

NYILATKOZAT

Név: Hoffmann Balázs

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: DUM5E7

Szakedolgozat címe:

Poliéderek Rupert tulajdonsága

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.30.



a hallgató aláírása



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKAI INTÉZET

Poliéderek Rupert tulajdonsága

Témavezető:

dr. Moussong Gábor
egyetemi adjunktus

Szerző:

Hoffmann Balázs
matematikus BSc

Budapest, 2022

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet témavezetőmnek, Moussong Gábor Tanár Úrnak, akinek számos észrevétele, segítőkészsége nélkül jelen dolgozat nem jöhetett volna létre.

Továbbá szeretném kifejezni hálámat az egész családomnak, akik tanulmányaim során mindenben támogattak.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Definíciók	5
3. A kocka	7
4. Szabályos testek	9
4.1. Tetraéder	9
4.2. Oktaéder	10
4.3. Dodekaéder	12
4.4. Ikozaéder	15
5. Arkhimédészi testek	20
5.1. Csonkolt tetraéder	20
6. Téglalapok	24
6.1. Téglalap-elhelyezési tétel	26
6.2. Maximális téglalapok	31
6.3. Összegzés és a kérdések megválaszolása	33
7. Az n-dimenziós kocka	36
7.1. Az $n = 3$ eset	38
7.2. Az általános, $n \geq 3$ eset	40
8. Az általánosított Nieuwland konstans	43
Irodalomjegyzék	46
Ábrajegyzék	48

1. fejezet

Bevezetés

Több mint 300 évvel ezelőtt Pfalzi Rupert herceg, I. Károly angol király unokaöccse egy fogadás keretén belül – John Wallis matematikus segítségével – belátta, hogy tudunk elég nagy alagutat vágni két egybevágó kocka közül az egyikben úgy, hogy a másik kocka átférjen ezen az alagúton [1]. Ennek a klasszikus eredménynek a részletes bizonyítását a 3. fejezetben tárgyaljuk majd.

Innen kapta elnevezését a témakör, illetve annak legfontosabb definíciója, a Rupert tulajdonság. Hétköznapi nyelven szólva egy test rendelkezik a Rupert tulajdonsággal (vagy röviden a test Rupert), ha vágható rajta olyan alagút, melyen az eredetivel egybevágó test áttolható. A fogalmaknak a formális definícióját Jerrard [2] cikke alapján a 2. fejezetben adjuk meg.

Körülbelül száz évvel később Pieter Nieuwland bebizonyította, hogy Rupert állításánál több is igaz: a kockán a fent említett módon az eredetinel nagyobb kocka is átfér, mégpedig legalább az eredeti $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ -szeres nagyítása. Ezzel a megfigyeléssel a témakör tovább bővült: ha egy test Rupert tulajdonságú, azaz a vele egybevágó testhez létezik benne alagút, akkor megkérdezhetjük, hogy mekkora nagyításához létezik még alagút a testben. A legnagyobb nagyítás mértékét Nieuwland konstansnak nevezzük. 1950-ben Schrek részletes áttekintést publikált Rupert problémájáról és Nieuwland bizonyításáról [3].

A témakör alapkérdése tehát az, hogy mely testek rendelkeznek a Rupert tulajdonsággal. A fentiek miatt biztosan van ilyen test, a kocka, de az is nyilvánvaló, hogy biztosan van olyan test, ami nem Rupert tulajdonságú: a gömb. A dolgozatban a témakör több eredményét, és több irányú általánosítását taglaljuk, részben saját eredményekre alapozva.

Az említett alapkérdés vizsgálatát először a szabályos, illetve félszabályos poliéderek körében kezdték meg a matematikusok. Az eredeti fogadáshoz képest körülbelül 250 évet kellett várni ahhoz, hogy 1968-ban C. J. Scriba bebizonyítsa, hogy két további platóni test, a tetraéder és az oktaéder is rendelkezik ezen tulajdonsággal [4]. Végül 2017-ben lett teljes a platóni testek Rupert tulajdonságának bizonyítása, amikor Richard P. Jerrard, John E. Wetzel és Liping Yuan a dodekaéderre és ikozaéderre vonatkozó bizonyítást publikálták [2]. Ezen eredményeket a 3. fejezetben taglaljuk majd.

A problémát természetesen nem csak szabályos testekre érdemes vizsgálni. 2008-ban Jerrard és Wetzel belátták az úgynevezett universal stopper (magyarul általános dugó) testek ezen tulajdonságát [5], majd 2018-ban Ying Chai, Liping Yuan és Tudor Zamfirescu bizonyították, hogy az arkhimédészi testek közül nyolc szintén Rupert tulajdonságú [6]. 2019-ben saját eredményként publikáltam egy további arkhimédészi test, a csonkolt tetraéder Rupert tulajdonságát [7]. 2021-ben algoritmikus úton sikerült további félszabályos testek Rupert tulajdonságát bebizonyítani [8]. Az arkhimédészi testekkel részletesen a 5. fejezetben foglalkozunk.

Természetes kérdés, hogy mi történik a kockával magasabb dimenziókban. Ezt válaszolta meg 2018-ban Huber, Shultz és Wetzel, akik bebizonyították, hogy az n -dimenziós kocka is rendelkezik a Rupert tulajdonsággal [9]. Ezen eredményt a 7. fejezetben ismertetjük. 2021-ben Bezdek András, Zhenyue Guan, Hujter Mihály és Joós Antal azt vizsgálták, hogy az eredeti fogadás esetében mennyire kellett szerencsés irányból vágni az alagutat. Az elsőre meglepő válasz az, hogy semennyire, ugyanis bizonyos triviális irányokat leszámítva egy kockán tetszőleges irányban vághatunk megfelelő alagutat [10]. Emellett a Rupert tulajdonság téglalapokkal és téglatestekkel való viszonyáról publikált eredményeket 2004-ben Jerrard és Wetzel [11], amit a 6. fejezetben mutatunk be.

A problémakör legerősebb sejtése Wetzeltől származik, miszerint minden konvex poliéder rendelkezik a Rupert tulajdonsággal. Ez éppen megdőlni látszik, mivel egy 2021-es tanulmány statisztikai alapon azt a sejtést fogalmazta meg, hogy egy arkhimédészi test, a rombikozidodekaéder nem Rupert tulajdonságú [8].

Végül szintén saját eredményként a Nieuwland konstansnak, tehát az eredeti test áttolható maximális nagyítási értékének az általánosítását vezettem be és vizsgáltam meg nem konvex testekre [7]. Ha ugyanis egy poliéder nem Rupert tulajdonságú, akkor ugyan nem lehet saját magával egybevágó poliédert áttolni rajta, de az elképzel-

hető, hogy egy megfelelő méretű kicsinyítéséhez lehet alagutat találni benne. Ennek a mértékét a nem-Rupert tulajdonságú testek általánosított Nieuwland konstansának neveztem el. Másrészt azt vizsgáltam, hogy ha a konstanst adjuk meg először, akkor van-e olyan test, aminek a Nieuwland konstansa legalább ekkora, azaz legalább ekkora nagyítása/kicsinyítése átfér önmagán. Bebizonyítottam, hogy tetszőleges, $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan n -dimenziós konvex politóp, amelynek Nieuwland konstansa nagyobb, mint k , illetve beláttam, hogy bármely $0 < k$ esetén létezik olyan poliéder, amelynek általánosított Nieuwland konstansa kisebb, mint k . Ezeket az eredményeket a 8. fejezetben tárgyaljuk.

2. fejezet

Definíciók

Az alábbiakban a témakör további precíz tárgyalásához szükséges definíciókat taglaljuk [2] alapján.

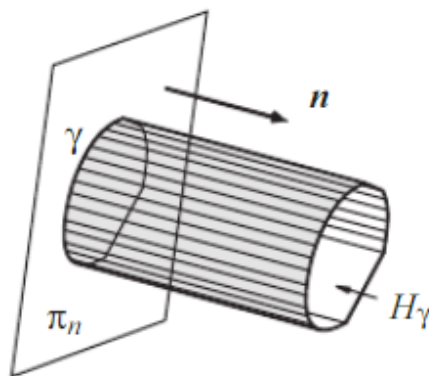
Legyen n egységvektor \mathbb{R}^3 -ban, és legyen π_n olyan sík, melynek normálvektora n . Jelölje továbbá $\omega_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \pi_n$ az \mathbb{R}^3 merőleges vetítését π_n -re.

1. Definíció. Legyen γ egy egyszerű zárt görbe a π_n síkban. Az n irányú γ profil-görbájű egyenes hengert mint ponthalmazt a következőképpen írhatjuk le:

$$C_\gamma = \{y + tn \in \mathbb{R}^3 : y \in \gamma, -\infty < t < \infty\}.$$

2. Definíció. Jelöljük most a γ belsejét I_γ -val. A C_γ egyenes henger által meghatározott H_γ alagút (2.1. ábra) a henger belső pontjainak halmaza:

$$H_\gamma = \{y + tn \in \mathbb{R}^3 : y \in I_\gamma, -\infty < t < \infty\}.$$



2.1. ábra. A H_γ alagút. Az ábra forrása [2].

Most szeretnénk a megfelelő alagúton való áthaladást leírni.

Legyen K egy konvex test, amelynek két merőleges vetülete n irányban $\omega_n(K)$ és m irányban $\omega_m(K)$. Tegyük fel, hogy létezik ϕ egybevágósági transzformáció, amely az $\omega_m(K)$ vetületet a $\omega_n(K)$ belsejébe viszi. Ekkor a K ϕ szerinti képe legyen $\phi(K)$, valamint m egységvektor ϕ szerinti képe legyen $\phi(m)$. Legyenek az $\omega_n(K)$ vetület határa γ egyszerű, zárt, konvex görbe. Ekkor tekintsük a γ által meghatározott n irányú H_γ alagutat. Ezen $\phi(K)$ áttolható lesz $\phi(m)$ irányban úgy, hogy végig H_γ belsejében halad. A $\phi(K)$ test $\phi(m)$ iránnyal megegyező $n =$ irányú áthaladása (vagy áttolása) a C_γ által meghatározott H_γ alagúton az alábbi módon írható le az idő függvényében:

$$\phi(K)_t = tn + \phi(K) \subset H_\gamma, -\infty < t < \infty,$$

ahol t az idő és $\phi(K)_t$ a transzformált test egy t időpillanatban.

Az igazi feladat tehát a két megfelelő vetület megtalálása, mivel azok birtokában a fenti művelet végrehajtása triviális. Így a továbbiakban csak a két vetület megadását taglaljuk.

Most már kimondhatjuk a következő, alapvető állítást.

1. Tétel. *Legyen K konvex test \mathbb{R}^3 -ban. Ha létezik egy egybevágósági transzformáció, amivel a K test $P_b = \omega_n(K)$ merőleges vetülete $P_k = \omega_m(K)$ merőleges vetületének belsejébe transzformálható, akkor a K test áttolható az m irányú H_γ alagúton keresztül, melynek profilgörbéje a P_k vetület határa.*

Bizonyítás. A fenti érvelés alapján triviális. □

A továbbiakban a fenti állításban szereplő P_b vetületet belső vetületnek, P_k vetületet külső vetületnek nevezzük.

3. Definíció. Ha a fenti tételnek a feltételei teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy a K konvex test rendelkezik a Rupert tulajdonsággal, vagy egyszerűen K Rupert.

Felmerülhet a kérdés, hogy a K testen lehet-e nagyítani úgy, hogy a nagyított test még mindig áttolható K -n. Jelölje K_ν a K test ν -szörösére való nagyítását ($\nu \in \mathbb{R}, 1 \leq \nu$).

4. Definíció. Egy K test $\nu(K)$ Nieuwland konstansa alatt a $\nu(K) = \sup\{\nu \geq 1 : \text{létezik alagút } K\text{-ban, amin } K_\nu \text{ átfér}\}$ valós számot értjük. Mivel a szuprémum véges, így $\nu(K)$ valóban valós lesz.

3. fejezet

A kocka

A kockára vonatkozó tétel a teljes problémakör eredete, így a többi szabályos test előtt egy külön fejezetben taglaljuk a kocka Rupert tulajdonságának bizonyítását. Ezen fejezet eredményét [1], [3] és a Wikipédia Prince Rupert's cube oldala alapján ismertetjük.

2. Tétel. *A kocka Rupert tulajdonságú.*

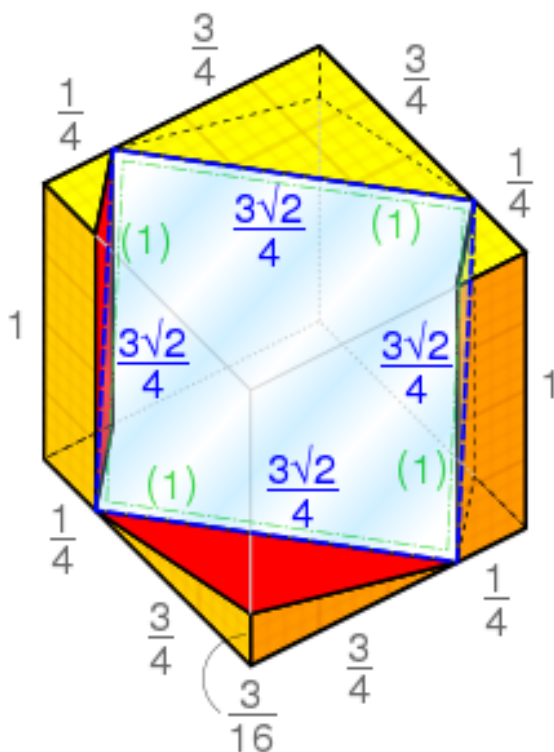
Bizonyítás. Helyezzünk el két pontot egy egységkocka két szomszédos élére úgy, hogy mindkét pont $3/4$ távolságra legyen a két él közös csúcsától, így a két pont közötti távolság $\frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,0606601$ lesz. A választott távolságnak később a Nieuwland konstans megadásánál is lesz szerepe.

Elemi geometriai megfontolásokkal könnyen látható, hogy ha ezt a két pontot a kocka középpontjára tükrözzük, akkor az eredeti két pont a kocka ellentétes oldalán, szimmetrikusan elhelyezkedő másik két ponttal együtt egy négyzet négy csúcsát alkotja, amely (csúcsaitól eltekintve) teljes egészében az egységkockán belül van (3.1. ábra). Mivel a négyzet oldala 1-nél nagyobb, így ha erre a négyzetre mint profilgörbére alagutat állítunk, akkor ezen az alagúton keresztül a kocka áttolható. □

A bizonyításból következik, hogy a talált alagúton az eredetnél nagyobb kocka (legfeljebb $\frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,0606601$ oldalhosszúsággal) is áthaladhat, azaz a kocka Nieuwland konstansa legalább $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. A konstans értékét azóta sem sikerült javítani, a Steininger és Yurkevic által 2021-ben publikált számítógépes megközelítés sem talált ennél nagyobb alagutat [8].

Az egységkocka az alagút "kiürítése" után négy testre bomlik, két háromszög alapú hasábra és két tetraéderre, amelyek a négyzet négy csúcsán egy-egy pontban

érintkeznek. Mindkét hasáb hat csúcsából kettő a kocka két szomszédos csúcsa, és a másik négy csúcsa a kocka élei mentén $1/4$ távolságra van az előbb említett kockacsúcsoktól. Mindegyik tetraéder négy csúcsa közül az egyik a kocka egy csúcsa, két további csúcsa $3/4$ távolságra van tőle két szomszédos élen, és egy csúcs a kocka csúcsától $3/16$ távolságra a harmadik szomszédos élen van, az alábbi ábrán látható módon.



3.1. ábra. A kockába vágott alagút (az ábra forrása: Wikipédia Prince Rupert's cube).

4. fejezet

Szabályos testek

A kocka után triviálisan felmerülő kérdés, hogy a többi platóni test is Rupert tulajdonságú-e. Ebben a fejezetben az ezen kérdéssel kapcsolatos eredményeket tárgyaljuk [2] alapján - a tulajdonság minden platóni test esetén teljesül.

4.1. Tetraéder

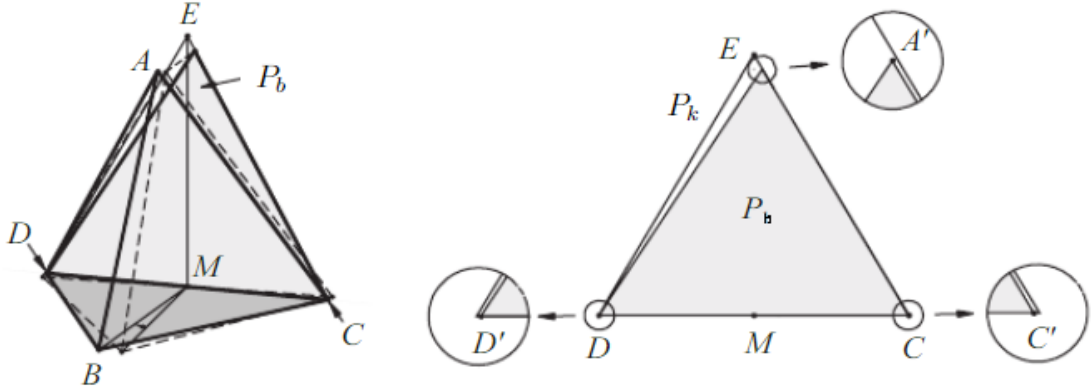
3. Tétel. *A szabályos tetraéder Rupert tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen $T = ABCD$ egy szabályos, egységnyi oldalú tetraéder, amelynek a BCD egyenlő oldalú háromszög az alapja és A az ezekkel nem egy síkban lévő negyedik csúcsa.

A P_k külső vetület legyen az egyik lap síkjára eső merőleges vetület, azaz egy egységnyi oldalú szabályos háromszög. Ezt a háromszöget úgy helyezzük el, hogy a CDE háromszöget kapjuk, amely a 4.1 ábrán látható módon a tetraéder T alapjának síkjára merőleges, a CD egyenesre illeszkedő π síkon van.

Vizsgáljuk a T tetraédernek erre a π -re való ortogonális vetületét, ami majdnem beleillik P_k belsejébe, a nehézséget csak a C és a D csúcsok jelentik, hiszen a CD oldal közös a két vetületen.

De a T egy elegendően kis elforgatása a CDE háromszög EM magassága körül bemozgatja a C és D csúcsok C' és D' vetületeit a π síkon a CDE háromszög CD élén belülré úgy, hogy közben az A pont A' vetülete P_k -n belül marad. Ez lesz a P_b vetület. Az elforgatott T elegendően kis felfelé mozdítása elmozdítja a B' , C' és D' vetületeket a CD szakasztól, miközben mind a négy csúcs A' , B' , C' és D' vetülete P_k -n belül marad. Ebből következik, hogy T rendelkezik Rupert tulajdonsággal. \square



4.1. ábra. A tetraéder (balra) és a megfelelő vetület (jobbra). Az ábra forrása [2]

Nieuwland konstans. A $\nu(T)$ Nieuwland konstans becsléséhez úgy választjuk az EM körüli θ elfordulási szöget, hogy a vetített $A'C'$ szakasz P_k -n belül legyen párhuzamosan az EC oldallal (4.1 jobb oldali ábra). Megmutatható, hogy ekkor

$$\theta = 60^\circ - \arcsin \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 5,264389^\circ.$$

Mivel $A'E > C'C = D'D$ és $CD = 1$, valamint $C'D' = \cos \theta$, így a legkisebb felső korlátja annak az aránynak, amellyel a T nagyítható úgy, hogy még mindig áthaladhat egy hasonlóan elhelyezkedő alagúton T -ben:

$$\frac{CD}{C'D'} = \sec \theta = \frac{2}{5}\sqrt{3}(\sqrt{6} - 1) > 1,004235.$$

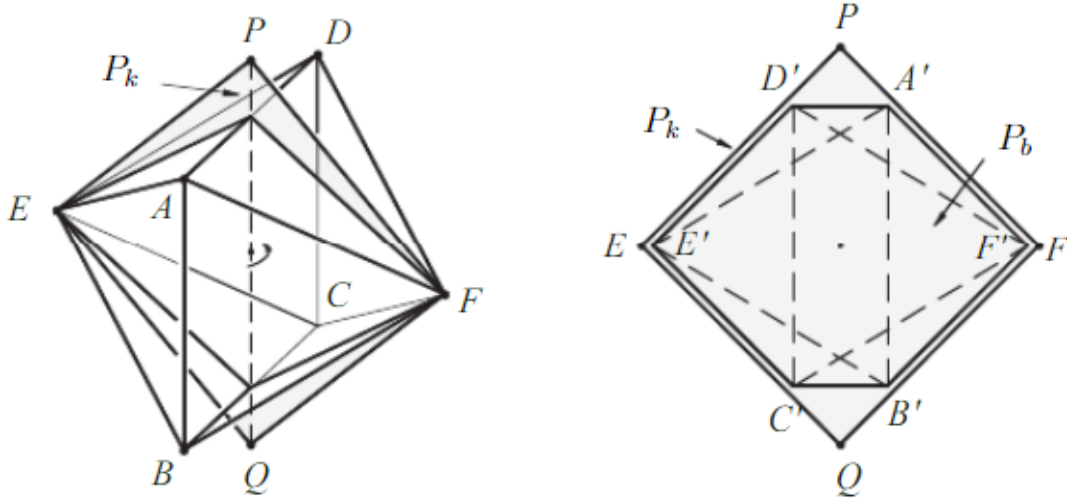
A cikk szerzői szerint valószínűsíthető, hogy $\nu(T) = \frac{2}{5}\sqrt{3}(\sqrt{6} - 1)$, de mindenesetre $\nu(T) > 1,004235$ mindenképp teljesül.

Megjegyzés. Hasonló módon belátható, hogy minden tetraéder (nem csak az imént vizsgált szabályos tetraéder) rendelkezik a Rupert-tulajdonsággal. (Legyen P_k a legnagyobb területű lap, így a negyedik csúcs P_k síkjára vett vetülete P_k -ba esik.)

4.2. Oktaéder

4. Tétel. *Az oktaéder Rupert tulajdonságú.*

Bizonyítás. Az egységoldalú $O = EABCDF$ oktaédert (a 3.1 ábra bal oldalán) nyolc egyenlő oldalú háromszöglap alkotja, amelyek két egybevágó négyoldalú gúlat alkotnak, amelyek négyzetalapon osztoznak.



4.2. ábra. A projekciók (balra) és P_b elhelyezkedése P_k -ban (jobbra). Az ábra forrása [2].

Az oktaéder EF irányú vetülete tehát egységnégyzet, legyen ez P_k . Helyezzük el úgy, hogy a $PEQF$ egységnégyzetet tekintsük, a 4.2 ábra bal oldalán látható módon, hogy az egyik átló EF legyen, a másik pedig az $ABCD$ középső négyzetlap AD és CD oldalainak felezőpontjain haladjon át. Vetítsük rá erre a síkra az oktaédert! Jól látható, hogy az oktaédernek a PQ tengely körüli elegendően kis elforgatása az E' és F' vetületeket a $PEQF$ négyzetbe mozgatja, miközben az A, B, C és D csúcsok A', B', C' és D' vetületeit a négyzetben hagyja. Tehát az elforgatott oktaéder P_b vetülete a P_k belsejében lesz (4.2 ábra jobb oldala). Ezzel igazoltuk az állítást, miszerint az oktaéder rendelkezik a Rupert tulajdonsággal. \square

Nieuwland konstans. A $\nu(O)$ Nieuwland konstans behatárolásához úgy választjuk meg a bizonyításban említett forgásszöget, hogy az EC elforgatott él $E'C'$ P_k -ra vett vetülete párhuzamos legyen a négyzet EQ élével. Látható, hogy a megfelelő θ elfordulási szöget

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 19,5^\circ$$

adja. Ekkor a BF, FA és ED elforgatott élek vetületei mind párhuzamosak az egységnégyzet oldalával, és az elforgatott P_b vetület a 4.2 ábra jobb oldala szerint

helyezkedik el. Egyszerű számolással belátható, hogy

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

és ebből következik, hogy

$$E'F' = \sqrt{2} \cos \theta = \frac{4}{3}.$$

Következésképpen

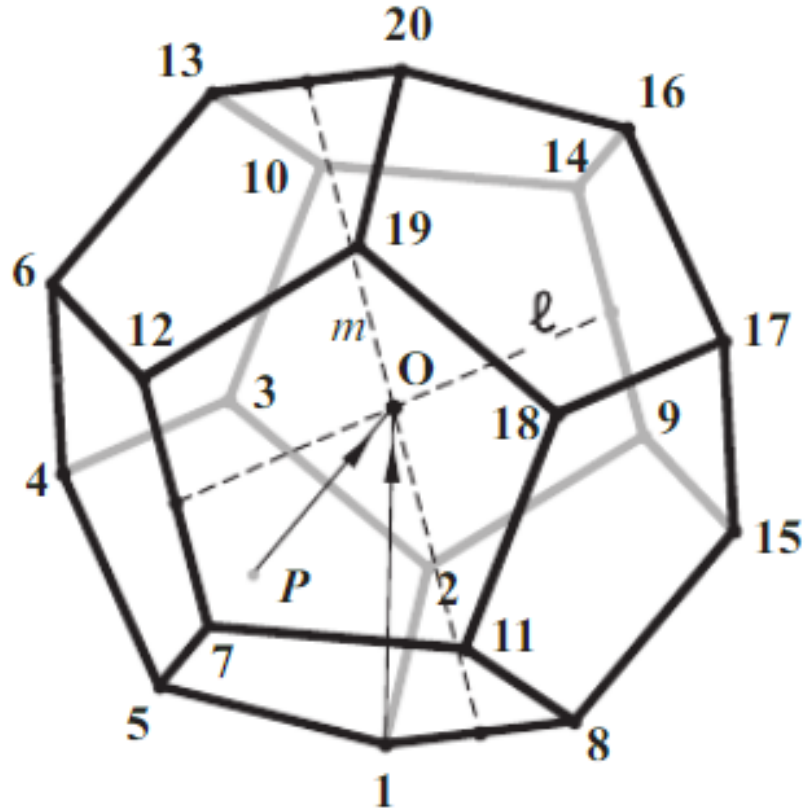
$$\nu(O) \geq \frac{EF}{E'F'} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1,060660.$$

A tetraéderhez hasonlóan azt sejtjük, hogy az egyenlőség fennáll.

4.3. Dodekaéder

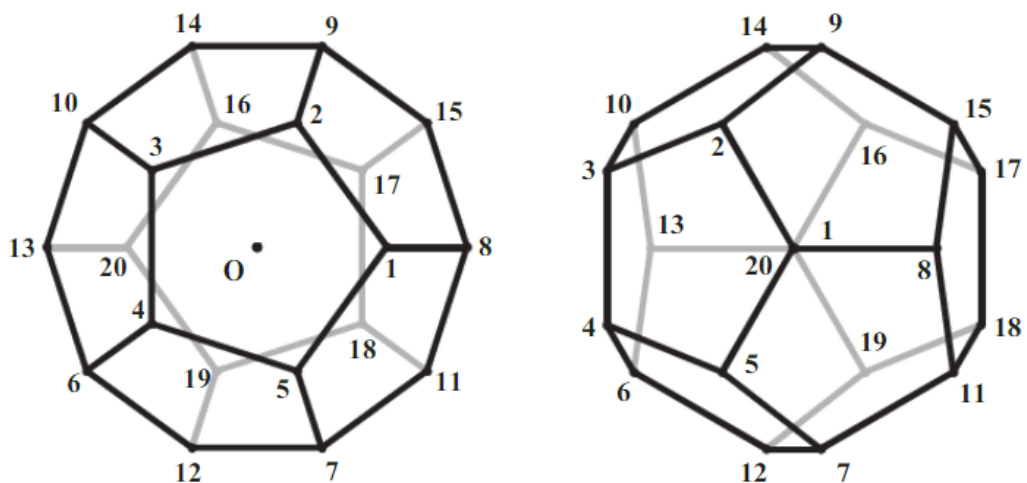
5. Tétel. *A dodekaéder Rupert tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen O a D dodekaéder szimmetriaközéppontja, és jelöljük D 20 csúcsát a 4.3 ábrán látható módon. A „felülről” látható csúcsok és élek vastagon, a nem láthatók pedig szürkével vannak jelölve. Figyeljük meg, hogy a k és $21 - k$ jelzésű csúcsok szimmetrikusak az O középpontra nézve. Legyen P az 1-2-3-4-5 lap középpontja, M pedig a 7-12 él felezőpontja.



4.3. ábra. A D dodekaéder. Az ábra forrása [2].

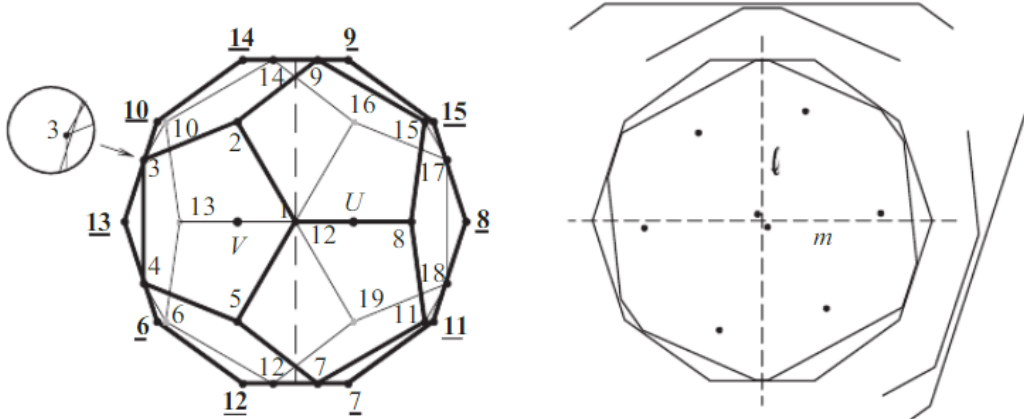
Jelölje P_k a dodekaéder vetületét egy támasztósíkra, azaz a PO irányba, a 4.4 ábra bal oldalán látható módon. A vetület határa egy szabályos tízsög. Legyen P_b a D vetülete az 1 csúcsból, azaz a $1O$ irányba, a 4.4 ábra jobb oldalán látható módon.



4.4. ábra. A P_k és P_b vetületek. Az ábra forrása [2].

A vetület határa tizenkétszög, amelynek szemközti élei párhuzamosak. Innentől

az egyszerűség kedvéért a 4.4 ábra jobb oldalán látható P_b vetületen a dodekaéder n -nel jelölt csúcsának vetületére az eredeti n címkével hivatkozunk majd, a baloldali P_k vetületben a csúcsokra a szám aláhúzásával, \underline{n} -nel hivatkozunk. Helyezzük el P_b -t a 4.5 ábrán látható módon, szimmetriaközéppontjával a P_k közepén. Ekkor a P_b vetület majdnem illeszkedik P_k -ba. A D 14-9 éle a P_k tízszög határának $\underline{14} - \underline{9}$ élébe, a szemközti 12-7 él a $\underline{12} - \underline{7}$ élbe, és a négy 3, 4, 17 és 18 csúcs pedig olyan pontokra vetül, amelyek éppen csak a P_k -n kívül fekszenek. Ekkor a dodekaéder elegendően kicsit elforgatható úgy, hogy P_b vetülete a P_k belsejébe illeszkedjen. Először a 14-9 és 12-7 élek felezőpontjait összekötő l tengely körül elegendően kis mértékben forgatjuk D -t a 3-4 és a 17-18 élek vetületeit a P_0 belsejébe mozgatva. Ez a kis forgatás a vetített 14-9 és 12-7 éleket a $\underline{14} - \underline{9}$ és $\underline{12} - \underline{7}$ éleken hagyja. A második forgatás a 8-1 és 13-20 élek felezőpontját összekötő m tengely körül történik (ez legkönnyebben az 4.4 ábrán látható), ami párhuzamos a 7-12 és 9-14 élekkel, és egyenlő távolságra van tőlük.



4.5. ábra. P_b és P_k kölcsönös helyzete. Az ábra forrása [2].

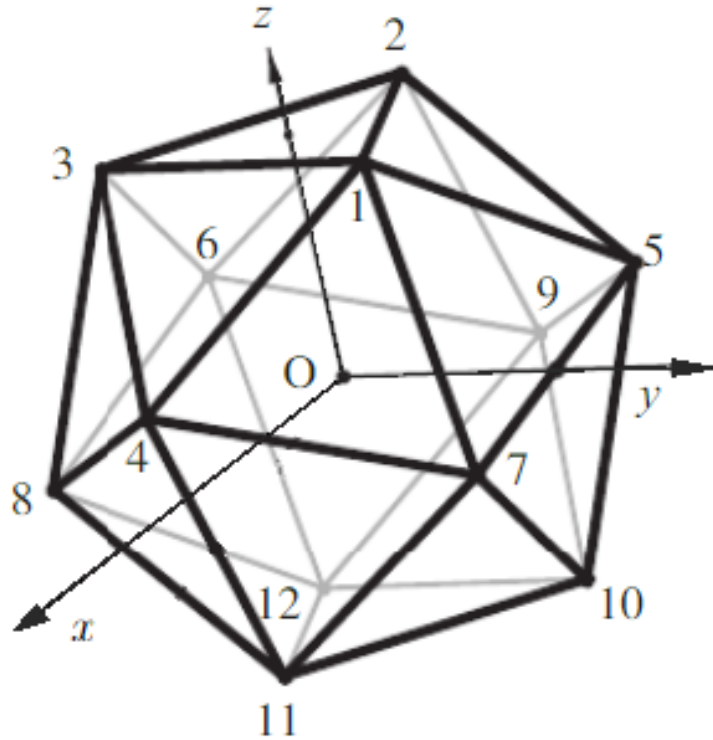
Ebből következik, hogy a D elforgatott dodekaéder második, m körüli elforgatása mindkét elforgatott 9-14 és 7-12 élt a P_b belsejébe mozgatja. Bár ez az elforgatás a 3, 4, 17 és 18 csúcsok képét a P_k vetületet határoló 12 szög határa felé mozgatja, azonban ha az elforgatás mértéke elég kicsi, akkor az elforgatott dodekaéder összes csúcsának vetületét a P_k belsejében hagyja (4.5 ábra jobb oldala, amelyben a P_b középpontosan szimmetrikus és szimmetriaközéppontja P_k szimmetriaközéppontjával). Tehát az elforgatott dodekaéder P_b vetülete a P_k belsejébe esik. Következésképpen D rendelkezik a Rupert-tulajdonsággal. \square

Nieuwland konstans. Ezt a geometriai bizonyítást Jerrard egy megfelelő koordinátázás alkalmazásával numerikus módszerekkel is megerősítette, az általa elért eredmények alapján a dodekaéder $\frac{171}{170}$ -szerese is átfér eredeti önmagán, így a Nieuwland konstansa $\nu(D) \geq \frac{171}{170} = 1,005882$.

4.4. Ikozaéder

6. Tétel. *Az ikozaéder Rupert tulajdonságú.*

Bizonyítás. Az ikozaéder Rupert tulajdonságának bizonyítása elemi geometriai módszerekkel sokkal nehezebb és időigényesebb, mint a többi platóni testé, így koordináták segítségével érjük el a kívánt eredményt. Legyen az I ikozaéder, amelynek középpontja az O origóban van, és jelöljük a 20 csúcsot a 4.6 ábrán látható módon úgy, hogy k és $13 - k$ szimmetrikusak az O -ra nézve. A „felülről” látható élek és csúcsok feketék az ábrán, amik nem látszanak, azok pedig szürkék.



4.6. ábra. Az I ikozaéder. Az ábra forrása [2].

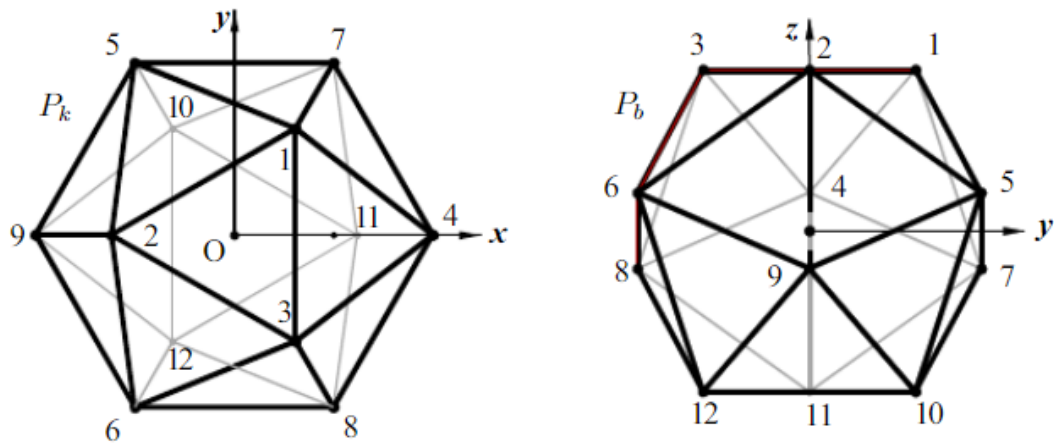
Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert a következőképpen: az origó O , a pozitív x tengely a 4-11 él 4-hez közelebbi negyedelőpontján, a pozitív y tengely

az 5-7 él felezőpontján, a pozitív z tengely az 1-2-3 lap középpontján haladjon át. Az I vetülete az xy -síkra egy szabályos hatszög, és az egységnyi távolságot választjuk úgy meg, hogy ennek a hatszögnek az élei 2 hosszúságúak legyenek. A csúcsok koordinátáit a 4.7 ábra táblázatában adjuk meg.

Vertices	Coordinates	Values
1 and -12	$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), 2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$	(1.4472, 2.5066, 3.7889)
2 and -11	$\left(-2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), 0, 2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$	(-2.8944, 0, 3.7889)
3 and -10	$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), 2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$	(1.4472, -2.5066, 3.7889)
4 and -9	$\left(2\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right), 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	(4.6833, 0, 0.8944)
5 and -8	$\left(-\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right), \sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right), \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	(-2.3416, 4.0558, 0.8944)
6 and -7	$\left(-\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right), -\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right), \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	(-2.3416, -4.0558, 0.8944)

4.7. ábra. Táblázat a csúcsok koordinátáival. A táblázat forrása [2].

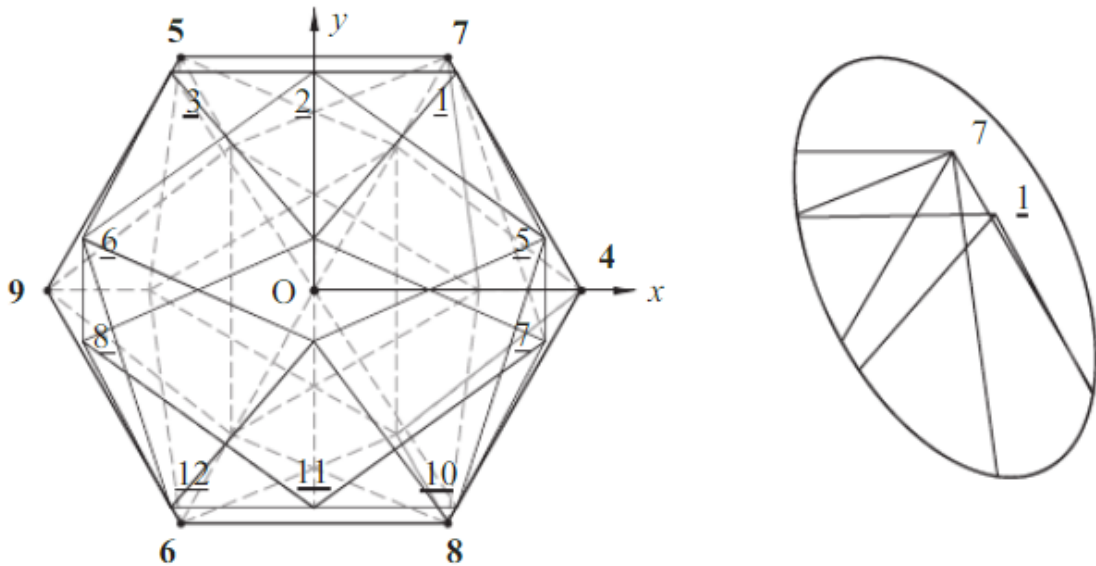
Legyen P_k az I vetülete az xy -ra 4.8 ábra bal oldala. A vetület határa egy szabályos hatszög. A félreértések elkerülése végett (és az egyszerűség kedvéért) a vetített csúcsoknál az eredeti csúcsok jelölését tartjuk meg, így például 8. ábrán az 1 csúcs az 1 csúcsnak a xy -síkjára való vetülete. A pontok (x, y) koordinátái ezen az ábrán úgy kapjuk meg, hogy a z -koordinátát nullának vesszük a 2. táblázatban.



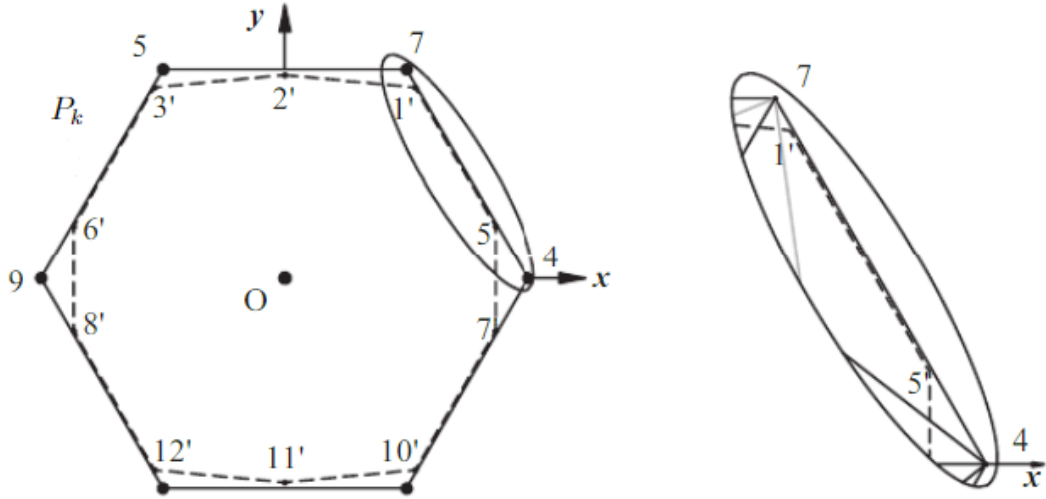
4.8. ábra. P_k vetület az xy síkon és P_b vetület az yz síkon. Az ábra forrása [2].

Legyen P_b az I vetülete az yz -síkra, a 4.8 ábra jobb oldalán látható módon. A vetület határa nyolcszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak. Ezen az ábrán

a 2-9 él megszakítva látható, hogy az origó és a mögötte lévő 4-9 él is látható legyen. Az ábra pontjainak (y, z) koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy az x -koordinátákat nullára állítjuk a 4.7 táblázatban. Ha a P_b vetület középpontja a P_k középpontjába esik, akkor szinte teljesen illeszkedik P_k -ba (4.9 ábra). Ezen az ábrán a P_k határán lévő csúcsok a 4.8. ábrán látható módon vannak elnevezve, de a félreértés elkerülése végett a P_b vetület csúcsai alá vannak húzva. A 4.9. ábra jobb oldala az $\underline{1}$ csúcshoz közeli illeszkedés kinagyított részletét mutatja. A $\underline{3}$, $\underline{10}$ és $\underline{12}$ helyzet szimmetrikusan ugyanaz. Vegyük figyelembe, hogy amikor P_b -et P_k -ra helyezzük, az y -tengely P_k x -tengelyére kerül (4.9). Ha I -t ϕ szöggel elforgatjuk az y tengely körül, akkor mind az $\underline{1} - \underline{3}$, mind a $\underline{10} - \underline{12}$ szakasz a P_k belsejébe kerül, a $\underline{6} - \underline{8}$ és $\underline{5} - \underline{7}$ szakaszok belül maradnak, de mivel az y -tengely párhuzamos az $\underline{1} - \underline{2} - \underline{3}$ támasztósíkkal, a $\underline{2}$ és $\underline{11}$ csúcsok vetületei közelebb kerülnek az 5-7 és 6-8 határszakaszokhoz. Mivel $\underline{3}$ és $\underline{1}$ sokkal közelebb vannak a határszakaszokhoz, mint a $\underline{2}$, így ha ϕ elég kicsi, akkor az összes vetített csúcs a P_k határán belülré kerül.



4.9. ábra. P_b már majdnem illeszkedik P_k -ba. Az ábra forrása [2].



4.10. ábra. P_b illeszkedik P_k -ba. Az ábra forrása [2].

Legyen I az elforgatott ikozaéder, és jelöljük a k csúcs P_k -ba való vetületét k' -vel. A 4.11 táblázat mutatja a vetített k' csúcsok ϕ szerinti koordinátáit, amelyeket az xz -síkból az origó körüli ϕ szöggel való elforgatás ismert képleteiből kaptunk.

Vertices	(x, y) coordinates in P_o .	$\varphi = 3.1289^\circ$
1' and -12'	$\left(\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \cos \varphi - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sin \varphi\right)$	(2.5066, 3.7042)
2' and -11'	$\left(0, \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \cos \varphi + \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \sin \varphi\right)$	(0.0, 3.9412)
3' and -10'	$\left(-\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \cos \varphi - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sin \varphi\right)$	(-2.5066, 3.7042)
4' and -9'	$\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi - \left(2 + \frac{6}{\sqrt{3}}\right) \sin \varphi\right)$	(0.0, 0.6375)
5' and -8'	$\left(\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right), \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi + \left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) \sin \varphi\right)$	(4.0558, 1.0209)
6' and -7'	$\left(-\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right), \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi + \left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) \sin \varphi\right)$	(-4.0558, 1.0209)

4.11. ábra. Táblázat a vetített csúcsok koordinátaival. A táblázat forrása [2]

A koordináták az (x, y) tengelyek szerint jelöltek P_k -ban, és ugyanazzal a beosztással, mint a 2. táblázatban megadott csúcsok esetében. Válasszuk ϕ -t úgy, hogy az $\underline{1} - \underline{5}$ él vetülete a $\underline{7} - \underline{4}$ élen belül és azzal párhuzamos legyen, csökkentve e két él közötti maximális távolságot, könnyen kiszámítható, hogy ez $\phi = 3,1289^\circ$ esetén teljesül (és hasonlóan $\underline{7} - \underline{10}$, $\underline{3} - \underline{6}$ és $\underline{12} - \underline{8}$ élek esetén), miközben a $\underline{2}$ és $\underline{11}$ csúcsok képét a forgatás P_k -n belül hagyja (4.10). P_k belsejét a (4.1) egyenlőtlenségrendszer írja le.

$$\begin{aligned}
 -2\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{3}x &< y < 2\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{3}x \\
 -\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) &< y < \sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \\
 -2\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{3}x &< y < 2\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) + \sqrt{3}x
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Számolással ellenőrizhető, hogy a táblázatban szereplő koordináták teljesítik a (4.1) megszorításokat, így az I_b csúcsai a P_k belsejében vannak, tehát koordináták segítségével beláttuk, hogy az I ikozaéder rendelkezik a Rupert tulajdonsággal. \square

Nieuwland konstans. A P_k és P_b vetületek határvonalai közötti minimális távolság kiszámításával belátható, hogy $P_b \frac{1108}{1198} > 1,00910747$ -szoros nagyítása is befér P_k -ba, így az ikozaéder ilyen irányú nagyítása is átfér az eredeti ikozaéderen. Tehát az ikozaéder Nieuwland konstansa $\nu(I) > 1,00910747$.

Ezzel mind az öt szabályos testről beláttuk, hogy rendelkezik a Rupert tulajdonsággal, valamint megadtuk a hozzájuk tartozó Nieuwland konstans becsléseket.

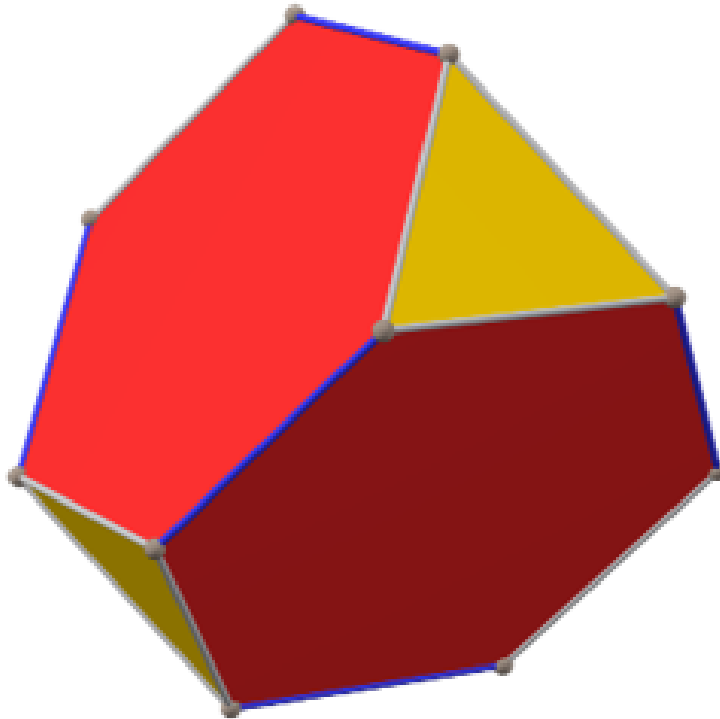
5. fejezet

Arkhimédészi testek

Az arkhimédészi testek olyan konvex poliéderek, melyeknek lapjai szabályos sokszögek, azonban a fent tárgyalt szabályos testekkel ellentétben nem egyféle, hanem két- vagy többféle szabályos, osztályonként egybevágó sokszöglap által határoltak, és szimmetriacsoportjuk tranzitívan hat a csúcsokon. Tizenhárom arkhimédészi test van: a csonkolt tetraéder, a kuboktaéder, a csonkolt kocka, a csonkolt oktaéder, a rombikuboktaéder, a csonkolt kuboktaéder, a rézsút csonkolt kocka, az ikozidodekaéder, a csonkolt dodekaéder, a csonkolt ikozaéder, a rombikoizidodekaéder, a csonkolt ikozidodekaéder, valamint a rézsút csonkolt dodekaéder. Ezek közül kilencről ismeretes, hogy rendelkezik a Rupert tulajdonsággal (nagy valószínűséggel a többi is, csak a bizonyításuk még várat magára). A legtöbb arkhimédészi test ezen tulajdonságának bizonyítása koordinátageometriai, analitikus módszerekkel történt. Itt csak a legkevesebb lapból álló arkhimédészi test, a csonkolt tetraéder Rupert tulajdonságának bizonyítását tárgyaljuk részletesen, mert ezt elsőként e dolgozat szerzője publikálta [7]. Az állítást később ettől a publikációtól függetlenül, más úton mások is bizonyították [12].

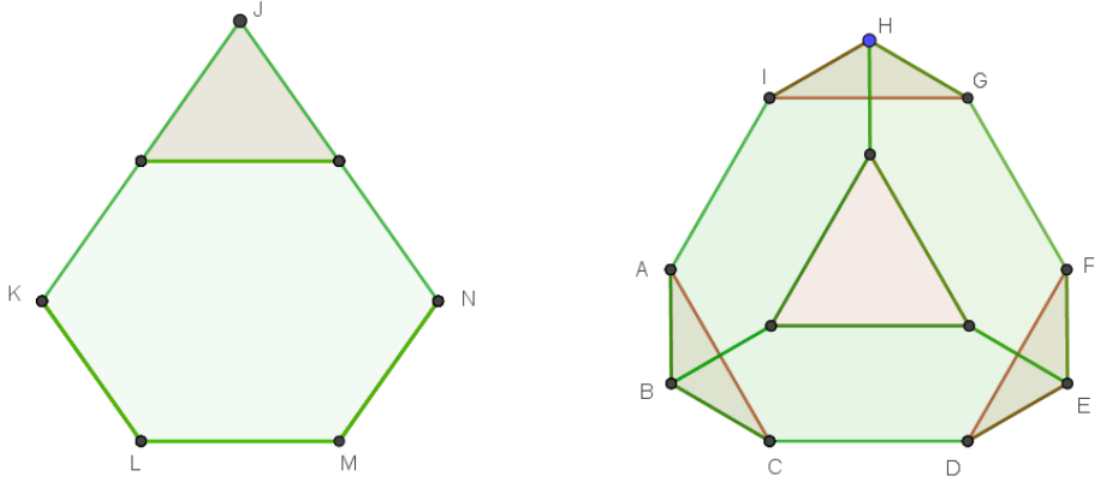
5.1. Csonkolt tetraéder

7. Tétel. *A csonkolt tetraéder Rupert tulajdonságú.*



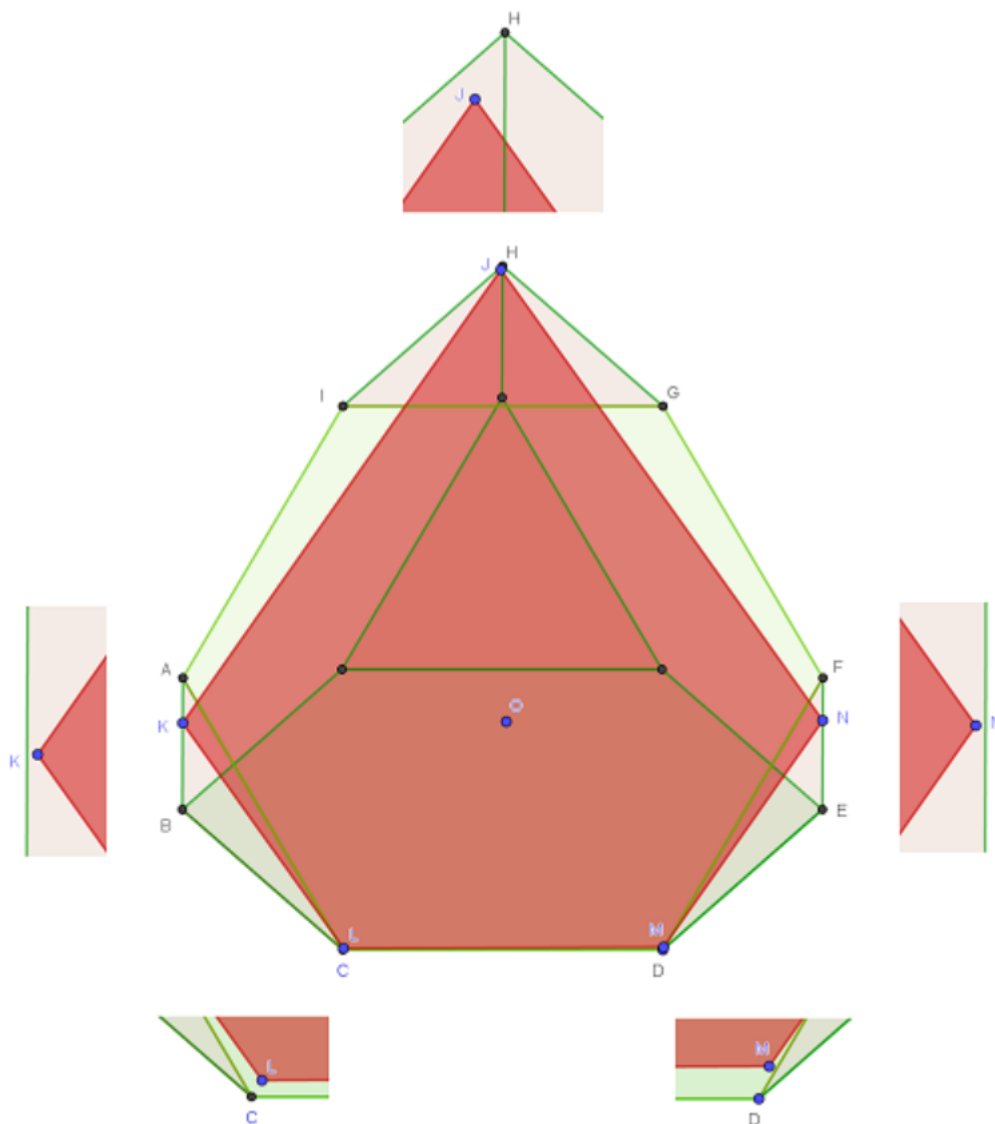
5.1. ábra. A csonkolt tetraéder. Az ábra forrása: Wikipédia

Bizonyítás. A Rupert tulajdonság bizonyításához a testnek két merőleges vetületére van szükségünk, P_b belső, és P_k külső vetületre. Legyen az első a lenti 5.2 ábrán bal oldalon látható vetület. Ezt úgy kapjuk, hogy a test a két hatszöglapjához tartozó élén áll és az arra illeszkedő szimmetriasíkjára vetítjük. Tekintsünk egy másik vetületet – a 5.2 ábra a jobb oldalán láthatót – amikor a testet egy hatszöglapjára illeszkedő síkra vetítjük.



5.2. ábra. A csonkolt tetraéder P_b (balra) és P_k vetülete (jobbra). Az ábra forrása: [7].

Mindkét esetben a vízszintes hatszögátlók (KN , AF , BE) és oldalak (LM , CD) valódi nagyságukban látszanak, így mindkét vetületen egyforma hosszúak. Az $ABEF$ négyszög szimmetria okok miatt téglalap. Pillanatnyilag a bal vetület magassága, azaz a J csúcs és az LM szakasz távolsága nagyobb, mint a jobb oldali magasság, azaz a H csúcs és a CD szakasz távolsága. Ha azonban a jobb oldali helyzetből a testet a CD tengely körül forgatni kezdjük a nézőpont felé, akkor a H csúcs és a CD szakasz távolsága nőni kezd, miközben a hatszögátlók és a hatszög-
 oldalak nagysága változatlan marad. Mivel $\sqrt{8}$ élhosszúság esetén a J csúcs és az LM szakasz távolsága a bal oldali helyzetben éppen 6 egység, a H csúcs és a CD szakasz távolsága a forgatással viszont $\sqrt{38}$ -ig nőhet (utána ismét csökkenni fog), így elérjük azt a helyzetet, amikor a bal oldali vetület belefér a jobb oldali helyzet elforgatottjába. Az L csúcs feleljen meg a C , az M csúcs pedig a D csúcsnak. Ekkor K csúcs éppen rajta van az AB oldalon, az N csúcs pedig az EF oldalon. A J csúcs viszont belül, a H csúcs „alatt” van. Ez a kis különbség lehetővé teszi, hogy a bal oldali vetületet elegendően kis JH irányú eltolással és elegendően kis elforgatással olyan helyzetbe hozzuk, hogy minden csúcsa (így az egész vetület) belefér a másik vetületbe. A 5.3 ábrán a végső helyzetet látjuk: a belső vetületet az O pont körül forgattuk el néhány tized fokkal (a pontos érték nem lényeges, csak a K és N pontoknak kell elmozdulniuk az AB illetve EF szakaszokról). Az ábrán külön kinagyítottuk a csúcsok körüli részeket, hogy egyértelmű legyen: minden csúcs, a J , a K , az L , az M és az N is a másik vetület belsejében helyezkedik el. Ezzel beláttuk, hogy a csonkított tetraéder Rupert tulajdonságú. \square



5.3. ábra. A Rupert tulajdonság bizonyítása (a P_b és P_k vetület egymáson, körben a kis képeken pedig a csúcsok körüli részek kinagyítva). Forrás: [7].

Nieuwland konstans. Végül a fenti konstrukció alapján egy egyszerű becslést adhatunk arra nézve, hogy ezzel a két vetületválasztással meddig lehetne nagyítani az alagutat. A csonkolt tetraéderhez tartozó Nieuwland konstans eddigi legjobb alsó becslése a H csúcs és a CD szakasz távolságának, valamint a J csúcs és az LM szakasz távolságának a hányadosa, ami éppen $\frac{\sqrt{38}}{6}$. Tehát $\nu(C) \geq \frac{\sqrt{38}}{6}$.

6. fejezet

Téglalapok

Ebben a fejezetben a kockán egy vele egybevágó kocka helyett különböző téglalaprészeket szeretnénk áttolni a Rupert tulajdonságnál definiált áttolhatósági kritériumok mellett. Ahhoz, hogy egy adott téglalaprészt belássuk, hogy áttolható a kockán, egy megfelelő alagutat kell keresnünk. Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy egy téglalapot illesztünk a kockába, és arra mint profilgörbére illesztjük az alagutat. Azonban ha maximális méretű téglalapot keresünk, akkor azt általában nem fogja a kocka vetülete a belsejében tartalmazni. Így ezt a téglalapot elegendően kis mértékben kicsinyítve kapjuk a megfelelő alagutat. A fejezet fogalmait és eredményeit [11] alapján taglaljuk.

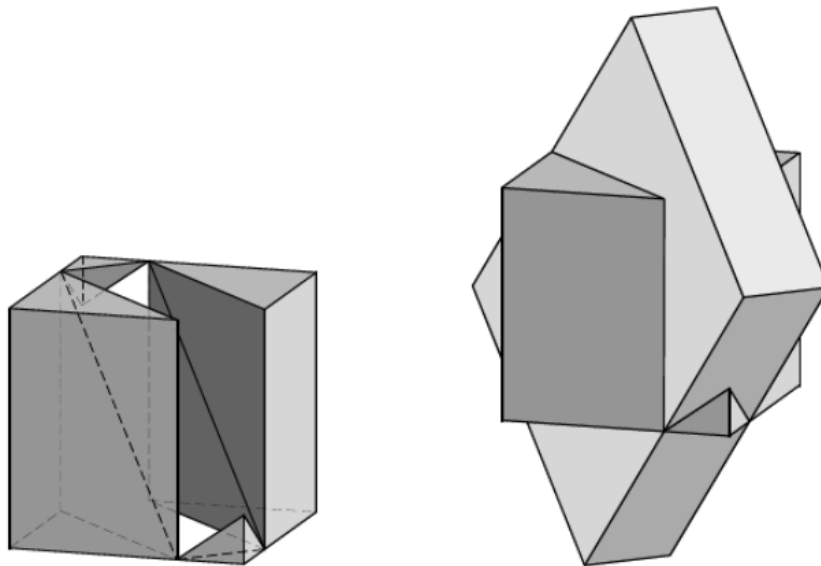
Megjegyzés. A fejezetben a könnyebb áttekinthetőség érdekében a kocka csúcsait csúcsoknak, a vizsgált téglalap csúcsait sarkoknak fogjuk hívni.

1.kérdés. Az első felmerülő kérdés az, hogy keressük meg a legnagyobb R téglalapot adott λ méretarányal, amely befér az egységkockába, azaz adott λ esetén, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$, adjuk meg a legnagyobb L -t, hogy egy $L \times \lambda L$ méretű téglalap beférjen az egységkockába. Ez a kérdés speciális esete egy általánosan megoldatlan illesztési problémának, ami tetszőleges véges dimenziójú téglalaprészekhez kapcsolódik. Egy \mathbb{R}^n n -dimenziós euklideszi térben keressünk szükséges és elégséges feltételeket $k + n$ ($k \leq n$) darab számra, hogy egy k -dimenziós téglalaprészt p_1, p_2, \dots, p_k hosszúságú éllel beférjen egy n -dimenziós téglalaprésztbe s_1, s_2, \dots, s_n hosszúságú éllel. Ha $k = 1$, akkor a probléma megoldása triviális minden n -re: egy p hosszúságú szakasz pontosan akkor illeszkedik az n -dimenziós téglalaprésztbe, ha $p \leq \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}$. A $k = n = 2$ -re azt a kérdést, hogy mikor illeszkedik egy téglalap a másikba, L. R. Ford tette fel, és W. B. Carver hamarosan megadta a szükséges és elégséges feltételt.

A problémát $k = n = 3$ -ra F. M. Garnett vetette fel és szintén Carver adta meg rá a választ.

A probléma egy fokkal bonyolultabb változata a következő.

2.kérdés. Keressük meg azt a legnagyobb adott alakú téglatestet, amely egy megfelelően kivágott egységkockán áthaladhat, azaz adott σ és τ esetén ($0 \leq \tau \leq \sigma \leq 1$), keressük meg a legnagyobb D -t, hogy egy $D \times \sigma D \times \tau D$ méretű téglatest át tudjon haladni az egységkockán lévő megfelelő alagúton. Ez az alagútkeresési probléma ugyanolyan kapcsolatban áll az első kérdéssel, mint Rupert problémája Nieuwlandéval: ha ismerjük az egységkockában a legnagyobb $\lambda = \tau/\sigma$ élarányú téglalapot, akkor az így kapott kockán áthaladó alagút téglalap alakú keresztmetszete biztosítja a kívánt átjárást; és egy kisebb, hasonló keresztmetszetű alagút nem elegendő. Példaként tegyük fel, hogy $\sigma = 0,7$ és $\tau = 0,2$. A legnagyobb $D \times \sigma D \times \tau D$ méretű téglatest, amely áthaladhat az egységkockán, $D = 2(\sqrt{143} - \sqrt{8})/9 \approx 2,02885$ (a bizonyítás a fejezet végén szereplő tételben és annak következményeiben olvasható), így $\sigma D \approx 1,42020$ és $\tau D \approx 0,40577$. A 6.1 ábra bal oldala a legnagyobb $\lambda = 2/7$ oldalárányú téglalapot mutatja, amely befér az egységkockába, illetve a hozzá tartozó alagutat. A 6.1 ábra jobb oldala magát az "áthaladást" szemlélteti.

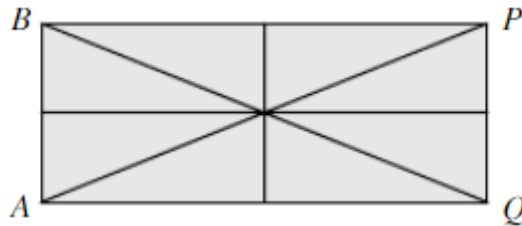


6.1. ábra. A kivágott kocka és az áthaladás. Az ábra forrása [11].

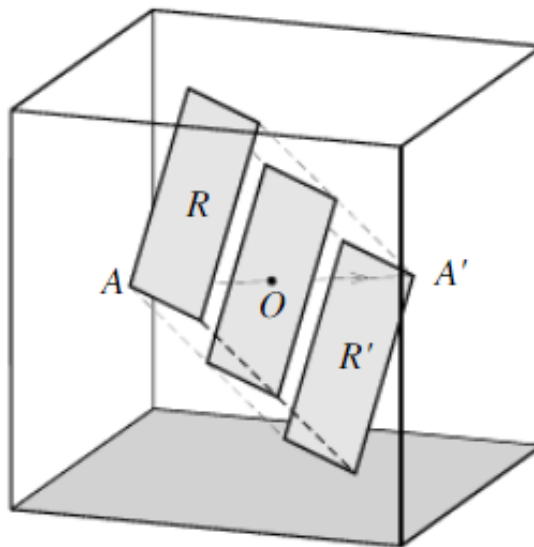
6.1. Téglalap-elhelyezési tétel

Legyen C az egységkocka, amelynek határa a kocka hat zárt lapjának uniója. Ha a λ élarányt rögzítettük, $\lambda \in [0, 1]$, akkor létezik egy legnagyobb valós szám L_{max} , amire az $L_{max} \times \lambda L_{max} = R_{max}$ méretű téglalap illeszkedik C -be. Az első dolog, amit meg szeretnénk adni, hogy pontosan hogyan helyezkedhet el ez a legnagyobb R_{max} téglalap C -ben. A választ a fejezet 11. tétele, az ún. Téglalap-elhelyezési tétel adja, amelynek bizonyítása ennek a fejezetnek a célja. Először is lássuk be, hogy a középpontos szimmetria miatt minden R téglalap, amely illeszkedik C -be, úgy is elhelyezhető C -ben, hogy R középpontja egybeesik C szimmetriaközéppontjával.

8. Tétel. *Ha egy $R = ABPQ$ téglalap (6.2 ábra) valamilyen módon belefér a C egységkockába, akkor C -be illeszthető úgy is, hogy a középpontja C szimmetriaközéppontjában van.*



6.2. ábra. A 0,4 élarányú téglalap. Az ábra forrása [11].



6.3. ábra. Az R téglalap közepre helyezése. Az ábra forrása [11].

Bizonyítás. Jelöljük a C szimmetriaközéppontját O -val. Tegyük fel, hogy az $R = ABPQ$ téglalap illeszkedik C -be, és legyenek A', B', P', Q' az A, B, P, Q O -ra vett tükröképei. (6.3 ábra). Ekkor az $R' = A'B'P'Q'$ téglalap egybevágó R -rel, és R -rel egy C -be illeszkedő (esetleg elfajuló) paralelepipedont alkot, amelynek szimmetriaközéppontja C szimmetriaközéppontjában van. Ennek a paralelepipedonnak az R -től és R' -től egyenlő távolságra levő pontjainak halmaza egy téglalap, amely egybevágó R -rel és középpontja O . \square

Ennek a tételnek a következményeként ezentúl mindig feltehetjük, hogy a téglalap C -ben úgy helyezkedik el, hogy a szimmetriaközéppontja egybeesik O -val. Az ilyen téglalapot központi téglalapnak nevezzük. Egy központi téglalap csúcsa pontosan akkor fekszik C élén vagy lapján, ha a téglalap szemben fekvő csúcsa C szemközti élén vagy lapján helyezkedik el.

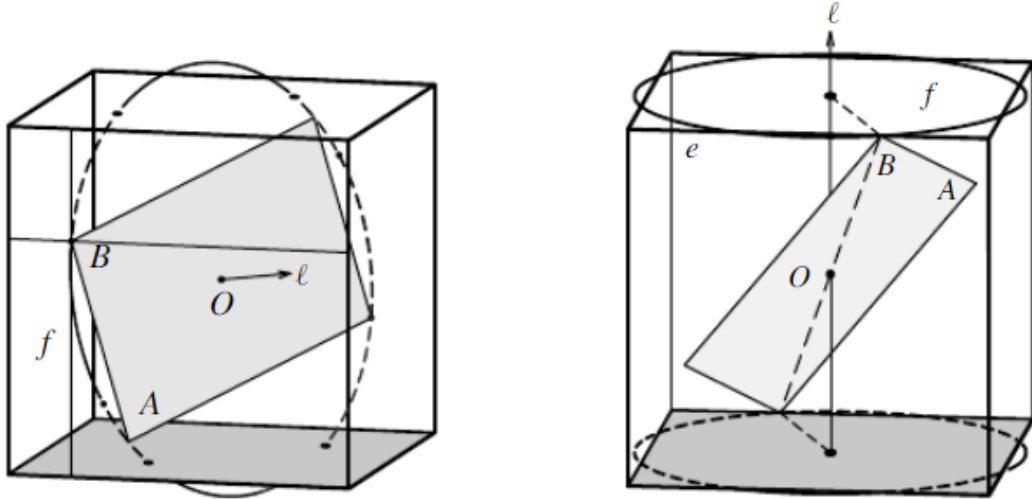
Sarkok a csúcsokban. Ha egy központi R téglalap egyik sarka C egy csúcsában van, akkor R szemközti sarka C szemközti csúcsában, R másik két sarka pedig szintén C egymással szemközti csúcsaiban van. Csak két lehetséges eset van: $\lambda = 0$ és R a C egy testátlója, amelyet $\sqrt{3} \times 0$ méretű téglalapnak tekintünk, vagy $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és R a $\sqrt{2} \times 1$ méretű téglalap, melynek 2-2 szemben fekvő éle C szemközti éle, illetve lapátlója. A következőkben általában feltesszük, hogy R sarkai nem a C csúcsaiban vannak.

Központi maximális téglalapok. Hogyan illeszkedik egy központi maximális R téglalap C -be? Azt fogjuk belátni, hogy R sarkainak C kocka határán kell feküdniük.

9. Tétel. *Egy központi maximális R téglalap sarkai a C kocka határán fekszenek.*

Bizonyítás. Fő eszközünk az a megfigyelés, hogy az a téglalap, amely C -be illeszkedik úgy, hogy mind a négy sarka C belsejében van, nem maximális. Tehát, ha egy központi R téglalap két szomszédos sarka van C belsejében, akkor R nem maximális. Ebből következik, hogy csak azokat a központi téglalapokat kell megvizsgálnunk, amelyeknek legalább egy sarka van C lapján (de nem csúcsában). Tegyük fel, hogy az $R = ABPQ$ központi téglalap egyik A sarka C -n belül van, és egy szomszédos B sarok C zárt f lapján, de nem csúcsban (6.4 ábra). Ha B egy f lap belsejében van, akkor R elegendően kicsiny elforgatása a körülírt körben (6.4 ábra bal oldala) B -t is C -n belül mozgatja; és ebből következően R nem maximális. Ha B az f egyik e élén fekszik (6.4 ábra jobb oldala), akkor R megfelelő kis elforgatása az O -ban

f -re merőlegesen állított l egyenes körül, A -t C belsejében hagyja, és B -t e -ből f -be mozgatja. Így az imént vizsgált esethez jutunk, tehát R ismét nem maximális. Ebből következik az állítás, miszerint egy maximális központi téglalap mind a négy sarkának a C lapjain kell feküdnie. \square

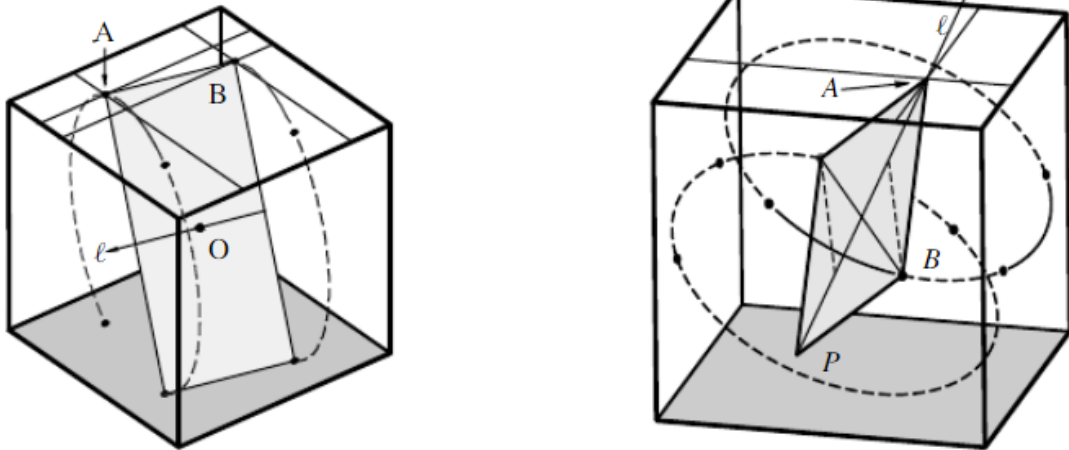


6.4. ábra. A B csúcs a kocka lapján, illetve élén. Az ábra forrása [11].

De ennél több is igaz: egy maximális központi téglalap sarkainak C élein kell lenniük.

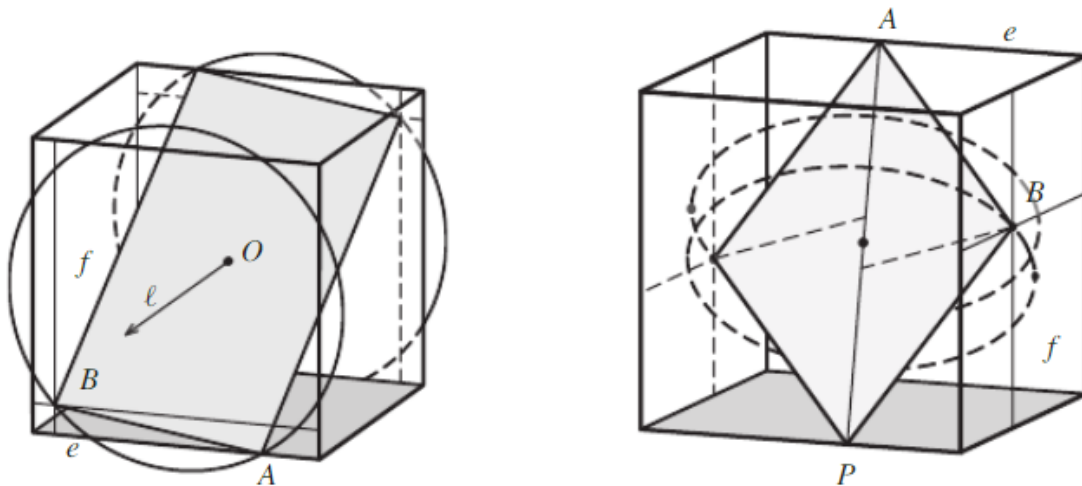
10. Tétel. *Egy központi maximális téglalap R sarkai a C élein fekszenek.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy egy központi maximális R téglalap legalább egyik sarkának a C valamely élén kell feküdnie. Ha R szomszédos A és B sarkai egyaránt C ugyanazon (nyílt) oldalán fekszenek (6.5 ábra bal oldala), akkor a másik két P és Q sarok a C szemközi oldalán fekszik, és egy megfelelő kis forgatás az O -n átmenő, AB -vel párhuzamos l tengely körül R -t teljesen C -n belülre mozgatja, ami ellent mond az előző tételnek. Ha az R szomszédos A és B sarkai a C szemközi nyílt lapjain helyezkednek el, akkor a szomszédos A és Q sarkok C ugyanazon (nyílt) lapján fekszenek, ami, mint láttuk, ellentmondás. Ha R szomszédos A és B sarkai a C szomszédos (nyílt) lapjain fekszenek (6.5 ábra jobb oldala), az R megfelelő kis elforgatása az AP átló körül B -t C belsejébe mozgatja, ismét az előző tétel állításával áll ellentétben. Következésképpen R legalább egy sarkának C egy élén kell feküdnie; természetesen R szemközi sarka akkor C szemközi élén fekszik.



6.5. ábra. A és B csúcsok megegyező, illetve szomszédos lapokon. Az ábra forrása [11].

Tegyük fel ezután, hogy a központi maximális R téglalap A sarka a C egyik e élén fekszik. Ha az A -val szomszédos B sarok egy C -nek egy, az e -t tartalmazó f (nyílt) lapján (6.6 ábra bal oldala) helyezkedik el, akkor R egy elegendően kis elforgatása az f -re merőleges, O -n átmenő l körül, mind A -t, mind B -t az f (nyílt) lapba mozgatja, ami ellentmond a bizonyítás első részének.



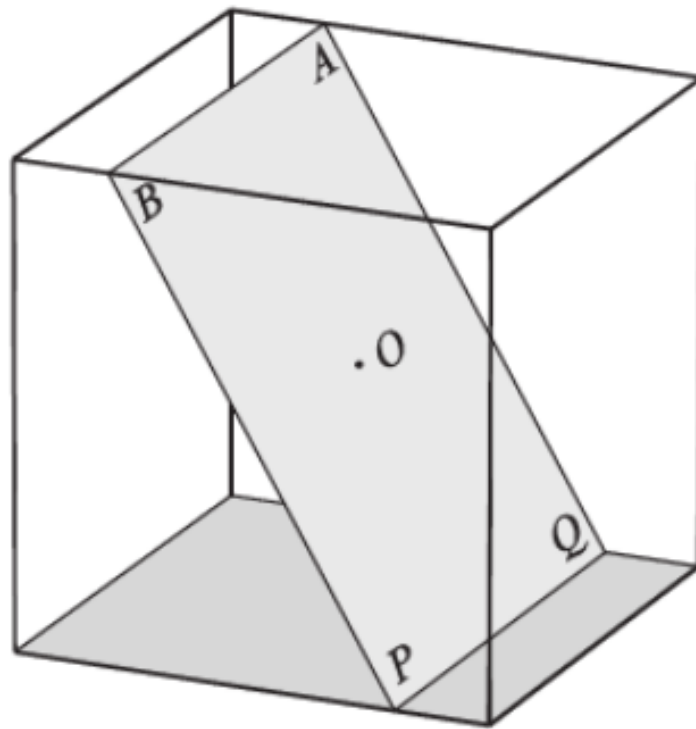
6.6. ábra. B az e -vel szomszédos, illetve e -re merőleges lapon. Az ábra forrása [11].

Ha egy A -val szomszédos B sarok olyan (nyílt) f lapon fekszik, amely nem érintkezik e -vel, akkor a szemközti Q sarok A -val szomszédos, és az f lappal szemben lévő f' lapon fekszik, amely szomszédos e -vel. Így a fentiek alapján R megint nem lehet maximális. Végül, ha R A sarka egy e élén fekszik, és egy szomszédos B sarok egy olyan f lapon, amely csak C csúcsánál találkozik e -vel (6.6 ábra jobb oldala),

akkor az A -val szemközti P sarok az e -vel szemközti élen fekszik, és az R AP átlója körüli megfelelő kis elforgatás B -t és Q -t egyaránt C belsejébe mozgatja, ami ismét ellentétben áll a 9. tétellel. Ebből következik az állítás, hogy egy központi maximális téglalap mind a négy sarka C élein fekszik. \square

11. Tétel. (Téglalap-elhelyezési tétel). Egy központi maximális R téglalap, amelynek sarkai nincsenek C csúcaiban, pontosan kétféleképpen illeszkedhet C -be, az alábbi két eset közül valamelyik módon:

- a) R két szomszédos sarka a C ugyanazon élén fekszik (6.8 ábra bal oldala); vagy
- b) R két szomszédos sarka a C szomszédos élein fekszik (6.8 ábra jobb oldala)



6.7. ábra. Egy nem maximális téglalap a kockában. Az ábra forrása [11].

Bizonyítás. R négy sarka egy olyan gömbön fekszik, amelynek középpontja C középpontja, O , és mindegyik sarok ugyanolyan távolságra van C legközelebbi csúcsától. Ha (a) és (b) mindkettő hamis, akkor a sarkoknak C négy párhuzamos élén kellene elhelyezkedniük, mindegyiken egy. Ekkor teljesül, hogy van R -nek két szomszédos sarka (a 6.7 ábra szerint A -val és B -vel jelölve), amelyeket összekötő él párhuzamos C egy élével. Ekkor azonban egy O -n áthaladó, AB -vel párhuzamos tengely körüli elegendően kis elforgatás mind a négy csúcsot elmozdítja az élekről, C a (nyílt)

lapjaiba, ami ellent mond a 10. tételnek. A két eset egyszerre természetesen nem valósulhat meg, tehát az állítást beláttuk.

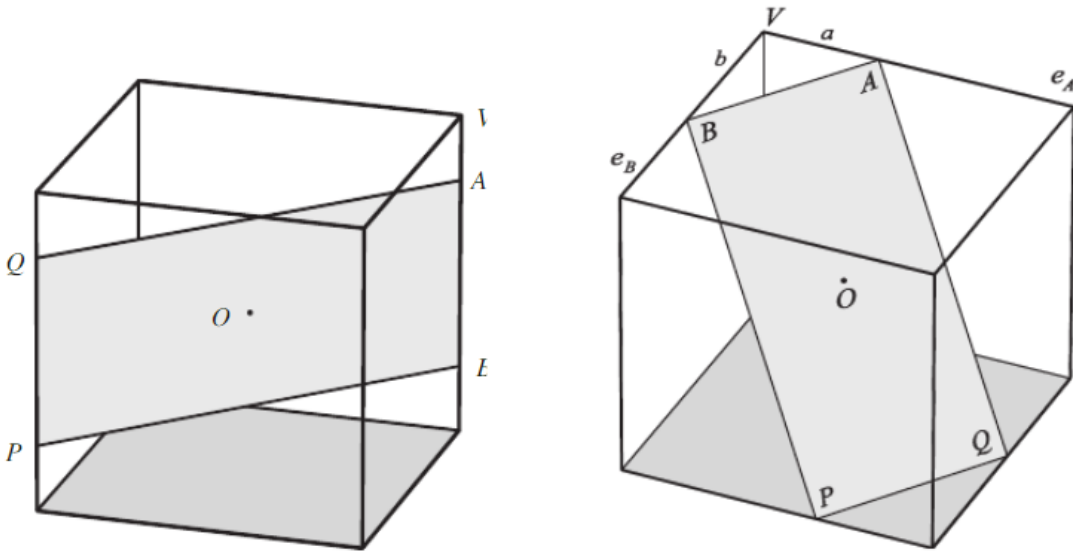
□

6.2. Maximális téglalapok

A téglalap-elhelyezési tétel alapján két lehetőséget kell megvizsgálnunk.

a) lehetőség Tegyük fel, hogy az R maximális központi téglalap két szomszédos sarka a C ugyanazon élén fekszik (6.8 ábra bal oldala). Legyen a az A sarok és a C A -hoz legközelebbi csúcs (V) távolsága. Mivel $AB \leq 1 \leq AQ$, így $L = AQ = \sqrt{2}$ és $\lambda L = AB = 1 - 2a$. Mivel $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, ezért azt kapjuk, hogy ha $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor

$$L = \sqrt{2}. \quad (6.1)$$



6.8. ábra. Az a) és b) helyzetek. Az ábra forrása [11].

b) lehetőség

Tegyük fel, hogy egy λ oldalarányú központi maximális R téglalap két szomszédos A és B sarka a szomszédos e_A és e_B nyílt éleken van, amelyek egy V csúcson osztoznak (8.1 ábra jobb oldala). Legyen a a VA távolság és b a VB távolság. Ekkor

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}, BP = \sqrt{1 + (1 - a)^2 + (1 - b)^2} \quad (6.2)$$

Mivel $OA = OB$, könnyen belátható, hogy b -nek vagy a -nak vagy $1 - a$ -nak kell lennie. Továbbá AB egyenlő lehet a λL vagy az L értékkel. Így a **(b)** eset négy esetre bomlik, amelyek közül az egyik lehetetlennek bizonyul.

b_1 aleset: $b = a$ és $AB = \lambda L$. Ha $a = b$ és $\lambda = 1$ akkor 6.2-ből $a = \frac{3}{4}$ és $L = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, azaz a Nieuwland-féle eredményeket kapjuk. Általánosabban, ha $a = b$ és $L = f_1(\lambda)$, akkor $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$L = \frac{3}{\sqrt{3 - \lambda^2} + \sqrt{2}\lambda} = f_1(\lambda) \quad (6.3)$$

és

$$a = \frac{3\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{3 - \lambda^2} + \sqrt{2}\lambda} = f_1(\lambda). \quad (6.4)$$

b_2 aleset: $b = 1 - a$ és $AB = \lambda L$. Legyen $L = f_2(\lambda)$ (6.2)-be behelyettesítünk megkövetelve, hogy $0 \leq a \leq 1$ és $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ekkor a következőket kapjuk:

$$L = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = f_2(\lambda) \quad (6.5)$$

és

$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\lambda^2 - 1}{1 - \lambda^2}}. \quad (6.6)$$

b_3 aleset: $b = a$ és $AB = L$. Ha elimináljuk a -t (6.2)-ből, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$(1 - \lambda^2)L^2 - 2\sqrt{2}L + 3 = 0.$$

Ebből $L = f_3(\lambda)$ és $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$L = \frac{3}{\sqrt{3\lambda^2 - 1} + \sqrt{2}} = f_3(\lambda) \quad (6.7)$$

és

$$a = \frac{2 - \sqrt{2}\sqrt{3\lambda^2 - 1}}{1 - \lambda^2}, \quad (6.8)$$

továbbá $a \leq 1$ érdekében megköveteljük, hogy $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tehát a fenti feltételt $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1$ -re kell cserélnünk.

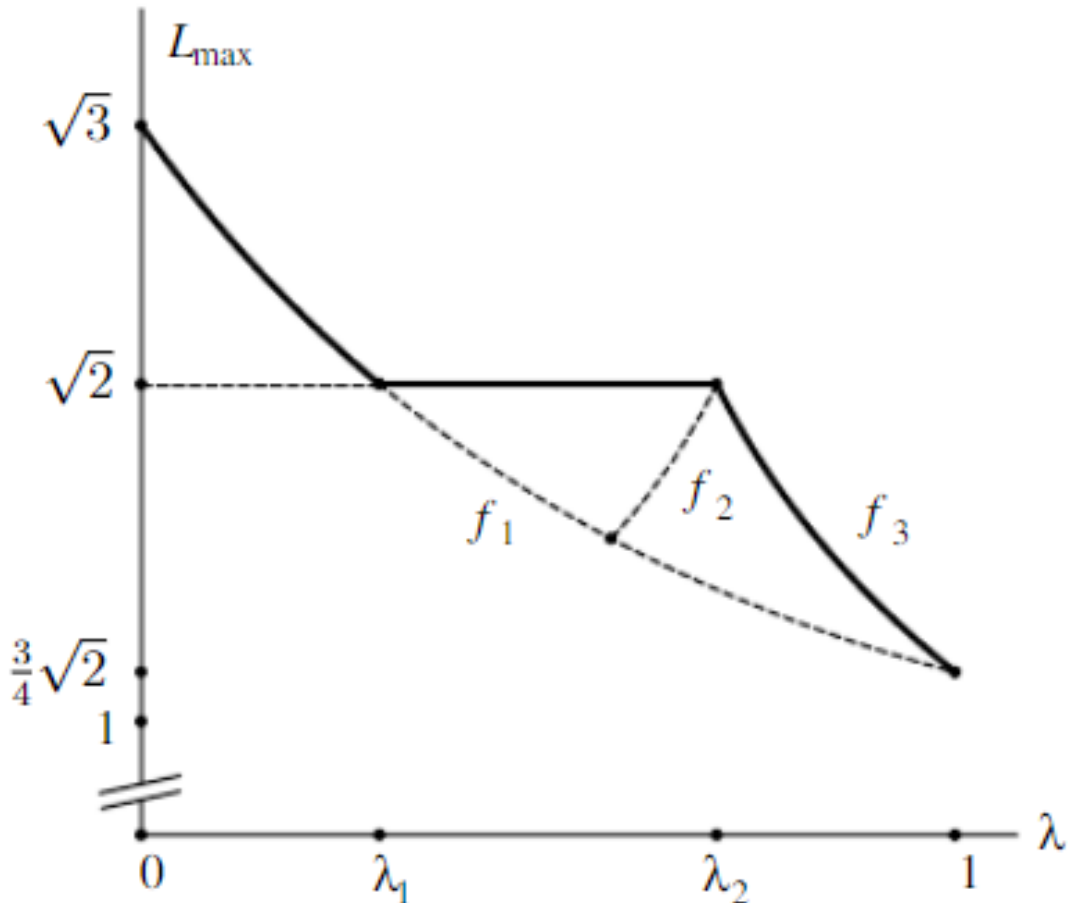
b_4 aleset: $b = 1 - a$ és $AB = L$. Ekkor L -re egy olyan egyenletet kapunk, aminek nincs valós gyöke, így ez a lehetőség nem valósulhat meg.

6.3. Összegzés és a kérdések megválaszolása

Ebben a részben a fejezet elején feltett 1. és 2. kérdésre adunk választ.

12. Tétel. Legyen $\lambda_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,29289$ és $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,70711$. Ekkor $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén minden λ -ra a legnagyobb λ élarányú, az egységkockába illszkedő R_{max} téglalap $L_{max}(\lambda)$ hosszabb oldala a következő:

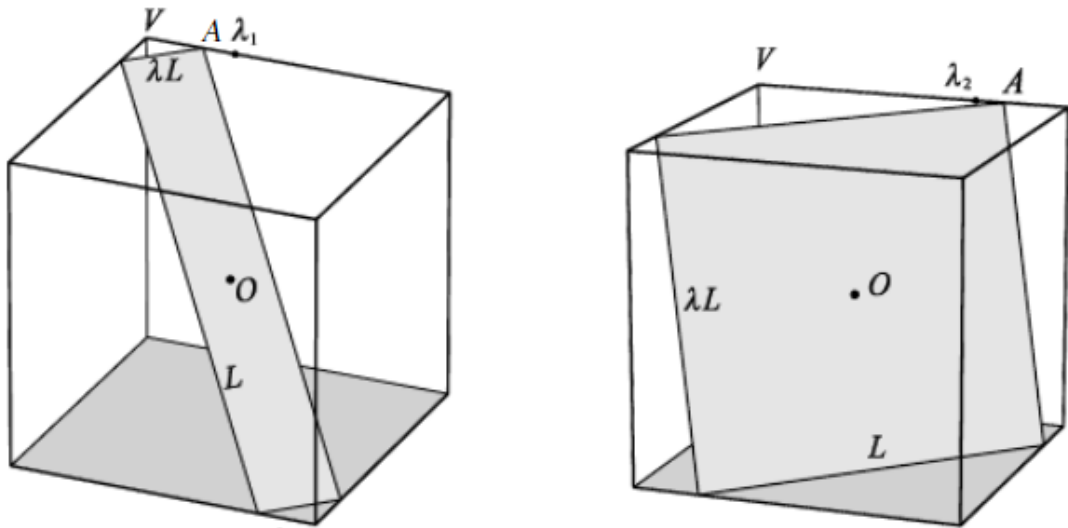
$$L_{max}(\lambda) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{3 - \lambda^2} + \sqrt{2}\lambda} & \text{ha } 0 \leq \lambda \leq \lambda_1 \\ \sqrt{2} & \text{ha } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \\ \frac{3}{\sqrt{3\lambda^2 - 1} + \sqrt{2}} & \text{ha } \lambda_2 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (6.9)$$



6.9. ábra. L_{max} értéke λ élarány esetén (az ábra [11] alapján készült).

Bizonyítás. Ha $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, akkor $L_{max}(\lambda)$ nagyobb, mint $f_1(\lambda)$ és így, mint $\sqrt{2}$. Ha $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, akkor $L_{max}(\lambda) = \sqrt{2}$, mivel a teljes $[\lambda_1, \lambda_2]$ intervallumon $f_1(\lambda) \leq \sqrt{2}$ és $f_2(\lambda) \leq \sqrt{2}$, ha $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \lambda \leq \lambda_2$. Ugyanígy $L_{max}(\lambda) = f_3(\lambda)$ ha $\lambda_2 \leq \lambda \leq 1$. \square

A 6.10 ábra a maximális téglalapok helyzetét mutatja. Ha $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, akkor tizenkét maximális téglalap van, amelyek mindegyike központi, és a 6.10 ábra bal oldalán látható módon helyezkednek el. Hosszabb oldaluk L , és az $a = VA$ távolságot a (6.3) és (6.4) képletek adják meg. Ha $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, akkor $L = \sqrt{2}$, és van hat központi maximális téglalap és végtelen sok olyan, amelyik nem központi, mindegyik a C átlós síkjain helyezkedik el (6.9 ábra bal oldala). Ha $\lambda_2 \leq \lambda \leq 1$, akkor ismét tizenkét maximális téglalap van, amelyek mindegyike a 6.10 ábra jobb oldalán látható módon központi, és hosszabbik L oldaluk mérete és az $a = VA$ távolságuk a (6.7) és (6.8) képletekből adódik.



6.10. ábra. a $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ és a $\lambda_2 \leq \lambda \leq 1$ esetek. Az ábra forrása [11].

A 12. tétel szükséges és elégséges feltételt ad egy téglalap egyégekockába való beféréseire: egy $a \times b$ méretű téglalap, ahol $a \geq b$, pontosan akkor fér bele az egységkockába, ha $a \leq L_{max}(\frac{b}{a})$, ahol $L_{max}(\lambda)$ a 12. tétel alapján megadott érték.

Ezután már csak a téglalatest áttolhatóságára vonatkozó tételt kell kimondanunk.

13. Tétel. Adott σ és τ esetén ($0 \geq \tau \geq \sigma \geq 1$) a $D \times \sigma D \times \tau D$ méretű téglalatest pontosan akkor fér át egy megfelelő alagúton az egységkockán, ha

$$D < \frac{1}{\sigma} L_{max}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right).$$

Bizonyítás. A legnagyobb $L \times (\frac{\tau}{\sigma})L$ téglalapra, ami belefér az egységkockába, $L = L_{max}(\frac{\tau}{\sigma})$, így a téglatest átfér a kockán, ha $\sigma D < L$. \square

Megjegyzés. Az egységkocka áttolása az önmagán (tehát Rupert eredeti feladata) a fenti tételnek egy speciális esete.

7. fejezet

Az n -dimenziós kocka

Ebben a fejezetben az eredeti probléma dimenzió szerinti kiterjesztését taglaljuk, és belátjuk, hogy az n -dimenziós kocka rendelkezik a Rupert tulajdonsággal. Az eredményeket [9] alapján ismertetjük.

Kezdjük azzal, hogy megvizsgáljuk a Rupert tulajdonságot az \mathbb{R}^n -beli konvex testekre. Persze nem minden konvex test Rupert. \mathbb{R}^3 -ban a gömb, vagy egy tömör körhenger nem rendelkezik Rupert tulajdonsággal. Azonban \mathbb{R}^3 -ban számos konvex poliéder Rupert, többek között a fent említett platóni és arkhimédészi testek.

Megjegyzés. Az alapvető definíciókat a 3-dimenziós esettel analóg módon vezetjük be, annyi különbséggel, hogy a könnyebb követhetőség érdekében a henger és az alagút definíciójában alsó indexben megjelenik a normálvektor is.

5. Definíció. Legyen D egy konvex test a h normálvektorú π_h hipersíkban. A h irányú, D direktrixű egyenes hengert mint ponthalmazt a következőképpen írhatjuk le:

$$C_h(D) = \{y + th \in \mathbb{R}^3 : y \in D, -\infty < t < \infty\}.$$

A $H_h(D)$ alagút ennek a hengernek a belseje.

Így egy alagút nyílt halmaz \mathbb{R}^n -ben, és iránya merőleges a H hipersíkra, amely tartalmazza a direktrixét. Szükségünk lesz arra az elemi megfigyelésre, hogy a $C_h(D)$ henger metszete egy h normálvektorú K hipersíkkal a D eltoltja, következésképpen egybevágó D -vel.

Vetületek. Szintén a 3-dimenziós esettel analóg módon definiáljuk egy test vetületeit.

6. Definíció. Legyen O egy konvex test \mathbb{R}^n -ben, H pedig hipersík. Egy pont p vetülete H -ra az a $q \in H$ pont, amelyre a \vec{pq} vektor a H normálvektorának skalárszorosa.

A $P_H(O)$ vetület, az O pontjai H -ra való vetületeinek halmaza, kompakt és konvex, és nem üres a belseje, vagyis konvex test H -ban.

Most az alagúton való áttolást szeretnénk precízen definiálni. A második fejezetben található 1. tételt megelőző indoklás alapján n -dimenzióban is elég két megfelelő vetületet (amik itt természetesen $(n - 1)$ -dimenziós testek) és köztük megfelelő egybevágósági transzformációt megadjunk az áttolhatóság szükséges és elégséges feltételként.

7. Definíció. A H hipersíkban lévő S halmaz a K hipersíkban lévő T halmazba beleilleszthető, ha létezik egy olyan \mathbb{R}^n -beli mozgás (azaz egy izometria), amely H -t K -ba, S -t pedig T egy részhalmazába viszi.

14. Tétel. Legyen O egy konvex test \mathbb{R}^n -ben, H és K hipersíkok. Ha a $P_H(O)$ vetület beleilleszthető a $P_K(O)$ vetület belsejébe, akkor az O test áttolható a k irányú $H_k(P_K(O))$ alagúton keresztül.

Bizonyítás. Az 1. tétel bizonyításával analóg módon. Az áttolás az idő függvényében az alábbi módon írható le:

$$\phi(O)_t = tk + \phi(O) \subset H_k(P_K(O)), -\infty < t < \infty,$$

ahol t az idő, ϕ a megfelelő \mathbb{R}^n -beli mozgás és $\phi(O)_t$ a transzformált test egy t időpillanatban. □

Az n -dimenziós kocka. Egy \mathbb{R}^n -beli téglatest n zárt intervallum szorzataként kapható meg. Ez egy középpontosan szimmetrikus konvex test. Ha az összes intervallum azonos s hosszúságú, akkor a téglatest egy s élhosszúságú n -dimenziós kocka. Azt mondjuk, hogy egy n -kocka központi, ha a szimmetriaközéppontja az origóban van, élei pedig párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. A 2 élhosszúságú központi n -dimenziós kocka csúcsai a $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ koordinátákkal rendelkező 2^n pont. A hiperlapok 2 élhosszúságú $(n - 1)$ -dimenziós kockák, amelyek az $x_j = \pm 1$ egyenletű támasztóhipersíkokban fekszenek. Egy n -kockának $2n$ hiperlapja van, páronként párhuzamosak, a koordinátatengelyekre merőlegesek. A 14. tételt a Rupert-problémára specializálva a következő eredményt kapjuk.

15. Tétel. Ha egy egység élhosszúságú n -kocka tartalmaz egy egynél nagyobb élű $(n - 1)$ -kockát a belsejében, akkor rendelkezik a Rupert tulajdonsággal.

Bizonyítás. Egy Q központi egységoldalú n -kockának az $x_n = \frac{1}{2}$ egyenletű H hipersíkra való vetítésével a Q egy hiperlapját egy egységnyi élhosszúságú $(n - 1)$ -dimenziós C kockát kapunk. Legyen C_s egy $(n - 1)$ -dimenziós kocka $s > 1$ élhosszúsággal Q belsejében. Mivel C belefér a nagyobb C_s -be, a 15. tétel állítása következik a 14. tételből.

□

Kocka a kockában. Annak bizonyításához, hogy a Q n -dimenziós kocka rendelkezik a Rupert tulajdonsággal, be kell látnunk, hogy tartalmaz egy C , önmagánál nagyobb élhosszúságú $(n - 1)$ -dimenziós kockát. Tegyük fel, hogy a Q n -dimenziós kocka központi, élhosszúsága 2. A bizonyításhoz tekintsük egy C $(n - 1)$ -dimenziós 2 élhosszúságú kockát és adjunk meg egy \mathbb{R}^n -beli ortonormált bázist:

$$R = \{r_i : i = 1, 2, \dots, n\},$$

úgy, hogy a C kocka szimmetriaközéppontja éppen az origóban legyen, és az élei párhuzamosak legyenek az R -beli r_1, \dots, r_{n-1} vektorokkal Q belsejében. Azt fogjuk belátni, hogy az r_1, \dots, r_{n-1} vektorokat meg lehet választani úgy, hogy C felnagyítható $(1 + \varepsilon)$ -szorosára ($\varepsilon > 0$) úgy, hogy Q belsejében maradjon. Ekkor a 15. tételből következik a kívánt eredmény.

Most belátjuk, hogy $n = 3$ -ra teljesül a fejezet állítása. Ezt a tételt már korábban beláttuk, de az általános bizonyítás könnyebb követhetősége érdekében egy az előzőtől különböző módszerrel bizonyítjuk a 3-dimenziós kocka Rupert tulajdonságát

Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n az \mathbb{R}^n koordinátái és jelölje e_1, e_2, \dots, e_n a megfelelő egységvektorokat.

7.1. Az $n = 3$ eset

Az $n = 3$ eredmény a 15. tételből következik, és abból, hogy a A 2 élhosszúságú kockába illeszthető legnagyobb négyzet élhosszúsága $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Legyen Q a $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ csúcsú kocka. A fő ötlet az, hogy az $x_3 = 0$ síkban levő C_0 keresztmetszet-négyzetet elforgatjuk az x_2 tengely körül, az e_1 vektort θ_1 szöggel forgatva e_3 felé. Így C_0 mind a négy csúcsa az $x_2 = \pm 1$ lapokon marad, és mind elmozdul az $x_1 = \pm 1$ lapokról. Ezután forgassuk a kapott négyzetet úgy, hogy e_2 -t az e_3 felé forgatjuk θ_2 szöggel.

Ekkor mind a négy csúcs Q belsejébe mozdul. Legyenek θ_1 és θ_2 hegyesszögek, és az átláthatóság érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \theta_1, c_1 = \cos \theta_1 \\ s_2 &= \sin \theta_2, c_2 = \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Az első forgatást a következő mátrix írja le:

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

A második forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

A kívánt mozgás a kettő kombinációja:

$$\Phi_3 = [\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ -s_1 s_2 & c_2 & -c_1 s_2 \\ c_2 s_1 & s_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix ortogonális, és sorai alkotják a kívánt R bázist. Az első két sorvektor

$$\begin{aligned} r_1 &= c_1 e_1 - s_1 e_3, \\ r_2 &= -s_1 s_2 e_1 + c_2 e_2 - s_2 c_1 e_3 \end{aligned}$$

egymásra merőlegesek és egységnyi hosszúságúak. Legyen C az a 2 oldalhosszúságú négyzet, amelynek középpontja az origóban van, oldalai párhuzamosak r_1 -el és r_2 -vel. Legyenek

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arcsin \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

C csúcsai, azaz a $\pm r_1$ és $\pm r_2$ vektorok végpontjai, az alábbi

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ -s_1 s_2 & c_2 & -c_1 s_2 \\ c_2 s_1 & s_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,97 & -0,97 & -0,97 & 0,97 \\ 0,54 & 0,87 & -0,54 & -0,87 \\ 0,87 & 0,54 & -0,87 & -0,54 \end{bmatrix}$$

szorzatmátrix oszlopai. Tehát C egyértelműen Q belsejében található. Ezért a C -t Q -n belül fel lehet nagyítani egy 2-nél nagyobb oldalhosszúságú négyzetté, így a kívánt eredmény következik a 15. tételből.

7.2. Az általános, $n \geq 3$ eset

16. Tétel. *Az n -dimenziós kocka rendelkezik a Rupert tulajdonsággal minden $n \geq 3$ esetén.*

Bizonyítás. A bizonyítás menete hasonló, mint a fent taglalt $n = 3$ eset. Legyen Q egy n -dimenziós, központi 2 élhosszúságú kocka, és tegyük fel, hogy $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ hegyesszögek. Használjuk a korábban definiált jelöléseket, azaz $\sin\theta_k$ -t s_k -val és $\cos\theta_k$ -t c_k -val rövidítjük.

Legyen $\Phi_n^k(\theta_k)$ egy forgatásnak a mátrixa, ahol a mátrixot úgy kapjuk, hogy az egységmátrix bizonyos elemeit kicseréljük a következő módon: $\phi_{kk} = c_k$, $\phi_{kn} = -s_k$, $\phi_{nk} = s_k$ és $\phi_{nn} = c_k$, a többi elem pedig nem változtatunk. Ez a mátrix egy, az e_k és e_n vektorokon kívüli $(n-2)$ egységvektor által kifeszített $(n-2)$ -dimenziós altér körüli elforgatást ír le, ami az e_k vektort θ_k szöggel forgatja e_n felé. Az összes kívánt forgatást végrehajtó mátrix, a következő szorzattal írható le:

$$\Phi_n = [\phi_{ij}] = \Phi_n^{n-1}(\theta_{n-1})\Phi_n^{n-2}(\theta_{n-2})\dots\Phi_n^1(\theta_1).$$

Mivel ortogonális mátrixok szorzata, így Φ_n is ortogonális. A kívánt R bázist a Φ_n sorvektorai alkotják. Az első $n-1$ sorvektor r_1, r_2, \dots, r_{n-1} vektorok páronként merőlegesek, és egység hosszúak. Legyen C a központi $(n-1)$ -dimenziós, 2 élhosszúságú kocka, amelynek élei rendre r_1, r_2, \dots, r_{n-1} a vektorokkal párhuzamosak. A C kocka 2^{n-1} csúcsa a r_1, r_2, \dots, r_{n-1} vektorok végpontjainak felel meg. Minden i -re, legyen

$$\rho_i^n = |\phi_{i1}| + |\phi_{i2}| + \dots + |\phi_{i(n-1)}|,$$

ahol $i, n \in \mathbb{N}$ indexek.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy C benne van Q -ban, úgy kell megválasztanunk a forgatási szögeket, hogy minden i -re $\rho_i^n < 1$ teljesüljön. Ekkor a C -t tartalmazó

$$B = \prod_{i=1}^{n-1} [-\rho_i^n, \rho_i^n]$$

test Q -ban fekszik. A Φ_i -k struktúrájának pontosabb megértéséhez tekintsük a Φ_5 és Φ_6 alakját:

$$\Phi_5 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & -s_1 \\ -s_1 s_2 & c_2 & 0 & 0 & -c_1 s_2 \\ -c_2 s_1 s_3 & -s_2 s_3 & c_3 & 0 & -c_1 c_2 s_3 \\ -c_2 c_3 s_1 s_4 & -c_3 s_2 s_4 & -s_3 s_4 & c_4 & -c_1 c_2 c_3 s_4 \\ c_2 c_3 c_4 s_1 & c_3 c_4 s_2 & c_4 s_3 & s_4 & c_1 c_2 c_3 c_4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_6 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & -s_1 \\ -s_1 s_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & -c_1 s_2 \\ -c_2 s_1 s_3 & -s_2 s_3 & c_3 & 0 & 0 & -c_1 c_2 s_3 \\ -c_2 c_3 s_1 s_4 & -c_3 s_2 s_4 & -s_3 s_4 & c_4 & 0 & -c_1 c_2 c_3 s_4 \\ -c_2 c_3 c_4 s_1 s_5 & -c_3 c_4 s_2 s_5 & -c_4 s_3 s_5 & -s_4 s_5 & c_5 & -c_1 c_2 c_3 c_4 s_5 \\ c_2 c_3 c_4 c_5 s_1 & c_3 c_4 c_5 s_2 & c_4 c_5 s_3 & c_5 s_4 & s_5 & c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \end{bmatrix}$$

A $\Phi_n = [\phi_{ij}]$ -nek általánosan ilyen alakja van az utolsó sort és oszlopot kivéve, ahol ϕ_{ij} a következő alakban áll elő:
ha $i = 1, 2, \dots, n - 1$, és $j = n$, akkor

$$\phi_{ij} = -s_i \prod_{k=1}^{i-1} c_k,$$

ha $i = n$, és $j = 1, 2, \dots, n - 1$, akkor

$$\phi_{ij} = -s_j \prod_{k=j+1}^{n-1} c_k,$$

ha $i = n$, és $j = n$, akkor

$$\phi_{ij} = \prod_{k=1}^{n-1} c_k$$

Az egyes sorok összegeként éppen a fent definiált ρ_i -t kapjuk $i < n$ esetén:

$$i = 1\text{-re } \rho_i^n = c_1$$

$$i = 2\text{-re } \rho_i^n = c_2 + s_1 s_2$$

$$i = 3\text{-ra } \rho_i^n = c_3 + s_2 s_3 + s_1 c_2 s_3$$

$$i = 4\text{-re } \rho_i^n = c_4 + s_3 s_4 + s_2 c_3 s_4 + s_1 c_2 c_3 s_4$$

$$i = 5\text{-re } \rho_i^n = c_5 + s_4 s_5 + s_3 c_4 s_5 + s_2 c_3 c_4 s_5 + s_1 c_2 c_3 c_4 s_5$$

$$i = 6\text{-ra } \rho_i^n = c_6 + s_5 s_6 + s_4 c_5 s_6 + s_3 c_4 c_5 s_6 + s_2 c_3 c_4 c_5 s_6 + s_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6$$

így tovább $i = n - 1$ -ig.

$i = n$ -re a ρ_n^n -ben szereplő minden összeadandóban vannak s_k -k kivéve az utolsóban, ami éppen $\phi_{nn} = \prod_{j=1}^{n-1} c_j$. A keresett szögeket a következőképpen választjuk: Minden $k = 1, 2, \dots, n - 1$ esetén

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3^{k+1-n}\right),$$

ahol

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3^{k+1-n} < 1,$$

és

$$\theta_{n-1} = 45^\circ.$$

Mivel $s_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3^{k+1-n} = 3^{k-1} s_1$, minden $k = 1, 2, \dots, n - 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{i-1} s_k = \frac{1}{2} s_1 (3^{i-1} - 1),$$

így

$$s_i - 2 \sum_{k=1}^{i-1} s_k = s_1.$$

Tekintsük a jól ismert egyenlőtlenséget, miszerint $\cos \theta < 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$, ($0 < \theta < 2\pi$). Ezt felhasználva $1 \leq i \leq n - 1$ -re a következő összefüggéshez jutunk:

$$\rho_i^n < c_i + s_i \sum_{k=1}^{i-1} s_k < 1 - \frac{1}{2} s_i^2 + s_i \sum_{k=1}^{i-1} s_k$$

. Ezt tovább alakítva kapjuk a végső összefüggést:

$$\rho_i^n < 1 - \frac{1}{2} s_i (s_i - 2 \sum_{k=1}^{i-1} s_k) = 1 - \frac{1}{2} s_i s_1 < 1 - s_i^2 < 1.$$

Továbbá $\rho_n^n = \rho_{n-1}^n < 1$ is teljesül, mivel $s_{n-1} = c_{n-1}$. Tehát a B téglatestről beláttuk, hogy belefér Q belsejébe, így C is. Ezért a C megfelelően kis mértékben felnagyítva is Q belsejében marad, így rendelkezik a Rupert tulajdonsággal.

□

8. fejezet

Az általánosított Nieuwland konstans

Eddig a Nieuwland konstanst csak Rupert tulajdonságú testekre definiáltuk és egy adott testhez számoltuk. Most közelítsük meg a problémát a Nieuwland konstans felől. Lehet-e bármilyen nagy? Ha adott a ν pozitív valós szám, akkor tudunk-e konstruálni egy n -dimenziós testet, amelynek Nieuwland konstansa legalább ν ? Értelmezhetjük-e a konstanst nem Rupert tulajdonságú testekre? Ebben a fejezetben ezekre a kérdésekre adjuk meg a választ saját eredmények [7] alapján.

17. Tétel. *Tetszőleges $k > 1$, $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan n -dimenziós konvex P politóp, amelynek Nieuwland konstansa nagyobb, mint k , azaz $\nu(P) > k$.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy n -dimenziós téglatestet, melynek élei egymásra merőlegesek és hosszuk rendre $a_1 = 1, a_2 = k + 1, \dots, a_n = (k + 1)^{(n-1)}$. Ekkor tekintsük az a_2, a_3, \dots, a_n élek által kifeszített hipersíkot, amire a téglatest merőleges vetülete egy $(n - 1)$ -dimenziós téglatest melynek élhosszai rendre $k + 1, \dots, (k + 1)^{(n-1)}$. Most tekintsük az a_1, a_3, \dots, a_{n-1} élek által kifeszített hipersíkot, melyre az eredeti téglatest merőleges vetülete egy $(n - 1)$ -dimenziós téglatest melynek élhosszai rendre $1, k + 1, \dots, (k + 1)^{(n-2)}$. Az utóbbi $k + \frac{1}{k}$ aránnyal való nagyítása egy $(n - 1)$ -dimenziós téglatest eredményez, melynek élhosszai rendre $k + \frac{1}{k}, (k + 1)(k + \frac{1}{k}), \dots, (k + 1)^{(n-2)}(k + \frac{1}{k})$. Ez a felnagyított téglatest még befér az eredeti téglatest a_2, a_3, \dots, a_n élek által kifeszített hipersíkra való vetületébe, ha a megfelelő oldalak párhuzamosak, mivel ekkor $k + \frac{1}{k} < k + 1$ és $(k + 1)^{(m)}(k + \frac{1}{k}) < (k + 1)^{(m+1)}$ minden $m = 1, \dots, n - 2$ -re és $k > 1$ -re. Tehát az eredeti téglatest Nieuwland konstansa legalább $k + \frac{1}{k}$, és ezzel az állítást beláttuk. \square

Így a válaszuk a lehet-e bármilyen nagy kérdésre igenlő.

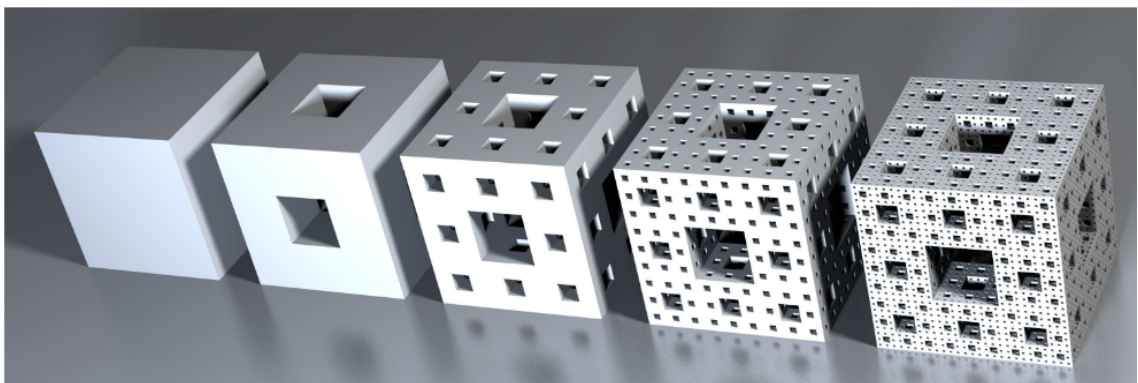
Az általánosított Nieuwland konstans. Eredetileg a Nieuwland konstans fogalmát Rupert tulajdonságú konvex testekre határozták meg. Felmerül a kérdés, hogy nem konvex, esetleg gömbbel nem homeomorf testek esetében, melyek nem Rupert tulajdonságúak, beszélhetünk-e hasonló tulajdonságról. Ha egy test nem is rendelkezik a Rupert tulajdonsággal, lehet ennek a testnek egy kicsinyített változata, amely áttolható egy megfelelő alagúton az eredeti testen. Ekkor az eredeti koncepciót általánosíthatjuk, ami egy új definíciót igényel.

8. Definíció. A nem Rupert tulajdonságú K test általánosított Nieuwland konstansának a $\nu(K) = \sup\{\nu \leq 1 : \text{létezik alagút } K\text{-ban, amin } K_\nu, \text{ már átfér}\}$ kicsinyítési arányszámot nevezzük.

Az 1-gyel való egyenlőséget azért engedjük meg, mert a Nieuwland konstans egy határérték, és például a gömb esetén ez a felső határérték éppen 1, azaz 1-hez tetszőlegesen közeli (de 1-nél kisebb) értékkel kicsinyítve a gömböt, ahhoz létezik alagút az eredeti gömbben.

A kérdés az, hogy van-e olyan poliéder, amelynek Nieuwland konstansa egy előre adott értéknél is kisebb. Erre ad választ a következő tételünk. Mivel Wetzel sejtése szerint minden konvex poliéder Rupert-tulajdonságú, így célszerű a konkáv poliéderek között keresni a bizonyításhoz szükséges alakzatot.

18. Tétel. *Bármely $0 < k \leq 1$ valós számhoz létezik olyan poliéder, amelynek általánosított Nieuwland konstansa kisebb, mint k .*



8.1. ábra. Az egységkocka és a Menger-szivacs néhány iterációja. Az ábra forrása: Wikipédia

Bizonyítás. Tekintsük az egységnyi oldalhosszúságú Menger-szivacs első iterációját (4.6. ábrán balról a második testet). Ennek a testnek az általánosított Nieuwland

konstansa semmiképp nem lehet $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb, hiszen a konstrukcióban haramdoljuk az oldallapokat, így egy felére kicsinyített kocka semmilyen módon nem helyezhető el teljes lefedettséggel az eredeti kockában, pláne nem lehet alagutat fúrni hozzá. Ugyanakkor, mivel az eredeti élek mentén létrejön egy-egy $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1$ alakú négyzetes oszlop, ezért az eredeti test $\frac{1}{3}$ -szoros kicsinyítéséhez ebben a testben biztosan létezik alagút a kocka Rupert tulajdonsága miatt. Így az első iterációval kapott szivacs általánosított Nieuwland konstansa biztosan $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ közé esik. Hasonlóan az n -edik iteráció során létrejövő Menger-szivacs általánosított Nieuwland konstansa mindenképpen $\frac{1}{2^n}$ és $\frac{1}{3^n}$ közé esik. Mivel az $\frac{1}{2^n}$ sorozat a 0-hoz konvergál, ha n tart a végtelenhez, így bármely $0 < k \leq 1$ valós számhoz létezik olyan n pozitív egész, amelyre $\frac{1}{2^n} < k$. Ebből következően minden $0 < k \leq 1$ számhoz létezik a Menger-szivacsnak olyan iterációja és így olyan poliéder, melynek általánosított Nieuwland konstansa kisebb, mint k , és ezt akartuk bizonyítani.

□

Irodalomjegyzék

- [1] John Wallis. *De algebra tractatus; historicus & practicus...* E Theatro Sheldoniano, 1793.
- [2] Richard P Jerrard, John E Wetzel és Liping Yuan. „Platonic passages”. *Mathematics Magazine* 90.2 (2017), 87–98. old.
- [3] DJE Schreck. „Prince Rupert’s problem and its extension by Pieter Nieuwland”. *Scripta Math* 16 (1950), 73–80. old.
- [4] Christoph J Scriba. „Das problem des Prinzen Ruprecht von der Pfalz”. *Praxis der Math* 10.9 (1968), 241–246. old.
- [5] Richard P Jerrard és John E Wetzel. „Universal stoppers are Rupert”. *The College Mathematics Journal* 39.2 (2008), 90–94. old.
- [6] Ying Chai, Liping Yuan és Tudor Zamfirescu. „Rupert property of Archimedean solids”. *The American Mathematical Monthly* 125.6 (2018), 497–504. old.
- [7] Balázs Hoffmann. „Rupert properties of polyhedra and the generalised Nieuwland constant”. *J. Geom. Graph* 23.1 (2019), 29–35. old.
- [8] Jakob Steininger és Sergey Yurkevich. „An algorithmic approach to Rupert’s problem”. *arXiv preprint arXiv:2112.13754* (2021).
- [9] Greg Huber, Kay Pechenick Shultz és John E Wetzel. „The n-cube is Rupert”. *The American Mathematical Monthly* 125.6 (2018), 505–512. old.
- [10] András Bezdek Zhenyue Guan, Mihály Hujter és Antal Joós. „Cubes and Boxes Have Rupert’s Passages in Every Nontrivial Direction”. *The American Mathematical Monthly* 128.6 (2021), 534–542. old.
- [11] Richard P Jerrard és John E Wetzel. „Prince Rupert’s rectangles”. *The American Mathematical Monthly* 111.1 (2004), 22–31. old.

- [12] Gérard Lavau. „The truncated tetrahedron is Rupert”. *The American Mathematical Monthly* 126.10 (2019), 929–932. old.

Ábrák jegyzéke

2.1.	A H_γ alagút. Az ábra forrása [2].	5
3.1.	A kockába vágott alagút (az ábra forrása: Wikipédia Prince Rupert's cube).	8
4.1.	A tetraéder (balra) és a megfelelő vetület (jobbra). Az ábra forrása [2]	10
4.2.	A projekciók (balra) és P_b elhelyezkedése P_k -ban (jobbra). Az ábra forrása [2].	11
4.3.	A D dodekaéder. Az ábra forrása [2].	13
4.4.	A P_k és P_b vetületek. Az ábra forrása [2].	13
4.5.	P_b és P_k kölcsönös helyzete. Az ábra forrása [2].	14
4.6.	Az I ikozaéder. Az ábra forrása [2].	15
4.7.	Táblázat a csúcsok koordinátaival. A táblázat forrása [2].	16
4.8.	P_k vetület az xy síkon és P_b vetület az yz síkon. Az ábra forrása [2].	16
4.9.	P_b már majdnem illeszkedik P_k -ba. Az ábra forrása [2].	17
4.10.	P_b illeszkedik P_k -ba. Az ábra forrása [2].	18
4.11.	Táblázat a vetített csúcsok koordinátaival. A táblázat forrása [2]	18
5.1.	A csonkolt tetraéder. Az ábra forrása: Wikipédia	21
5.2.	A csonkolt tetraéder P_b (balra) és P_k vetülete (jobbra). Az ábra forrása: [7].	22
5.3.	A Rupert tulajdonság bizonyítása (a P_b és P_k vetület egymáson, körben a kis képeken pedig a csúcsok körüli részek kinagyítva). Forrás: [7].	23
6.1.	A kivágott kocka és az áthaladás. Az ábra forrása [11].	25
6.2.	A 0,4 élarányú téglalap. Az ábra forrása [11].	26
6.3.	Az R téglalap középre helyezése. Az ábra forrása [11].	26
6.4.	A B csúcs a kocka lapján, illetve élén. Az ábra forrása [11].	28

6.5. A és B csúcsok megegyező, illetve szomszédos lapokon. Az ábra forrása [11].	29
6.6. B az e -vel szomszédos, illetve e -re merőleges lapon. Az ábra forrása [11].	29
6.7. Egy nem maximális téglalap a kockában. Az ábra forrása [11].	30
6.8. Az a) és b) helyzetek. Az ábra forrása [11].	31
6.9. L_{max} értéke λ élarány esetén (az ábra [11]	33
6.10. a $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ és a $\lambda_2 \leq \lambda \leq 1$ esetek. Az ábra forrása [11].	34
8.1. Az egységkocka és a Menger-szivacs néhány iterációja. Az ábra forrása: Wikipédia	44