NYILATKOZAT

Név: DÉKÁNY BARNABÁS
ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSC
NEPTUN azonosító: SKYNNT
Szakdolgozat címe: EHRENFEUCHT–FAÏSSÉ JÁTÉKOK

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.25.

Dékány Barnabás
a hallgató aláírása

Ehrenfeucht-Fraïssé játékok

Szakdolgozat

Készítette: Dékány Barnabás
Témavezetők: Sziráki Dorottya, Sági Gábor
Belső konzulens: Pálvölgyi Dömötör

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2022

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni a témavezetőimnek, Dórinak és Gábornak a fáradságos munkájukat, mellyel segítették a szakdolgozat elkészülését. Köszönöm nekik, hogy mind szakmai, mind technikai kérdésekben bármikor fordulhattam hozzájuk, ők készségesen segítettek. Köszönöm nekik azt is, hogy hibáim javítása mellett is mindig bíztattak, hogy fenntartsák a lelkesedésemet.

Köszönöm továbbá Pálvölgyi Dömötörnek, hogy elvállata a belső konzulens szerepét, és készségesen segített a szakdolgozattal kapcsolatos adminisztratív feladatok megoldásában.

Köszönöm továbbá a családomnak és a barátaimnak a sok támogatást és ösztönzést.

1. fejezet

Bevezetés

Az Ehrenfeucht-Fraïssé játékot egy adott elsőrendű nyelv két struktúráján játssza két játékos. Előre megadott számú fordulóból áll, ahol egy fordulóban az első játékos kiválasztja a két struktúra egyikének egy tetszőleges elemét, majd a második játékos választ a másik struktúrából szintén egy tetszőleges elemet. A második játékos nyeri a játékot, ha ezen elempárokból álló függvény egy parciális izomorfizmus a két struktúra között, ellenkező esetben az első játékos a győztes. A második fejezetben precízen is definiáljuk az Ehrenfeucht-Fraïssé játékot, melyet az egyszerűség kedvéért EF-játéknak rövidítjük a későbbiekben.

A szakdolgozat célja, hogy az EF-játékok segítségével megvilágítson néhány önmagában nehezen érthető, de mégis alapvető fogalmat, illetve hogy olyan értékes és érdekes eredményeket kapjunk, melyeket az EF-játékok nélkül nehezebben lehetne bebizonyítani.

A második fejezetben az alapfogalmak definiálása után megmutatjuk, hogy a legfeljebb ω-hosszú EF-játékok determináltak, azaz valamelyik játékosnak van olyan stratégiája, ami győzelmet garantál neki minden esetben. Ezután először az ω-hosszú játékok tulajdonságait vizsgáljuk, majd a véges hosszúakét. Elsőre talán fordítva tűnne logikusnak a sorrend, de az ω-hosszú esetben használt fogalmak, illetve a tételek talán könnyebben megérthetők. Így miután az olvasó jobban megérti az EF-játékokat az ω-hosszú eseten keresztül, már könnyebben gondolja meg a véges hosszú esetben kimondott tételeket, lemmákat. A harmadik fejezet fő eredménye, hogy a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája az ω-hosszú EF-játékban két megszámlálható struktúra közt, ha a struktúrák (parciálisan) izomorfak. Ezt az eredményt felhasználjuk a fejezet további részeiben a véletlen gráfokra és a sűrű, lineáris rendezések elméletére is: megmutatjuk, hogy ezeknek az elméletnek izomorfia erejéig pontosan egy megszámlálható modellje van. A negyedik, és egyben utolsó fejezetben többek között belátjuk, hogy a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája minden véges hosszú EF-játékban két adott struktúra közt, ha a két struktúra elemien ekvivalens. Ezt az eredményt felhasználva megmutatjuk, hogy különbség van az elemi ekvivalencia és az izomorfizmus között: hiába van nyerő stratégiája a második játékosnak tetszőleges véges hosszú EF-játékban ugyanazon két struktúra között, ez nem garantálja, hogy az ω-hosszú játékban is van nyerő stratégiája. Továbbá olyan érdekes eredményt is belátunk, hogy a gráfok nyelvén nem definiálható elsőrendű formulával az, hogy egy gráf összefüggő.

2. fejezet

Ehrenfeucht-Fraïssé játékok és determináltságuk

Az Ehrenfeucht-Fraïssé játékok (röviden EF-játékok) kulcsfontosságúak lesznek a szakdolgozatban. A következő alfejezetben célunk a szükséges előismeretek összefoglalása, és az EF-játékok definiálása lesz. A 2.2 alfejezetben rekonstruáljuk annak az ismert tételnek a bizonyítását, hogy a legfeljebb ω-hosszú EF-játékok determináltak.

2.1. Ehrenfeucht-Fraïssé játékok

Ezt az alfejezetet a [Ság05, 1. fejezet] és a [Vää11, 3. és 5. fejezet] alapján készítettük.

Térjünk rá először a struktúrákkal kapcsolatos fontos definíciókra, amelyekre szükségünk lesz az EF-játékok precíz definíciójához, illetve a tételekhez.

Rögzítsünk egy elsőrendű

$$L = \langle f_i, R_j, c_k, \rho : i \in I, j \in J, k \in K \rangle$$

nyelvet, ahol ρ az aritásfüggvény. Rögzítsünk $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ L-struktúrákat. Jelöljük $\mathcal{A}$ alaphalmazát A-val, $\mathcal{B}$ alaphalmazát B-vel. Ezeket a szakdolgozatban végig rögzítettnek tekintjük.

2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $g : A \to B$ függvény **izomorfizmus** az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák közt, ha bijekció, és:*

1. *Minden $i \in I$ és $a_1, \ldots, a_{\rho(i)} \in A$ esetén:*
$$g(f_i^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_{\rho(i)})) = f_i^{\mathcal{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_{\rho(i)})).$$
2. *Minden $j \in J$ és $a_1, \ldots, a_{\rho(j)} \in A$ esetén:*
$$\langle a_1, \ldots, a_{\rho(j)} \rangle \in R_j^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle g(a_1), \ldots, g(a_{\rho(j)}) \rangle \in R_j^{\mathcal{B}}.$$
3. *Minden $k \in K$-ra:*
$$g(c_k^{\mathcal{A}}) = c_k^{\mathcal{B}}.$$

*Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák **izomorfak**, ha van izomorfizmus köztük.*
Jelölése: *$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ **részstruktúrája** $\mathcal{B}$-nek, ha $A \subseteq B$, és:*

1. *Minden $i \in I$ és $a_1, \ldots, a_{\rho(i)} \in A$:*
$$f_i^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_{\rho(i)}) = f_i^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_{\rho(i)}) \in A.$$
2. *Minden $j \in J$ és $a_1, \ldots, a_{\rho(j)} \in A$:*
$$\langle a_1, \ldots, a_{\rho(j)} \rangle \in R_j^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle a_1, \ldots, a_{\rho(j)} \rangle \in R_j^{\mathcal{B}}.$$
3. *Minden $k \in K$:*
$$c_k^{\mathcal{A}} = c_k^{\mathcal{B}}.$$

Jelölése: *$\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.*

2.3. Definíció. *Legyen $X \subseteq B$. Az X által **generált részstruktúrája** $\mathcal{B}$-nek $\mathcal{A}$, ha:*

- *$\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$;*

- *$X \subseteq A$;*
- *ha $\mathcal{A}' \leq \mathcal{B}$, és $X \subseteq A'$, akkor $A \subseteq A'$.*

Jelölése: $[X]_{\mathcal{B}}$.

2.4. Definíció. *Egy A és B közti π parciális függvényt akkor nevezünk **parciális izomorfizmusnak** $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között, ha létezik olyan π^* kiterjesztése, ami izomorfizmus $[dom(\pi)]_{\mathcal{A}}$ és $[rng(\pi)]_{\mathcal{B}}$ között.*

Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közti parciális izomorfizmusok halmazát $Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-vel jelöljük.

2.5. Definíció. *Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák **parciálisan izomorfak**, jelölésben $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$, ha létezik egy nemüres $P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ halmaz úgy, hogy:*

$$\forall f \in P\, \forall a \in A\, \exists g \in P\, (f \subseteq g \text{ és } a \in dom(g)), \text{ és}$$
$$\forall f \in P\, \forall b \in B\, \exists g \in P\, (f \in g \text{ és } b \in rng(g)).$$

Az ilyen P halmazokat az angol nevük (Back-and-Forth set) alapján ezentúl **BAF-halmazoknak** nevezzük.

2.6. Lemma. *Legyen $\langle f_n : n < \omega \rangle$ $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közti parciális izomorfizmusok növő sorozata. Ekkor $f := \bigcup_{n<\omega} f_n$ is parciális izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között.*

Bizonyítás. Minden $n < \omega$-ra legyen $f'_n \supseteq f_n$ izomorfizmus $[dom(f_n)]_{\mathcal{A}}$ és $[rng(f_n)]_{\mathcal{B}}$ között. Legyen továbbá

$$f' = \bigcup_{n<\omega} f'_n.$$

Ekkor $f' \supseteq f$, $dom(f') = [dom(f)]_{\mathcal{A}}$ és $rng(f') = [rng(f)]_{\mathcal{B}}$, így elég belátni, hogy f' izomorfizmus $dom(f')$ és $rng(f')$ között.

Nyilván szürjektív f', hiszen $rng(f')$ tetszőleges elemét felveszi értékül. Az injektivitását indirekt látjuk be. Tegyük fel, hogy különböző $a, b \in A$, elemeknek ugyanaz az f' szerinti képe B-ben. Van olyan i index, hogy $a, b \in dom(f'_i)$, ez viszont ellentmondás, hiszen f'_i parciális izomorfizmus, ezért

$f'(a) = f'_i(a) \neq f'_i(b) = f'(b)$. Tehát f' injektív, és szürjektív, azaz bijekció. Vegyünk $dom(f')$-ben tetszőleges $c^{\mathcal{A}}$ konstanst. Ez $dom(f'_0)$-ban is benne van, tehát a képe $f'(c^{\mathcal{A}}) = f'_0(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha $rng(f')$-ben veszünk egy konstanst, annak az őásképe konstansszimbólum $dom(f')$-ben. Végül, ha veszünk egy R relációszimbólumot, és az aritásának megfelelő számú elemet $dom(f')$-ben, akkor találunk olyan j indexet, hogy ezek az elemek $dom(f'_j)$-ben vannak, és mivel f'_j parciális izomorfizmus, ezért ezek képei relációban vannak $rng(f'_j)$-ben, így $rng(f')$-ben is. Hasonlóan be lehet látni, hogy ha néhány elem $rng(f')$-ben relációban van, akkor ősképeik relációban vannak $dom(f')$-ben. Szintén hasonlóan lehet látni, hogy f' megőrzi a függvényszimbólumokat is. $\square$

2.7. Definíció. *Legyen α egy rendszám. Ekkor az $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a következő α-hosszú (α fordulós) játék:*
*Minden $\beta < \alpha$-adik fordulóban először az **I**-es játékos választ egy $x_\beta \in A \cup B$ elemet. Utána a **II**-es játékos választ egy $y_\beta \in A \cup B$ elemet úgy, hogy ha $x_\beta \in A$, akkor $y_\beta \in B$, illetve ha $x_\beta \in B$, akkor $y_\beta \in A$. Így keletkezik egy $\langle x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha \rangle$ sorozat, amit játékmenetnek nevezünk. Minden $\beta < \alpha$ esetén legyen:*

$$a^p_\beta = \begin{cases} x_\beta, & ha\ x_\beta \in A, \\ y_\beta, & ha\ y_\beta \in A \end{cases}$$

$$b^p_\beta = \begin{cases} y_\beta, & ha\ y_\beta \in B, \\ x_\beta, & ha\ x_\beta \in B \end{cases}$$

Legyen $f = \{(a^p_\beta, b^p_\beta) : \beta < \alpha\}$.
***II** nyeri ezt a játékmenetet, ha f egy parciális izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között (azaz $f \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$).*

A játékmenet kezdőszeleteit a játék **pozícióinak** hívjuk. Egy

$$p := \langle x_\beta, y_\beta : \beta < \gamma \rangle$$

pozícióhoz (ahol $\gamma \leq \alpha$) az előző f függvény mintájára bevezetjük az

$$f_p = \{(a_\beta^p, b_\beta^p) : \beta < \gamma\}$$

függvényt.

Végül vezessük be a nyerő stratégia fogalmát először intuitívan, majd precízen. Azt mondjuk, hogy a **II**-es játékosnak **nyerő stratégiája** van, ha függetlenül attól, hogy az **I**-es játékos hogyan választja az elemeket, tud úgy válaszolni, hogy ő nyeri a játékmenetet. Hasonlóan az **I**-es játékosnak nyerő stratégiája van, ha tudja úgy választani az elemeket, hogy a **II**-es játékos veszít, bárhogyan is válaszol. Vezessünk be néhány jelölést a precíz definíciókhoz.

Legyen α egy rendszám, és X egy halmaz. Ekkor jelölje ${}^\alpha X$ az összes

$$\langle x_\beta \in X : \beta < \alpha \rangle$$

sorozatból álló halmazt. Hasonlóan, legyen

$${}^{<\alpha}X = \bigcup_{\alpha' < \alpha} {}^{\alpha'}X.$$

Például, amire nekünk most szükségünk lesz: ${}^{<\omega}X$ jelöli az X elemeiből képzett összes véges sorozat halmazát.

2.8. Definíció. *Egy adott játékos egy $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékbeli **stratégiáján** egy tetszőleges $\tau : {}^{<\alpha}(A \cup B) \to A \cup B$ függvényt értünk.*

2.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a **I**-es játékos az $\langle x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha \rangle$ játékmenetben a τ **stratégia szerint játszott**, ha $x_\beta = \tau(\langle y_\gamma : \gamma < \beta \rangle)$ minden $\beta < \alpha$ esetén.*

2.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a **II**-es játékos az $\langle x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha \rangle$ játékmenetben a τ **stratégia szerint játszott**, ha $y_\beta = \tau(\langle x_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle)$ minden $\beta < \alpha$ esetén.*

2.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy τ **nyerő stratégiája** az **I**-es (illetve **II**-es) játékosnak az $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékban, ha **I** (illetve **II**) nyer minden olyan játékmenetet, amelyben a τ stratégiát használta.*

Később azt, hogy a **II**-es játékosnak nyerő stratégiája van, csak úgy fogjuk nevezni, hogy **II** nyeri a játékot. Ahelyett, hogy az **I**-es játékosnak van nyerő stratégiája, azt mondjuk, hogy **I** nyeri a játékot.

2.2. Determináltság

Ezt az alfejezetet a [Kho10, 2.4 rész] és a [Vää11, 3. fejezet] alapján készítettük.

Egy játékot (melyben nincs döntetlen) **determináltnak** nevezünk, ha valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája. Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk, hogy determináltak-e az EF-játékok. Az alfejezet fő eredménye a 2.19 tétel, amelyben belátjuk, hogy $\alpha \leq \omega$ esetén az $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játék mindig determinált. Ez az eredmény egy sokkal általánosabb tétel, a Gale-Stewart tétel [Kec95, 20.1. Tétel] következménye, amely azt mondja ki, hogy az ω-hosszú, úgynevezett zárt játékok determináltak. Ebben az alfejezetben egy direkt és elemi bizonyítást ismertetünk.

Azt is megemlítjük, hogy létezik olyan $\beta > \omega$, melyre az $EF_\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játék már nem determinált valamely $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ struktúrára. Például:

- $\beta = \omega + 2$ esetén [Vää11, 9.29. és 9.30. feladatok];
- $\beta = \omega_1$ esetén [MSV93].

2.12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játék determinált, ha valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája.*

2.13. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékban **I**-nek van nyerő stratégiája a $p = \langle x_i, y_i : i < \beta \rangle$ pozícióból, ha van olyan $\tau : {}^{<\alpha}(A \cup B) \to A \cup B$ stratégia, hogy **I** nyer minden olyan q játékmenetben, amelyre egyrészt $q \supseteq p$, (azaz $q = p^\frown\langle x_m, y_m : \beta \leq m < \alpha \rangle$ valamely x_m, y_m-ekre), másrészt q-ban **I** a τ szerint játszott a p-től kezdve, (azaz $x_m = \tau(\langle y_i : i < m \rangle)$ mindig, ha $\beta \leq m < \alpha$).*

A **II**-es játékos nyerő stratégiája egy adott pozícióból analóg módon definiálható.

Tegyük fel, hogy **II**-nek nincs nyerő stratégiája. Ekkor létezik x_0, hogy minden y_0-ra a $p = (\langle x_0, y_0 \rangle)$ pozícióból sincs **II**-nek nyerő stratégiája. Ugyanis, ha ez nem lenne igaz, akkor minden x_0-ra létezne y_0, hogy p-ből **II**-nek van nyerő stratégiája. Azonban kiegészítve **II** stratégiáját azzal, hogy x_0-ra egy ilyen y_0-t lépjen, nyerő stratégiát kapunk a teljes játékra, de azt feltettük, hogy ilyen stratégia nincs. Most nézzünk egy még általánosabb állítást, amit lemmaként fogalmazunk meg.

2.14. Lemma. *Tegyük fel, hogy **II**-nek nincs nyerő stratégiája az $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játék*

$$p = \langle x_0, y_0, \ldots, x_{l-1}, y_{l-1} \rangle$$

*pozíciójából. Ekkor létezik x_l, hogy minden y_l-re a $p^\frown\langle x_l, y_l \rangle$ pozícióból sincs nyerő stratégiája **II**-nek.*

Bizonyítás. Állításunkat indirekten bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy nem igaz a lemma állítása, azaz minden x_l-re létezik y_l, hogy a $p^\frown\langle x_l, y_l \rangle$ pozícióból **II**-nek van nyerő stratégiája. Ekkor a következő stratégiával nyer **II** p-ből: az **I**-nek egy tetszőleges x_l lépésére találjon **II** egy ilyen y_l-et, és utána használja a $p^\frown\langle x_l, y_l \rangle$ pozícióból meglévő nyerő stratégiáját. Ez viszont ellentmond a feltevésünknek, így a lemma igaz. □

2.15. Lemma. *Tegyük fel, hogy **I**-nek nincs nyerő stratégiája a*

$$p = \langle x_0, y_0, \ldots, x_{l-1}, y_{l-1} \rangle$$

*pozícióból. Ekkor minden x_l-hez van olyan y_l, hogy a $p^\frown\langle x_l, y_l \rangle$ pozícióból sincs **I**-nek nyerő stratégiája.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy létezik x_l, hogy minden y_l-re $p^\frown\langle x_l, y_l \rangle$-ből **I**-nek van nyerő stratégiája. Ekkor azonban **I**-nek van nyerő stratégiája p-ből is: először lépjen egy ilyen x_l-et, majd **II** tetszőleges y_l válasza után a feltevés szerint **I**-nek van nyerő stratégiája a $p^\frown\langle x_l, y_l \rangle$ pozícióból, így tudja ezt használni. □

2.16. Definíció. *Legyen* $\tau : {}^{<\alpha}(A \cup B) \to A \cup B$ *egy stratégiája* ***I****-nek (illetve* ***II****-nek) az* $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *játékban, ahol* $\alpha \leq \omega$*. Azt mondjuk, hogy* τ ***defenzív*** *ha a* ***II****-nek (illetve* ***I****-nek) nincs nyerő stratégiája semelyik olyan* $l < \omega$ *hosszú* $p = \langle x_0, y_0, \ldots, x_{l-1}, y_{l-1}\rangle$ *pozícióból sem, ahol* ***I*** *(illetve* ***II****) a* τ *stratégiát használta.*

A 2.14-as és 2.15-es lemmák iterált alkalmazásával belátható az alábbi következmény:

2.17. Következmény. *Tegyük fel, hogy* $\alpha \leq \omega$*. Ekkor:*

1. *Ha* ***I****-nek nincs nyerő stratégiája az* $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *játékban, akkor* ***II****-nek van defenzív stratégiája.*
2. *Ha* ***II****-nek nincs nyerő stratégiája az* $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *játékban, akkor* ***I****-nek van defenzív stratégiája.*

2.18. Lemma. *Ha* ***II*** *az* $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *játék egy* $\langle x_i, y_i : i < \omega\rangle$ *menetében veszít, akkor létezik* $m < \omega$*, hogy* ***II*** *már veszített az* $\langle x_0, y_0, \ldots, x_{m-1}, y_{m-1}\rangle$ *pozícióban.*

Bizonyítás. Állításunkat indirekten bizonyítjuk. Ha **II**-es nem veszített egyik véges pozícióban sem, akkor kapunk parciális izomorfizmusoknak egy növő sorozatát $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Ekkor a 2.6 lemma miatt ezeknek az uniója is parciális izomorfizmus, azaz **II**-es nem veszít a végtelen játékmenetben, ami ellentmond a feltevésünknek. □

Megjegyezzük, hogy itt azt láttuk be, hogy az $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ egy úgynevezett zárt játék. [Vää11, 26. oldal]

2.19. Tétel. *Tetszőleges* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *struktúrák esetén* $EF_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *determinált minden* $\alpha \leq \omega$*-ra.*

Bizonyítás. Ha **I**-nek nincs nyerő stratégiája, akkor a 2.17 következmény alapján **II**-nek van egy τ-val jelölt defenzív stratégiája. Belátjuk először véges α-ra, majd $\alpha = \omega$-ra, hogy **II** nyer τ-val.

$\underline{\alpha = n < \omega}$ esetén n forduló után legyen

$$p = \langle x_0, y_0, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1} \rangle,$$

ahol **II** a τ stratégiát használta. Mivel τ defenzív, így **I**-nek nincs nyerő stratégiája p-ből, ami pont azzal ekvivalens, hogy **II** nyerte a p játékmenetet. Tehát τ nyerő stratégiája **II**-nek.

$\underline{\alpha = \omega}$ esetén legyen τ defenzív stratégiája **II**-nek. Tegyük fel, hogy **II** elveszít egy olyan $\langle x_i, y_i : i < \omega \rangle$ játékmenetet, ahol τ-t használta. Ekkor a 2.18 lemma alapján van olyan $m < \omega$ index, hogy már a

$$p = \langle x_0, y_0, \ldots x_{m-1}, y_{m-1} \rangle$$

pozícióban is vesztett, tehát az f_p függvény nem parciális izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Ekkor azonban **I**-nek tetszőleges stratégiája nyerő stratégia lenne a p pozícióból, hiszen ekkor f_p egyetlen kiterjesztése sem lehet parciális izomorfizmus. Ez viszont ellentmond annak, hogy τ defenzív stratégiája **II**-nek. Tehát τ nyerő stratégiája **II**-nek, így $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is determinált. $\square$

3. fejezet

ω-hosszú Ehrenfeucht-Fraïssé játékok

Ebben a fejezetben az ω-hosszú EF-játékokról, és az izomorfizmussal, illetve a parciális izomorfizmussal való kapcsolatukról lesz szó. A fejezetet a [Hod93, 3. fejezet], a [Ság05, 5.1 rész] és a [Vää11, 5. fejezet] alapján készítettük.

3.1. Megszámlálható struktúrák

Ebben a fejezetben a következő három állítás ekvivalenciáját bizonyítjuk megszámlálható $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák esetén:

1. **II** nyeri az $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékot;
2. $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$;
3. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Ehhez először bizonyítjuk az 1. $\Rightarrow$ 2., majd a 2. $\Rightarrow$ 3., végül a 3. $\Rightarrow$ 1. irányt.

3.1. Tétel. *Ha **II** nyeri az $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékot, akkor $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$.*

Bizonyítás. Legyen τ egy nyerő stratégiája **II**-nek. Legyen Q egy olyan halmaz, amely pontosan azokat a végtelen játékmeneteket tartalmazza, amiben **II** a τ-t használta. Legyen P azon f_p függvények halmaza, ahol p egy olyan pozíció az $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-n, ami egy Q-beli játékmenet valódi kezdőszelete. Ekkor ez a P egy BAF-halmaz $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közt. Egyrészt nemüres, másrészt minden $f \in P$ és $a \in A$-ra, ha $a \in dom(f)$, akkor $g := f$ választás megfelel. Ha $a \notin dom(f)$, akkor tegyük fel, hogy $f = f_p$, ahol

$$p = \langle x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1} \rangle,$$

és legyen

$$g := f \cup \{(a, \tau(x_0, \dots, x_{n-1}, a))\}.$$

Ekkor $a \in dom(g)$ és $g \in P$, hiszen g-t úgy választottuk, hogy **II** a τ-t használta. Hasonlóan minden $f \in P$ és $b \in B$-re, ha $b \in rng(f)$, akkor legyen $g := f$, ha $b \notin rng(f)$, akkor legyen

$$g := f \cup \{(\tau(x_0, \dots, x_{n-1}, b), b)\}.$$

Végül $P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, hiszen τ nyerő stratégiája **II**-nek, ezért minden $q \in Q$ parciális izomorfizmus, így minden $p \in P$ is parciális izomorfizmus. $\square$

3.2. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ megszámlálható struktúrák, és $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Bizonyítás. Soroljuk fel A és B elemeit:

$$A = \langle a_n : n < \omega \rangle, B = \langle b_n : n < \omega \rangle.$$

Legyen P BAF-halmaz $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közt. Definiáljunk egy $\langle f_n \in P : n < \omega \rangle$ növő sorozatot: Legyen $f_0 \in P$ tetszőleges. Ha $f_n \in P$ definiált, és n páros, azaz $n = 2m$, akkor válasszunk $y \in B$ és $f_{n+1} \in P$ elemeket úgy, hogy $f_n \cup \{(a_m, y)\} \subseteq f_{n+1}$. Hasonlóan, ha n páratlan, azaz $n = 2m + 1$, akkor válasszunk $x \in A$ és $f_{n+1} \in P$ elemeket úgy, hogy $f_n \cup \{(x, b_m)\} \subseteq f_{n+1}$. Végül legyen $f = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n$. Ekkor a 2.6 lemma szerint f is parciális izomorfizmus. Mivel $dom(f) = A$, és $rng(f) = B$, így f izomorfizmus. $\square$

3.3. Tétel. *Ha $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, akkor **II** nyeri az $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékot.*

Bizonyítás. Legyen g izomorfizmus az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák közt. Ha az i. lépésben **I** az $a_i \in A$-t választja, akkor **II** válassza a $g(a_i) \in B$-t. Ha **I** a $b_i \in B$-t választja, akkor **II** válassza a $g^{-1}(b_i) \in A$-t. Világos, hogy ezzel a stratégiával **II** nyeri a játékot, hiszen a g függvény (parciális) izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. □

3.4. Megjegyzés. *Ismert, hogy $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$ ekvivalens azzal, hogy **II** nyeri az $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékot tetszőleges $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ struktúrákra, nem csak megszámlálhatókra* [Vää11, 5.21. Állítás].

3.5. Megjegyzés. *Nem megszámlálható struktúrákra a 3.2-es tétel már nem teljesül: M. Morley egy tétele szerint léteznek $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\aleph_1$-méretű nem izomorf struktúrák, hogy $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$, lásd* [Vää11, 9.11. Állítás].

3.2. Véletlen gráfok

Általánosan olyan gráfokat nevezünk véletlen gráfoknak, amelyek valamilyen véletlen folyamat során jönnek létre. A következőkben az alábbi, Erdőstől és Rényitől származó modellt fogjuk használni: Vegyünk véges, vagy akár végtelen sok csúcsot, és tetszőleges két csúcs közt $0 < p < 1$ valószínűséggel húzzunk be élt, a többi éltől függetlenül. Szemléletesen ha $p = 1/2$, akkor tetszőleges csúcspárnál feldobunk egy pénzérmét, és írás esetén húzunk élt közéjük, fej esetén nem húzunk. Az Erdős-Rényi modell alapján n csúcsra, és p valószínűségre jelöljük az ilyen véletlen módon kapott gráfokat $G(n, p)$-vel. Ennek a mintájára jelöljük a megszámlálhatóan végtelen csúcsból álló véletlen gráfot $G(\omega, p)$-vel. Tekintsünk most két definíciót, amelyekre később szükségünk lesz. Az L nyelv álljon egyetlen kétváltozós E relációszimbólumból.

3.6. Definíció. *Legyen $\phi_{n,m}$ a következő formula:*

$$\forall x_0, \ldots, \forall x_{n-1} \forall y_0, \ldots, \forall y_{m-1}$$

$$((\bigwedge_{i=0}^{n-1} \bigwedge_{j=0}^{m-1} x_i \neq y_j) \Rightarrow \exists z[\bigwedge_{i=0}^{n-1}(x_i \neq z \wedge zEx_i) \wedge \bigwedge_{j=0}^{m-1}(y_j \neq z \wedge \neg(zEy_j))]).$$

Tehát $\phi_{n,m}$ azt fejezi ki, hogy akárhogy választunk ki n, és ezektől diszjunkt m pontot, találunk olyan, ettől az $n+m$ ponttól különböző pontot, amely az első n ponttal mind, de a másodjára választott m pont közül egyikkel sem szomszédos. Legyen T_R a következő elmélet:

3.7. Definíció. $T_R = \{\phi_{n,m} : n, m < \omega\} \cup \{\forall x \neg(xEx), \forall x \forall y(xEy \Rightarrow yEx)\}$.

Az utolsó két fromula azt fejezi ki, hogy E irreflexív és szimmetrikus, így T_R modelljei csak gráfok lehetnek. Be akarjuk látni, hogy ha két megszámlálható gráf kielégíti ezt az elmélet, akkor parciálisan izomorfak. Ahhoz, hogy ez egy valódi eredmény legyen, előbb be kell látni, hogy egyáltalán van T_R-nek modellje. Ehhez két tételt látunk be.

3.8. Tétel. *Legyen $n, m < \omega$ rögzített számpár. Ekkor*

$$\lim_{k\to\infty} P(G(k,p) \nvDash \phi_{n,m}) = 0.$$

Bizonyítás. A rendőr elv segítségével fogjuk ezt bizonyítani. Egyrészt minden k-ra $P(G(k,p) \nvDash \phi_{n,m}) \geq 0$. Másrészt felülről is becsüljük ezt a sorozatot egy 0-hoz tartó sorozattal, így a rendőr elv alapján a limesz értéke is 0 lesz. Először is adott $n+m$ pontra, az esély, hogy egy ezektől különbönböző pont az n ponttal össze van kötve p^n, hogy az m ponttal nincs összekötve $(1-p)^m)$ az élhúzás függetlensége miatt. Ekkor az esély, hogy ez nem teljesül egy adott pontra $1-p^n(1-p)^m$, és az ezekhez tartozó indikátorváltozók teljes függetlensége miatt a valószínűség, hogy a $k-n-m$ pont közül egyikre sem teljesül: $[1-p^n(1-p)^m]^{k-n-m}$. Másrészt, k pontból n pontot kiválaszthatunk $\binom{k}{n}$-féleképpen, a maradékból m pontot $\binom{k-n}{m}$-féleképpen. Ennek a kettőnek a szorzata nyilván legfeljebb k^{n+m}, tehát a felső becslésünk

$$P(G(k,p) \nvDash \phi_{n,m}) \leq k^{n+m}[1-p^n(1-p)^m]^{k-n-m}.$$

Ebből a k^{n+m} polinomiális sebességgel nő, míg a maradék tényező exponenciális sebességgel változik, ebben a helyzetben csökken, hiszen az alap 1-nél kisebb. Ismert analízisből, hogy egy ilyen szorzat 0-hoz tart, ha k tart a végtelenhez. Tehát a rendőr elv alapján a limesz 0. $\square$

Most ennek a segítségével megmutatjuk, hogy T_R véges részhalmazai is kielégíthetőek. Jelöljük $\phi_{n,m}$-ek egy véges halmazát Σ-val.

3.9. Tétel. *T_R véges Σ részhalmazainak van véges modellje, sőt,*

$$\lim_{k\to\infty} P(G(k,p) \models \Sigma) = 1.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{\phi_{n_1,m_1}, \ldots, \phi_{n_l,m_l}\}$. Tudjuk, hogy

$$P(G(k,p) \not\models \Sigma) \leq P(G(k,p) \not\models \phi_{n_1,m_1}) + \ldots + P(G(k,p) \not\models \phi_{n_l,m_l}).$$

Azt az előző tételből tudjuk, hogy $\lim_{k\to\infty} P(G(k,p) \not\models \phi_{n_i,m_i}) = 0$, minden $i \in \{1, \ldots, l\}$-re. Tehát véges sok ilyet (pontosan l-et) összeadva még mindig 0 valószínűséget kapunk, tehát az egyenlőtelnség baloldala, azaz

$$\lim_{k\to\infty} P(G(k,p) \not\models \Sigma) = 0,$$

így $\lim_{k\to\infty} P(G(k,p) \models \Sigma) = 1$. Tehát azt kaptuk, hogy ha k tart végtelenbe, akkor annak a valószínűsége, hogy a $G(k,p)$ véletlen gráf modellje Σ-nak, 1-hez konvergál, így nyilván van olyan k, hogy Σ-nak van k elemű modellje. $\square$

Az elsőrendű logika kompaktsági tétele [Ság05, 2.22. Tétel] szerint egy formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthető, ha minden véges részhalmaza kielégíthető. Ez alapján és a 3.9 tétel alapján T_R kielégíthető.

Két dolgot érdemes még megjegyezni T_R modelljeiről. Egyrészt csak végtelenek lehetnek, hiszen ha csak $k < \omega$ elemből állna a modell, akkor például a $\phi_{k,0}$ nem teljesülne, hiszen nem is lenne $k+1$-edik pont az alaphalmazban, ami a 3.6 definícióbeli z pont szerepét betölthetné. Másrészt a Leszálló Löwenheim-Skolem tétel [Ság05, 1.16. Tétel] alapján T_R-nek vannak megszámlálható modelljei.

Most térjünk rá a tételre, amely miatt beláttuk, hogy T_R kielégíthető.

3.10. Tétel. *Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vDash T_R$, akkor $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$*

Tehát ha van két gráfunk, amelyek mindketten kielégítik T_R-t, akkor ezek a gráfok parciálisan izomorfak.

Bizonyítás. Itt egy f függvény akkor parciális izomorfizmus, ha tetszőleges $dom(f)$-beli a és a' pontokra teljesül, hogy

$$[aE^{\mathcal{A}}a' \Leftrightarrow f(a)E^{\mathcal{B}}f(a')].$$

Legyen P a véges parciális izomorfizmusok halmaza $\mathcal{A}$, és $\mathcal{B}$ között. Megmutatjuk, hogy P BAF-halmaz. Először is, ha csak egy-egy pontot veszünk a két gráfból, akkor ezek közt nyilván parciális izomorfizmus van sőt, $\emptyset \in P$, tehát P nemüres. Vegyünk most egy tetszőleges f parciális izomorfizmust P-ből. Például legyen

$$dom(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Vegyünk az A gráfból egy tetszőleges a_{n+1} pontot. Nyilván az az eset érdekes, ha ez a pont nincs az n pont között. Feltehető, hogy a_{n+1} szomszédos $a_1, \ldots, a_l$-el, és nem szomszédos $a_{l+1}, \ldots, a_n$-nel, valamely $l \leq n$-re. Ekkor mivel $\mathcal{B}$ kielégíti T_R-t, ezért találunk olyan b_{n+1} pontot a B gráfban, hogy szomszédos $f(a_1), \ldots, f(a_l)$ csúcsokkal, és nem szomszédos $f(a_{l+1}), \ldots, f(a_n)$ csúcsokkal. Legyen ekkor

$$g := f \cup \{(a_{n+1}, b_{n+1})\}.$$

Hasonlóan bizonyítható az az eset, ha a B gráfból veszünk egy tetszőleges pontot, csak az a_i pontokat b_i-kkel helyettesítjük, az f függvényt pedig f^{-1}-zel. □

3.11. Következmény. *Ha két megszámlálható gráf kielégíti T_R-t, akkor nemcsak parciálisan izomorfak, hanem a 3.2 tétel szerint izomorfak is. Tehát izomorfia erejéig pontosan egy T_R-t kielégítő megszámlálható gráf létezik, amit Rado-gráfnak neveznek.*

3.3. Sűrű lineáris rendezések

Nézzünk most egy másik elméletet. Legyen $L := \{<\}$, ahol $<$ két változós relációszimbólum. Legyen

$$T_{lin} := \{\forall x(\neg(x < x)), \forall x \forall y \forall z((x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)),$$

$$\forall x \forall y((x < y) \vee (x = y) \vee (y < x))\}.$$

Azt mondja ki T_{lin}, hogy $<$ egy lineáris rendezés. Legyen T_S a sűrű, végpont nélküli lineáris rendezések elmélete az L nyelven. Precízen:

$$T_S := T_{lin} \cup \{\forall x \forall y((x < y) \Rightarrow \exists z((x < z) \wedge (z < y))),$$

$$\forall x(\exists y(y < x) \wedge \exists z(x < z))\}.$$

T_S-nek véges modellje nyilván nincs, például a sűrűsége miatt, de van megszámlálhatóan végtelen modellje, például $\mathbb{Q}$ a szokásos rendezéssel.

3.12. Tétel. *Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T_S$, akkor $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$.*

Bizonyítás. Itt most egy f függvény akkor parciális izomorfizmus, ha:

$$(\forall a, a' \in dom(f))(a < a' \Leftrightarrow f(a) < f(a')).$$

Hasonlóan bizonyítjuk az előző tételhez. Legyen P a véges parciális izomorfizmusok halmaza $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Azt bizonyítjuk, hogy P BAF-halmaz. Először is nemüres, hiszen például egy-egy pontot véve A-ból és B-ből, köztük izomorfizmus van, sőt, az üreshalmaz is P-ben van. Legyen most $f \in P$ tetszőleges parciális izomorfizmus, például n-n pont között. Azaz $dom(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, valamint $a_1 < \ldots < a_n$, és hasonlóan $f(a_1) < \ldots < f(a_n)$. Most bizonyítsuk azt az esetet, hogy B-ből veszünk egy b pontot. Nyilván itt is az az érdekes, ha ez a pont különbözik mind az n darab B-beli ponttól. Ekkor három eset lehetséges. Első eset, ha $b < f(a_1)$. Ekkor mivel A-nak nincs legkisebb eleme, ezért létezik $a < a_1$, így $g = f \cup \{(a, b)\}$ is véges parciális izomorfizmus. Második eset, ha $f(a_i) < b < f(a_{i+1})$, ahol $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ekkor A sűrűsége miatt létezik $a \in A$, hogy $a_i < a < a_{i+1}$. Így most is $g = f \cup \{(a, b)\}$ véges parciális izomorfizmus. Harmadik eset, ha $f(a_n) < b$. Ekkor mivel A-ban nincs maximális elem, ezért van olyan $a \in A$, hogy $a_n < a$, így $g = f \cup (a, b)$ is véges parciális izomorfizmus. Hasonlóan belátható az az eset, amikor az A-ból választunk tetszőleges pontot, és ehhez keresünk $b \in B$ pontot. Végül $P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, hiszen definíció szerint $P = Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. □

Most is kiemeljük azt az esetet, amikor a két struktúra megszámlálható.

3.13. Következmény. *Ha a két struktúra megszámlálható, akkor a 3.2 tétel alapján nem csak parciálisan izomorfak, hanem izomorfak is.*

4. fejezet

Véges Ehrenfeucht-Fraïssé játékok

Ebben a fejezetben a véges EF-játékokról lesz szó. Ez azt jelenti, hogy az **I**-es játékosnak egy előre adott véges n számú fordulóban kell bizonyítania, hogy a megadott két srtuktúra nem izomorf, a **II**-es játékosnak pedig ugyanennyi körig kell az izomorfia látszatát fenntartania.

Először jellemezzük, hogy mikor nyeri **II** meg az $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékot minden $n < \omega$ esetén. Később megmutatjuk, hogy ez még nem garantálja, hogy **II** nyeri az $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékot. A fejezetet a [Hod93, 3. fejezet] és a [Vää11, 5. és 6. fejezetek] alapján készítettük.

4.1. Véges Ehrenfeucht-Fraïssé játékok és elemi ekvivalencia

4.1. Definíció. *A φ formulának a $QR(\varphi)$-vel jelölt* ***kvantor rangját*** *a következőképpen definiáljuk φ összetettsége szerinti formulaindukcióval:*

- *Ha φ atomi formula, akkor $QR(\varphi) = 0$;*
- *$QR(\neg\varphi) = QR(\varphi)$;*
- *Ha $\psi \in \{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2, \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2\}$, akkor*

$$QR(\psi) = \max\{QR(\varphi_1), QR(\varphi_2)\};$$

- *Ha* $\psi \in \{\exists x\varphi, \forall x\varphi\}$, *akkor* $QR(\psi) = QR(\varphi) + 1$.

4.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $\mathcal{A}$ ***elemien ekvivalens*** $\mathcal{B}$*-vel, jelölésben* $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$*, ha minden* L*-beli* φ *formulára* $\mathcal{A} \models \varphi$ *akkor, és csak akkor, ha* $\mathcal{B} \models \varphi$*. Továbbá,* $\mathcal{A}$ *és* $\mathcal{B}$ ***n-elemien ekvivalensek****, jelölésben* $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$*, ha minden olyan* L*-beli* φ *formulára, melynek kvantor rangja legfeljebb* n*,* $\mathcal{A} \models \varphi$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\mathcal{B} \models \varphi$*.*

Világos, hogy $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ akkor, és csak akkor teljesül, ha minden $n < \omega$-ra $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-struktúrák. Ekkor $\underline{c} = \langle c_0, \ldots, c_{n-1} \rangle$ esetén $(L, \underline{c})$-vel jelöljük azt az új nyelvet, amit úgy kapunk, hogy az L nyelvhez hozzávesszük a $c_0, \ldots, c_{n-1}$ új konstansszimbólumokat. Továbbá

$$\underline{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in {}^n A \text{ és } \underline{b} = \langle b_0, \ldots, b_{n-1} \rangle \in {}^n B$$

esetén $(\mathcal{A}, \underline{a})$ az az $(L, \underline{c})$-struktúra, ahol $a_i = c_i^{(\mathcal{A}, \underline{a})}$, és $(\mathcal{B}, \underline{b})$ az az $(L, \underline{c})$-struktúra, ahol $b_i = c_i^{(\mathcal{B}, \underline{b})}$.

Definiáljuk a két struktúra közötti $\sim_i$ relációt induktívan.

4.3. Definíció. *Legyen* $(\mathcal{A}, \underline{a})$ *és* $(\mathcal{B}, \underline{b})$ *két struktúra az* L *nyelven. Legyen*

- $(\mathcal{A}, \underline{a}) \sim_0 (\mathcal{B}, \underline{b}) \Leftrightarrow f = \{(a_i, b_i) : i < n\}$ *parciális izomorfizmus* $\mathcal{A}$ *és* $\mathcal{B}$ *között.*
- $(\mathcal{A}, \underline{a}) \sim_{k+1} (\mathcal{B}, \underline{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall c \in A)(\exists d \in B)(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \sim_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d) \\ (\forall d \in B)(\exists c \in A)(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \sim_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d). \end{cases}$

Itt érdemes megjegyezni, hogy feltehető, hogy egy elsőrendű struktúra nem tartalmaz függvényszimbólumokat. Ugyanis helyettesíthetők az n változós függvényszimbólumok $n+1$ változós relációszimbólumokkal úgy, hogy a relációk argumentumaiba kerülnek a függvények bemenete mellé a kimenetük is. Ismert, hogy elsőrendű nyelv esetén az összetett függvények, illetve függvények kompozíciója is kiküszöbölhető, de bizonyítása technikás, így most itt nem térünk ki rá. Hasonlóan feltehető, hogy egy elsőrendű struktúra konstansszimbólumokat sem tartalmaz, hiszen helyettesíthetők egyváltozós függvényszimbólumokkal.

4.4. Lemma. *Legyen L konstans- és függvényszimbólum mentes nyelv, és legyenek $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-nyelvű struktúrák. Legyen továbbá $f := \{(a_i, b_i) : i < n\}$, ahol*

$$\underline{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in {}^n A, \;\; \underline{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle \in {}^n B.$$

Ekkor a következő két állítás ekvivalens:

1. $(\mathcal{A}, \underline{a}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \underline{b})$;

2. f *parciális izomorfizmus* $\mathcal{A}$ *és* $\mathcal{B}$ *között.*

Bizonyítás. Egyrészt az 1. $\Rightarrow$ 2. irány triviális: a 0-elemi ekvivalencia miatt ugyanis tetszőleges $c_{i_0}, \dots, c_{i_{l-1}}$ részsorozatára a $c_0, \dots, c_{n-1}$ konstanszimbólumoknak teljesül, hogy

$$\mathcal{A} \models R(c_{i_0}, \dots, c_{i_{l-1}}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models R(c_{i_0}, \dots, c_{i_{l-1}}),$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$\langle a_{i_0}, \dots, a_{i_{l-1}} \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle b_{i_0}, \dots, b_{i_{l-1}} \rangle \in R^{\mathcal{B}}.$$

Ez pedig a feltevésünk szerint, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ nem tartalmaz függvény- és konstanszimbólumokat, azt jelenti, hogy f izomorfizmus $[dom(f)]_{\mathcal{A}} = dom(f)$ és $[rng(f)]_{\mathcal{B}} = rng(f)$ között. Az is triviális, hogy ha ez az f függvény parciális izomorfizmus, akkor tetszőleges φ atomi formulára

$$(\mathcal{A}, \underline{a}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \underline{b}) \models \varphi.$$

Ugyanis $\mathcal{A} \models R(c_{i_0}, \dots, c_{i_{l-1}})$ pontosan akkor, ha $\langle a_{i_0}, \dots, a_{i_{l-1}} \rangle \in R^{\mathcal{A}}$, ami mivel f parciális izomorfizmus ekvivalens azzal, hogy

$$\langle b_{i_0}, \dots, b_{i_{l-1}} \rangle \in R^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \mathcal{B} \models R(c_{i_0}, \dots, c_{i_{l-1}}).$$

Hasonlóan, ha $\mathcal{A} \models (c_i = c_j)$, akkor mivel f parciális izomorfizmus, ezért $\mathcal{B} \models (c_i = c_j)$. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges φ atomi formulára

$$(\mathcal{A}, \underline{a}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \underline{b}) \models \varphi.$$

Ebből következik az is, hogy $(\mathcal{A}, \underline{a}) \models \neg\, \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \underline{b}) \models \neg\, \varphi$, hiszen ha valamelyik struktúrában φ igaz, akkor az előző állítás miatt a másik struktúrában is igaz. Az is teljesül, hogy

$$(\mathcal{A}, \underline{a}) \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1) \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \underline{b}) \models (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$$

tetszőleges φ_0, φ_1 formulákra. Ugyanis, ha $(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$ nem igaz valamelyik struktúrában, akkor vagy φ_0, vagy φ_1 nem igaz abban a struktúrában, ekkor azonban az előbbiek alapján a másik struktúrában sem igaz, így $(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$ sem igaz. Mivel $\{\neg, \wedge\}$ funkcionálisan teljes, így ezzel az összes 0 kvantorrangú formulára beláttuk az állítást. □

Lássunk most egy következményét ennek a lemmának:

4.5. Következmény. *Legyen $\underline{a} \in {}^nA$, $\underline{b} \in {}^nB$. Legyen továbbá $f = \{(x_i, y_i) : i < k\}$, ahol*

$$\underline{x} = \langle x_0, \dots, x_{k-1} \rangle \in {}^kA, \quad \underline{y} = \langle y_0, \dots, y_{k-1} \rangle \in {}^kB.$$

Ekkor a következő két állítás ekvivalens:

1. *f parciális izomorfizmus $(\mathcal{A}, \underline{a})$ és $(\mathcal{B}, \underline{b})$ között;*
2. *$f \cup \{(a_i, b_i) : i < n\}$ parciális izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között.*

Bizonyítás. Mindkét állítás ekvivalens azzal, hogy

$$(\mathcal{A}, \underline{a}, \underline{x}) \equiv_0 (\mathcal{B}, \underline{b}, \underline{y}).$$

Az első azért, mert a 4.4 lemma ezt mondja ki az $(\mathcal{A}, \underline{a}), (\mathcal{B}, \underline{b})$ struktúrákra és $g = \{(x_i, y_i) : i < k\}$ függvényre. A második azért, mert szintén a 4.4 lemma ezt mondja ki az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ struktúrákra és $f \cup g$ függvényre. □

4.6. Lemma. *A következő két állítás ekvivalens:*

1. ***II** nyeri az $EF_k((\mathcal{A},\underline{a}),(\mathcal{B},\underline{b}))$ játékot;*

2. ***II** nyeri az $EF_{n+k}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ játékot a $p = \langle a_i, b_i : i < n\rangle$ pozícióból.*

Bizonyítás. Először is a 4.5 következmény alapján egy f függvény pontosan akkor parciális izomorfizmus $(\mathcal{A},\underline{a})$ és $(\mathcal{B},\underline{b})$ között, ha az

$$f \cup \{(a_i, b_i) : i < n\}$$

függvény parciális izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Legyen

$$q := \langle x_i, y_i : i < k\rangle, \ \ p := \langle a_i, b_i : i < n\rangle.$$

Ekkor a q pozícióba jutva pontosan akkor nyert **II** az első játékban, amikor a másodikban a $p^\frown q$ pozícióban (a játék végén), hiszen az észrevételünk szerint f_q pontosan akkor parciális izomorfizmus $(\mathcal{A},\underline{a})$ és $(\mathcal{B},\underline{b})$ között, amikor $f_{p^\frown q}$ parciális izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Tehát ha **II**-nek van nyerő stratégiája az első játékban, akkor a p pozícióból ugyanezt a stratégiát használva nyerő stratégiát kap a második játékban. Fordítva, ha van a másodikban nyerő stratégiája a p pozícióból, akkor ugyanezt a stratégiát használva az első játékban az elejétől, szintén nyerő stratégiát kap, így pontosan akkor nyer az egyikben, amikor a másikban. □

Lássuk most a tételt, amelynek $k = 0$ speciális esete a 4.4 és 4.6 lemmákkal azonos.

4.7. Tétel. *Legyen az L nyelv véges, és tegyük fel, hogy csak relációszimbólumokat tartalmaz. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ tetszőleges L-nyelvű struktúrák. Ekkor tetszőleges $n, k < \omega$, és*

$$\underline{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in {}^nA, \ \underline{b} = \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle \in {}^nB$$

esetén, a következő három állítás ekvivalens:

1. *$(\mathcal{A},\underline{a}) \sim_k (\mathcal{B},\underline{b})$;*

2. ***II*** *nyeri az* $EF_k((\mathcal{A}, \underline{a}), (\mathcal{B}, \underline{b}))$ *játékot;*

3. $(\mathcal{A}, \underline{a}) \equiv_k (\mathcal{B}, \underline{b})$.

Bizonyítás. A tételt k szerinti indukcióval bizonyítjuk.
$\underline{k = 0}$ esetén: A 4.4 lemma jelenti az első és harmadik állítás ekvivalenciáját, és a 4.6 lemma jelenti az első két állítás ekvivalenciáját, így a két lemma együtt kiadja a tétel $k = 0$ speciális esetét, így az induktív bizonyítás alaplépését.

Most feltesszük, hogy k-ra teljesül a 4.7 tétel, és belátjuk, hogy ekkor $k+1$-re is teljesül. Először az első két állítás ekvivalenciáját igazoljuk. Ehhez nézzünk egy következményét a 2.14 lemmának:

4.8. Lemma. *A következő két állítás ekvivalens:*

1. ***II*** *nyeri az* $EF_{n+k+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *játékot a* $p = \langle a_i, b_i : i < n \rangle$ *pozícióból;*

2. *Minden* $x \in A \cup B$*-re létezik* $y \in A \cup B$*, hogy* ***II*** *nyeri az* $EF_{n+k}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *játékot a* $p^\frown\langle x, y \rangle$ *pozícióból.*

Bizonyítás. A 2.14 lemma a 2. $\Rightarrow$ 1. irányt mondja ki úgy, hogy ha 1. nem teljesül, akkor 2. sem. A fordított irány pedig abból látszik, hogy ha τ egy nyerő stratégiája **II**-nek p-ből, és $x \in A \cup B$, akkor az $y = \tau(p^\frown\langle x \rangle)$ választás megfelel **II**-nek. □

Átfogalmazva ezt a következményt a 4.6 lemma alapján, a következő két állítás ekvivalenciáját kapjuk:

- **II** nyeri az $EF_{k+1}((\mathcal{A}, \underline{a}), (\mathcal{B}, \underline{b}))$ játékot;
- $\begin{cases} (\forall c \in A)(\exists d \in B), \text{ hogy } \mathbf{II} \text{ nyeri az } EF_k((\mathcal{A}, \underline{a}, c), (\mathcal{B}, \underline{b}, d)) \text{ játékot} \\ (\forall d \in B)(\exists c \in A), \text{ hogy } \mathbf{II} \text{ nyeri az } EF_k((\mathcal{A}, \underline{a}, c), (\mathcal{B}, \underline{b}, d)) \text{ játékot.} \end{cases}$

Ebből pedig következik, hogy ekvivalensek az alábbi állítások:

a) $(\mathcal{A}, \underline{a}) \sim_{k+1} (\mathcal{B}, \underline{b})$;

b) $\begin{cases} (\forall c \in A)(\exists d \in B)(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \sim_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d) \\ (\forall d \in B)(\exists c \in A)(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \sim_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d); \end{cases}$

c) $\begin{cases} (\forall c \in A)(\exists d \in B), \text{ hogy } \mathbf{II} \text{ nyeri az } EF_k((\mathcal{A}, \underline{a}, c), (\mathcal{B}, \underline{b}, d)) \text{ játékot} \\ (\forall d \in B)(\exists c \in A), \text{ hogy } \mathbf{II} \text{ nyeri az } EF_k((\mathcal{A}, \underline{a}, c), (\mathcal{B}, \underline{b}, d)) \text{ játékot}; \end{cases}$

d) **II** nyeri az $EF_{k+1}((\mathcal{A}, \underline{a}), (\mathcal{B}, \underline{b}))$ játékot.

Az a) és b) állítás definíció szerint ekvivalens, b) és c) az indukciós feltevés miatt, c) és d) pedig a 4.8 következmény átfogalmazott verziója miatt. Nekünk pedig az a) és d) állítás ekvivalenciája kellett, így ezt megkaptuk.

Most az első és harmadik állítás ekvivalenciáját igazoljuk $k+1$-re: A $\sim_{k+1}$ definícióját, és az indukciós feltételt felhasználva elég megmutatni, hogy a következő két állítás ekvivalens:

a) $(\mathcal{A}, \underline{a}) \equiv_{k+1} (\mathcal{B}, \underline{b})$;

b) $\begin{cases} (\forall c \in A)(\exists d \in B)\ (\mathcal{A}, \underline{a}, c) \equiv_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d) \\ (\forall d \in B)(\exists c \in A)(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \equiv_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d). \end{cases}$

Felhasználjuk a következő ismert eredményt:

4.9. Lemma. [Vää11, 6.3. Állítás] *Tegyük fel, hogy L olyan véges nyelv, amely csak relációszimbólumokat tartalmaz, és $k, n < \omega$. Ekkor csak véges sok olyan páronként nem ekvivalens elsőrendű formula van, melyeknek rangja legfeljebb k, és szabad változóik az $x_0, \ldots, x_{n-1}$*

Legyen $L_k \subseteq \{\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) : QR(\varphi) \leq k\}$ olyan véges formulahalmaz, hogy minden legfeljebb k kvantorrangú $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$-hez van vele ekvivalens $\varphi' \in L_k$.

Most térjünk rá az a) $\Rightarrow$ b) irány bizonyítására. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{A}, \underline{a}) \equiv_{k+1} (\mathcal{B}, \underline{b})$. Legyen $c \in A$ és $\varphi \in L_k$. Legyen továbbá

$$\Phi := \bigwedge \{\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n) \in L_k : \mathcal{A} \vDash \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, c]\}.$$

Ekkor egyrészt Φ valóban elsőrendű formula, és kvantorrangja k, hiszen véges sok legfeljebb k kvantorrangú formula konjunkciója, köztük pontosan k kvantorrangú formulákkal. Másrészt Φ definíciója alapján tudjuk, hogy

$$(\mathcal{A}, \underline{a}) \models (\exists x)\Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, x).$$

Ez nyilván egy $k+1$ kvantorrangú formula, így felhasználva a)-t:

$$(\mathcal{B}, \underline{b}) \models (\exists x)\Phi(b_0, \ldots, b_{n-1}, x).$$

Ekkor

$$\mathcal{B} \models (\exists x)\Phi(v_0, \ldots, v_{n-1}, x)[b_0, \ldots, b_{n-1}].$$

Legyen $d \in B$ olyan, ami mutatja ennek a formulának az igazságát, azaz $\mathcal{B} \models \Phi[b_0, \ldots, b_{n-1}, d]$. Ekkor pedig ha

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, c],$$

akkor ez a φ formula szerepel Φ-ben, így $\mathcal{B} \models \varphi[b_0, \ldots, b_{n-1}, d]$. Ha

$$\mathcal{A} \not\models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, c],$$

akkor $\mathcal{A} \models \neg\varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, c]$, így $\neg\varphi$ szerepel Φ-ben, tehát

$$\mathcal{B} \models \neg\varphi[b_0, \ldots, b_{n-1}, d],$$

azaz $\mathcal{B} \not\models \varphi(b_0, \ldots, b_{n-1}, d)$. Tehát minden $c \in A$-hoz van $d \in B$, hogy $(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \equiv_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d)$. Analóg módon belátható, hogy minden $d \in B$-hez van $c \in A$, hogy $(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \equiv_k (\mathcal{B}, \underline{b}, d)$.

A $b) \Rightarrow a)$ irányhoz legyen $\varphi \in L_{k+1}$. Tegyük fel például, hogy $\varphi = \exists x\psi$, ahol $\psi \in L_k$, és $(\mathcal{A}, \underline{a}) \models \exists x\psi(a_0, \ldots, a_{n-1}, x)$. Legyen $c \in A$ olyan, hogy

$$(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \models \psi(a_0, \ldots, a_{n-1}, c).$$

Ekkor b) szerint létezik $d \in B$, hogy $(\mathcal{A}, \underline{a}, c) \equiv (\mathcal{B}, \underline{b}, d)$, azaz

$$(\mathcal{B}, \underline{b}, d) \models \psi(b_0, \ldots, b_{n-1}, d),$$

így $(\mathcal{B}, \underline{b}) \models \exists x\psi(b_0, \ldots, b_{n-1}, x)$.

A $\varphi = \forall x\psi$ alakú formulák hasonlóan kezelhetők. $\square$

4.2. Diszkrét lineáris rendezések

Most elérkeztünk oda, hogy megmutassuk, hogy különbség van aközött, hogy **II** nyeri az $EF_\omega(\mathcal{A},\mathcal{B})$ játékot, és aközött, hogy minden $n<\omega$-ra **II** nyeri az $EF_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ játékot.

Vezessük be a $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<)$ jelölést arra a struktúrára, amelyet úgy kapunk, hogy $(\mathbb{Z},<)$ két másolatát egymás után rakjuk úgy, hogy az első másolat tetszőleges eleme kisebb, mint a másodiké, továbbá $<$ egy-egy másolaton belül a szokásos rendezést jelöli. A továbbiakban jelöljük az egyszerűség kedvéért az első másolat alaphalmazát $\mathbb{Z}_1$-gyel, a másodikét pedig $\mathbb{Z}_2$-vel, továbbá jelöljük a $(\mathbb{Z},<)$ struktúra alaphalamzát $\mathbb{Z}_0$-lal.

4.10. Lemma. *Az $EF_\omega((\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<),(\mathbb{Z},<))$ játékot **I** nyeri.*

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy egy

$$f:\mathbb{Z}_1\cup\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_0$$

parciális függvény pontosan akkor parciális izomorfizmus $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<)$ és $(\mathbb{Z},<)$ között, ha minden $a,b\in\mathbb{Z}_1\cup\mathbb{Z}_2$ esetén

$$a<b\Leftrightarrow f(a)<f(b).$$

A szokásos módon legyenek az **I** által választott elemek $\langle x_i : i<\omega\rangle$, **II** válaszai pedig $\langle y_i : i<\omega\rangle$.

Mutatunk **I**-nek egy nyerő stratégiát: Legyen **I** első lépése tetszőleges $x_0\in\mathbb{Z}_1$ szám. Erre **II** válaszol egy $y_0\in\mathbb{Z}_0$ számmal. Majd legyen **I** második lépése tetszőleges $x_1\in\mathbb{Z}_2$ szám, melyre **II** válaszol egy $y_1\in\mathbb{Z}_0$ számmal. Ha $y_1\le y_0$, akkor már el is vesztette a játékot **II**, hiszen az $f=\{(a_i,b_i):i<2\}$ függvény nem parciális izomorfizmus, így a kiterjesztései sem azok. Tegyük fel tehát, hogy $y_1>y_0$. Vegyük észre, hogy a $(\mathbb{Z},<)$ struktúrában y_0 és y_1 között véges sok elem van, de a $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<)$ struktúrában az x_0 és x_1 pontok között végtelen sok van. Tegyük fel, hogy $y_1-y_0=n$. Válassza **I** a következő n lépésben a $\mathbb{Z}_1$ halmazból az $x_0+1,x_0+2,\dots,x_0+n$ számokat. Vegyük észre, hogy **II** nem tud n különböző számot választani y_0 és y_1 között, így akárhogyan választ n számot a $(\mathbb{Z},<)$ struktúrában, a játékmenetet már $n+2$ kör után elveszti. Természetesen ez az n szám tetszőlegesen nagy lehet, de minden egyes játékmenetben véges, így **I** megnyer minden játékmenetet, sőt általános stratégiát is adhatunk neki: Az első két körben válasszon tetszőleges $x_0 \in \mathbb{Z}_1, x_1 \in \mathbb{Z}_2$ elemeket, majd az $i+3$-adik lépése legyen az x_0+i+1 szám a $\mathbb{Z}_1$ struktúrában, minden $i<\omega$ esetén. Ekkor **II** akármekkora távolságra is választja az első két számot a $\mathbb{Z}_0$ halmazból, véges sok lépés után nem lesz több választása az y_0 és y_1 közötti számokból, amit még nem választott, így elveszti a játékot. □

Ugyan az ω hosszú játékot nem tudja megnyerni **II**, azonban tetszőleges előre rögzített $n<\omega$ hosszú játékot megnyeri ugyanezen struktúrák között.

4.11. Lemma. *Az $EF_n((\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<),(\mathbb{Z},<))$ játékot **II** nyeri tetszőleges $n<\omega$ esetén.*

Bizonyítás. Először is, **II** akkor veszített a játék végén, ha van olyan c_i és c_j elem az egyik struktúrában, hogy $c_i<c_j$, de a képeikre $d_i \not< d_j$ a másik struktúrában. Feltéve, hogy még az utolsó kör előtt nem vesztett **II**, ez akkor teljesülhet, ha az utolsó kör előtt az egyik struktúrában van c_i és c_k, melyek távolsága legalább 2, de d_i és d_k képeik szomszédosak a másik struktúrában. Ekkor ugyanis **I** választ egy c_j elemet c_i és c_k között, de **II** nem fogja tudni ugyanezt megvalósítani a másik struktúrában. Könnyen meggondolható, hogy ez a **II**-es számára jó állás az utolsó körre akkor alakulhat ki, ha az utolsó előtti kör előtt két pont távolsága az egyik struktúrában legalább 4, akkor képeik távolsága a másik struktúrában szintén legalább 4, illetve ha két pont távolsága legfeljebb 3 egy struktúrában, akkor képeik távolsága legyen ugyanakkora a másik struktúrában. Most, hogy van elképzelésünk az utolsó körökre, rátérhetünk a lemma bizonyítására általánosabban:

Definiáljuk két $(\mathbb{Z},<)$-beli, illetve két $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<)$-beli pont távolságát a következőképpen: Legyen $d(a,b)=|a-b|$, ha $a,b\in\mathbb{Z}_k$ valamely $k\in\{0,1,2\}$ esetén. Legyen $d(a,b)=\infty$, ha $a\in\mathbb{Z}_1, b\in\mathbb{Z}_2$, vagy fordítva.

Azt látjuk be, hogy **II**-nek van olyan

$$\tau : {}^{<n}(\mathbb{Z}_0 \cup \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2) \to (\mathbb{Z}_0 \cup \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2)$$

stratégiája, ami a következő feltételt teljesíti: Ha $m \leq n$ és

$$p = \langle x_0, y_0, \dots, x_{m-1}, y_{m-1} \rangle$$

egy olyan pozíció, amelyben **II** a τ stratégiát használta,

$$a_i^p = \begin{cases} x_i, \text{ ha } x_i \in \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \\ y_i, \text{ ha } x_i \in \mathbb{Z}_0; \end{cases}$$

$$b_i^p = \begin{cases} y_i, \text{ ha } x_i \in \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \\ x_i, \text{ ha } x_i \in \mathbb{Z}_0; \end{cases}$$

akkor a következő 3 tulajdonság teljesül minden $j, k < m$-re:

0. $a_j^p < a_k^p \Leftrightarrow b_j^k < b_k^p$;

1. $(d(a_j^p, a_k^p) \geq 2^{n-m}) \Leftrightarrow (d(b_j^p, b_k^p) \geq 2^{n-m})$;

2. $(d(a_j^p, a_k^p) < 2^{n-m}) \Rightarrow (d(b_j^p, b_k^p) = d(a_j^p, a_k^p))$.

Vegyük észre, hogy minden ilyen τ stratégia nyerő stratégiája **II**-nek, hiszen $n = m$-re a 0. tulajdonság szerint $f := \{(a_i^p, b_i^p) : i < n\}$ parciális izomorfizmus. Továbbá vegyük észre, hogy nem egyértelmű, hogy **II** fenn tudja tartani a 0. tulajdonságot a játék végéig anélkül, hogy az 1. és 2. tulajdonságokra is figyelne.

Most megadunk **II**-nek egy olyan τ stratégiáját, ami a 0., 1. és 2. tulajdonságokat teljesíti. Az első fordulóban tetszőleges olyan y_0-t játszik, hogy

$$y_0 \in \mathbb{Z}_0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2.$$

Tegyük fel, hogy a legfeljebb $m = l$ hosszú sorozatokra már definiáltuk a τ stratégiát, és tegyük fel, hogy

$$p = \langle x_0, y_0, \dots, x_{l-1}, y_{l-1} \rangle$$

olyan pozíció, ahol **II** a τ szerint játszott. Tegyük fel, hogy **I** az $l+1$-ik fordulóban az x_l-et játssza, és definiáljuk

$$y_l := \tau(\langle x_0, \ldots, x_l, x_{l-1} \rangle)\text{-et}$$

a következőképpen. Először is tegyük fel, hogy $x_l \in \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2$, és léteznek olyan $i, j < l$ indexek, melyekre $a_i^p \leq x_l \leq a_j^p$, és $a_i^p \leq a_j^p$. Ha

$$d(a_i^p, a_j^p) < 2^{n-l},$$

akkor $x_l = a_i^p + q$ esetén legyen **II** válasza az $y_l = b_i^p + q$ pont. Ha

$$d(a_i^p, a_j^p \geq 2^{n-l}),$$

akkor is vagy $d(a_i^p, x_l)$, vagy $d(a_j^p, x_l)$ véges. Például ha $a_j^p = x_l + q$ valamely $q < \omega$-ra, akkor jó az $y_l = b_j^p - q$ választás. Könnyen végiggondolható, hogy ezekkel a választásokkal $m = l+1$-re is teljesülni fognak a 0., 1. és 2. tulajdonságok. Ha

$$x_l < a_i^p \text{ minden } i < l\text{-re},$$

akkor legyen $a_k^p = \arg\min\{a_i^p : i < l\}$. Ha $a_k^p - x_l = z < \omega$, akkor **II** válasza legyen $y_l = b_k^p - z$, ha pedig $d(x_l, a_k^p) = \infty$, akkor **II** válasza legyen $y_l = b_k^p - 2^{n-l-1}$. Analóg módon meggondolható a $x_l \geq a_i^p$ minden $i < l$-re eset. Könnyen meggondolható az $x_l \in \mathbb{Z}_0$ eset is, azzal a könnyítéssel, hogy ekkor tetszőleges $k < l$ indexre $d(x_l, b_k^p) < \infty$. □

A 4.10 és 4.11 lemmák együtt egy erősebb tételt adnak ki.

4.12. Tétel. *Léteznek olyan L-nyelvű $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ struktúrák, hogy $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, de $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$.*

Bizonyítás. A 4.11 lemma szerint tetszőleges $n < \omega$ esetén **II** nyeri az $EF_n((\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Z}, <))$ játékot, ami a 4.7 tétel szerint ekvivalens azzal, hogy $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, <) \equiv_n (\mathbb{Z}, <)$, minden $n < \omega$ esetén, azaz $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, <) \equiv (\mathbb{Z}, <)$. A 4.10 lemma szerint **II** elveszti az $EF_\omega((\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Z}, <))$ játékot, ami a 3.1

alfejezet alapján ekvivalens azzal, hogy $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<) \not\equiv (\mathbb{Z},<)$. $\square$

A továbbiakban általánosítjuk a 4.11 lemmát. Ehhez nézzük a következő fogalmat:

4.13. Definíció. ***Diszkrét lineáris rendezésnek*** *nevezzük azokat a lineáris rendezéseket, melyekre igaz, hogy minden elemre, aminél van kisebb elem, van a kisebb elemek közt legnagyobb, és minden elemre, aminél van nagyobb elem, van a nagyobb elemek közt legkisebb.*

Vegyük észre, hogy ha $\mathcal{A}$ egy végpont nélküli diszkrét lineáris rendezés, akkor $\mathcal{A} = \sum\limits_{i\in I} \mathbb{Z}_i$ valamely $\langle I, <_I\rangle$ rendezett halmazra, és $\mathbb{Z}_i = (\mathbb{Z},<)$-re, ahol a $\sum\limits_{i\in I} \mathbb{Z}_i$ jelöli, hogy $\mathbb{Z}_i$-ket az I rendezése szerint egymás után írjuk. Definiáljunk ugyanis egy $\sim$ ekvivalencia-relációt $\mathcal{A}$-n úgy, hogy $a \sim b$ pontosan akkor, ha véges sok pont van közöttük a rendezés szerint. Legyen I a $\sim$ egy reprezentánsrendszere, és legyen $<_I$ az $\mathcal{A}$ rendezésének I-re való megszorítása. Könnyű meggondolni, hogy $\mathcal{A} = \sum\limits_{i\in I} \mathbb{Z}_i$, ahol $\mathbb{Z}_i$ az i ekvivalenciaosztálya az $\mathcal{A}$-ból öröklött rendezéssel, és hogy $\mathbb{Z}_i \cong (\mathbb{Z},<)$.

Most nézzük a 4.11 lemmát általánosabb esetre:

4.14. Lemma. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ végpont nélküli diszkrét lineáris rendezések. Ekkor az $EF_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ játékot **II** nyeri tetszőleges $n < \omega$ esetén, azaz $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.*

Bizonyítás. A 4.11 lemmához hasonlóan belátható, hogy **II** nyeri az $EF_n(\mathcal{A},(\mathbb{Z},<))$ és $EF_n(\mathcal{B},(\mathbb{Z},<))$ játékokat tetszőleges $n < \omega$ esetén, így $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ és **II** nyeri az $EF_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ játékot tetszőleges $n < \omega$-ra. $\square$

Jelöljük T_{diszk}-kel a végpont nélküli diszkrét lineáris rendezések elméletét, azaz

$$T_{diszk} := T_{lin} \cup \{\forall x \exists y[(y<x) \land \forall z(\neg[(y<z)\land(z<x)])],$$
$$\forall x \exists y[(x<y) \land \forall z(\neg[(x<z)\land(z<y)])]\}$$

Ekkor az előbbiek alapján minden $\mathcal{A},\mathcal{B} \vDash T_{diszk}$ esetén $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, azaz minden zárt, elsőrendű φ formula esetén $T_{diszk} \vDash \varphi$, vagy $T_{diszk} \vDash \neg\varphi$, tehát T_{diszk} egy teljes elmélet. Ahogy korábban láttuk, léteznek viszont olyan $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T_{diszk}$ megszámlálható struktúrák, amelyek nem izomorfak.

Fogalmazzuk meg a 4.11 lemmát a gráfok nyelvén is.

4.15. Megjegyzés. *Tekintsünk a $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<)$-nek és $(\mathbb{Z},<)$-nek megfelelő $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gráfokat: Legyen $\mathcal{B}$ egy végtelen hosszú lánc, $\mathcal{A}$ pedig két végtelen hosszú lánc uniója. Ekkor a 4.11 lemmához hasonlóan látható, hogy **II** nyeri az $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ játékot tetszőleges $n < \omega$ esetén, így $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Ebből következik, hogy nem definiálható elsőrendű formulával a gráfok $\{E\}$ nyelvén, hogy egy gráf összefüggő.*

Hivatkozások

[Hod93] Wilfrid Hodges, *Model theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Kec95] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 165, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Kho10] Yurii Khomskii, *Infinite games*, Lecture notes for a Summer Course at the University of Sofia, Bulgaria, 2010.

[MSV93] Alan Mekler, Saharon Shelah, and Jouko Väänänen, *The Ehrenfeucht-Fraïssé game of length* ω_1, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 567–580.

[Ság05] Gábor Sági, *Válogatott fejezetek a modellelméletből és határterületeiből*, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, 2005.

[Vää11] Jouko Väänänen, *Models and games*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 132, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.