátértéke és n darab független sajátvektora, amik megválaszthatóak egymásra merőlegesnek.

1.3. Definíció (Spektrum). Az A_G mátrix sajátértékeinek multiplicitással vett halmazát a G gráf *spektrumának* nevezzük. Jelölése: $Spec(A_G) = \{\lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_k^{m_k}\}$, ahol m_i a λ_i sajátérték multiplicitását jelöli.

1.4. Megjegyzés. Szemléltessük, mit is jelent, hogy egy vektor egy szomszédsági mátrix sajátvektora. A szomszédsági mátrix i -edik sorának és egy vektornak a skalárszorzata a vektor azon koordinátáinak összege, amelyeknek megfelelő csúcsok szomszédosak az i -edik csúccsal. Vagyis az A_G mátrixnak egy \mathbf{v} vektorral vett szorzatát az alábbi módon kaphatjuk meg. Legyen G egy n csúcsú gráf, és írjunk minden csúcsára egy $v_i \in \mathbb{R}$ számot. Legyen \mathbf{v} az ezekből képzett oszlopvektor: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$. Cseréljünk le minden v_i -t az i -edik csúccsal szomszédos csúcsokra írt számok összegére. Legyenek ezek az új címkék w_i -k, és jelölje \mathbf{w} az ezekből képzett $(w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ vektort. Ekkor $A_G \mathbf{v} = \mathbf{w}$. Ha teljesül, hogy a \mathbf{w} vektor a \mathbf{v} vektor λ skalárszorosa, akkor a \mathbf{v} az A_G szomszédsági mátrixnak egy sajátvektora λ sajátértékkel, mivel $\mathbf{w} = A_G \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

1.5. Megjegyzés. Jelölje Δ_G egy G gráf legnagyobb fokszámát. Ekkor a G gráf spektrumára teljesül, hogy $\forall \lambda_i \in Spec(G) : -\Delta_G \leq \lambda_i \leq \Delta_G$, hiszen mikor az A_G mátrix egy sorát szorozzuk egy \mathbf{x} vektorral, akkor \mathbf{x} -nek legfeljebb Δ_G koordinátáját adjuk össze, így ha $\lambda > \Delta$, akkor $\lambda \max_i(x_i) > (A_G \mathbf{x})_i$.

A következőkben megnézzük két nevezetes gráf spektrumát.

1.6. Példa. Legyen K_n az n csúcsú teljes gráf, számoljuk ki a spektrumát.

$$A_{K_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{K_n} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Az A_{K_n} minden sorában $n - 1$ darab 1-es szerepel, így a csupa 1 vektor sajátvektor lesz a $\lambda = n - 1$ sajátértékkal. A szomszédsági mátrixhoz tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\Phi_{K_n}(\lambda) = \det(\lambda I - A_{K_n}) = 0$$

A $\lambda = -1$ is sajátérték lesz, mivel a $(-I - A_{K_n})$ mátrix determinánsa 0. Ugyanennek a mátrixnak a rangja 1, így a magterének dimenziója $n - 1$. Ebből következik, hogy a -1 legalább $(n - 1)$ -szeres sajátérték. Így mind az n darab sajátértéket megkaptuk, tehát a gráf spektruma: $\text{Spec}(K_n) = \{(-1)^{n-1}, n - 1\}$.

Ugyanezt, persze, megkaphattuk volna a karakterisztikus polinom konkrét kiszámolásával is.

1.7. Példa. Legyen $K_{m,n}$ a teljes páros gráf. Számoljuk ki ennek is a spektrumát.

$$A_{K_{m,n}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J \\ J^T & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

ahol $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ csupa egyesből álló mátrix. A mátrix rangja 2, így a magterének dimenziója $m + n - 2$, tehát a 0 legalább $m + n - 2$ -szeres sajátérték lesz.

Használjuk az 1.4. Megjegyzésben leírt módszert a további sajátértékek meghatározásához. Írjuk a gráf első m csúcsára a \sqrt{n} , majd az utolsó n csúcsára a \sqrt{m} értékeket:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= (\sqrt{n}, \dots, \sqrt{n}, \sqrt{m}, \dots, \sqrt{m})^T \\ \mathbf{w} &= (n\sqrt{m}, \dots, n\sqrt{m}, m\sqrt{n}, \dots, m\sqrt{n})^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{w} = \sqrt{mn} \mathbf{v}$$

Szorozva -1 -gyel az első m csúcsra írt értékeket:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= (-\sqrt{n}, \dots, -\sqrt{n}, \sqrt{m}, \dots, \sqrt{m})^T \\ \mathbf{w} &= (n\sqrt{m}, \dots, n\sqrt{m}, -m\sqrt{n}, \dots, -m\sqrt{n})^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{w} = -\sqrt{mn}\mathbf{v}$$

Ez azt jelenti, hogy a \sqrt{mn} , $-\sqrt{mn}$ is sajátértékek, így az egész spektrumot meghatároztuk: $\text{Spec}(K_{n,m}) = \{0^{n+m-2}, \pm\sqrt{mn}\}$.

Most megnézzük a spektrum alakulását egyes gráfelméleti konstrukciónál. Vizsgáljuk meg először, hogyan kapjuk a spektrumot, ha csúcsdiszjunkt gráfokat egyesítünk.

1.8. Állítás. *Legyenek G_1, \dots, G_n egyszerű gráfok, jelölje G ezek csúcsdiszjunkt egyesítését. Ekkor $\text{Spec}(G) = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec}(G_i)$.*

Bizonyítás. A G gráf szomszédsági mátrixa egy diagonális blokkmátrixként áll elő, ahol az egyes blokkok a G_i gráfok szomszédsági mátrixai, ahol $1 \leq i \leq n$.

$$A_G = \begin{pmatrix} A_{G_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{G_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{G_n} \end{pmatrix}$$

Legyen $|G(V)| = m$, ekkor $A_G \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Adjunk meg egy A_G sajátvektoraiból álló bázist \mathbb{R}^m -ben. Az ezekhez tartozó sajátértékekből előáll a gráf spektruma. Legyen $\mathbf{v}_{i,j}$ egy A_{G_i} szomszédsági mátrixhoz tartozó sajátvektor $\lambda_{i,j}$ sajátértékkel. Jelölje $\mathbf{v}'_{i,j}$ a $\mathbf{v}_{i,j}$ 0-kal való kiegészítését \mathbb{R}^m méretűre úgy, hogy azokon a koordinátákon, ahol a az A_G mátrix soraiban az A_{G_i} blokk szerepel, ott $\mathbf{v}'_{i,j}$ elemei egyezzenek meg a $\mathbf{v}_{i,j}$ elemeivel, a többi eleme pedig legyen 0.

$$A_{G_i} \mathbf{v}_{i,j} = \lambda_{i,j} \mathbf{v}_{i,j} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & A_{G_i} & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{i,j} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = A_G \mathbf{v}'_{i,j} = \lambda_{i,j} \mathbf{v}'_{i,j}$$

Minden A_{G_i} mátrixnak a sajátvektoraiból választható bázis \mathbb{R}^{m_i} -ben ahol $A_{G_i} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$. Válasszunk egy ilyen, és az előző módon egészítsük ki a bázist alkotó vektorokat nullákkal. Ekkor $X = \{\mathbf{v}'_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i\}$ egy A_G sajátvektoraiból álló bázis \mathbb{R}^m -ben. Minden $\mathbf{v}' \in X$ sajátvektorhoz egy $\bigcup_{i=1}^n \text{Spec}(G_i)$ halmazbeli sajátérték tartozik, így az állítást beláttuk. \square

A következőkben gráfok különböző szorzatainak spektrumát nézzük meg. Ehhez először egy mátrixkonstrukciót ismertetünk.

1.9. Definíció (Kronecker-szorzat). Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{C}^{k \times l}$ mátrixok. Ekkor A és B Kronecker-szorzata $A \otimes B \in \mathbb{C}^{mk \times nl}$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,m}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & \dots & a_{1,1}b_{1,l} & \dots & \dots & a_{1,m}b_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{1,1}b_{k,1} & \dots & a_{1,1}b_{k,l} & \dots & \dots & a_{1,m}b_{k,l} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}b_{k,1} & \dots & a_{n,1}b_{k,l} & \dots & \dots & a_{n,m}b_{k,l} \end{pmatrix}$$

Nézzük meg, hogyan áll elő két oszlopvektor Kronecker-szorzata. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1\mathbf{y} \\ x_2\mathbf{y} \\ \vdots \\ x_n\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ \vdots \\ x_1y_m \\ x_2y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_ny_m \end{pmatrix}$$

1.10. Állítás. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$. Ekkor teljesül a következő azonosság: $(A \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}) \otimes (B\mathbf{y})$

Bizonyítás. Használjuk az $(A)_{i,j} = a_{i,j}$, $(B)_{i,j} = b_{i,j}$ jelöléseket.

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,m}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\mathbf{y} \\ x_2\mathbf{y} \\ \vdots \\ x_m\mathbf{y} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & \dots & a_{1,1}b_{1,l} & \dots & \dots & a_{1,m}b_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{1,1}b_{k,1} & \dots & a_{1,1}b_{k,l} & \dots & \dots & a_{1,m}b_{k,l} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}b_{k,1} & \dots & a_{n,1}b_{k,l} & \dots & \dots & a_{n,m}b_{k,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ \vdots \\ x_1y_l \\ \vdots \\ \vdots \\ x_my_l \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1}x_1y_1 + \cdots + a_{1,1}b_{1,l}x_1y_l + \cdots + \cdots + a_{1,m}b_{1,l}x_my_l \\ \vdots \\ a_{1,1}b_{k,1}x_1y_1 + \cdots + a_{1,1}b_{k,l}x_1y_l + \cdots + \cdots + a_{1,m}b_{k,l}x_my_l \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1}b_{k,1}x_1y_1 + \cdots + a_{n,1}b_{k,l}x_1y_l + \cdots + \cdots + a_{n,m}b_{k,l}x_my_l \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,m}x_m)(b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 \cdots + b_{1,l}y_l) \\ (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,m}x_m)(b_{2,1}y_1 + b_{2,2}y_2 \cdots + b_{2,l}y_l) \\ \vdots \\ (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,m}x_m)(b_{k,1}y_1 + b_{k,2}y_2 \cdots + b_{k,l}y_l) \\ \vdots \\ \vdots \\ (a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 \cdots + a_{n,m}x_m)(b_{k,1}y_1 + b_{k,2}y_2 \cdots + b_{k,l}y_l) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,m}x_m) \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \cdots + a_{2,m}x_m) \\ \vdots \\ (a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 \cdots + a_{n,m}x_m) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} (b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 \cdots + b_{1,l}y_l) \\ (b_{2,1}y_1 + b_{2,2}y_2 \cdots + b_{2,l}y_l) \\ \vdots \\ (b_{k,1}y_1 + b_{k,2}y_2 \cdots + b_{k,l}y_l) \end{pmatrix} = (\mathbf{Ax}) \otimes (\mathbf{By})
\end{aligned}$$

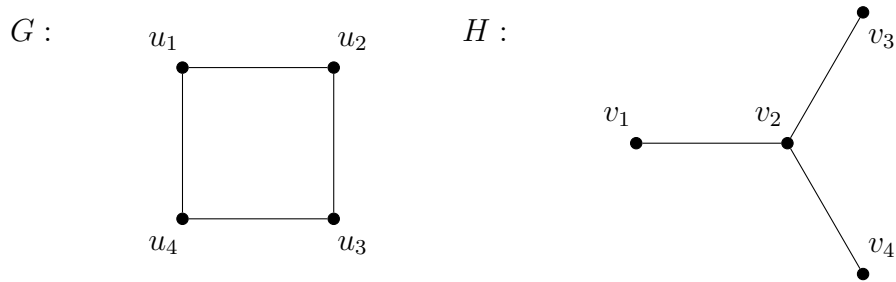
□

Most bevezetjük a gráfok ún. tenzorszorzatát.

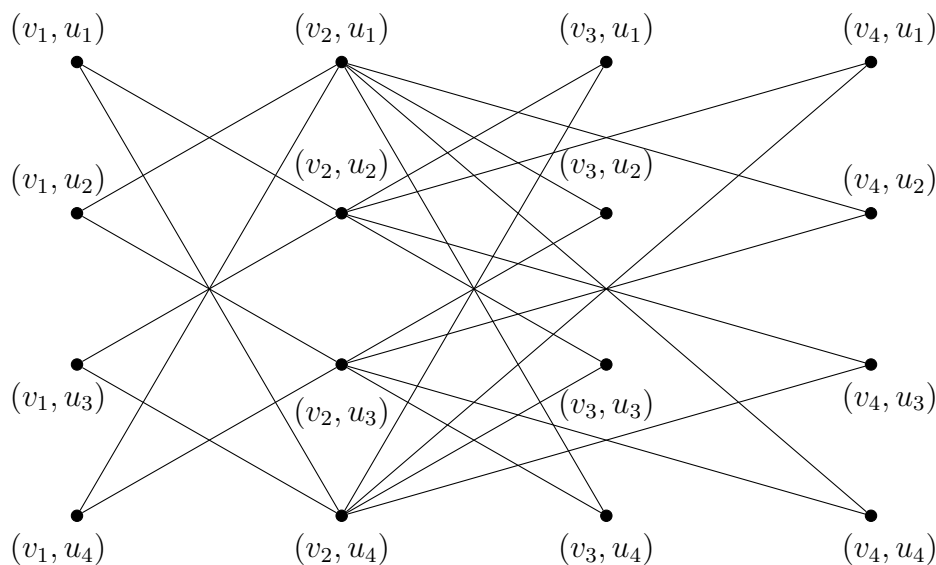
1.11. Definíció (Tenzorszorzat). Legyen $G = (E_1, V_1)$ és $H = (E_2, V_2)$. Ekkor $G \otimes H$ a tenzorszorzata G -nek és H -nak, ha $V(G \otimes H) = V_1 \times V_2$, és (u, v) szomszédos (u', v') -vel, ha u szomszédos u' -vel G -ben, és v szomszédos v' -vel H -ban.

Nézzünk egy példát két gráf tenzorszorzatára.

1.12. Példa.



$G \otimes H$:



Legyen G és H két egyszerű gráf, $|V(G)| = n$, $|V(H)| = m$. Vizsgáljuk meg hogyan áll elő a tenzorszorzatuk szomszédsági mátrixa.

1.13. Állítás. $A_{G \otimes H} = A_G \otimes A_H$

Bizonyítás.

$$A_G \otimes A_H = \begin{pmatrix} a_{1,1}A_H & \dots & a_{1,n}A_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}A_H & \dots & a_{m,n}A_H \end{pmatrix}$$

Az $a_{i,j}A_H$ mátrix $(a_{i,j}A_H)_{k,l}$ eleme pontosan akkor 1, ha $a_{i,j} = 1$, tehát az i és j csúcsok szomszédosak G -ben, illetve $(A_H)_{k,l} = 1$, tehát k és l szomszédosak H -ban. Ez azt jelenti, hogy $A_G \otimes A_H$ a $G \otimes H$ tenzorszorzat szomszédsági mátrixa: $A_{G \otimes H} = A_G \otimes A_H$. \square

1.14. Állítás. $\text{Spec}(G \otimes H) = \{\lambda\mu : \lambda \in \text{Spec}(G), \mu \in \text{Spec}(H)\}$

Bizonyítás. Legyen $|G(V)| = n$, $|H(V)| = m$. Legyen $\lambda \in \text{Spec}(G)$, $\mu \in \text{Spec}(H)$ tetszőleges, egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektor \mathbf{x} és \mathbf{y} . Belátjuk, hogy az $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ Kronecker-szorzat sajátvektora az $A_{G \otimes H}$ mátrixnak, és a hozzá tartozó sajátérték $\lambda\mu$. Használjuk az 1.10. Állítást és az 1.13. Állítást.

$$A_{G \otimes H}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (A_G \otimes A_H)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (A_G \mathbf{x}) \otimes (A_H \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x}) \otimes (\mu \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \lambda\mu x_1 \mathbf{y} \\ \lambda\mu x_2 \mathbf{y} \\ \vdots \\ \lambda\mu x_n \mathbf{y} \end{pmatrix} = \lambda\mu(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$$

Ez az egyenlőség A_H és A_G minden sajátvektorára teljesül. Válasszunk A_G sajátvektoraiból egy $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ bázist \mathbb{R}^n -ben, és A_H sajátvektoraiból egy $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ bázist \mathbb{R}^m -ben.

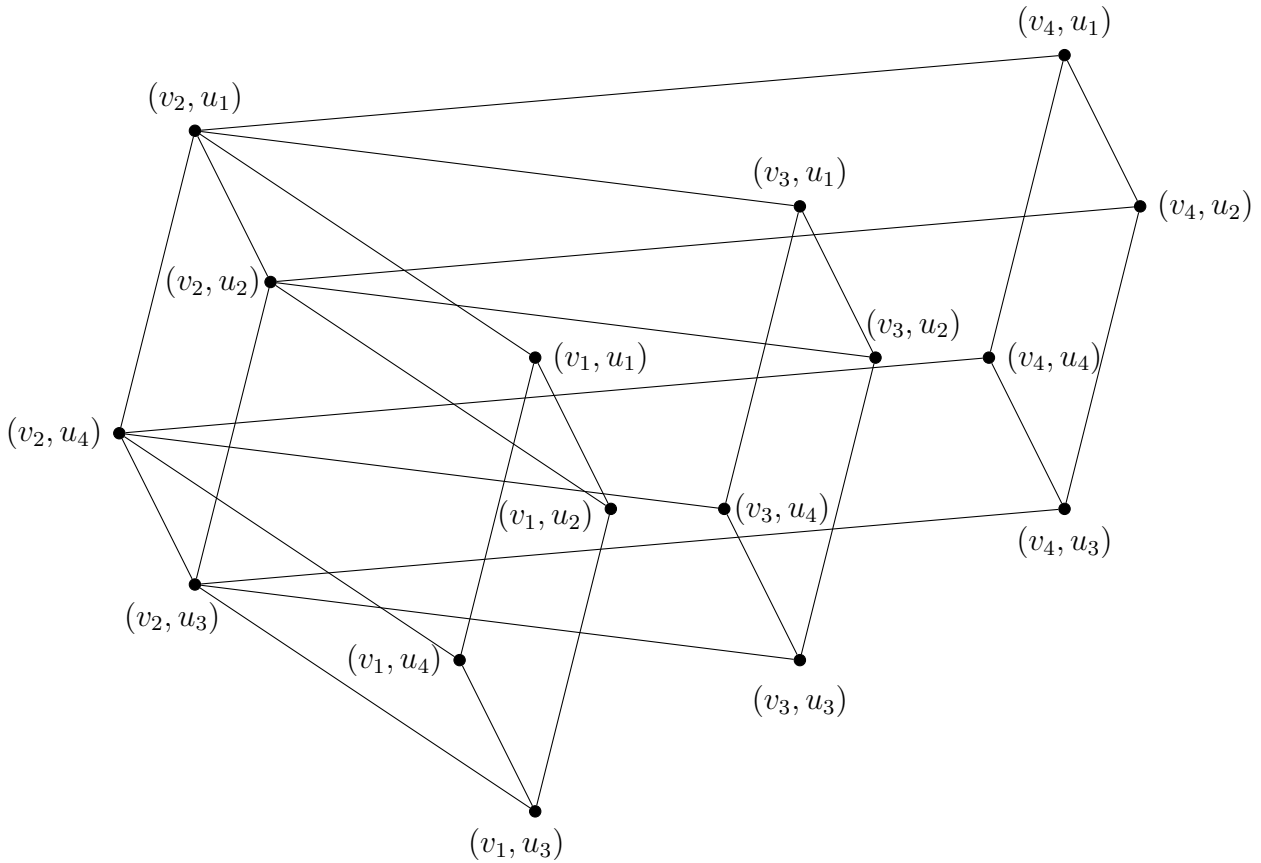
Ekkor $\{(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ bázis \mathbb{R}^{nm} -ben, tehát az ezekhez a sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek megadják $A_{G \times H}$ spektrumát. \square

Most megismerkedünk egy másfajta szorzattal is.

1.15. Definíció (Descartes-szorzat). Legyenek $G = (E_1, V_1)$, $H = (E_2, V_2)$ gráfok. Ekkor G és H Descartes-szorzatának nevezzük, és $G \times H$ -val jelöljük azt a gráfot, melyre $V(G \times H) = V_1 \times V_2$, és (u, i) szomszédos (u', i') -vel, ha $u = u'$ és i szomszédos i' -vel H -ban, vagy $i = i'$ és u szomszédos u' -vel G -ben.

1.16. Példa. Nézzük meg, mi lesz a 1.12. Példában definiált G és H gráf Descartes-szorzata.

$G \times H$:



1.17. Állítás. [15] $\text{Spec}(G \times H) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \text{Spec}(G), \mu \in \text{Spec}(H)\}$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \text{Spec}(G)$, $\mu \in \text{Spec}(H)$ tetszőleges, \mathbf{x} és \mathbf{y} pedig egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektor:

$$A_G \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$A_H \mathbf{y} = \mu \mathbf{y}$$

Ekkor $\forall u \in V_1, \forall i \in V_2$ -re:

$$\begin{aligned}\sum_{uv \in E_1} x_v &= \lambda x_u \\ \sum_{ij \in E_2} y_j &= \mu y_i\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ az $A_{G \times H}$ sajátvektora, ami a $\lambda + \mu$ sajátértékhez tartozik. Jelölje E a $G \times H$ élhalmazát. Rögzített (u, i) csúcsra:

$$\begin{aligned}\sum_{(u,i)(v,j) \in E} x_v y_j &= \sum_{(u,i)(u,j) \in E} x_u y_j + \sum_{(u,i)(v,i) \in E} x_v y_i = x_u \sum_{ij \in E_2} y_j + y_i \sum_{uv \in E_1} x_v = x_u \mu y_i + y_i \lambda x_u = \\ &= (\lambda + \mu) x_u y_i\end{aligned}$$

A $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ Kronecker-szorzat elemei $x_i y_j$ szorzatok. Használjuk a $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})_{(i,j)} = x_i y_j$ jelölést.

$$\sum_{(u,i)(v,j) \in E} x_v y_j = \sum_{(u,i)(v,j) \in E} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})_{(v,j)} = (A_{G \times H}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}))_{(u,i)}$$

Tehát $\forall (u, i) \in V(G \times H)$ csúcsra teljesül, hogy $(A_{G \times H}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}))_{(u,i)} = (\lambda + \mu) x_u y_i$, amiből következik a kívánt egyenlőség:

$$A_{G \times H}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (\lambda + \mu)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$$

Ez az egyenlőség $\forall \lambda \in \text{Spec}(G), \forall \mu \in \text{Spec}(H)$ sajátértékre igaz, így teljesül, hogy ezek páronkénti összege eleme a $G \times H$ gráf spektrumának. Annak bizonyítása, hogy más sajátérték nem szerepelhet a spektrumban, itt is a fentebb látott érveléssel történhet. Választható $A_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sajátvektoraiból egy $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ bázis \mathbb{R}^n -ben és ugyanígy egy $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ bázis $A_H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sajátvektoraiból \mathbb{R}^m -ben. Ekkor $\{(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ sajátvektorokból álló bázis \mathbb{R}^{nm} -ben, ami kizárja, hogy az ezekhez tartozó sajátértékeken kívül szerepeljen más a spektrumban. \square

1.18. Definíció (Egész spektrumú gráf). Azokat a gráfokat, melyek spektruma kizárólag egész számokat tartalmaz, egész spektrumú gráfoknak nevezzük.

Az egész spektrumú gráfok vizsgálásához először kimondjuk a spektrális gráfelmélet három tételét, az első kettőt bizonyítás nélkül.

1.19. Tétel. [9] Legyen G egy n csúcsú gráf $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel. Jelölje $G - v$ azt a gráfot, ami G -ből a v csúcs és a v -ből induló élek törlésével keletkezik. A $G - v$

sajátértékei legyenek $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$. Ekkor teljesül, hogy

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

1.20. Tétel. [9] Legyen G egy n csúcsú gráf, a karakterisztikus polinomja

$$\Phi_G(\lambda) = \det(\lambda I - G) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i}$$

Ekkor a polinom együtthatóira teljesül, hogy

$$a_0 = 1$$

$$\forall 1 \leq i \leq n : a_i = \sum_H (-1)^{k(H)} 2^{c(H)}$$

ahol a H a G olyan i csúcsú részgráfja, ami csupán izolált élekből vagy körökből áll. Ha nincs ilyen részgráf, az együttható 0. A $k(H)$ a H komponenseit, a $c(H)$ a H -ban lévő körök számát jelöli.

1.21. Tétel. Minden G páros gráfnak a spektruma szimmetrikus, azaz ha λ k -szoros sajátértéke A_G -nek, akkor $-\lambda$ is k -szoros sajátérték.

Bizonyítás. Legyen G egy $n + m$ csúcsú páros gráf, ahol n és m a két színosztály mérete.

Ekkor a szomszédsági mátrixa felírható $A_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J \\ J^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ alakban, ahol $J \in \mathbb{R}^{n \times m}$ csupa

egyesből álló mátrix. Legyen λ egy sajátértéke A_G -nek és $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, ahol $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$.

$$A_G \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J \\ J^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow J \mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{x}_1 \wedge J^T \mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2$$

Véve \mathbf{x}_1 -nek a (-1) -gyel vett szorzatát, szintén egy sajátvektort kapunk $-\lambda$ sajátértékkel.

$$A_G \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J \\ J^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \mathbf{x}_2 \\ -J^T \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{x}_1 \\ -\lambda \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$$

Ha a λ multiplicitása k , akkor választható k darab λ -hoz tartozó független sajátvektor. Ezek első n koordinátájának -1 -szeresét véve $-\lambda$ -hoz tartozó páronként független sajátvektorokat kapunk, így $-\lambda$ multiplicitása is k . □

1.22. Megjegyzés. [11] Egy összefüggő G gráf spektruma szimmetrikus pontosan akkor, ha G páros gráf.

Az 1.8. Állítás értelmében egy nem összefüggő gráf spektruma a komponensei spektrumainak uniójából áll, így a továbbiakban feltesszük, hogy a vizsgált gráfok összefüggőek.

2. fejezet

Egész spektrumú fák

2.1. Utak

Jelölje P_n az n csúcsú útgráfot. Belátjuk, hogy a P_1 -en és a P_2 -n kívül nem létezik egész spektrumú útgráf. A bizonyítás [9] a körgráfok spektrumára való visszavezetéssel történik, így először meghatározzuk ezek spektrumát. Jelölje az n csúcsú körgráfot C_n .

2.1. Állítás. $Spec(C_n) = \{2 \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) : j = 1, \dots, n\}$

Bizonyítás.

$$A_{C_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Belátjuk, hogy a $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ -ra \mathbf{x}_k sajátvektora A_{C_n} -nek, ahol

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi 2k}{n}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{2\pi nk}{n}\right) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi ik}{n}\right) \mathbf{e}_i$$

Használjuk a $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ trigonometrikus egyenlőséget.

$$\begin{aligned}
 A_{C_n} \mathbf{x}_k &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi k) + \cos\left(\frac{2\pi 2k}{n}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi 3k}{n}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(n-1)k}{n}\right) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \left(\cos\left(\frac{2\pi k(i+1)}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi k(i-1)}{n}\right) \right) \mathbf{e}_i = \\
 &= \sum_{i=1}^n 2 \cos\left(\frac{2\pi ki}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \mathbf{e}_i = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \sum_{i=1}^n 2 \cos\left(\frac{2\pi ki}{n}\right) \mathbf{e}_i = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \mathbf{x}_k
 \end{aligned}$$

Válasszunk egy $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ sajátvektort, ahol $0 < k < \frac{n}{2}$. Ekkor ha vesszük a $\forall 0 \leq i < n$ esetében a $\mathbf{x}'_i = (x_{1+i}, x_{2+i}, \dots, x_{n+i})$ vektorokat, akkor egy sajátvektorokból álló bázist kapunk \mathbb{R}^n -ben, tehát a hozzájuk tartozó sajátértékek kiadják a gráf spektrumát.

$$A_{C_n} \mathbf{x}'_i = \cos\left(\frac{2\pi(k+i)}{n}\right) \mathbf{x}'_i$$

A koszinusz függvény szimmetriája miatt $\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi(n-j)}{n}\right)$, így a gráf spektruma: $Spec(C_n) = \left\{2 \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) : j = 1, \dots, n\right\}$

□

2.2. Állítás. $Spec(P_n) = \left\{2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) : j = 1, \dots, n\right\}$

Bizonyítás.

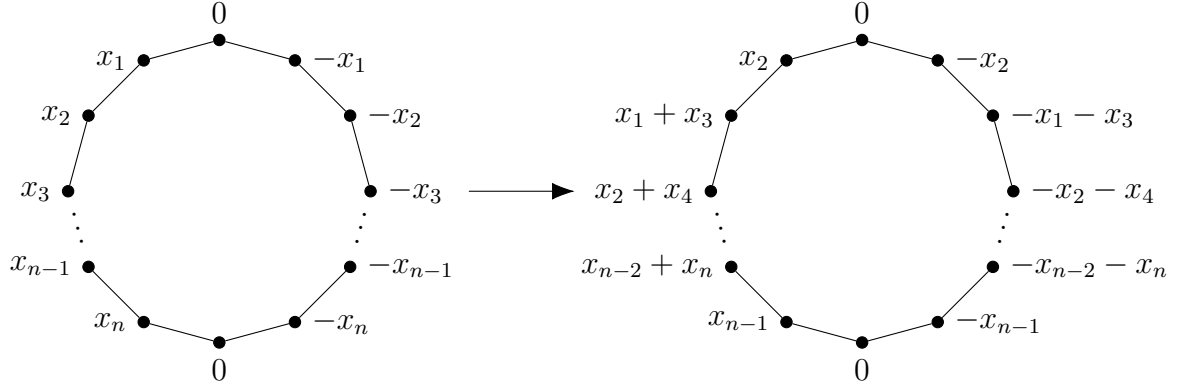
$$A_{P_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Legyen \mathbf{x} egy sajátvektora A_{P_n} -nek λ sajátértékkel. Jelölje $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ az $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)^T$ vektort. Az 1.4. Megjegyzés értelmében

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ebből következik, hogy az $(\mathbf{x}^T, 0, -\mathbf{x}'^T, 0)^T$ és a $(0, -\mathbf{x}^T, 0, \mathbf{x}'^T)^T$ vektorok függetlenek, hiszen

ha $x_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$. Szintén az 1.4. Megjegyzésben leírt módszerrel ellenőrizhetjük, hogy ez a két vektor sajátvektora lesz az $A_{C_{2n+2}}$ mátrixnak λ sajátértékkel.



$$\alpha(\mathbf{x}^T, 0, -\mathbf{x}^{iT}, 0)^T = (x_2, x_1+x_3, \dots, x_{n-2}+x_n, x_{n-1}, 0, -x_2, -x_1-x_3, \dots, -x_{n-2}-x_n, -x_{n-1}, 0)^T$$

Ugyanígy látszik, hogy $(0, -\mathbf{x}^T, 0, -\mathbf{x}^{iT})^T$ is sajátvektora $A_{C_{2n+2}}$ -nek λ sajátértékkel. Tudjuk, hogy $Spec(C_{2n+2}) = \{2 \cos(\frac{j\pi}{n+1}) : j = 1, \dots, 2n+2\}$, és azt kaptuk, hogy egy A_{P_n} -hez tartozó sajátérték legalább kétszeres sajátértéke $A_{C_{2n+2}}$ -nek. Ez csak úgy teljesülhet, ha $Spec(P_n) = \{2 \cos(\frac{j\pi}{n+1}) : j = 1, \dots, n\}$. \square

A spektrumról egyenesen leolvasható, hogy csak a P_1 és a P_2 lehet egész spektrumú útgráf. $Spec(P_1) = \{0\}$, $Spec(P_2) = \{1, -1\}$. Azt is fontos megjegyezni, hogy bármely n mellett, $\forall \lambda \in Spec(P_n)$ sajátértékre igaz, hogy $-2 < \lambda < 2$.

2.3. Állítás. $\Phi_{P_n}(\lambda) = \lambda\Phi_{P_{n-1}}(\lambda) - \Phi_{P_{n-2}}(\lambda)$

Bizonyítás. Fejtsük ki a $(\lambda I - A_{P_n})$ determinánsát az első oszlop szerint.

$$\Phi_{P_n}(\lambda) = \det(\lambda I - A_{P_n}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Az első determináns megegyezik a $(\lambda I - A_{P_{n-1}})$ mátrix determinánsával. A második determinánst az első sora szerint kifejtve látjuk, hogy megegyezik az $(\lambda I - A_{P_{n-2}})$ mátrix determinánsával:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Így tehát a kívánt rekurzióhoz jutottunk: $\Phi_{P_n}(\lambda) = \lambda\Phi_{P_{n-1}}(\lambda) - \Phi_{P_{n-2}}(\lambda)$. □

Most adunk még egy bizonyítást P_n sajátértékeire. Vizsgáljuk meg a rekurziót a $q_n(x) = \Phi_{P_n}(2x)$ helyettesítést használva.

$$q_n(x) = \Phi_{P_n}(2x) = 2x\Phi_{P_{n-1}}(2x) - \Phi_{P_{n-2}}(2x) = 2xq_{n-1} - q_{n-2}(2x)$$

A $q_n(x) = 2xq_{n-1} - q_{n-2}(x)$ a Csebisev-polinomok rekurziója. Határozzuk az első pár n -re a $q_n(x)$ explicit alakját.

$n = 1$:

$$q_1(x) = \Phi_{P_1}(2x) = 2x$$

$n = 2$:

$$q_2(x) = \Phi_{P_2}(2x) = \det(2xI - A_{P_2}) = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 - 1$$

$n = 3$:

$$q_3(x) = \Phi_{P_3}(2x) = \det(2xI - A_{P_3}) = \begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & 2x & -1 \\ 0 & -1 & 2x \end{vmatrix} = 8x^3 - 4x$$

Ezek pontosan a másodfajú Csebisev-polinomoknak felelnek meg. A P_n gráf spektruma tehát megegyezik az $U_n(x)$ másodfajú Csebisev-polinom gyökeinek kétszeresével. Ezekről bővebb

információt Prasolov könyvében találunk [10].

n	$U_n(x)$
1	$2x$
2	$4x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
8	$256x^8 - 1024x^6 + 672x^4 - 160x^2 + 10x$

2.1. táblázat. Az első 8 másodfajú Csebisev-polinom

2.2. Csillaggráfok

Az $n + 1$ csúcsú $K_{n,1}$ teljes páros gráfot csillaggráfnak nevezzük. Jelölése: S_n .

2.4. Állítás. *Egy $n+1$ csúcsú S_n csillaggráf pontosan akkor egész spektrumú, ha $n = k^2$, ahol $k \in \mathbb{N}$.*

Bizonyítás. Az 1.7. Példa szerint $\text{Spec}(K_{n,1}) = \{0^{n-1}, \pm\sqrt{n}\} = \text{Spec}(S_n)$, tehát szükséges és elégséges, hogy \sqrt{n} egész legyen. \square

2.3. Csillagszerű fák

2.5. Definíció (Csillagszerű fa). Egy n csúcsú T_n körmentes gráfot *csillagszerű fának* nevezünk, ha legfeljebb egy olyan csúcsa van, aminek a fokszáma nagyobb, mint 2.

A definíció értelmében ez a csoport lefedi az előzőekben taglalt útgráfok és csillaggráfok halmazát is. A csillagszerű fák két osztályba sorolhatóak. Ha egy csillagszerű fának nincs olyan csúcsa, aminek a fokszáma nagyobb, mint kettő, akkor megfelel egy n hosszú útnak, tehát $T_n = P_n$. Ha van egy olyan v csúcsa, amire $d(v) = m > 2$, akkor $T_n - v$ előáll m darab út uniójaként. Jelölje m_i az i csúcsból álló P_i utak darabszámát:

$$T_n - v = \bigcup_{i=1}^{n-3} m_i P_i$$

2.6. Állítás. *Legyen $T_n \neq P_n$ csillagszerű fa. Az A_{T_n} szomszédsági mátrixnak $-1 + \sum m_{2k+1}$, multiplicitással sajátértéke a 0, kivétel, ha $\sum m_{2k+1} = 0$, ebben az esetben a multiplicitás 1. Ugyanennek a mátrixnak $-1 + \sum m_{3k+2}$ multiplicitással sajátértéke az 1, amennyiben ez nem -1 -et ad eredményül. Ha $-1 + \sum m_{3k+2} = -1$, akkor az 1 egyszeres sajátérték, ha $\sum m_{3k+1} = 1$, és nem sajátérték, ha $\sum m_{3k+1} \neq 1$.*

Bizonyítás. Az állítás első felét bizonyítjuk. Használjuk az 1.20. Tételt. A 0 multiplícitásának számolásához, azt a legnagyobb indexű a_i együtthatót kell megtalálnunk, ami nem 0. Ekkor a multiplícitás $n - i$. Mivel a gráfunk körmentes, ez azt jelenti, hogy a legnagyobb olyan i számot keressük, amire létezik T_n -nek i elemű maximális párosítása.

Ha a $T_n - v$ páros hosszú utak és $t \neq 0$ páratlan hosszú út uniója, akkor a maximális elemszámú párosítás $n - t + 1$ csúcsot fed, ami azt jelenti, hogy $\forall i > n - t + 1 : a_i = 0, a_{n-t+1} \neq 0$. Ha a $T_n - v$ gráf páros hosszú utak uniója, akkor n páratlan és létezik olyan párosítás, ami pontosan egy csúcsot nem fed, tehát $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$.

Ha $t = \sum m_{2k+1} \neq 0$, a 0 sajátérték multiplícitása $n - (n - t + 1) = -1 + \sum m_{2k+1}$. Ha $T_n - v$ páros hosszú utak uniója, a 0 multiplícitása $n - (n - 1) = 1$. Ezzel az állítás első felét beláttuk. Az állítás második fele szintén az 1.20. Tétel következménye [5].

□

2.7. Tétel. [5] *Egy T_n csillagszerű fa pontosan akkor egész spektrumú gráf, ha megegyezik a következő gráfok valamelyikével:*

- (i) $T_n = K_1$
- (ii) $T_n - v = k^2 P_1, k \in \mathbb{N}$
- (iii) $T_n - v = (k^2 + 2k) P_2, k \in \mathbb{N}$

Bizonyítás. Első lépésben lássuk be, hogy ezek a gráfok valóban egész spektrumúak:

- (i) Ez az egy csúcsból álló gráf: $\text{Spec}(K_1) = 0$.
- (ii) A v csúcs, és a belőle futó élek törlésével izolált csúcsokat kapunk, tehát ezek a 2.4. Állítás szerint pontosan az egész spektrumú csillaggráfoknak felelnek meg: $T_n = S_n$.
- (iii) Használjuk a 2.6. Állítást. $-1 + \sum m_{2k+1} = -1$, tehát a 0 multiplícitása 1. Az 1 multiplícitása $-1 + \sum m_{3k+2} = k^2 + 2k - 1$. Az 1.20 Tétel miatt a -1 is $k^2 + 2k - 1$ multiplícitású. A gráfnak $2(k^2 + 2k) + 1$ csúcsa van, így már csak két sajátérték hiányzik a spektrum meghatározásához, amelyek egymás -1 -szeresei, szintén az 1.21. Tétel miatt. Az 1.4. Megjegyzés módszerével könnyen ellenőrizhető, hogy a $k + 1$ sajátértéke lesz A_{T_n} -nek. Írjuk a v csúcsra a $k^2 + 1$ értéket, a kétfokú csúcsokra a $k + 1$ -et, a levelekre pedig 1-et. Ekkor teljesül minden csúcsra, hogy a ráírt érték $k + 1$ -szerese megegyezik a szomszédaira írt értékek összegével, tehát a $k + 1$ valóban sajátérték. Ezzel a teljes spektrumot meghatároztuk, ami valóban csak egész számokat tartalmaz: $\text{Spec}(T_n) = \{\pm(k + 1)^1, 0^1, \pm 1^{k^2+2k-1}\}$.

Második lépésként belátjuk, hogy nem létezik más egész spektrumú csillagszerű fa. A 2.2. Állítás értelmében, azok a csillagszerű fák közül melyeknek nincs olyan csúcsa, aminek a fokszáma nagyobb, mint 2, csak a P_1 és a P_2 lehet egész spektrumú. A P_1 megfelel K_1 -nek, a P_2 pedig része a második osztálynak $k = 1$ -re. Ezután tehát elegendő azokkal a csillagszerű fákkal foglalkoznunk, melyek nem útgráfok.

Tegyük fel, hogy egy T_n szomszédsági mátrixának van egy $\lambda \geq 2$ sajátértéke. Az 1.19. Tétel értelmében ez csak egyszeres sajátérték lehet, mivel a $T_n - v$ útgráfok uniója, így a

spektrumában csak kettőnél kisebb értékek lehetnek. Ez azt is jelenti, hogy ha T_n egész spektrumú gráf, akkor a 0-n és a ± 1 -en kívül csak két különböző sajátérték lehet, amik a páros gráfok spektrumának szimmetriája miatt egymás -1 -szeresei. Vegyünk a T_n gráfban egy a v_1 csúcsból v -be vezető $k+1$ csúcsból álló utat: v_1, v_2, \dots, v_k, v , ahol v_1 levél. Legyen \mathbf{x} egy λ -hoz tartozó sajátvektor. A v_i -nek megfelelő koordinátáját jelölje x_i minden $1 \leq i \leq k$ -re, a v csúcsnak megfelelő koordináta legyen x_{k+1} . Teljesülnie kell annak, hogy

$$\lambda x_1 = x_2$$

$$\forall 1 \leq i \leq k : \lambda x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$$

A 2.3. Állítás szerint

$$\Phi_{P_{n+1}}(\lambda) = \lambda \Phi_{P_n}(\lambda) - \Phi_{P_{n-1}}(\lambda)$$

$$\Phi_{P_1}(\lambda) = \lambda$$

így az $x_1 = 1, \forall 2 \leq i \leq k+1 : x_i = \Phi_{P_{i-1}}(\lambda)$ értékek kielégítik az egyenleteinket. A v csúcsnak viszont még vannak egyéb szomszédjai, ezért normalizáljuk az értékeket $\Phi_{P_k}(\lambda)$ -val.

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) = \left(1, \frac{\Phi_{P_1}(\lambda)}{\Phi_{P_k}(\lambda)}, \dots, \frac{\Phi_{P_{k-1}}(\lambda)}{\Phi_{P_k}(\lambda)}, 1\right)$$

Eszerint kiszámolható \mathbf{x} -nek minden koordinátája.

A v -nek megfelelő koordináta λ -szorosának is meg kell egyeznie a v szomszédainak megfelelő koordináták összegével:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-3} m_i \frac{\Phi_{P_{i-1}}(\lambda)}{\Phi_{P_i}(\lambda)}$$

A bizonyítás befejezése a 2.6. Állítás felhasználásával történik esetszétválasztással. Jegyezzük meg, hogy az 1 sajátérték multiplicitása minden esetben megegyezik -1 -gyel, és a $\pm \lambda$ egyszeres sajátérték.

1. eset: $-1 + \sum m_{2k+1} = -1$ és $-1 + \sum m_{3k+2} = -1$. Ekkor T_n -nek legfeljebb 5 csúcsa van, és $T_n - v$ minden útja legalább 4 hosszú. Ilyen csillagszerű gráf nincs.

2. eset: $-1 + \sum m_{2k+1} = -1$ és $-1 + \sum m_{3k+2} \neq -1$. Ekkor a T_n csúcsainak száma

$$n = 2(-1 + \sum m_{3k+2}) + 3 = 2 \sum m_{3k+2} + 1$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha a $T_n - v$ kizárólag P_2 utak uniója: $T_n - v = m_2 P_2$. Használjuk a λ -ra felírt egyenletet:

$$\lambda = m_2 \frac{\Phi_{P_1}(\lambda)}{\Phi_{P_2}(\lambda)} = m_2 \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = m_2 + 1$$

Ahhoz, hogy λ egész legyen, szükséges, hogy $m_2 + 1$ négyzetszám legyen, így ez az eset pont a (iii) gráfjait adja.

3. eset: $-1 + \sum m_{2k+1} \neq -1$, $-1 + \sum m_{3k+2} = -1$ és $\sum m_{3k+1} = 1$. Ekkor a T_n csúcsainak száma: $n = \sum m_{2k+1} + 3$. Ennek egyetlen megoldása az lehetne, ha $T_n - v = P_1 \cup P_3 = P_5$, tehát ez az eset sem vezet megoldáshoz.

4. eset: $-1 + \sum m_{2k+1} \neq -1$, $-1 + \sum m_{3k+2} = -1$ és $\sum m_{3k+1} \neq 1$. Ekkor a csúcsok száma: $\sum m_{2k+1} + 1$, ami csak az S_n csillaggráfokra teljesülhet, amik a (ii) gráfjai.

5. eset: $-1 + \sum m_{2k+1} \neq -1$ és $-1 + \sum m_{3k+2} \neq -1$. A csúcsok számára teljesül $n > -1 + \sum m_{2k+1} + 2 \sum m_{3k+2}$, így ez az eset nem ad megoldást.

Ezzel megtaláltuk az összes egész spektrumú csillagszerű fát. \square

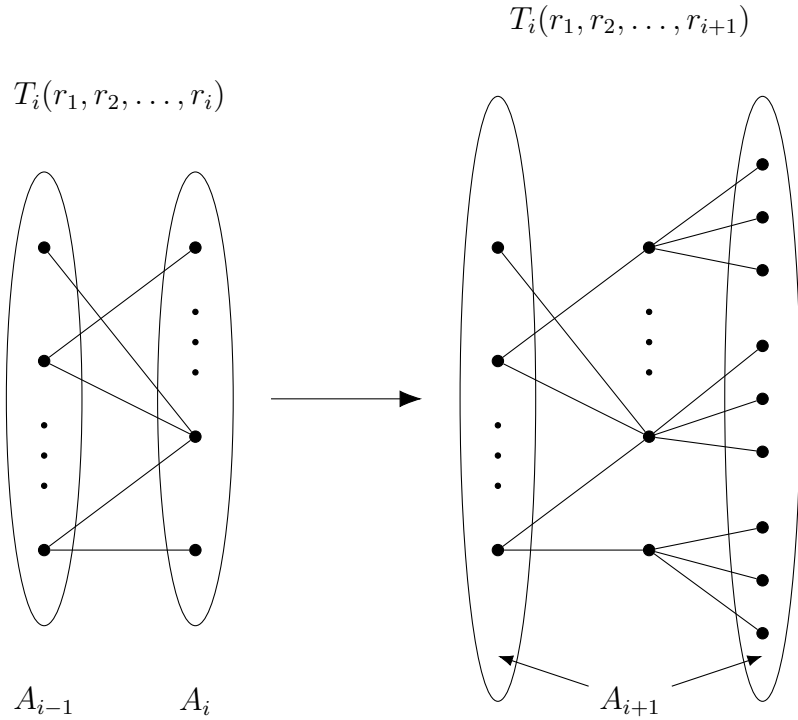
2.4. Tetszőlegesen nagy átmérőjű, egész spektrumú fák

Az egész spektrumú gráfok témakörének egy 1979-ben feltett nagy kérdése volt, hogy milyen átmérőkre létezik egész spektrumú fa, majd 2010-ben Csikvári Péter bizonyította, hogy létezik tetszőlegesen nagy páros átmérőjű, egész spektrumú fa [6]. Ezelőtt a legnagyobb átmérő, amire ismertek egész spektrumú fát a 10 volt. Két évvel később E. Ghorbani, A. Mohammadian és B. Tayfeh-Rezaie adtak konstrukciót tetszőlegesen nagy páratlan átmérőjű, egész spektrumú fákra [7]. A következőkben Csikvári konstrukcióját ismertetjük.

2.8. Tétel. *Legyen S egy tetszőleges pozitív egész számokat tartalmazó halmaz. Ekkor létezik olyan G egész spektrumú fa, amelyre $\{\lambda : \lambda \in \text{Spec}(G), \lambda > 0\} = S$. Ha $S \neq \{1\}$, akkor a G átmérője $2|S|$.*

Bizonyítás. Először rekurzívan megadjuk gráfok egy családját, amelyek később a megfelelő paraméterrel egész spektrumú fákat adnak.

Jelöljön $T_i = (A_{i-1}, A_i)$ egy páros gráfot A_{i-1} és A_i színosztállyal. Legyenek $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{Z}^+$, és $T_1(r_1), T_2(r_1, r_2), \dots, T_k(r_1, r_2, \dots, r_k)$ fák, amelyek kielégítik a következő rekurziót. Tegyük fel, hogy a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i) = (A_{i-1}, A_i)$ gráf már definiált, ekkor legyen a következő gráfunk $T_{i+1}(r_1, r_2, \dots, r_{i+1}) = (A_i, A_{i+1})$, amelyet a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ gráfból úgy kapunk, hogy az A_i színosztály minden csúcsát összekötjük r_{i+1} új csúccsal, amelyek fokszáma legyen egy. Tehát felveszünk $r_{i+1}|A_i|$ új csúcsot. Ekkor A_i nem változik, és $|A_{i+1}| = |A_{i-1}| + r_{i+1}|A_i|$. A kezdőértékek legyenek a következők: $|A_0| = 1, |A_1| = r_1$. Tehát T_{r_1} az $r_1 + 1$ csúcsú csillaggráf: $T_1(r_1) = (A_0, A_1) = S_{r_1}$.



A bizonyítás azon alapszik, hogy belátjuk, hogy a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ gráf spektrumában pontosan a $\pm\sqrt{r_i}, \pm\sqrt{r_i + r_{i-1}}, \pm\sqrt{r_i + r_{i-1} + r_{i-2}}, \dots, \pm\sqrt{r_i + \dots + r_1}, 0$ értékek szerepelnek. Ebből már könnyen tudunk egész spektrumú gráfokat konstruálni.

Először lássunk be egy lemmát. Vezessünk be két jelölést. Jelölje $N_G(\lambda > 0)$ egy G gráf spektrumának multiplicitással vett pozitív elemeinek számát, és $N_G(\lambda = t)$ a t sajátérték multiplicitását.

2.9. Lemma. *Legyenek $G = T_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})$ és $G' = T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ gráfok. Legyen $\lambda > \sqrt{r_i}$ egy m -szeres multiplicitású sajátértéke $A_{G'}$ -nek. Ekkor A_G -nek szintén m -szeres sajátértéke $\pm\sqrt{\lambda^2 - r_i}$. Ezekon kívül $A_{G'}$ -nek $(|A_{i-1}| - N_G(\lambda > 0))$ multiplicitással sajátértéke $\pm\sqrt{r_i}$, illetve $(|A_{i-2}| + (r_i - 1)|A_{i-1}|)$ multiplicitással a 0. Más sajátértéke nincs $A_{G'}$ -nek.*

Bizonyítás. Az 1.21. Tétel értelmében G és G' spektruma is szimmetrikus, így elég a pozitív sajátértékeket vizsgálnunk. Legyen \mathbf{x}' egy λ -hoz tartozó sajátvektor: $A_{G'}\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}'$. Jelölje $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jr_i}$ egy $v_j \in A_{i-1}$ csúcs új szomszédait G' konstruálásakor. Az 1.4. Megjegyzés értelmében minden $\mathbf{x}'(w_{jk})$ -ra, ahol $1 \leq k \leq r_i$:

$$\mathbf{x}'(v_j) = \lambda\mathbf{x}'(w_{jk})$$

$\lambda \neq 0$, így

$$\mathbf{x}'(w_{j1}) = \mathbf{x}'(w_{j2}) = \dots = \mathbf{x}'(w_{jr_i})$$

Ugyanígy igazak, a következők is, $\forall v_l \in A_{i-1}, \forall u_h \in A_{i-2}$ csúcsra:

$$\lambda \mathbf{x}'(v_l) = \sum_{(v_l u_q) \in G(E)} \mathbf{x}'(u_q) + r_i \mathbf{x}'(w_{l1})$$

$$\lambda \mathbf{x}'(u_h) = \sum_{u_h v_p} \mathbf{x}'(v_p)$$

Az $\mathbf{x}'(v_j) = \lambda \mathbf{x}'(w_{jk})$ egyenlőség miatt írhatjuk:

$$\lambda^2 \mathbf{x}'(w_{l1}) = \sum_{(v_l u_q) \in G(E)} \mathbf{x}'(u_q) + r_i \mathbf{x}'(w_{l1})$$

$$\lambda \mathbf{x}'(u_h) = \sum_{u_h v_p} \lambda \mathbf{x}'(w_{p1})$$

Az egyenleteinket tovább alakítva kapjuk (ugyancsak kihasználva, hogy $\lambda \neq 0$):

$$\sqrt{\lambda^2 - r_i} \sqrt{\lambda^2 - r_i} \mathbf{x}'(w_{l1}) = \sum_{(v_l u_q) \in G(E)} \mathbf{x}'(u_q)$$

$$\sqrt{\lambda^2 - r_i} \mathbf{x}'(u_h) = \sum_{u_h v_p} \sqrt{\lambda^2 - r_i} \mathbf{x}'(w_{p1})$$

Azt kaptuk tehát, hogy egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|A_{i-2}|+|A_{i-1}|}$ vektor, amelynek értéke minden $v_l \in A_{i-1}$ csúcsnak megfelelő koordinátán $\sqrt{\lambda^2 - r_i} \mathbf{x}'(w_{l1})$, és minden $u_h \in A_{i-2}$ csúcsnak megfelelő koordinátán $\mathbf{x}(u_h) = \mathbf{x}'(u_h)$, sajátvektora A_G -nek $\sqrt{\lambda^2 - r_i}$ sajátértékkel. Az \mathbf{x} vektor konstrukciója lévén az is teljesül, hogy ha az $A_{G'}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak független rendszerét vesszük, az azokból előállított sajátvektorai A_G -nek szintén függetlenek lesznek. Az előállítás fordítva is működik: vegyünk A_G -nek egy \mathbf{x} sajátvektorát μ sajátértékkel. Ekkor a fenti egyenletek alapján előállítható belőle egy \mathbf{x}' sajátvektora $A_{G'}$ -nek $\sqrt{\mu^2 + r_i}$ sajátértékkel. Tehát teljesül, hogy ha λ m -szeres multiplicitású sajátértéke $A_{G'}$ -nek, akkor $\sqrt{\lambda^2 - r_i}$ is m -szeres sajátértéke A_G -nek.

A szomszédsági mátrix szimmetriája miatt csak valós sajátértékei lehetnek G -nek és G' -nek is, így $\lambda < \sqrt{r_i}$ sajátértéke nem lehet G' -nek. Így már csak a 0 és a $\sqrt{r_i}$ sajátértékek fordulhatnak elő.

Minden egyszerű H gráf esetében $(A_H^k)_{uv}$ megadja az u -ból v -be menő k hosszú séták számát. Ez alapján a szomszédsági mátrix négyzetének nyoma megadja a kettő hosszú zárt séták számát, ami megegyezik az élek számának kétszeresével. Ugyanakkor egy mátrix hatványának a nyoma számolható a sajátértékeiből:

$$2|H(E)| = \sum_{v \in H(V)} (A_H^2)_{vv} = \text{tr}(A_H^2) = \sum_{\lambda_i \in \text{Spec}(H)} \lambda_i^2$$

Ha H páros gráf, a spektrum szimmetriája miatt írható:

$$|H(E)| = \sum_{\lambda_i > 0, \lambda_i \in \text{Spec}(H)} \lambda_i^2$$

Ennek segítségével számolhatjuk a $\sqrt{r_i}$ sajátérték multiplicitását:

$$\begin{aligned} |G'(E)| &= |G(E)| + r_i |A_{i-1}| = \sum_{\lambda_j > 0, \lambda_j \in \text{Spec}(G')} \lambda_j^2 = \sum_{\sqrt{\lambda_j - r_i} \in \text{Spec}(G)} \lambda_j^2 + r_i N_{G'}(\lambda = \sqrt{r_i}) = \\ &= \sum_{\mu_k > 0, \mu_k \in \text{Spec}(G)} (\mu_k^2 + r_i) + r_i N_{G'}(\lambda = \sqrt{r_i}) = |G(E)| + r_i (N_G(\lambda > 0) + N_{G'}(\lambda = \sqrt{r_i})) \\ N_{G'}(\lambda = \sqrt{r_i}) &= |A_{i-1}| - N_G(\lambda > 0) \end{aligned}$$

Végül a 0 multiplicitása számolható, mint a csúcsok számának és a nem nulla sajátértékek számának különbsége:

$$\begin{aligned} |G'(V)| &= |A_{i-2}| + (r_i + 1)|A_{i-1}| = N_{G'}(\lambda = 0) + 2N_{G'}(\lambda > 0) = \\ &= N_{G'}(\lambda = 0) + 2(N_G(\lambda > 0) + N_{G'}(\lambda = \sqrt{r_i})) \end{aligned}$$

Használva a $\sqrt{r_i}$ multiplicitására belátott egyenlőséget:

$$\begin{aligned} 2(N_G(\lambda > 0) + N_{G'}(\lambda = \sqrt{r_i})) &= 2|A_{i-1}| \\ N_{G'}(\lambda = 0) &= |A_{i-2}| + (r_i + 1)|A_{i-1}| - 2|A_{i-1}| = |A_{i-2}| + (r_i - 1)|A_{i-1}| \end{aligned}$$

□

A rekurzív gráfcsaládunk vizsgálatához definiáljunk egy többváltozós polinomosztályt:

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$Q_1(x_1) = x_1$$

$$Q_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = x_i Q_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) + Q_{i-2}(x_1, x_2, \dots, x_{i-2})$$

i	$Q_i(x_1, x_2, \dots, x_i)$
-1	0
0	1
1	x_1
2	$x_2x_1 + 1$
3	$x_3x_2x_1 + x_3 + x_1$
4	$x_4x_3x_2x_1 + x_4x_3 + x_4x_1 + x_2x_1 + 1$
5	$x_5x_4x_3x_2x_1 + x_5x_4x_3 + x_5x_4x_1 + x_5x_2x_1 + x_5 + x_3x_2x_1 + x_3 + x_1$

2.2. táblázat. A polinomosztály első 7 tagja

Most belátunk egy lemmát, ami megadja a kapcsolatot a gráfcsaládunk és a polinomosztály között.

2.10. Lemma. *Legyen $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i) = (A_{i-1}, A_i)$ a fenti konstrukció szerinti páros gráf. Ekkor $|A_{i-1}| = Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})$, $|A_i| = Q_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$.*

Bizonyítás. A bizonyítás i szerinti indukcióval történik.

$i = 1$:

$$T_1(r_1) = (A_0, A_1)$$

$$|A_0| = 1 = Q_0$$

$$|A_1| = r_1 = Q_1(r_1)$$

Tegyük fel, hogy $n = i - 1$ -re teljesül:

$$T_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}) = (A_{i-2}, A_{i-1})$$

$$|A_{i-2}| = Q_{i-2}(r_1, r_2, \dots, r_{i-2})$$

$$|A_{i-1}| = Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})$$

Ekkor $n = i$ -re is teljesül:

$$T_i(r_1, r_2, \dots, r_i) = (A_{i-1}, A_i)$$

$$|A_{i-1}| = Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})$$

$$\begin{aligned} |A_i| &= |A_{i-2}| + r_i |A_{i-1}| = Q_{i-2}(r_1, r_2, \dots, r_{i-2}) + r_i Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}) = \\ &= Q_i(r_1, r_2, \dots, r_i) \end{aligned}$$

□

Most már rátérhetünk a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ gráf spektrumának pontos meghatározásához.

2.11. Lemma. A $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ gráfnak a spektrumát pontosan a következő értékek adják:

$$\pm\sqrt{r_i}, \pm\sqrt{r_i + r_{i-1}}, \pm\sqrt{r_i + r_{i-1} + r_{i-2}}, \dots, \pm\sqrt{r_i + \dots + r_1}, 0$$

A 0 multiplicitása:

$$Q_i(r_1, r_2, \dots, r_i) - Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}),$$

a többi $\pm\sqrt{r_i + r_{i-1} + \dots + r_j}$ alakú sajátérték multiplicitása pedig $\forall 0 < j \leq i$ -re:

$$Q_{j-1}(r_1, r_2, \dots, r_{j-1}) - Q_{j-2}(r_1, r_2, \dots, r_{j-2}).$$

Bizonyítás. A bizonyítás itt is i szerinti indukcióval történik.

$i = 1$:

$$T_1(r_1) = S_1 \Rightarrow \text{Spec}(T_1(r_1)) = \{0^{|r_1|-1}, \pm\sqrt{r_1}\}$$

$$Q_1(r_1) - Q_0 = r_1 - 1$$

$$Q_0 - Q_{-1} = 1$$

Tegyük fel, hogy $n = i - 1$ -re is teljesül az állítás. Belátjuk, hogy ekkor $n = i$ -re is teljesül.

Alkalmazzuk a 2.11. Lemmát: $G = T_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})$, $G' = T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$. Ekkor a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ spektrumának elemei multiplicitások nélkül:

$$\begin{aligned} & \{0\} \cup \{\pm\sqrt{\mu^2 + r_i} : \mu \in \text{Spec}(T_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}))\} = \\ & = \{\pm\sqrt{r_i}, \pm\sqrt{r_i + r_{i-1}}, \pm\sqrt{r_i + r_{i-1} + r_{i-2}}, \dots, \pm\sqrt{r_i + \dots + r_1}, 0\} \end{aligned}$$

Ugyancsak a 2.11. Lemmát, illetve a 2.9. Lemmát és a 2.10. Lemmát használva megkapjuk a multiplicitásokat is. A 0 multiplicitása:

$$\begin{aligned} N_{G'}(\lambda = 0) &= |A_{i-2}| + (r_i - 1)|A_{i-1}| = \\ &= Q_{i-2}(r_1, r_2, \dots, r_{i-2}) + (r_i - 1)Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}) = \\ &= Q_i(r_1, r_2, \dots, r_i) - Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}) \end{aligned}$$

A $\pm\sqrt{r_i + r_{i-1} + \dots + r_j}$ alakú sajátértékek multiplicitása $\forall 1 \leq j < i$ -re:

$$\begin{aligned} N_{G'}(\lambda = \pm\sqrt{r_i + r_{i-1} + \dots + r_j}) &= N_G(\lambda = \pm\sqrt{r_{i-1} + r_{i-2} + \dots + r_j}) = \\ &= Q_{j-1}(r_1, r_2, \dots, r_{j-1}) - Q_{j-2}(r_1, r_2, \dots, r_{j-2}) \end{aligned}$$

Végül a $\sqrt{r_i}$ multiplicitása:

$$\begin{aligned}
N_{G'}(\lambda = \sqrt{r_i}) &= |A_{i-1}| - N_G(\lambda > 0) = \\
&= Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}) - [Q_{i-2}(r_1, r_2, \dots, r_{i-2}) - Q_{i-3}(r_1, r_2, \dots, r_{i-3})] - \\
&\quad - [Q_{i-3}(r_1, r_2, \dots, r_{i-3}) - Q_{i-4}(r_1, r_2, \dots, r_{i-4})] - \dots - (Q_0 - Q_{-1}) = \\
&= Q_{i-1}(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}) - Q_{i-2}(r_1, r_2, \dots, r_{i-2})
\end{aligned}$$

□

Most vizsgáljuk meg a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ gráf átmérőjét.

2.12. Lemma. *Ha $r_1 \geq 2$, akkor a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i)$ gráf átmérője pontosan $2i$.*

Bizonyítás. Legyen $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i) = (A_{i-1}, A_i)$. Belátjuk i szerinti indukcióval, hogy $r_1 \geq 2$ esetén mindig van az A_i részgráfban két olyan csúcs, amelyek távolsága $2i$.

$i = 1$ -re teljesül, hiszen ekkor $T_1(r_1) = (A_0, A_1)$, $|A_1| > 1$ és bármelyik két A_1 -beli csúcs távolsága 2.

Tegyük fel, hogy $n = i$ -re teljesül, tehát a $T_i(r_1, r_2, \dots, r_i) = (A_{i-1}, A_i)$ esetben létezik, 2 csúcs az A_i részgráfban, amelyek távolsága 2.

A $T_{i+1}(r_1, r_2, \dots, r_{i+1})$ gráfot úgy kapjuk, hogy minden A_i -beli csúcsot összekötünk r_{i+1} új csúccsal, így ha A_i -ben volt két olyan csúcs melyek távolsága $2i$, akkor a köztük lévő utat mindkét végén meg tudjuk hosszabbítani egy-egy éllel, és találunk két olyan csúcsot A_{i+1} -ben amelyek távolsága $2(i+1)$. □

Most már minden eszközünk megvan a tétel bizonyításához. Legyen S egy tetszőleges pozitív egész számokat tartalmazó, k elemű halmaz:

$$S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}, n_1 < n_2 < \dots < n_k, \forall n_i \in \mathbb{Z}^+$$

Ekkor a 2.11. Lemma szerint a következő gráf spektrumának pozitív elemeinek halmaza megegyezik az S halmazzal.

$$G := T_k(r_1, r_2, \dots, r_k) = T_k(n_k^2 - n_{k-1}^2, n_{k-1}^2 - n_{k-2}^2, \dots, n_2^2 - n_1^2, n_1^2)$$

$$\{\lambda : \lambda \in \text{Spec}(G), \lambda > 0\} = \{n_1, n_2, \dots, n_k\} = S$$

A 2.12. Lemma szerint G átmérője pedig pontosan $2k = 2|S|$. □

Nézzünk egy példát, hogy egy konkrét S halmazra milyen paraméterei lesznek a konstruált gráfnak.

2.13. Példa. $S = \{2, 3, 5, 7\}$

$$G = T_4(24, 16, 5, 4)$$

$$|G(V)| = Q_3(24, 16, 5) + Q_4(24, 16, 5, 4) = 10130$$

$$\text{Spec}(G) = \{-7^1, -5^{23}, -3^{361}, -2^{1564}, 0^{6232}, 2^{1564}, 3^{361}, 5^{23}, 7^1\}$$

3. fejezet

Reguláris gráfok

A következő fejezetben az egész spektrumú reguláris gráfok témaköréből ismertetünk pár eredményt.

3.1. Lemma. *Legyen G egy d átmérőjű, összefüggő gráf, a spektrumában s különböző értékkel. Ekkor teljesül, hogy $d < s$.*

Bizonyítás. Az A_G mátrix diagonizálható, ezért a minimálpolinomja gyöktényezőik szorzatára bomlik, és minden gyöke egyszeres:

$$m_{A_G}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)$$

Az A_G gyöke a minimálpolinomnak:

$$m_{A_G}(A_G) = \prod_{i=1}^s (A_G - \lambda_i I) = 0 \Rightarrow A_G^s = 0$$

Az $(A_G^k)_{ij}$ az i csúcsból j csúcsba menő k hosszú utak számát adja, tehát ha $s \leq d$, akkor $\exists u, v \in G(V) : (A_G^s)_{uv} \neq 0$, tehát szükségszerűen $d < s$. \square

3.2. Megjegyzés. Az 1.5. Megjegyzés értelmében, egy p -reguláris G gráf A_G szomszédsági mátrixának minden λ_i sajátértékére igaz, hogy $-p \leq \lambda_i \leq p$. Eszerint egy p -reguláris egész spektrumú gráfnak legfeljebb $2p + 1$ különböző sajátértéke lehet, így az előző tétel miatt az átmérője legfeljebb $2p$.

3.3. Megjegyzés. Egy p -reguláris G gráfnak p mindig sajátértéke, mivel a $(1, 1, \dots, 1)^T$ vektor sajátvektora A_G -nek.

3.4. Állítás. *Egy p -reguláris G gráf spektrumában a p érték multiplicitása megegyezik G komponenseinek számával [11].*

3.5. Definíció (Sugár). Egy gráf *sugarának* nevezzük azt a legkisebb r távolságot, amire létezik G -nek olyan csúcsa, amelytől bármelyik más csúcs legfeljebb r távolságra van. Jelölése: $rad(G)$.

3.6. Lemma. [14] *Legyen G egy összefüggő n csúcsú p -reguláris páros gráf, amelynek sugara r . Ekkor a csúcsok számára teljesül:*

$$n \leq \frac{2(p-1)^r - 2}{p-2}$$

Bizonyítás. Jelölje $d(u, v)$ az u és v csúcsok távolságát és $N_k(u)$ a u csúctól pontosan k távolságra lévő csúcsok halmazát: $N_k(u) = \{v \in G(V) : d(u, v) = k\}$. Legyen u egy olyan csúcs, amelyre bármely másik csúcs legfeljebb r távolságra van.

Először belátjuk, hogy minden $0 \leq k \leq r-1$ esetében $|N_k(u)| \leq p(p-1)^{k-1}$. Használjunk r szerinti indukciót. $|N_0(u)| = 1$, $|N_1(u)| = p$. Tegyük fel, hogy $n = r-2$ -re teljesül az állítás. Az $N_{r-1}(u)$ halmazban csak olyan csúcsok lehetnek, melyek szomszédosak valamelyik $N_{r-2}(u)$ halmazbeli csúccsal, és minden $N_{r-2}(u)$ halmazbeli csúcsnak legfeljebb $p-1$ szomszédja lehet az $N_{r-1}(u)$ halmazban, így $|N_{r-1}(u)| \leq (p-1)|N_{r-2}(u)| \leq p(p-1)^{r-2}$.

A G páros gráf, így az $N_r(u)$ halmaz elemei között nem fut él, tehát ezen halmaz összes csúcsának van p darab $N_{r-1}(u)$ halmazbeli szomszédja, ezért $|N_r(u)| \leq \frac{(p-1)}{p}|N_{r-1}(u)| \leq (p-1)^{r-1}$.

Összegezve kapjuk:

$$n \leq p + \sum_{k=2}^{r-1} p(p-1)^{k-1} + (p-1)^{r-1} = \frac{2(p-1)^r - 2}{p-2}$$

□

3.7. Megjegyzés. Az egész spektrumú reguláris gráfok keresésére gyakran használt módszer a tenzorszorzat alkalmazása. Legyen G egy összefüggő, p -reguláris nem páros gráf. Ekkor a $G \otimes K_2$ szintén p -reguláris, összefüggő és az 1.14. Állítás értelmében egész spektrumú, hiszen $Spec(K_2) = \{1, -1\}$. Ugyanakkor ez a gráf már páros. Ha G egy összefüggő, p -reguláris, páros gráf, akkor $G \otimes K_2 = G \cup G$.

Ez tehát azt jelenti, hogy elég meghatározni a páros, reguláris, egész spektrumú gráfokat, ezek dekompozíciójából megkaphatjuk a nem párosakat is.

A 3.2.Lemma, 3.5. Lemma és a 3.6 Megjegyzés következményeképp kapjuk a következő tételt.

3.8. Tétel. [2] *Rögzített r -re az r -reguláris egész spektrumú gráfok száma véges.*

Most megnézzük pár konkrét p -re az egész spektrumú, p -reguláris gráfokat.

Az 1.6. Példánál már láttuk, hogy a K_n teljes gráfok, azaz az $n - 1$ -reguláris gráfok spektruma minden n -re egész.

Az összefüggő 2-reguláris gráfok megfelelnek a körgráfoknak, ezek spektrumát is láttuk már a 2.1. Állításnál: $Spec(C_n) = \{2 \cos \frac{2\pi j}{n} : j = 1, \dots, n\}$. Ez alapján a következő körgráfok egész spektrumúak.

C_n	$Spec(C_n)$
C_3	$\{-1, 1, 2\}$
C_4	$\{-2, 0, 0, 2\}$
C_6	$\{-2, -1, -1, 1, 1, 2\}$

3.1. táblázat. Az egész spektrumú körgráfok

3.1. 3-reguláris gráfok

Az egész spektrumú gráfok első fontos eredménye a 3-reguláris gráfokhoz kapcsolódik. 1976-ban D. Cvetković és F. C. Bussemaker, illetve tőlük függetlenül A. J. Schwenk is publikálta a következő eredményt.

3.9. Tétel. [13], [3] *Pontosan 13 összefüggő, 3-reguláris egész spektrumú gráf létezik.*

A egész spektrumú 3-reguláris gráfok spektrumában a $0, \pm 1 \pm 2, \pm 3$ értékek szerepelhetnek. D. Cvetković és F. C. Bussemaker ezen értékek lehetséges multiplicitását próbálták meghatározni, míg Schwenk bizonyításának alapját az 3.7. Megjegyzésben leírtak adják.

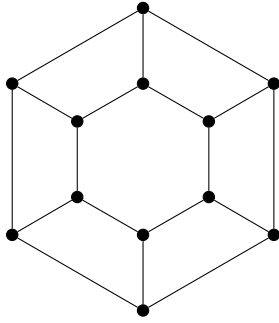
G	$Spec(G)$
$G_1 = K_{3,3}$	$\{\pm 3, 0^4\}$
$G_2 = K_2 \times K_2 \times K_2$	$\{\pm 3, \pm 1^3\}$
G_3 (Tutte's 8-cage)	$\{\pm 3, \pm 2^9, 0^{10}\}$
$G_4 = G_{10} \otimes K_2 = G_{11} \otimes K_2$	$\{\pm 3, \pm 2^4, \pm 1^5\}$
G_5	$\{\pm 3, \pm 2^4, \pm 1^5\}$
G_6	$\{\pm 3, \pm 2, \pm 1^2, 0^2\}$
$G_7 = K_2 \times C_6 = G_{12} \otimes K_2$	$\{\pm 3, \pm 2^2, \pm 1, 0^4\}$
$G_8 = G_{13} \otimes K_2$	$\{\pm 3, \pm 2^6, \pm 1^3, 0^4\}$
$G_9 = K_4$	$\{1^3, 3\}$
G_{10} (Petersen-gráf)	$\{-2^4, 1^5, 3\}$
G_{11}	$\{-2^3, -1^2, 1^3, 2, 3\}$
$G_{12} = K_2 \times K_3$	$\{-2^2, 0^2, 1, 3\}$
G_{13}	$\{2^3, -1^3, 0^2, 2^3, 3\}$

3.2. táblázat. Az egész spektrumú 3-reguláris gráfok spektruma

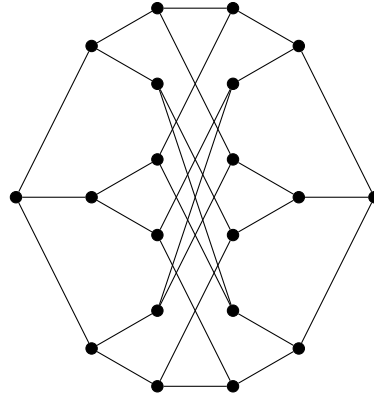
A 13 gráf közül az első 8 páros gráf, a maradék ezek dekompozíciójából megkapható.

3.10. Példa. Lássunk közülük két példát.

G_7 :



G_4 :



3.2. 4-reguláris gráfok

3.11. Állítás. Ha G egy 4-reguláris egész spektrumú gráf, akkor $|G(V)| \leq 6560$.

Bizonyítás. G -nek legfeljebb 9 különböző sajátértéke lehet, ezért a 3.1. Lemma miatt az átmérője legfeljebb 8, így a sugara is. A 3.6. Lemmát használva kapjuk a becslést.

$$|G(V)| = \frac{2 \cdot 3^8 - 2}{2} = 6560$$

□

A reguláris páros gráfok csúcsainak száma páros, így minden G 4-reguláris, összefüggő páros gráf spektruma felírható, mint $\text{Spec}(G) = \{\pm 4, \pm 3^x, \pm 2^y, \pm 1^z, 0^{2w}\}$, $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$.

3.12. Lemma. Legyen G egy 4-reguláris, egész spektrumú páros gráf, $|G(V)| = 2n$. Jelölje q a négyszögek, h a hatszögek számát G -ben. Ekkor x, y, z, w, n kielégítik a következő diofantoszi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum \lambda_i^0 &= 1 + x + y + z + w = n \\ \frac{1}{2} \sum \lambda_i^2 &= 16 + 9x + 4y + z = 4n \\ \frac{1}{2} \sum \lambda_i^4 &= 256 + 81x + 16y + z = 28n + 4q \\ \frac{1}{2} \sum \lambda_i^6 &= 4096 + 729x + 64y + z = 232n + 72q + 6h \end{aligned}$$

A fenti lemmát D. Cvetković, S. Simić és D. Stevanović bizonyította, segítségével 1888 lehetséges spektrumot találtak [14].

4. fejezet

Az n csúcsú egész spektrumú gráfok számának becslése

Világos, hogy az egész spektrumú gráfok száma végtelen. A tenzorszorzat, illetve Descartes-szorzat alkalmazásával, vagy akár a 2. fejezetben látott konstrukció szerint könnyen meg is tudunk adni tetszőlegesen nagy, egész spektrumú gráfokat. Felmerül a kérdés, mennyi az n csúcsú egész spektrumú gráfok száma? Ebben a fejezetben erre adunk egy felső becslést.

Az egyszerűség kedvéért, most csúcscímkezett gráfokat vizsgálunk, mivel ez a becslésünket nem befolyásolja, és ebben az esetben egyértelmű megfeleltetés van az n csúcsú gráfok és a $\{0, 1\}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixok között, amelyek főátlójában csupa nulla áll.

Legyen \mathcal{A}_n az n csúcsú gráfok szomszédsági mátrixainak halmaza, ennek számossága $|\mathcal{A}_n| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Jelölje egy $A_G \in \mathcal{A}_n$ szomszédsági mátrix i -edik legnagyobb sajátértékét λ_i . Először kimondunk két tételt bizonyítás nélkül.

4.1. Tétel. [12] *Legyen A_G egyenletesen választva \mathcal{A}_n -ből. Ekkor minden $\lambda_i \in \text{Spec}(A_G)$, $\lambda_i \neq \lambda_1$ és $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$ -re teljesül kellően nagy n -re*

$$\mathbb{P}(-\sqrt{nc} < \lambda_i < \sqrt{nc}) > 1 - \frac{1}{n^{10}}$$

4.2. Tétel. [8] *Jelölje M_i az $\{\lambda_i \in \text{Spec}(A_G) : A_G \in \mathcal{A}_n\}$ halmaz mediánját. Legyen A_G egyenletesen választva \mathcal{A}_n -ből. Ekkor*

$$\mathbb{P}_{A \in \mathcal{A}_n} (|\lambda_i - M_i| > t) \leq 4e^{-t^2/8r^2}$$

ahol $r = \min\{i, n - i + 1\}$.

Most már rátérhetünk a becslésre. Jelölje $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{A}_n$ az n csúcsú egész spektrumú gráfok halmazát.

4.3. Tétel. *Kellően nagy n -re*

$$|\mathcal{J}_n| \leq 2^{n(n-1)/2-n/400} = \frac{|\mathcal{A}_n|}{2^{n/400}}$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda_i \neq \lambda_1$ egy $A_G \in \mathcal{A}_n$ mátrix sajátértéke. Használjuk a 4.1. Tételt $c = \frac{3}{2}$ -re:

$$\mathbb{P}\left(-\frac{3}{2}\sqrt{n} < \lambda_i < \frac{3}{2}\sqrt{n}\right) > 1 - \frac{1}{n^{10}}$$

Az 1.5. Megjegyzés értelmében az A_G szomszédsági mátrix sajátértékeire teljesül, hogy $n > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -n$, ezért írható:

$$\mathbb{P}\left(\frac{3}{2}\sqrt{n} \leq |\lambda_i| < n\right) < \frac{1}{n^{10}}$$

Ezek alapján a λ_i várható értékére teljesül:

$$\mathbb{E}[\lambda_i] < \left(1 - \frac{1}{n^{10}}\right)\frac{3}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{n^{10}}n < 2\sqrt{n}$$

$$\mathbb{E}[\lambda_i] > -\left(1 - \frac{1}{n^{10}}\right)\frac{3}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{n^{10}}n > -2\sqrt{n}$$

Most belátjuk, hogy $|M_i| < 6\sqrt{n}$. Tegyük, fel hogy $|M_i| \geq 6\sqrt{n}$, és használjuk a 4.1. Tételt ugyancsak $c = \frac{3}{2}$ -re.

$$\mathbb{E}[\lambda_i] \geq \frac{6\sqrt{n}}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{n} - \frac{1}{n^{10}}n$$

Ha $n > 1$, akkor $\frac{9}{4}\sqrt{n} - n^{-9} > 2\sqrt{n}$, tehát ellentmondáshoz jutottunk. Ezzel beláttuk, hogy $M_i < 6\sqrt{n}$. Ugyanígy belátható, hogy $M_i > -6\sqrt{n}$.

Használjuk a 4.2. Tételt $i = 2$ -re.

$$\mathbb{P}_{A_G \in \mathcal{A}_n}(\lambda_2 > 7\sqrt{n}) = \mathbb{P}_{A_G \in \mathcal{A}_n}(\lambda_2 - 6\sqrt{n} > \sqrt{n}) \leq \mathbb{P}_{A_G \in \mathcal{A}_n}(\lambda_2 - M_2 > \sqrt{n}) \leq 4e^{-n/32}$$

Hasonlóan teljesül, hogy

$$\mathbb{P}_{A_G \in \mathcal{A}_n}(\lambda_2 < -7\sqrt{n}) \leq 4e^{-n/32}$$

Összegezve a kapott eredményeket

$$\mathbb{P}_{A_G \in \mathcal{A}_n}(-7\sqrt{n} \leq \lambda_2 \leq 7\sqrt{n}) \geq 1 - 8e^{-n/32}$$

Ez at jelenti, hogy azon n csúcsú gráfoknak a száma melyek spektrumában van legalább két olyan λ érték, melyekre $|\lambda| \geq 7\sqrt{n}$ legfeljebb $2^{n(n-1)/2}8e^{-n/32}$.

A bizonyítás folytatásához belátunk egy lemmát.

4.4. Lemma. Jelölje $N_\lambda(n, m)$ azoknak az $n \times n$ dimenziós szomszédsági mátrixoknak a számát, amelyeknek a λ sajátértéke legalább m -szeres multiplicitással.

$$N_\lambda(n, m) \leq \binom{n}{m} 2^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}}$$

Bizonyítás. Jelölje egy $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak $B_{\{i_1, \dots, i_k\}}$ azt a négyzetes részmátrixát, ami az i_1, \dots, i_k indexű sorok és oszlopok törlésével keletkezik. Legyen λ egy m -szeres sajátértéke egy A_G szomszédsági mátrixnak. Az, hogy a λ multiplicitása m , azt jelenti, hogy a $(\lambda I - A_G)$ magterének dimenziója m , így a rangja $r(\lambda I - A_G) = n - m$. Ez azt jelenti, hogy létezik nem szinguláris $(\lambda I - A_G)_{\{i_1, \dots, i_m\}}$ négyzetes részmátrixa $(\lambda I - A_G)$ -nek, és az összes ennél nagyobb dimenziójú $(\lambda I - A_G)_{\{i_1, \dots, i_k\}}$ részmátrixa szinguláris. Legyen $M = (\lambda I - A_G)_{\{i_1, \dots, i_m\}}$ nem szinguláris. Jelölje $S \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ és $O \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ a $(\lambda I - A_G)$ azon részmátrixait, amelyek közös elemei alkotják az M mátrixot. Az M teljes rangú, így az S összes olyan oszlopát, ami nem része M -nek, egyértelműen megkapjuk, mint a M oszlopainak lineáris kombinációja. Terjesszük ki ezeket a lineáris kombinációkat az O oszlopaira, ekkor a teljes $(\lambda I - A_G)$ mátrixot megkapjuk. Tehát az S és O mátrixok egyértelműen meghatározzák $(\lambda I - A_G)$ -t, így az A_G mátrixot is. A mátrix szimmetriája miatt ez összesen $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$ koordinátát jelent. A $\{i_1, \dots, i_m\}$ indexek $\binom{n}{m}$ módon állhatnak elő. Ugyanakkor ha vesszük az összes lehetséges esetet, ahogy S és O előállhatnak, akkor beleesnek azok az esetek is, amikor az S és O közös elemei által alkotott mátrix nem teljes rangú, amiből azt kapjuk, hogy $r(\lambda I - A_G) < n - m$, tehát a λ multiplicitása nagyobb, mint m . Ezzel a lemmát beláttuk. \square

Térjünk vissza a tétel bizonyításához. Kellően nagy n esetén elegendő azokat a mátrixokat vizsgálnunk melyeknek a legnagyobbon kívül az összes sajátértékük biztosan a $[-7\sqrt{n}, 7\sqrt{n}]$ intervallumba esik. Ahhoz, hogy egy ilyen mátrix összes sajátértéke egész szám legyen, szükséges, hogy legyen olyan sajátértéke melynek multiplicitása legalább $t = \lceil \frac{n-1}{14\sqrt{n}+1} \rceil$. Használva 4.4. Lemmát kapjuk a következő becslést:

$$\sum_{-7\sqrt{n} \leq \lambda \leq 7\sqrt{n}} N_\lambda(n, t) \leq (14\sqrt{n} + 1) \binom{n}{t} 2^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{t(t-1)}{2}}$$

Ahhoz, hogy a becslésből belássuk a tétel állítását, lényegében csak a binomiális együtt-hatót kell felülről becsülnünk 2^{cn} -nel, mert a $2^{t(t-1)/2}$ -t felülről becsülhetjük $2^{n/400}$ -zal (itt azt használjuk, hogy $400 > 2 \cdot 14^2 = 396$). De:

$$t = \mathcal{O}(\sqrt{n}) \Rightarrow \binom{n}{t} = \mathcal{O}(n^{\sqrt{n}})$$

$$\sqrt{n} \log n < cn \log 2$$

és ez ekvivalens azzal, hogy

$$\log n < c' \sqrt{n}$$

ami viszont bármilyen pozitív c' konstansra teljesül, ha n elég nagy.

□

Irodalomjegyzék

- [1] K. Balińska, D. Cvetković, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Stevanović, *A survey on integral graphs*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 13 (2002), 42–65.
- [2] D. Cvetković, *Cubic integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., Nos. 498-541 (1975), 107-113
- [3] Schwenk A. J., *Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra*, Proceedings of the International Graph Theory Conference at Kalamazoo, May 1976, (Y. Alavi and D. Lick, eds.) Springer Verlag
- [4] O. Ahmadi, N. Alon, I. F. Blake, I. E. Shparlinski, *Graphs with integral spectrum*, Linear Algebra and its Applications 430 (2009) 547–552
- [5] M. Watanabe, A.J. Schwenk, *Integral starlike trees*, J. Austral. Math. Soc. A 28 (1979) 120–128.
- [6] P. Csikvari, *Integral trees of arbitrarily large diameters*, Algebraic Combin, 32:371–377, 2010.
- [7] E. Ghorbani, A. Mohammadian and B. Tayfeh-Rezaie, *Integral trees of odd diameters*, J. Graph Theory, 70(3):332–338, 2012.
- [8] N. Alon, M. Krivelevich, V. Vu, *On the concentration of eigenvalues of random symmetric matrices*, Israel J. Math. 131 (2002) 259–267.
- [9] A. J. Schwenk and R. J. Wilson (1978), *On the eigenvalues of a graph*, Selected topics in graph theory, pp. 307-336 (Academic Press, London).
- [10] V. V. Prasolov, *Polynomials*, Springer, 2004.
- [11] A.E. Brouwer and W.H. Haemers *Spectra of Graphs*, Springer, 2011.
- [12] Z. Füredi, J. Komlós, *The eigenvalues of random symmetric matrices*, Combinatorica 1 (1981) 233–241.

- [13] F. C. Bussemaker and D. M. Cvetković, *There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 544 - No 576 (1976), 43-48.
- [14] D. Cvetković, S. Simić, D. Stevanović, *4-regular integral graphs*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 9 (1998), 109–123.
- [15] https://people.math.sc.edu/lu/teaching/2009spring_778S/adjeig.pdf