NYILATKOZAT

Név: Monos Attila

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematikus BsC

NEPTUN azonosító: O045TP

Szakdolgozat címe:
Törtkalkulus, avagy tetszőleges rendű deriválás

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.31.

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Analízis Tanszék

Törtkalkulus, avagy tetszőleges rendű deriválás

Szakdolgozat

Monos Attila

Matematika BSc

Témavezető:

Kós Géza

adjunktus

2022

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az egyváltozós valós analízis két nagyon széles körben használt eszköze a deriválás és az integrálás. Tanulmányaim során több párhuzamot is találtam a deriválás, integrálás és a hatványozás, gyökvonás között – mindkét esetben egyik művelet inverze a másiknak. Felmerült bennem a kérdés, hogy össze lehet-e vonni úgy a deriválás és integrálás fogalmát, mint ahogy a gyökvonás be lett építve a hatványozás fogalmába. Dolgozatomban ezt fogom vizsgálni Keith Oldham és Jerome Spanier műve [1] alapján.

Az első fejezetben adok egy olyan definíciót tetszőleges sok deriválásra, és tetszőleges sok integrálásra, mely összevonható egy operátor alá, majd megvizsgálom, hogy ez az operátor miket őriz meg a hagyományos deriválás azonosságaiból. A második fejezetben kiterjesztem ezt az operátort tetszőleges valós rendű deriválásra, valamint megadok egy ekvivalens definíciót, mely segíteni fog a harmadik fejezetben, ahol megvizsgálom, hogy tetszőleges valós rend esetén mennyire maradnak meg a hagyományos deriválás azonosságai – ahogy tanulmányaim során több más fogalom kiterjesztése során is észrevettem, ha elég tág körbe terjesztjük ki a fogalmakat, egyes azonosságok kevésbé lesznek igazak; dolgozatom célja az is, hogy ezt vizsgáljam tetszőleges valós rendű derivált esetén. Dolgozatomat egy rövid értékeléssel zárom, hogy a deriváltoperátor tetszőleges rendre való kiterjesztése során milyen áldozatokat kellett hoznunk, majd kitekintek, hogy merre haladhatnék tovább a témakör vizsgálatában.

Köszönetet szeretnék mondani Kós Gézának, aki elvállalta témavezetésemet, valamint egyetemi oktatóimnak, akik előadásaik során megismertették velem a matematika szépségét, és megmutatták, hogyan lehet fogalmakat bővízeni, kiterjeszteni.

1. fejezet

Deriválás, integrálás egységesítése

Ebben a fejezetben – felvezetőként a dolgozat témájához – a deriválás egy rendet feltüntető jelölését kiterjesztem integrálás jelölésére is, és megvizsgálom, hogy a képzésem során tanult deriválási, integrálási azonosságok hogyan írhatóak le ezzel a kiterjesztett jelöléssel.

1.1. Természetes rendű deriválás

A természetes rendű deriválás tárgyalása során felteszem, hogy $a < b \in \mathbb{R}$, és $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények.

1.1.1. definíció. Legyen $c \in (a, b)$. Ekkor $f(x)$ deriválható a c pontban, ha az alábbi határérték létezik és véges:

$$\partial_x f(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \tag{1.1.1}$$

és ekkor $\partial_x f(c)$ $f(x)$ c-beli deriváltja.

Ha $f(x)$ minden $c \in (a, b)$ pontban deriválható, akkor $f(x)$ deriválható (a, b)-n, és $f(x)$ deriváltfüggvénye $\partial_x f(x)$.

Ez a valós, egyváltozós deriválás szokásos definíciója, és a többszörös deriválhatóságot ennek segítségével definiálhatjuk:

1.1.2. definíció. Legyen $c \in (a, b)$, $n > 1$ egész szám, és tegyük fel, hogy létezik olyan $r > 0$, hogy $f(x)$ minden $c_0 \in (c - r, c + r)$ pontban $(n-1)$-szer deriválható. Jelölje a c_0-beli $(n-1)$. deriváltat $\partial_x^{n-1} f(c_0)$. Ekkor $f(x)$ c-beli n. (másképp: n-edrendű) deriváltja az alábbi határérték, ha az létezik és véges:

$$\partial_x^n f(c) = \lim_{x \to c} \frac{\partial_x^{n-1}(x) - \partial_x^{n-1}(c)}{x - c} \tag{1.1.2}$$

Ez a definíció induktív módon építi fel a természetes rendű deriváltakat: ahhoz, hogy legyen n. deriváltunk, n db deriválást kell végrehajtani. Így adódik, hogy mit érdemes 0. deriváltnak venni: 0-szor deriváltunk, tehát a függvénnyel semmi se történt. Így $\partial_x^0 f(x) = f(x)$.

A $\Delta(x) = x - c$ jelöléssel élve a (1.1.1) definíció átírható az alábbi alakba:

$$\partial_x f(c) = \lim_{\Delta(x) \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta(x))}{\Delta(x)}$$

Ennek segítségével $f(x)$ első néhány deriváltja c-ben a következő alakban írható fel (1.1.2) alapján:

$$\partial_x^2 f(c) = \lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{\partial_x f(c) - \partial_x f(x-\Delta(x))}{\Delta(x)} = \lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{f(x) - 2f(x-\Delta(x)) + f(x-2\Delta(x))}{(\Delta(x))^2},$$

$$\partial_x^3 f(c) = \lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{\partial_x^2 f(x) - \partial_x^2 f(x-\Delta(x))}{\Delta(x)} =$$

$$\lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{f(x) - 3f(x-\Delta(x)) + 3f(x-2\Delta(x)) - f(x-3\Delta(x))}{(\Delta(x))^3},$$

ahol a limeszen belüli hányadost osztott differenciaként képzeljük el: az első deriváltnál egy kéttagú osztott differenciát ([5]) vizsgálunk, ez $f[x, x-\Delta(x)] = \frac{f(x)-f(x-\Delta(x))}{\Delta(x)}$. A második derivált során ez egy háromtagú osztott differencia:

$$\frac{f[x, x-\Delta(x)] - f[x-\Delta(x), x-2\cdot\Delta(x)]}{x-c} = \frac{\frac{f(x)-f(x-\Delta(x))}{\Delta(x)} - \frac{f(x-\Delta(x))-f(x-2\cdot\Delta(x))}{\Delta(x)}}{\Delta(x)} =$$

$$\frac{f(x) - 2\cdot f(x-\Delta(x)) + f(x-2\cdot\Delta(x)}{(\Delta(x))^2}$$

Hasonló módon épül fel a harmadik derivált végső alakja is. Megfigyelhető, hogy ha a $(-1)^k$ oszcilláló előjeltől eltekintünk, akkor az $f(x-k\cdot\Delta(x))$ függvényértékek együtthatója Pascal-háromszögszerűen növekszik, így az n-edrendű derivált a következő általános képlettel adható meg:

$$\partial_x^n f(x) = \lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot f(x-k\cdot\Delta(x))}{(\Delta(x))^n} \tag{1.1.3}$$

1.2. Negatív egész rendű deriválás

A cél az, hogy tetszőleges $q \in \mathbb{Z}$ esetén értelmezhessük a $\partial_x^q f(x)$-et; ehhez a negatív egész rendű deriválást szeretnénk definiálni. Természetes módon jön az a megközelítés, hogy $\partial_x^{-1} f(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$, hiszen így $\partial_x(\partial_x^{-1} f(x)) = f(x)$ fennáll, és a kiterjesztés során szeretnénk, hogy megmaradjék az, hogy a deriválás és az integrálás egymás inverzműveletei. Azonban ahhoz, hogy egyértelmű függvényt kapjunk, érdemes egy alsó határt meghatározni – egyszerűség kedvéért legyen ez az alsó határ először 0. Ekkor a következőképp adható meg negatív egész rendű derivált:

$$\partial_x^{-1} f(x) = \int\limits_0^x f(y)\mathrm{d}y$$

$$\partial_x^{-2} f(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} f(x_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1$$

$$\partial_x^{-n} f(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^{x_{n-1}} \dots \int\limits_0^{x_2} \int\limits_0^{x_1} f(x_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-2}\mathrm{d}x_{n-1}$$

tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén. Negatív x-ek esetén ez a definíció nem működik, így a függvényt eltolva, $y = y+a$ helyettesítéssel

$$\int\limits_a^x f(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^{x-a} f(y+a)\mathrm{d}y,$$

így a fenti definíciók felírhatóak a alsó határral is (emlékezzünk, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényeket vizsgálunk éppen):

$$\partial_{x-a}^{-1} f(x) = \int\limits_a^x f(y)\mathrm{d}y$$

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) = \int\limits_a^x \int\limits_a^{x_{n-1}} \dots \int\limits_a^{x_2} \int\limits_a^{x_1} f(x_0)\mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-2}\mathrm{d}x_{n-1} \tag{1.2.1}$$

A továbbiakban ezt a jelölést fogjuk használni negatív egész rendű deriváltra. Természetes módon látszik, hogy ha $f(x) \not\equiv 0$, akkor $\partial_{x-a}^{-n} f(x) = \partial_x^{-n} f(x)$ nem biztos, hogy fennáll, hiszen más határokkal integrálunk egy nem azonosan 0 függvényt.

1.2.1. Természetes és negatív egész rendű deriválásfogalom egyesítése

Ahhoz, hogy definiálhassuk az egész rendű deriváltat, melynek speciális esete a természetes és negatív egész rendű deriválás, az (1.1.3)-hoz hasonló képletet kell keresnünk arra az esetre, ha $q \in \mathbb{Z}^-$.

A $q = -1$ eset egy Riemann-integrál, így a $\Delta_N(x) = \frac{x-a}{N}$ jelöléssel felírható a következő határtétékként:

$$\partial_{x-a}^{-1} f(x) = \int\limits_a^x f(y)\mathrm{d}y = \lim_{N\to\infty} \left[\Delta_N(x) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k \cdot \Delta_N(x))\right] =$$
$$\lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[\Delta_N(x) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(x - k \cdot \Delta_N(x))\right]$$

Ugyancsak osztott differenciákat vizsgálva a $q = -2$, $q = -3$ esetek az alábbi módon írhatóak fel:

$$\partial_{x-a}^{-2} f(x) = \int\limits_a^x \int\limits_a^{x_1} f(x_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1 = \lim_{\Delta_N(\to)0} \left[\Delta_N(x) \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \left(\Delta_N(x) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(x - k \cdot \Delta_N(x) - l \cdot \Delta_N(x)\right)\right] =$$
$$\lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[(\Delta_N(x))^2 \cdot (f(x) + 2 \cdot f(x - \Delta_N(x)) + \ldots + N \cdot f(x - (N-1) \cdot \Delta_N(x))\right] \Rightarrow$$
$$\partial_{x-a}^{-2} f(x) = \lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[(\Delta_N(x))^2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \cdot f(x - k \cdot \Delta_N(x)\right]$$
$$\partial_{x-a}^{-3} f(x) = \lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[\Delta_N(x))^3 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \cdot f(x - k \cdot \Delta_N(x)\right]$$

Itt azt vehetjük észre, hogy az együtthatók $\binom{k+n-1}{k}$ alakban írhatóak fel, így a következőt kapjuk:

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) = \lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[(\Delta_N(x))^n \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+n-1}{k} \cdot f(x - k \cdot \Delta_N(x))\right] \tag{1.2.2}$$

Ez már hasonlít arra a határértékre, amivel $\partial_x^n f(x)$-et definiáltuk. Ha az (1.1.3) pontban leírt határérték létezik és véges, akkor az egyoldali határértékek is léteznek, végesek, és egyeznek a kétoldali határértékkel – így akár egy diszkrét pontsorozattal is tarthatunk csak egy oldalról a kívánt pontba. Így a definícióban szereplő c-beli deriválás alapján $f(x)$ n-edrendű deriváltfüggvénye az alábbi alakban is felírható:

$$\partial_x^n f(x) = \partial_{x-a}^n f(x) = \lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[\Delta_N(x))^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot f(x - k \cdot \Delta_N(x)\right] =$$
$$\lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[\Delta_N(x))^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot f(x - k \cdot \Delta_N(x)\right], \tag{1.2.3}$$

hiszen ha $k > n$ egészek, akkor $\binom{n}{k} = 0$, így nagyobb határral is szummázhatunk. Innentől ezt az ekvivalens definíciót alkalmazzuk természetes kitevőjű deriváltfüggvényre, hiszen ez már nagyban hasonlít (1.2.2)-re – és a két definíció egységes alakba is írható. Szerepeljék most itt pár definíció és azonosság (források: |3| 824. – 825. oldal, |2|, |6|, |7|), melyekre a dolgozatom során többször fogok hivatkozni.

1.2.1. definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$. Ekkor A Gamma-függvény az alábbi $\Gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}$$

A binomiális együttható tetszőleges valós számra:

$$\binom{q}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (q-j)$$

A másodfajú Stirling-számokat az alábbi rekurzió adja meg:

$$S(0,l) = S(k,0) = 0, \text{ kivéve } S_0^0 = 1, \qquad S(k+1,l) = S(k,l-1) + l \cdot S(k,l)$$

1.2.2. tétel.

1. *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$ esetén az alábbiak igazak a Gamma-függvényre:*

   (a)

   $$(-1)^k \cdot \binom{q}{k} = \binom{k-q-1}{k} = \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)}$$

   (b)

   $$\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(k)} = \frac{\Gamma(-q)\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(-q-1)\Gamma(k+1)}$$

   (c)

   $$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} \right) = k^{-1-q} \cdot \left(1 + \frac{q\cdot(q+1)}{2k} + O(k^{-2}) \right)$$

   (d)

   $$\Gamma(-x) = \frac{-\pi \cdot \frac{1}{\sin(\pi\cdot x)}}{\Gamma(x+1)}$$

2. *Tetszőleges $q, r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ esetén*

   $$\binom{q+r}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{q}{k} \cdot \binom{r}{j-k}$$

Az állítás 1.(a) pontja segítségével adhatunk egy definíciót tetszőleges egész rendű deriváltra.

1.2.3. definíció. Legyen $f(x)$ korlátos és sima $[a,b]$-n, $q \in \mathbb{Z}$. Ekkor $f(x)$ q. deriváltja az alábbi határérték, ha az létezik és véges:

$$\partial_{x-a}^q f(x) = \lim_{\Delta_N(x)\to 0} \left[(\Delta_N(x))^{-q} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} f(x - k\cdot\Delta_N(x)) \right) \right] =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q}}{\Gamma(-q)} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} \cdot f\left(x - k \cdot \left(\frac{x-a}{N} \right) \right) \right) \right]$$

1.2.4. *megjegyzés.* A definícióban úgy fogalmaztunk, hogy $f(x)$ legyen korlátos és sima $[a,b]$-n. Ez alatt azt értjük – és a dolgozat teljes egészében azt fogjuk érteni – hogy $f(x)$ korlátos $[a,b]$-n és sima (a,b)-n.

1.3. Deriválás azonosságok

A hagyományos deriválásnál megszokott szabályok nem alkalmazhatóak teljesen ugyanúgy az integrálásra, erre jó példa a Leibniz-szabály, mely helyett csak parciális integrálási szabályunk van. Azonban ennél gyengébb azonosságok az (1.2.3) definícióból kihozhatóak, ezeket fogjuk most vizsgálni. Először szerepeljék itt egy tétel, melyben összefoglalom a hagyományos deriválás és integrálás tulajdonságait:

1.3.1. tétel (Deriválás, integrálás azonosságai). *Tegyük fel, hogy $f(x), g(x)$ deriválható és integrálható függvények, $c \in R$. Ekkor az alábbiak igazak:*

1. (a) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
   (b) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
   (c) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
   (d) *Ha* $g(x) \neq 0$, *akkor* $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
   (e) $(f \circ g)(x)' = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$
2. (a) $\int c \cdot f(x) \mathrm{d}x = c \cdot \int f(x) \mathrm{d}x$
   (b) $\int f(x) + g(x) \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x + \int g(x) \mathrm{d}x$
   (c) $\int f(x) \cdot g'(x) \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x$
   (d) $\int (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) \mathrm{d}x = (f \circ g)(x) + C$

Már a tétel alapján látszik, hogy a hányadosszabályt nem tudjuk tetszőleges egész rendre általánosítani, mivel nincs is megfelelő párja még egyszeres integrálás esetén sem – így ezzel nem is folalkozunk dolgozatom során. Célunk az, hogy az így megmaradt 4-4 azonosságpárt egy-egy azonosságba vonjuk össze, melyeknek a tétel megfelelő pontjai speciális esetei. Mielőtt azonban ezt elkezdjük vizsgálni, felmerül a kérdés, hogy az egész rendű deriválás sorrendje felcserélhető-e – ezt a kérdést fogjuk először megvizsgálni. A fejezet során használni fogom az alábbi rövidített jelölést annak érdekében, hogy a kapott formulák átláthatóbbak legyenek:

$$f^{(q)}(x) = \partial_{x-a}^{q} f(x), \qquad q \in \mathbb{Z}$$

1.3.1. Egymás utáni deriválás, linearitás

A vizsgálandó kérdés az, hogy igaz-e az, hogy tetszőleges $q, r \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\partial_{x-a}^{q} \left(\partial_{x-a}^{r} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{q+r} f(x) = \partial_{x-a}^{r} \left(\partial_{x-a}^{q} f(x)\right)$$

Az (1.2.3) egyenlőség megalkotása során csak a szokásos többszörös deriválás definíciót írtuk át másik, ekvivalens alakba, így tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén igaz az alábbi:

$$\partial_{x-a}^{n} \left(\partial_{x-a}^{m} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{n+m} f(x) = \partial_{x-a}^{m} \left(\partial_{x-a}^{n} f(x)\right),$$

vagyis több, egymás utáni természetes rendű deriválás sorrendje felcserélhető, és a rendek összeadódnak. Ugyanígy az (1.2.1) alak alapján ez igaz $-n$, $-m$ rendekre is:

$$\partial_{x-a}^{-n} \left(\partial_{x-a}^{-m} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{-n-m} f(x) = \partial_{x-a}^{-m} \left(\partial_{x-a}^{-n} f(x)\right) \tag{1.3.1}$$

Egy vizsgálandó eset maradt, ez pedig az, amikor q és r nem azonos előjelűek. Ha $q = 0$ vagy $r = 0$, akkor – mivel egy függvény 0. deriváltja önmaga – triviálisan teljesülnek a fentiek, így feltehetjük, hogy $q, r \neq 0$.

Legyen $q = m > 0$ és $r = -n < 0$, és vizsgáljuk meg, mi történik, ha először integrálunk, majd deriválunk. Leibniz integrálderiválási tétele alapján (|3| 11. oldal)

$$\partial_{x-a}(f^{(-n)}(x)) = f^{(-n+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-n)}(a)$$

Ahogy elvégezzük a maradék $m-1$ db deriválást, észrevehetjük, hogy most már csak egy véges összeget deriválgatunk, ahol a konstans tagok kiesnek, és a fokszámok csökkennek, így:

$$\partial_{x-a}^{m}\left(\partial_{x-a}^{-n} f(x)\right) = f^{(-n+m)}(x) - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-m}}{(k-m)!} f^{(k-n)}(a) \tag{1.3.2}$$

Vegyük észre, hogy ha $m \geq n$, azaz legalább annyiszor deriválnánk, mint integrálnánk, akkor a szumma üres, és így azt kapjuk, hogy

$$\partial_{x-a}^{m}\left(\partial_{x-a}^{-n} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{m-n} f(x),$$

azonban ha $m < n$, akkor a szumma nemüres – ekkor kell az az extra feltétel, hogy a szummában szereplő deriváltak a-ban eltűnnek, vagyis $f(x)$ első $m-1$ deriváltja a-ban 0.

Tekintsük most a másik esetet, amikor először deriválunk, majd integrálunk:

$$\partial_{x-a}^{-1}\left(\partial_{x-a}^{m} f(x)\right) = \int_a^x f^{(m)}(y)\mathrm{d}(y) = f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(a)$$

Ezt az integrálást újra elvégezve az eredmény elkezd bonyolódni, hiszen egy konstans tagot is integrálnunk kell:

$$\partial_{x-a}^{-2}\left(\partial_{x-a}^{m} f(x)\right) = \int_a^x f^{(m-1)}(y) - f^{(m-1)}(a)\mathrm{d}y = f^{(m-2)}(x) - f^{(m-2)}(a) - (x-a)\cdot f^{(m-1)}(a)$$

A harmadik integrálás elvégeztével már látható, hogyan alakul az általános eset:

$$\partial_{x-a}^{-3}\left(\partial_{x-a}^{m} f(x)\right) = \int_a^x f^{(m-2)}(y) - f^{(m-2)}(a) - (y-a)\cdot f^{(m-1)}(a)\mathrm{d}y =$$

$$f^{(m-3)}(x) - f^{(m-2)}\cdot(x-a) - f^{(m-1)}(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$\partial_{x-a}^{-n}\left(\partial_{x-a}^{m} f(x)\right) = f^{(-n+m)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!}\cdot f^{(k+m-n)}(a) \tag{1.3.3}$$

A szummázást $l = q$- ból indítva és ezt kompenzálva láthatjuk, hogy (1.3.3) és (1.3.2) jobb oldala megegyezik, így a baloldala is. Így a következőt kapjuk:

$$\partial_{x-a}^{m}\left(\partial_{x-a}^{-n} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{m-n} f(x) = \partial_{x-a}^{-n} f(x)\left(\partial_{x-a}^{m} f(x)\right) + \sum_{k=n-m}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+m-n)}(a)$$

Vagyis összefoglalva az alábbit mondhatjuk ki egész rendű deriválásra:

1.3.2. tétel (Egész rendű deriválás sorrendje)**.** *Tegyük fel, hogy $f(x)$ korlátos, sima függvény, $q, r \in \mathbb{Z}$. Ekkor az alábbiak igazak:*

1. *Ha q és r előjele megegyezik, akkor*

$$\partial_{x-a}^{q}\left(\partial_{x-a}^{r} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{q+r} f(x) = \partial_{x-a}^{r}\left(\partial_{x-a}^{q} f(x)\right)$$

2. Ha q és r különböző előjelűek, akkor is felcserélhető a deriválás sorrendje, kivéve ha először deriválunk, majd integrálunk. Ekkor plusz feltételként teljesülnie kell annak, hogy $f(x)$ $0., 1., \dots, (r-1)$. deriváltjai eltűnjenek a-ban.

Vizsgáljuk meg gyorsan a linearitást: az (1.2.3) definíció alapján $\partial^q_{x-a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \partial^q_{x-a} f(x)$, hiszen c kiemelhető a véges szummából, majd utána a limeszből is.

Ugyanígy $\partial^q_{x-a}(f(x)+g(x)) = \partial^q_{x-a} f(x) + \partial^q_{x-a} g(x)$, hiszen a szumma szétbontható a megfelelő módon, majd a limesz is szétbontható két limesz összegére. Tehát ∂^q_{x-a} lineáris operátor.

1.3.2. Leibniz-szabály

Továbbra is használva a rövidített $f^{(q)}(x)$ jelölést, ha $q > 0$, akkor az 1.3.1 tételből kiindulva

$$(f(x) \cdot g(x))^{(1)} = f^{(1)}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{(1)}(x)$$
$$(f(x) \cdot g(x))^{(2)} = (f^{(1)}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{(1)}(x))^{(1)} = f^{(2)}(x) \cdot g(x) + 2 \cdot f^{(1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + f(x) \cdot g^{(2)}(x)$$
$$f(x) \cdot g(x)^{(3)} = f^{(3)}(x) \cdot g(x) + 3 \cdot f^{(2)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + 3 \cdot f^{(1)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + f(x) \cdot g^{(3)}(x)$$

Ismét észrevehető, hogy Pascal-háromszögszerűen épülnek fel a különböző együtthatók – sőt most egy binomiális tételhez hasonló általános alak is felírható:

1.3.3. tétel (Leibniz-szabály természetes kitevőre)**.** *Tegyük fel, hogy $f(x), g(x)$ sima függvények (a, b)-n, $q \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$(f(x) \cdot g(x))^{(q)} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \cdot f^{(q-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

Legyen most $q = -n < 0$, és vizsgáljuk meg, többszörös integrálás esetén a szorzatszabály hogyan alakul. Ha egy szorzatot egyszeresen integrálunk, akkor a parciális integrálás szabályát alkalmazhatjuk:

$$\int_a^x g(y) \cdot v'(y) \mathrm{d}y = [g(y) \cdot v(y)]_a^x - \int_a^x g'(y) \cdot y(y) \mathrm{d}y =$$

Ha $v(y)$-t egyenlővé tesszük $\int_a^y f(z)\mathrm{d}z$-vel, akkor a fenti egyenlőség az alábbi alakba írható át:

$$\int_a^x f(y) \cdot g(y) = g(x) \cdot \int_a^x f(z)\mathrm{d}z - \int_a^x \left(\int_a^y f(z)\mathrm{d}z \right) \cdot g'(y)\mathrm{d}y,$$

hiszen $v(a) = 0$, így

$$\partial^{-1}_{x-a}(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot \partial^{-1}_{x-a} f(x) - \partial^{-1}_{x-a} \left(\partial^{1}_{x-a} g(x) \cdot \partial^{-1}_{x-a} f(x) \right) \tag{1.3.4}$$

Ez egy rekurzívnak tűnő képlet, hiszen az összeg utolsó tagjában egy újabb integrálás szerepel. (1.3.4)-et alkalmazva az utolsó tagra, kihasználva az (1.3.1)-ben foglaltakat:

$$\partial^{-1}_{x-a}(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot \partial^{-1}_{x-a} f(x) - \partial^{1}_{x-a} g(x) \cdot \partial^{-2}_{x-a} f(x) + \partial^{-1}_{x-a} \left(\partial^{2}_{x-a} g(x) \cdot \partial^{-2}_{x-a} f(x) \right)$$

Ez a végtelenségig ismételgethető, így a következő függvénysor adja meg a szorzat integrálját:

$$\partial^{-1}_{x-a}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \partial^{j}_{x-a} g(x) \cdot \partial^{-1-j}_{x-a} f(x)$$

Alkalmazva az 1.2.2 tétel 1.(a) pontját $q = k = j$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $(-1)^j = (-1)^j \cdot \binom{j}{j} = \binom{j-1-j}{j} = \binom{-1}{j}$, így

$$\partial_{x-a}^{-1}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-1}{j} \cdot \partial_{x-a}^{j} g(x) \cdot \partial_{x-a}^{-1-j} f(x) \tag{1.3.5}$$

Ezt újra integrálva, a sorrendet megfelelően felcserélve a szorzat második integrálja a következőképp alakul:

$$\partial_{x-a}^{-2}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-1}{j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} \partial_{x-a}^{j+k} g(x) \cdot \partial_{x-a}^{-j-k-2} f(x) =$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=j}^{\infty} \binom{-1}{j} \cdot \binom{-1}{l-j} \cdot \partial_{x-a}^{l} g(x) \cdot \partial_{x-a}^{-2-l} f(x)$$

Ha a $j > l$, akkor a 1.2.1 definíció alapján $\binom{-1}{j} = 0$, így a szummák felcserélésével, így az 1.2.2 tétel 2. pontja alapján a következő alakba hozható a második integrál:

$$\partial_{x-a}^{-2}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{l} \binom{-1}{j} \binom{-1}{l-j} \partial_{x-a}^{l} g(x) \cdot \partial_{x-a}^{-2-l} f(x) =$$
$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{-2}{l} \cdot \partial_{x-a}^{l} g(x) \cdot \partial_{x-a}^{-2-l} f(x) \tag{1.3.6}$$

Ha -2 helyett $-n$-re szeretnénk ezt a szabályt alkalmazni, akkor (1.3.5) és (1.3.6) alapján induktívan megkapjuk a Leibniz-szabályt negatív egész kitevőkre:

$$\partial_{x-a}^{-n}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-n}{l} \cdot \partial_{x-a}^{l} g(x) \cdot \partial_{x-a}^{-n-l} f(x)$$

Ha a 1.3.3 tételben kihasználjuk azt, hogy pozitív egész q, k esetén ha $k > q$, akkor $\binom{q}{k} = 0$, akkor egy közös alakba írhatjuk a Leibniz-szabályt egész kitevvőre:

1.3.4. tétel (Leibniz-szabály egész kitevőre)**.** *Tegyük fel, hogy $f(x), g(x)$ sima, korlátos függvények. Ekkor*

$$\partial_{x-a}^{q}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \cdot \partial_{x-a}^{q-k} f(x) \cdot \partial_{x-a}^{k} g(x)$$

1.3.3. Láncszabály

A láncszabály párja a helyettesítéses integrálás – azonban már az első helyettesítéses integrál elvégzésénél egy konstanst kapunk, így láncszabályt csak pozitív deriváltra tudunk értelmezni. Mivel $q \in \mathbb{Z}^+$ esetén nem számít, hogy $\partial_{x-a}^{q} f(x)$-et vagy $\partial_x^q f(x)$-et tekintjük, ezért a jelölés egyszerűségének érdekében az utóbbit fogjuk a láncszabály tárgyalása során tekinteni. Induljunk ki az első deriváltra ismert formulából, és nézzük meg, mi történik, ha azt tovább deriválgatjuk:

$$\partial_x f(g(x)) = \partial_u f(u) \cdot \partial_x g(x),$$

ahul $u = g(x)$. Ha ezt ismét lederiváljuk, és alkalmazzuk a Leibniz-szabályt és a deriválás sorrendjét megfelelően választjuk, akkor

$$\partial_x^2 f(g(x)) = \partial_x \left(\partial_u f(u) \cdot \partial_x g(x)\right) =$$
$$\partial_x \left(\partial_u f(u)\right) \cdot \partial_x g(x) + \partial_u f(u) \cdot \partial_x^2 g(x) =$$
$$\partial_u^2 f(u) \cdot \left(\partial_x^g (x)\right)^2 + \partial_u f(u) \cdot \partial_x^2 g(x)$$

Az átláthatóság kedvéért $f^{(k)} = \partial_u^k f(u)$ és $g^{(k)} = \partial_x^k g(x)$ jelöléseket bevezetve $n = 2, 3, 4, 5$-re az alábbi formában írható a láncszabály (|1| 36. oldal):

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 f(g(x)) &= f^{(1)} \cdot g^{(2)} + f^{(2)} \cdot (g^{(1)})^2 \\
\partial_x^3 f(g(x)) &= f^{(1)} \cdot g^{(3)} + 3 \cdot f^{(2)} \cdot g^{(1)} \cdot g^{(2)} + f^{(3)} \cdot (g^{(1)})^3 \\
\partial_x^4 f(g(x)) &= f^{(1)} \cdot g^{(4)} + 4 \cdot f^{()} 2 \cdot g^{(1)} \cdot g^{(3)} + 6 \cdot f^{(2)} \cdot (g^{(2)})^2 + 6 \cdot f^{(3)} \cdot (g^{(1)})^2 \cdot g^{(2)} + f^{(4)} \cdot (g^{(1)})^4 \\
\partial_x^5 f(g(x)) &= f^{(1)} \cdot g^{(5)} + 5 \cdot f^{(2)} \cdot g^{(1)} \cdot g^{(4)} + 10 \cdot f^{()} 3 \cdot (g^{(1)})^2 \cdot g^{(3)} + \\
&\quad 30 \cdot f^{(3)} \cdot g^{(1)} \cdot (g^{(2)})^2 + 10 \cdot f^{(4)} \cdot (g^{(1)})^3 \cdot g^{(2)} + f^{(5)} \cdot (g^{(1)})^5
\end{aligned}$$

Ennek általánosítása Faá di Bruno formulája (|3| 823. oldala), mely szerint

$$\partial_x^q f(g(x)) = q! \cdot \sum_{j=1}^{q} f^{(j)} \cdot \sum_{C} \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1}{P_k!} \left(\frac{g^{(k)}}{k!} \right)^{P_k} \right),$$

ahol $C = \{P_1, \ldots, P_q \in \mathbb{Z}_0^+ : \sum_{k=1}^{q} k \cdot P_k = q, \sum_{k=1}^{q} P_k = j\}$, és a szumma végigfut C minden elemén. Ez a formula nagy q esetén rendkívül esetlen, azonban vannak speciális esetek, amikor használható, szerepeljék erre itt két példa (|1| 37. oldal):

$$\begin{aligned}
\partial_x^q f(e^x) &= e^{q \cdot x} \cdot \sum_{j=1}^{q} S(q, j) \cdot f^{(j)} \\
\partial_x^q g(x)^2 &= 2 \cdot g^{(q)} + \sum_{j=1}^{q-1} \binom{q}{j} \cdot g^{(j)} \cdot g^{(q-j)},
\end{aligned}$$

melyből az utóbbi a Leibniz-szabály alkalmazásával is megkapható.

Mint ahogy azt már megállapítottuk, negatív rend esetén az első integrálás elvégzése után már nem számít a helyettesítés – azonban az alábbi állítás segítségünkre lehet abban, hogy ez ne legyen probléma.

1.3.5. állítás. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ sima, korlátos, továbbá $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\int_a^x f(y) \mathrm{d}y = \frac{1}{n!} \cdot \partial_x^n \left(\int_a^x (x - y)^n \cdot f(y) \mathrm{d}y \right)$$

Bizonyítás. Ha $n = 0$, akkor behelyettesítve azt kapjuk, hogy $\int_a^x f(y) \mathrm{d}y = \int_a^x f(y) \mathrm{d}y$, ez igaz.

Ha pedig $n > 0$, akkor mind $(x - y)^n$, mind $f(y)$ sima, korlátos (hiszen $(x - y)^n$ esetében $(b - a)^n$ felülről becsül), így szorzatuk is sima és korlátos, ebből következően az alábbi biztosan elvégezhető:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} \cdot \partial_x^n \left(\int_a^x (x - y)^n f(y) \cdot \mathrm{d}y \right) &= \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x \partial_x^n \left((x - y)^n \cdot f(y) \right) \mathrm{d}y = \\
\frac{1}{n!} \cdot \int_a^x n! \cdot f(y) \mathrm{d}y &= \int_a^x f(y) \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

és ezzel az állítást beláttunk minden $n \in \mathbb{N}$-re. □

$n = 1$ esetet alkalmazva, egy integrálással az alábbit kapjuk:

$$\begin{aligned}
\partial_{x-a}^{-2} f(x) &= \int_a^x \int_a^{x_1} f(x_0) \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 = \int_a^x \left(\frac{1}{1!} \partial_{x_1} \int_a^{x_1} (x_1 - x_0) \cdot f(x_0) \mathrm{d}x_0 \right) \mathrm{d}x_1 = \\
&\frac{1}{1!} \int_a^x (x - x_0) f(x_0) \mathrm{d}x_0
\end{aligned}$$

Ezt $n-1$ alkalommal megismételve kapunk egy formulát, mely egy súlyozott integrálként adja meg $f(x)$ n-szeres integráltját (vagyis $-n$-edrendű deriváltját):

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) \mathrm{d}y \tag{1.3.7}$$

Így behelyettesítést végezhetünk integrálokra, azzal a kockázattal persze, hogy amíg $\partial_{x-a}^{-n} f(x)$-et kezelhetőbb alakra hoztuk, fennmarad a kérdés, hogy $(x-y)^n$ kezelhető marad-e a helyettesítés elvégzése után.

1.3.4. Alsó határtól való függés

Ha $[a,b]$ véges intervallum, vagy $[a,\infty)$-t tekintjük, akkor kézenfekvő, hogy az (1.2.1)-ben leírt formulában az alsó határt a-nak válasszuk. Azonban felmerül a kérdés, hogy mi történik akkor, ha valami $a < c < x$ határt választuk $\partial_{x-a}^{-n} f(x)$ számolása során – és ez a kérdés elkerülhetetlen, ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket szeretnénk egész renddel deriválni. (1.3.3) az $m=0$ esetben pont $f(x)$ n. integráljáról nyilatkozik:

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) = f^{-n}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k-n)}(a)$$

Ha a helyére most valamilyen $c \in (a,x)$ értéket írnánk, akkor csak a kifejezés második tagja változik, így $\partial_{x-a}^{-n} f(x)$ és $\partial_{x-c}^{-n} f(x)$ különbsége felírható az alábbi alakban:

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) - \partial_{x-c}^{-n} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^k}{k!} \cdot f^{(k-n)}(c) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k-n)}(a) =$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \cdot \Big((x-c)^k \cdot f^{(k-n)}(c) - (x-a)^k \cdot f^{(k-n)}(a) \Big)$$

Mivel azt szeretnénk vizsgálni, hogy a helyett c alsó határt alkalmazván hogyan változik $\partial_{x-a}^{-n} f(x)$, ezért az alábbi különbséget kell vizsgálnunk:

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) - \partial_{x-c}^{-n} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^k}{k!} \cdot f^{(k-n)}(c) =$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k-n)}(a) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c+c-a)^k}{k!} \cdot f^{(k-n)}(a) =$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k-n)}(a) \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \frac{(x-c)^j \cdot (c-a)^{k-j}}{k!} =$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k-n)}(a) \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-c)^j \cdot (c-a)^{k-j}}{j!(k-j)!} \tag{1.3.8}$$

(1.3.8)-ban a szummációs indexet váltogatva a következő alakot kaphatjuk:

$$-\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k-n)}(a) \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-c)^j \cdot (c-a)^{k-j}}{j!(k-j)!} =$$
$$-\sum_{K=0}^{n-1} \frac{(x-c)^K}{K!} \sum_{J=K}^{n-1} \frac{(c-a)^{J-K}}{(J-K)!} \cdot f^{(J-n)}(a) =$$
$$-\sum_{K=0}^{n-1} \frac{(x-c)^K}{K!} \sum_{j=0}^{n-K-1} \frac{(c-a)^j}{j!} f^{(j+K-n)}(a) \tag{1.3.9}$$

Ekkor $k = K$, majd $n - K = k$ helyettesítésekkel (1.3.9) alapján

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) - \partial_{x-c}^{-n} f(x) =$$

$$\sum_{K=0}^{n-1} \frac{(x-c)^K}{K!} \cdot \left(f^{(K-n)}(c) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(c-a)^j}{j!} f^{(j-k)}(a) \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x-c)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \left(f^{(-k)}(c) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(c-a)^j}{j!} f^{(j-k)}(a) \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x-c)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \partial_{c-a}^{-k} f(c)$$

Ha jobban megvizsgáljuk a kapott azonosságot, akkor azt látjuk, hogy az alsó határ mozgatásával $\partial_{x-a}^{-n} f(x)$ megváltozik – kivéve ha $f(x)$ (a, c)-re megszorítottjának $1., 2., \ldots, k.$ integrálfüggvénye c-ben eltűnik.

1.3.5. Végeredmény

Ahogy a fejezet elején láttuk, a néhányszor való deriválás és az integrálfüggvényeken keresztül vett néhányszor való integrálás összefoglalható egy ∂_{x-a}^{q} operátorba. Természetesen adódik, hogy az integrálás és a deriválás egymás inverzműveletei, ezért elvárható, hogy viszonylag kis áldozatokkal tudjunk egy az 1.3.1 tételhez hasonlót állítani. Szerepeljék ez most itt egyben:

1.3.6. tétel (Egészrendű deriválás tulajdonságai)**.** *Tegyük fel, hogy $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sima, korlátos függvények, $c \in \mathbb{R}$, továbbá $q, r \in Z$. Ekkor az alábbiak igazak:*

1. *A ∂_{x-a}^{q} operátor lineáris.*
2. *Ha q és r előjele megyezik, vagy $q > 0$ és $r < 0$, akkor*

$$\partial_{x-a}^{q} \left(\partial_{x-a}^{r} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{q+r} f(x) = \partial_{x-a}^{r} \left(\partial_{x-a}^{q}\right)$$

minden esetben fennáll. Ha $q < 0$ és $r > 0$, akkor a sorrend felcserélhetőségének extra feltétele az, hogy $f(x)$ $0., 1., \ldots, (r-1).$ deriváltjai a-ban eltűnjenek.

3.

$$\partial_{x-a}^{q}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \cdot \partial_{x-a}^{q-k} f(x) \partial_{x-a}^{k} g(x)$$

4. *Ha $q > 0$, akkor Faá di Bruno formulája alapján*

$$\partial_{x-a}^{q} f(g(x)) = \partial_{x}^{q} f(g(x)) = q! \cdot \sum_{j=1}^{q} f^{(j)} \cdot \sum_{C} \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1}{P_k!} \left(\frac{g^{(k)}}{k!} \right)^{P_k} \right),$$

ahol a belső szumma végigfut $C = \{P_1, \ldots, P_q \in \mathbb{Z}_0^{+} \colon \sum_{k=1}^{q} k \cdot P_k = q, \sum_{k=1}^{q} P_k = j\}$ elemein, továbbá $g^{(k)} = \partial_x^k g(x)$, $f^{(j)} = \partial_x^j f(u)$, $u = g(x)$. Ha $q = -n < 0$, akkor pedig az alábbi formula alapján $\partial_{x-a}^{q} f(x)$ visszavezethető az alábbi egyszeres integrálra, melyben már el tudunk végezni helyettesítést:

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x} (x-y)^{n-1} f(y) \mathrm{d}y$$

5. Ha $q = -n < 0$, és a helyett egy $c \in (a, x)$ alsó határra térünk át, akkor az így keletkezett eltérés:

$$\partial_{x-a}^{-n} f(x) - \partial_{x-c}^{-n} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-c)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \partial_{c-a}^{-k} f(c).$$

Ha $q > 0$, akkor a határ változtatásával nem történik eltérés.

A fenti tételt megvizsgálva azt tapasztaltuk, hogy – mivel egyelőre csak két, egymással szorocs kapcsolatban levő műveletet egyesítettünk egy operátor alatt – minden, eddigi tulajdonságra találtunk egy újabb szabályt, mely legfeljebb kicsit legg csak bonyolultabb; kivéve a többszörös deriválás során alkalmazandó láncszabályt.

Az ár, amit fizettünk az egységes definícióért és a fenti tételért az, hogy az egységes definíció megkövetelte, hogy határozatlan integrál helyett integrálfüggvénnyel dolgozzunk, és ekkor az eredmény nem lesz független az alsó határ megválasztásától, továbbá nem minden esetben cserélhető fel két egymás utáni egész rendű deriválás.

Összefoglalva tehát az az elvárásunk, hogy viszonylag kis áldozatokkal tudjunk egységes, egészrendű deriváltoperátort bevezetni, és az 1.3.1 tételhez hasonlót állítani, teljesült.

2. fejezet

Tetszőleges rendű deriválás definíciói

Már rendelkezünk egy ∂^q_{x-a} ($q \in \mathbb{Z}$) operátorral. Most ezt az operátort ki fogom terjeszteni $q \in \mathbb{R}$ értékekre, és megmutatom egy fontos tulajdonságát; ezután ismertetek egy alternatív definíciót, mely segíteni fog a tetszőleges rendű deriváltoperátor tulajdonságainak vizsgálatában. Továbbra is felteszem, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy adott függvény.

2.1. Grünwald-Post-féle definíció

Ez a definíció az előző fejezetben felépített operátort használja fel. Mivel a Gamma-függvény bármely $q \in \mathbb{R}$-re értelmezhető (bár nem mindig véges), ezért természetesen adódik, hogy $q \in \mathbb{Z}$ helyett tetszőleges $q \in R$-re értelmezzük a definíciót.

2.1.1. definíció (Grünwald-Post)**.** Legyen $f(x)$ adott, $q \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $f(x)$ q. deriváltja az alábbi határérték:

$$\partial^q_{x-a} f(x) = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q}}{\Gamma(-q)} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} \cdot f\left(x - k \cdot \left(\frac{x-a}{N}\right)\right)\right)\right]$$

Ha egy adott x pontban ez a limesz létezik és véges, akkor $f(x)$ x-ben q-adrendűen deriválható függvény. Ha $f(x)$ minden $x \in (a,b)$-ben q-adrendűen deriválható, akkor q-adrendűen deriválható.

Ez a definíció semmilyen megkötést nem ad $f(x)$-re, hiszen a határérték képzése során csak $f(x)$-et értékeljük ki különböző helyeken; elsőre nem is látszik, hogy $f(x)$-et többször deriválnánk vagy integrálnánk, ha $q \in \mathbb{Z}$ – mégis ez a definíció természetes módon magába foglalja az egész rendű operátort.

Másik érdekes, említendő tulajdonság az, hogy bár $\Gamma(-n) = \infty$, az 1.2.2 tétel 1.(a) pontja alapján

$$\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)} = \Gamma(k+1) \cdot (-1)^k \cdot \binom{q}{k},$$

ami egy véges érték, így valóban tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ esetén vizsgálható a limesz, és az valóban csak $f(x)$-től függ. Szerepeljék itt egy nagyon fontos tulajdonsága a Grünwald-Post-féle definíciónak, melyet a későbbiekben sokszor fogunk használni. Jelölje a továbbiakban $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ az n-szeres deriválást.

2.1.2. állítás. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ adott, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \partial^q_{x-a} f(x) = \partial^{n+q}_{x-a} f(x)$$

Bizonyítás. Az egyszerűbb követhetőség kedvéért legyen $\Delta_N(x) = \frac{x-a}{N}$. Ekkor a Grünwald-Post-féle definíció az alábbi alakban írható fel:

$$\partial_{x-a}^q f(x) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(x))^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}\cdot f\left(x-k\cdot\Delta_N(x)\right)\right)\right]$$

Tekintsük x helyett $(x-\Delta_N(x))$ helyen a deriváltat, és az $(a, x-\Delta_N(x))$ intervallumot csak $N-1$ ekvidisztáns részre osszuk fel. Ekkor a definíció a következőt adja:

$$\partial_{x-a}^q f(x-\Delta_N(x)) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(x))^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\sum_{k=0}^{N-2}\left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}\cdot f\left(x-\Delta_N(x)-k\cdot\Delta_N(x)\right)\right)\right] =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(x))^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(k)}\cdot f\left(x-k\cdot\Delta_N(x)\right)\right)\right]$$

Ezt az (1.1.1)-ben megadott képlettel deriválva a következőt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_{x-a}^q f(x) = \lim_{N\to\infty}\left[(\Delta_N(x))^{-1}\cdot\left(\partial_{x-a}^q f(x) - \partial_{x-a}^q f(x-\Delta_N(x))\right)\right] =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\Delta_N(x)^{-q-1}}{\Gamma(-q)}\cdot\left(\frac{\Gamma(-q)}{\Gamma(1)}\cdot f(x) - \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(k)}\right)\cdot f(x-k\cdot\Delta_N(x))\right)\right]$$

Az 1.2.2 tétel 1.(b) pontja alapján, $\Gamma(-q)$-val egyszerűsítve, és észrevéve, hogy $\Gamma(1)=1$, a limesz átírható a következő alakba:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_{x-a}^q f(x) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(x))^{-q-1}}{\Gamma(-q-1)}\cdot\left(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q-1)}{\Gamma(k+1)}\cdot f(x-\Delta_N(x)) =\right)\right],$$

melyben felismerhető $f(x)$ $(q+1)$-edrendű deriváltja. Így megmutattuk, hogy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\partial_{x-a}^q f(x)) = \partial_{x-a}^{q+1} f(x)$; ebből induktívan következik a bizonyítandó állítás, csak a fenti gondolatmenetet kell még $n-1$ alkalommal végrehajtani. □

Ez az állítás egyrészt gyengébb, mint a 1.3.6 tételben megfoglamazott társa, hiszen a külső rend csak természetes lehet; másrészt viszont erősebb annál, hiszen a belső rend tetszőleges valós szám lehet. Ez is mutatja azt, hogy a Grünwald-Post-féle definíció egy jó kiterjesztése lehet a deriválás rendjének, hiszen úgy tűnik, megtartja az azonosságokat.

2.2. Riemann-Liouville-féle definíció

Az (1.3.7) formula egy kézenfekvő módszert ad arra, hogy egy $f(x)$ függvény n-szeres integrálját visszavezessük egy Riemann-integrálra. Itt is adódik egy kiterjesztési lehetőség, $n=-q$ helyettesítéssel, és a Gamma-függvény alkalmazásával:

$$D_{x-a}^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x (x-y)^{-q-1}\cdot f(y)\mathrm{d}y \tag{2.2.1}$$

Ezt a definíciót először Liouville dolgozta ki 1832-ben, Riemann és Riesz pedig az 1940-es, 1950-es években ezen definícióval terjesztette ki a deriválás rendjét komplex számokra. Ez a definíció valós számok közül csak negatív értékekre értelmes, mi azonban tetszőleges valós renddel szeretnénk deriválni. Erre a problémára egy megoldást a Grünwald-Post-féle definícióról szóló azonosság ad. [4] alapján a következő formula tetszőleges n-szer deriválható függvény esetén egy analitikus függvény, ha $\mathrm{Re}(q) < 0$:

$$D_{x-a}^q f(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(x-a)^{-q+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(-q+k+1)} + D_{x-a}^{q-n} f(x), \tag{2.2.2}$$

ahol $f^{(k)} = \partial^k_{x-a} f(x)$. Ezen formula alapján $q \geq 0$ esetben a 2.1.2 állításban hasonló módon definiáljuk nemnegatív q-ra a Riemann-Liouville-féle deriváltat:

2.2.1. definíció (Riemann-Liouville)**.** Legyen $f(x)$ korlátos függvény, melyre a 2.1.2 állításban megfogalmazott tulajdonság igaz, továbbá $q \in \mathbb{R}$. Ekkor $f(x)$ q. deriváltja Riemann-Liouville értelemben:

$$D^q_{x-a} f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\frac{1}{\Gamma(-(q-n))} \cdot \int\limits_a^x (x-y)^{-(q-n)-1} \cdot f(y)\mathrm{d}y \right), & \text{ha } q \geq 0, \\ \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int\limits_a^x (x-y)^{-q-1} \cdot f(y)\mathrm{d}y, & \text{ha } q < 0, \end{cases}$$

ahol $n \in \mathbb{N}$-t úgy választjuk meg, hogy $q - n < 0$ igaz legyen, és így a (2.2.2)-ben megadott integrál valóban konvergens.

A Grünwald-Post-féle definíció az egész rendű definíció kiterjesztése volt, így ott nem volt kérdés, hogy a definíció megszorítása egész értékekre valóban visszaadja-e az egész rendű deriválást. A Riemann-Liouville-féle definíció esetében azonban vizsgálni kell, hogy a megszorítás valóban az egész rendű deriválást adja-e.

Ha $q = -n$-et írunk a definícióba, akkor az alábbit kapjuk:

$$D^{-n}_{x-a} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \int\limits_a^x (x-y)^{n-1} \cdot f(y)\mathrm{d}y$$

MIvel $\Gamma(n) = (n-1)!$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, ezért ez pont az 1.3.6 tétel 4. pontjában levő súlyozott Riemann-integrált adja vissza. Ha $q = n$, akkor a következő alakot vizsgálva, kihasználva a tétel 2. pontját láthatjuk, hogy ekkor valóban az n. deriváltat kapjuk:

$$D^n_{x-a} f(x) = \partial^{n+1}_{x-a} \left(D^{-1}_{x-a} f(x) \right) =$$
$$\partial^{n+1}_{x-a} \left(\int\limits_a^x f(y)\mathrm{d}y \right) = \partial^{n+1}_{x-a} \left(\partial^{-1}_{x-a} f(x) \right) = \partial^n_{x-a} f(x)$$

Tehát nem 0 egész számokra a Riemann-Liouville-féle definícó is visszaadja az egészrendű deriválást. $q = 0$ esetén a fenti gondolatmenet $n = 0$-ra a következőt adja:

$$D^0_{x-a} f(x) = \partial_{x-a} \left(\partial^{-1}_{x-a} f(x) \right) = \partial^0_{x-a} f(x) = f(x)$$

Vagyis a Riemann-Liouville-féle definíció is egy kiterjesztése az egészrendű deriválásnak.

2.2.1. Ekvivalencia a Grünwald-Post-féle definícióval

Most, hogy láttuk, hogy mind a két definíció kiterjesztése az egészrendű deriválásoperátornak, első és legfontosabb kérdésünk az, hogy ha $f(x)$ egy olyan függvény, melyre mindkét definíció alkalmazható egy fix $q \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a két definíció ugyanazt a deriváltat adja-e.

2.2.2. tétel (Definíciók ekvivalenciája)**.** *Tegyük fel, hogy $f(x)$ olyan korlátos függvény, melyre létezik mind a Grünwald-Post-féle, mind a Riemann-Liouville-féle q. derivált egy rögzített $q \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor*

$$\partial^q_{x-a} f(x) = D^q_{x-a} f(x)$$

Bizonyítás. Legyenek $f(x)$ tetszőleges, de rögzített függvény, mely megfelel a feltételeknek. Ha a két derivált megegyezik, az ekvivalens azzal, hogy a különbségük 0. Szokásos módon legyen $\Delta_N(x) = \frac{x-a}{N}$, így

$$\partial^q_{x-a} f(x) - D^q_{x-a} f(x) =$$
$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(X))^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}\cdot f(x-k\cdot\Delta_N(x)) - \frac{1}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x (x-y)^{-q-1}\cdot f(y)\mathrm{d}y\right]$$

$x-a$ egy egyszerű $u = x - y$ transzformációval becsempészhető a Riemann-Liouville-féle definícióba, ekkor az alábbi alakot ölti a vizsgált különbség:

$$\partial^q_{x-a} f(x) - D^q_{x-a} f(x) =$$
$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(X))^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}\cdot f(x-k\cdot\Delta_N(x))\right] - \frac{1}{\Gamma(-q)}\cdot\int_0^{x-a} u^{-q-1}\cdot f(x-u)\mathrm{d}u =$$
$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(X))^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}\cdot f(x-k\cdot\Delta_N(x))\right] - \int_0^{x-a}\frac{f(x-u)}{\Gamma(-q)\cdot u^{q+1}}\mathrm{d}u =$$
$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(X))^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}\cdot f(x-k\cdot\Delta_N(x))\right] - \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\frac{f(x-k\cdot\Delta_N(x))\cdot\Delta_N(x)}{\Gamma(-q)\cdot(k\cdot\Delta_N(x))^{q+1}}\right] =$$
$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(\Delta_N(X))^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{k=0}^{N-1} f(x-k\cdot\Delta_N(x))\cdot\left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - k^{-q-1}\right)\right] =$$
$$\frac{(x-a)^{-q}}{\Gamma(-q)}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{N\cdot x - k\cdot x + k\cdot a}{N}\right)\cdot N^q\cdot\left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - k^{-q-1}\right)\right]$$

Ekkor a limesz előtti konstans biztosan véges, de nem biztos, hogy 0, így ha a tételt be szeretnénk látni, akkor azt kéne megmutatni, hogy a határérték 0. A 1.2.2 tétel 1.(c) pontja alapján minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan K küszöbindex, hogy ha $k > K$, akkor $\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}$ eltérése a határértéktől kisebb, mint ε – így a szumma kettévágható K mentén. Emiatt a limesz is kettévágható, és a K-tól futó limeszben $\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}$ lecserélhető a határértékére, így legfeljebb 2ε az eltérés az alábbi becslés során, ha K elég nagy. Használva az $a \wedge b = \min(a, b)$ jelölést feltehetjük, hogy K nem függ N-től, így

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{N\cdot x - k\cdot x + k\cdot a}{N}\right)\cdot N^q\cdot\left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - k^{-q-1}\right)\right] \simeq$$
$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{(K-1)\wedge(N-1)} f\left(\frac{N\cdot x - k\cdot x + k\cdot a}{N}\right)\cdot N^q\cdot\left(\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} - k^{-q-1}\right)\right] +$$
$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=K}^{N-1} f\left(\frac{N\cdot x - k\cdot x + k\cdot a}{N}\right)\cdot\left(\frac{k}{N}\right)^{-2-q}\cdot\left(\frac{q\cdot(q+1)}{2N} + \frac{O(k^{-1})}{N}\right)\right]$$

Ha $N > K$, akkor az első limeszben a szummának csak K tagja van, így a harmadik szorzandó biztosan korlátos, és $f(x)$ is korlátos. Vagyis ha $q < -1$, akkor $N^q \to 0$, így az első limesz értéke 0.

A második limeszben a harmadik szorzandó $N \to \infty$ esetén 0-ba tart, és ha $q \le -2$, akkor $(\frac{k}{N})^{-2-q}$ mindenképp 1-nél kisebb szám – így itt is $f(x)$ értékei döntik el, hogy a határérték megegyezik-e 0-val. Mivel $f(x)$ korlátos, és biztosan kevesebb, mint N tagja van a második szummának, ezért az $\frac{1}{N}$-es szorzó garantálja, hogy ez a szorzandó se nőhessen túl gyorsan, így a második határérték is 0.

Ezzel azt láttuk be, hogy egy olyan határérték, melynek $\partial^q_{x-a} f(x) - D^q_{x-a} f(x)$-től való eltérése legfeljebb 2ε, ha N elég nagy, 0-hoz tart – így annak is igaznak kell lennie, hogy

$$\partial^q_{x-a} f(x) - D^q_{x-a} f(x) = 0,$$

hiszen mindkét derivált felírható egy határértékként. Mivel $f(x)$ tetszőleges, a feltételeknek megfelelő függvény volt, és x-re semmilyen megkötést nem tettünk, így $q \leq -2$ esetén a két definíció megegyezik.

Ha pedig $q > 2$, akkor a 2.1.2 állítás alapján – mivel ennek teljesülését megköveteltük a Riemann-Liouville-féle deriváltra is – n-et úgy választva, hogy $q - n \geq -2$ teljesüljék, a következőt tehetjük:

$$\partial^q_{x-a} f(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\partial^{q-n}_{x-a} f(x) \right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(D^{q-n}_{x-a} f(x) \right) = D^q_{x-a} f(x),$$

Így már tetszőleges $q \in \mathbb{R}$-re beláttuk, hogy ha $f(x)$ olyan korlátos függvény, melynek létezik mind a Grünwald-Post-féle, mind a Riemann-Liouville-féle q-adrendű deriváltja, akkor a kettő megegyezik. $\square$

Immáron egységesíthetjük a jelölést, és $\partial^q_{x-a} f(x)$ alatt mmind a Grünwald-Post-féle, mind a Riemann-Liouville-féle formulát érthetjük: szabadon váltogathatunk a kettő között a következő fejezetben, amikor tetszőleges rendű deriválás tulajdonságait szeretnénk meghatározni. A továbbiakban is $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$-el fogom jelölni a negatív rendről pozitív rendre való kiterjesztést n-szeres deriváláson keresztül.

3. fejezet

Tetszőleges rendű deriválás tulajdonságai

Miután két ekvivalens definícióval is rendelkezünk a q-adrendű deriváltról, dolgozatom utolsó része következik. Ebben a fejezetben meghatározok egy függvényosztályt, melynek elemeire hatni szeretnék a tetszőleges rendű deriváltoperátorral, és megvizsgálom, hogyan változnak az 1.3.6 tételben szereplő azonosságok, ha q felvehet nem egész értékeket is. Mint mindig, most is feltesszük, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

3.1. Tetszőleges rendben deriválható függvények

Az előző fejezetben $f(x)$-re csak olyan megkötéseket adtunk, melyekre szükségünk volt ahhoz, hogy a kimondott definíciók, tételek, állítások kimondhatóak legyenek. Itt most a Riemann-Liouville-féle definíciót tekintjük, és $f(y)$-tól azt várjuk el, hogy felírható legyen az alábbi alakban:

$$f(y) = (y-a)^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (y-a)^{\frac{k}{n}}, \qquad n \in \mathbb{N}^+, a_0 \neq 0, p > -1 \tag{3.1.1}$$

p megválasztásával a sor főegyütthatója nem nulla. Ennek a definíciónak egy közvetlen következménye az, hogy

$$\lim_{y \to a} (y-a) f(y) = 0,$$

továbbá ahhoz, hogy a Riemann-Liouville-féle definíció mindenképp értelmes legyen, $f(y)$ maradjék korlátos az $[a,x]$ intervallumon. Foglaljuk ezt össze egy definícióba:

3.1.1. definíció. Legyen $f(x)$ korlátos függvény, melyhez minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $a < x$, hogy $f(y)$ $[a,x]$-en korlátos, és $f(y)$ felírható az alábbi alakban, ha $y \in [a,x]$:

$$f(y) = (y-a)^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (y-a)^{\frac{k}{n}},$$

ahol $p > -1$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a_0 \neq 0$. Az ilyen $f(x)$ függvényeket nevezzük tetszőleges rendben deriválhatónak (röviden q-adrendűen deriválhatónak).

3.1.2. *megjegyzés.* Ha a q-adrendű deriválás operátora is lineáris, akkor $f(y)$-t felírhatjuk akár véges sok olyan függvény összegeként, melyek külön-külön q-adrendben deriválhatóak. Ekkor ha $y \in [a,x]$, akkor

$f(y)$ a következő alakot veszi fel:

$$f(y) = \left[(y-a)^p \cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1} \cdot (y-a)^{k_1}\right] + \left[(y-a)^{\frac{n\cdot p+1}{n}} + \sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_2} \cdot (y-a)^{k_2}\right] + \ldots + \left[(y-a)^{\frac{n\cdot p+n-1}{n}} \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_n} \cdot (y-a)^{k_n}\right] \tag{3.1.2}$$

Ekkor a []-beli függvények valóban q-adrendben deriválhatóak, hiszen ha $p > -1$, akkor $\frac{n\cdot p+1}{n}, \ldots, \frac{n\cdot p+n-1}{n} > -1$ is fennáll, és az első tag is megfelel a definíciónak, hiszen annak a teljes alakja

$$(y-a)^{\frac{n\cdot p}{n}} \cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1}$$

A szummában levő kitevők egyszerűsödése azzal magyarázható, hogy $(y-a)^{\frac{1}{n}}$-et kiemeltünk. További követelményként támasztjuk azt, hogy a 3.1.1 definíció alapján létezzék olyan a alsó határ, mely minden komponensfüggvényhez megfelel. Vezessünk be rögtön egy rövidebb jelölést: $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, ahol az $f_k(x)$-ek a komponensfüggvények.

A q-adrendű deriválás operátora pedig lineáris, ha a Grünwald-Post-féle definíciót tekintjük – hiszen egész q esetén a határérték és a szumma operátorok linearitásából következett a linearitás, és ez a definíció csak annyit tesz, hogy elveti azt a korlátozást, hogy $q \in \mathbb{Z}$.

3.1.3. *megjegyzés.* Oldham és Jerome |1| (46. – 47. oldal) definiálták így a q-adrendűen deriválható függvényeket, mivel az elméleti fizikában azok a függvények, melyeknek q-adrendű deriváltját kereshetik, általában ilyen alakban fordulnak elő – azonban ők is beismerik, hogy ezen függvények halmaza valódi részhalmaza azon függvényeknek, melyeknek létezik tetszőleges rendű deriváltja. Erre ékes példa az, hogy a konstans 0 függvény nem állhat elő ilyen függvények véges összegeként, de a Grünwald-Post-féle definíció alapján látható, hogy tetszőleges q-ra $\partial^q_{x-a}(0) = 0$. Lábjegyzetükben azzal is indokolták ezen lépésüket, hogy egy bővebb halmaz vizsgálata csak technikai nehézségeket eredményezne a fejezetben szereplő számításokban, de a végeredmények ugyanúgy helyesek. Így a továbbiakban feltesszük, hogy $f(x)$ a (3.1.2) alakot veszi fel. Vezessünk be egy jelölést az ilyen alakot felvevő függvényekre:

3.1.4. definíció. Jelölje $\mathscr{D}$ azon $f(x)$ függvények halmazát, melyek tetszőleges $y \in [a, x]$ esetén felírhatóak (3.1.2) alakban. Ekkor $\mathscr{D}$ a q-adrendben deriválható függvények halmaza.

Így, hogy definiáltuk az általunk q-adrendben deriválható függvények $\mathscr{D}$ halmazát, mostantól feltehetjük, hogy $f(x) \in \mathscr{D}$.

3.2. Tagonként deriválás

A linearitás miatt véges összegek tetszőleges q esetén is deriválhatóak tagonként, azonban a 3.1.1 definícióban szereplő tagokban végtelen összegek szerepelnek, így meg kell vizsgálnunk, hogy azok tagonként deriválhatóak-e, ha $f(x) \in \mathscr{D}$. Ehhez elég $f(x)$ komponensfüggvényeit vizsgálni. Ha $f_k(x)$ konvergens, akkor létezik olyan $g(x)$, amely felülről fogja becsülni a függvénysor minden tagját, így a Nagy Lebesgue-tétel alapján a továbbiakban feltehetjük, hogy $f_k(x)$ egyenletesen konvergens, és így a tagonként integrálhatjuk. Jelölje X $f_k(x)$ konvergenciasugarát – így $f_k(x)$-et elég (a, X)-en vizsgálni.

3.2.1. *megjegyzés.* Eddig mindent zárt intervallumon vizsgáltunk – ez most is így van: a leírtak (a, X) minden zárt részintervallumára igazak lesznek, így határátmenettel (a, X)-re is igazak lesznek. A rövidség kedvéért ezt nem mindig írom ki, így ha azt írom az alfejezetben, hogy (a, X)-en igaz egy tulajdonság egy függvényre, akkor az alatt azt értem, hogy minden $I \subset (a, X)$ zárt részintervallumon igaz a tulajdonság a függvényre.

3.2.2. *megjegyzés.* Előfordulhat, hogy $f(x)$ komponensfüggvényeinek konvergenciasugarai nem egyeznek – ilyenkor $f(x)$ konvergenciasugarán a komponensfüggényei konvergenciasugarainak minimumát értjük.

Tekintsünk először egy közönséges a körüli Taylor-sort:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k, \tag{3.2.1}$$

mely konvergens (a, X)-en. Ekkor $\partial_{x-a}^{q} \Phi(x)$ is konvergens (a, X)-en, ha $q = -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Legyen $q \in \mathbb{R}$ fix. Ha $\Phi(x)$ tagjait tagonként q-adrendűen deriváljuk, majd ezt szummázzuk, akkor az az $a_k = \frac{\Phi^{(k)}(x)}{k!}$ jelölést alkalmazva |1| (67. oldal) alapján a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \cdot \Gamma(k+1)}{\Gamma(k-q+1)} \cdot (x-a)^{k-q} = (x-a)^{-q} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}}{\Gamma(j-q+1)} \cdot (x-a)^k \tag{3.2.2}$$

Hányadosteszt alapján $\Phi(x)$ konvergenciasugarát tekintve

$$X = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1) \cdot \Phi^{(k)}(a)}{\Phi^{(k+1)}(a)} \right|,$$

és a q-adrendűen derivált tagok alkotta függvénysor konvergálni fog, ha

$$\begin{gathered}
|x-a| < \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\Gamma(k-q+2) \cdot \Phi^{(k)}(a)}{\Gamma(k-q+1) \cdot \Phi^{(k+1)}(a)} \right| = \\
= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k-q+1) \cdot \Phi^{(k)}(a)}{\Phi^{(k+1)}(a)} \right| = \\
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1) \cdot \Phi^{(k)}(a)}{\Phi^{(k+1)}(a)} \right| - \lim_{k\to\infty} \left| \frac{-q \cdot \Phi^{(k)}(a)}{\Phi^{(k+1)}(a)} \right| = \\
X - q \cdot \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\Phi^{(k)}(a)}{\Phi^{(k+1)}(a)} \right| = X - q \cdot A
\end{gathered}$$

A mindig nagyságrendekkel kisebb lesz, mint X (|1| 71. oldal), így tekinthetjük úgy, hogy (3.2.2) konvergens az $(a - X, a + X)$ intervallumon. Vegyük észre, hogy ha a függvénysor k. tagja az $a_k \cdot (x-a)^{k+p}$ alakot vesz fel, akkor annak konvergenciasugara meg fog egyezni $a_k \cdot (x-a)^k$ konvergenciasugarával, így a fenti gondolatmenet ebben az esetben is igaz. Ebből következően ha $f(x) \in \mathscr{D}$, akkor biztos, hogy $f(x)$ (a, X)-en tagonként q-adrendűen deriválható, hiszen itt egyenletesen konvergál a q-adrendű deriváltak függvénysora – az egyetlen kritikus pont, amiben a konvergencia kérdéses, az $x = a$ pont. Vagyis $f_k(x)$ tagonként vett q-adrendű deriválása az alábbi tételen múlik:

3.2.3. tétel. *Legyen* $f_k(x) = (x-a)^p \cdot \sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l \cdot (x-a)^l$*, és* $q \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

$$\partial_{x-a}^{q} f_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \partial_{x-a}^{q} \left((x-a)^{p+l} \right),$$

vagyis tagonként is elvégezhető a q*-adrendű deriválás.*

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor a bizonyítandó állítás az identitás, hiszen a tetszőleges rendű deriválás megőrizte azt a tulajdonságot, hogy egy függvény 0. deriváltja önmaga.

Ha $q < 0$, akkor legyen $S_n(x) = \sum_{l=1}^{n} a_l \cdot (x-a)^l$. Mivel az $f_k(x)$-et alkotó sor egyenletesen konvergens, ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_ε küszöbindex, hogy az egyenletes konvergencia miatt a Riemann-

Liouville-féle definícióra teljesüljék az alábbi, ha $n > n_\varepsilon$:

$$\partial^q_{x-a} f_k(x) - \partial^q_{x-a} S_n(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int\limits_a^x (f_k(y) - S_n(y)) \cdot (x-y)^{-q-1} \mathrm{d}y <$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int\limits_a^x \varepsilon \cdot (x-y)^{-q-1} \mathrm{d}y = \frac{\varepsilon}{\Gamma(-q)} \cdot \int\limits_a^x (x-y)^{-q-1} \mathrm{d}y = \frac{\varepsilon \cdot (x-a)^{-q}}{q \cdot \Gamma(-q)}$$

Mivel a, q rögzítettek, ezért ez a különbség 0-ba tart, ha $\varepsilon \to 0$, így ha $q < 0$, akkor az állítást beláttuk. Továbbá f_k a következő függvénysor összege:

$$\partial^q_{x-a} f_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p-q+l+1)} \cdot (x-a)^{p+l-q} \tag{3.2.3}$$

Legyen most $q > 0$. Célunk az, hogy a fenti alak igaz legyék. Jelölje $L_1 \subset \mathbb{N}$ azon l-ek halmazát, melyre $\Gamma(p-q+l+1)$ végtelen, és legyen $L_2 = \mathbb{N} \setminus L_1$. Ekkor $\mathbb{N}$ előáll L_1 és L_2 diszjunkt uniójaként, így

$$f_k(x) = \sum_{l \in L_1} a_l \cdot (x-a)^l + \sum_{l \in L_2} a_l \cdot (x-a)^l$$

A 1.2.2 tétel 1.(d) pontja alapján L_1 véges halmaz, hiszen $\Gamma(-x)$ csak akkor lehet végtelen, ha $\sin(\pi \cdot x) = 0$ – így linearitás miatt biztos, hogy az L_1-re vett szumma q-adrendű deriválása tagonként elvégezhető. Emiatt elég megmutatni, hogy

$$\partial^q_{x-a} \left(\sum_{l \in L_2} a_l \cdot (x-a)^{p+l} \right) = \sum_{l \in L_2} a_l \cdot \partial^q_{x-a} \left((x-a)^{p+l} \right) =$$
$$\sum_{l \in L_2} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p-q+l+1)} \cdot (x-a)^{p+l-q}$$

Mivel az $f_k(x)$-et alkotó függvénysor egyeneletesen konvergens, ezért a belátandó egyenlőség jobboldala tagonként integrálható egyszeresen:

$$\partial^{-1}_{x-a} \left(\sum_{l \in L_2} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p-q+l+1)} \cdot (x-a)^{p+l-q} \right) =$$
$$\sum_{l \in L_2} \partial^{-1}_{x-a} \left(\frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p-q+l+1)} \cdot (x-a)^{p+l-q} \right) =$$
$$\sum_{l \in L_2} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1) \cdot \Gamma(p-q+l+1)}{\Gamma(p-q+l+1) \cdot \Gamma(p-q+l+2)} \cdot (x-a)^{p+l-q+1} =$$
$$\sum_{l \in L_2} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p-q+l+2)} \cdot (x-a)^{p+l-q+1} = \sum_{l \in L_2} a_l \cdot \partial^{q-1}_{x-a} (x-a)^{p+j},$$

hiszen ha $l \in L_2$, akkor $\Gamma(p-q+l+1)$ véges; továbbá (a, X)-en megmaradt az egyenletes konvergencia. Ugyanígy, a ∂^1_{x-a} operátort alkalmazva a kapott alakra – ugyancsak az egyenletes konvergencia miatt – ismét deriválhatunk tagonként, és azt kapjuk vissza, hogy ha $0 < q < 1$, akkor kihasználva, hogy ekkor $q - 1 < 0$, beláttuk, hogy

$$\partial^q_{x-a} \left(\sum_{l \in L_2} a_l \cdot (x-a)^{p+l} \right) = \sum_{l \in L_2} a_l \cdot \partial^q_{x-a} \left((x-a)^{p+l} \right)$$

Innét induktívan látható, hogy bármely $q > 0$-ra is teljesül az, hogy az L_2 feletti szumma is deriválható tagonként, így a tételt a $q > 0$ esetre is beláttuk – ezzel bizonyításunk véget ért, tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ esetén deriválhatjuk tagonként a $\mathscr{D}$-beli függvények komponensfüggvényeit. $\square$

3.2.4. *megjegyzés.* A bizonyítás $q < 0$ esete erősebben is kimondható: mivel $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, ezért ε helyett $\frac{\varepsilon}{n}$-el rögtön megmutatható bármilyen $f(x) \in \mathscr{D}$-re a tagonként deriválhatóság.

Továbbá a $q > 0$ eset zárógóndalata helyett azt is mondhatnánk, hogy a ∂_{x-a}^{-1} és ∂_{x-a}^{1} operátorok helyett a ∂_{x-a}^{-n} és ∂_{x-a}^{n} operátorokat alkalmazva vezetjük vissza a $q < 0$ esetre.

3.3. Egymás utáni deriválás

Ebben az alfejezetben ismét azt vizsgáljuk meg, hogy

$$\partial_{x-a}^{q}\left(\partial_{x-a}^{r} f(x)\right) = \partial_{x-a}^{q+r} f(x) \tag{3.3.1}$$

fennáll-e. Abban az esetben, amikor ez fennáll, $q+r = r+q$ miatt a két deriváltoperátor fel is cserélhető, így elég ennek az egyenlőségnek a teljesülését ellenőrizni. A linearitásból következik, hogy ha $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, akkor (3.3.1) pontosan akkor igaz $f(x)$-re, ha minden komponensfüggvényére igaz, így először csak $f_k(x)$-et vizsgáljuk.

3.3.1. tétel. *$f_k(x)$-re tetszőleges $q, r \in \mathbb{R}$ esetén az alábbiak igazak, amennyiben $\partial_{x-a}^{r} f(x) \in \mathscr{D}$ fennáll:*

1. *Ha $f_k(x) \equiv 0$, akkor tetszőleges r esetén $\partial_{x-a}^{r} f_k(x) \equiv 0$, és így $\partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)) = \partial_{x-a}^{q+r} f_k(x)$*
2. *Ha $f_k(x) \not\equiv 0$ és $\partial_{x-a}^{r} f_k(x) \not\equiv 0$, akkor $\partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)) = \partial_{x-a}^{q+r} f_k(x)$*
3. *Ha $f_k(x) \not\equiv 0$, de $\partial_{x-a}^{r} f_k(x) \equiv 0$, akkor csak $\partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)) = \partial_{x-a}^{q+r} f_k(x) - \partial_{x-a}^{q+r}[f_k(x) - \partial_{x-a}^{-r}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x))]$ teljesül.*

Bizonyítás. Az 1. esetben triviálisan teljesül a tétel állítása, hiszen a Grünwald-Post-féle definíció alapján az azonosan 0 függvénynek minden deriváltja azonosan 0.

Ha $f_k(x) \not\equiv 0$, akkor

$$\partial_{x-a}^{r} f_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \partial_{x-a}^{r}(x-a)^{p+j} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p+l-r+1)} \cdot (x-a)^{p+l-q}$$

Ha $p > -1$, akkor $p + l > -1$, így $\Gamma(p+l+1)$ mindig véges, de nem 0. Így a következőképp írható le egy szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $\partial_{x-a}^{r} f_k(x) \not\equiv 0$: minden olyan $l \in \mathbb{N}$ esetén, amire $a_l \neq 0$, $\Gamma(p+l-r+1)$ véges. Ennek egy hasznosabb ekvivalens megfogalmazása ([1] 83. oldal) az, hogy

$$f_k(x) - \partial_{x-a}^{-r}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)) \equiv 0, \tag{3.3.2}$$

vagyis egy r-edrendű, majd egy $(-r)$-edrendű deriválás visszaadja $f_k(x)$-et. Tegyük először fel, hogy (3.3.2) teljesül. Ekkor $f_k(x)$ r-edrendű deriváltját q-adrendűen deriválva az alábbit kapjuk (ez megtehető, hiszen a feltételek alapján $\mathscr{D}$-beli függvényeknek az r-edrendű deriváltja is $\mathscr{D}$-beli):

$$\begin{gathered}
\partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)) = \\
\partial_{x-a}^{q}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p+l-r+1)} \cdot (x-a)^{p+l-r}\right) = \\
\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1) \cdot \Gamma(p+l-r+1)}{\Gamma(p+l-r+1) \cdot \Gamma(p+l-r-q+1)} \cdot (x-a)^{p+l-r-q} = \\
\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p+l-r-q+1)} \cdot (x-a)^{p+l-r-q}
\end{gathered} \tag{3.3.3}$$

Másrészről ha rögtön az $(q+r)$-edik deriváltat vesszük, akkor (3.2.3) alapján

$$\partial_{x-a}^{q+r} f_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p+l-r-q+1)} \cdot (x-a)^{p+l-r-q},$$

amiben (3.3.3) felismerhető, így a 2. esetben is felcserélhető a deriválás sorrendje.

Ha (3.3.2) nem teljesül, vagyis $\partial_{x-a}^{r} f_k(x) \equiv 0$, akkor |1| (81. oldal) alapján $\partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)) \equiv 0$, de $\partial_{x-a}^{q+r} f_k(x) \not\equiv 0$, így az alábbiakat tudjuk csak megállapítani:

$$0 = \partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)) =$$
$$\partial_{x-a}^{q+r} f_k(x) - \partial_{x-a}^{q+r}[f_k(x) - \partial_{x-a}^{-r}(\partial_{x-a}^{r} f_k(x)]$$

Ezzel a 3.) esetet is beláttuk, és így a bizonyításunk kész. □

3.3.2. következmény. *Legyen $f(x) \in \mathscr{D}$, $q, r \in \mathbb{R}$. Ekkor az alábbiak igazak:*

1. *Ha $f(x) \equiv 0$, akkor $\partial_{x-a}^{r} f(x) \equiv 0$, és így a deriválás sorrendje felcserélhető.*
2. *Ha $f(x) \not\equiv 0$ és $\partial_{x-a}^{r} f(x) \not\equiv 0$, akkor két eset lehetséges:*
   - *(a) Ha $f(x) - \partial_{x-a}^{-r}(\partial_{x-a}^{r} f(x)) \equiv 0$, akkor a deriválás sorrendje felcserélhető.*
   - *(b) Ha $f(x) - \partial_{x-a}^{-r}(\partial_{x-a}^{r} f(x)) \not\equiv 0$, akkor csak az alábbi teljesül:*

   $$\partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f(x)) = \partial_{x-a}^{q+r} f(x) - \partial_{x-a}^{q+r}[f(x) - \partial_{x-a}^{-r}(\partial_{x-a}^{r} f(x)]$$
3. *Ha $f(x) \not\equiv 0$, de $\partial_{x-a}^{r} f(x) \equiv 0$, akkor csak az alábbi teljesül:*

   $$\partial_{x-a}^{q}(\partial_{x-a}^{r} f(x)) = \partial_{x-a}^{q+r} f(x) - \partial_{x-a}^{q+r}[f(x) - \partial_{x-a}^{-r}(\partial_{x-a}^{r} f(x)]$$

Bizonyítás. 3.3.1 tételből és linearitásból következik. □

3.4. Leibniz-szabály, Láncszabály

Az 1.3.6 tételben szerepel egy általános formula $f(x) \cdot g(x)$ q. deriváltjáról $q \in \mathbb{Z}$ esetre. Most az a célunk, hogy ehhez hasonló formulát találjunk arra az esetre, amikor $q \in \mathbb{R}$.

3.4.1. tétel. *Tegyük fel, hogy $\Phi(x), \Psi(x) \in \mathscr{D}$ analitikus függvények. Ekkor*

$$\partial_{x-a}^{q}(\Phi(x) \cdot \Psi(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \cdot \partial_{x-a}^{q-k}\Phi(x) \cdot \partial_{x-a}^{k}\Psi(x)$$

Bizonyítás. |1| (62. oldal) alapján, mivel analitikus függvények szorzata is analitikus |8| függvény, ezért

$$\partial_{x-a}^{q}(\Phi(x) \cdot \Psi(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \cdot \partial_{x-a}^{q-k}(1) \cdot \Phi(x) \cdot \Psi(x)^{(k)} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \partial_{x-a}^{q-k}(1) \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cdot \Phi^{(k-l)}(x) \cdot \Psi^{(l)}(x) \right),$$

ahol az utolsó lépésben az 1.3.6 tétel alkalmazható, mivel $k \in \mathbb{Z}$. Ez tovább alakítható a következő módon:

$$\partial^q_{x-a}(\Phi(x)\cdot\Psi(x)) = \sum_{l=0}^{\infty}\Psi^{(l)}\cdot\sum_{k=l}^{\infty}\binom{q}{k}\cdot\binom{k}{l}\cdot\partial^{q-k}_{x-a}(1)\cdot\Phi^{(k-l)} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Psi^{(l)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\binom{q}{m+l}\cdot\binom{m+l}{l}\cdot\partial^{q-l-m}_{x-a}(1)\cdot\Phi^{(l)} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{q}{l}\cdot\Psi^{(l)}\cdot\sum m = 0^{\infty}\binom{q-l}{m}\cdot\partial^{q-l-m}_{x-a}(1)\cdot\Phi^{(l)} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{q}{l}\cdot\Psi^{(l)}\cdot\Phi^{(q-l)},$$

ez pedig pont a belátandó állítás. □

3.4.2. *megjegyzés.* Ha megengedjük, hogy analitikus $g(x)$ mellett $f(x)$ tetszőleges függvény legyen, akkor van ellenpélda |1| (78. − 79. oldal) a fent levezetett Leibniz-szabályra. Ugyanakkor ha $f(x)$ tetszőleges, de $g(x)$ polinom, akkor egy Riemann-Liouville-féle definíción alapuló gondolatmenettel igazolható a Leibniz-szabály:

3.4.3. tétel. *Tegyük fel, hogy $q \in \mathbb{R}$, $f(x)$ q-adrendben deriválható, $g(x)$ pedig polinom. Ekkor is fennáll, hogy*

$$\partial^q_{x-a}(f(x)\cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{q}{k}\cdot\partial^{q-k}_{x-a}f(x)\cdot\partial^k_{x-a}g(x)$$

Bizonyítás. Legyen $g(x) = x$. Ekkor $f(x)\cdot g(x) = x\cdot f(x)$, így a Riemann-Liouville-féle definíció alapján ha $q < 0$, akkor

$$\partial^q_{x-a}(x\cdot f(x)) = \frac{1}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x y\cdot f(y)\cdot(x-y)^{q+1}\mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x y\cdot f(y)\cdot(x-y)^{-q-1}\mathrm{d}y-$$

$$\frac{x}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x f(y)\cdot(x-y)^{-q-1}\mathrm{d}y + \frac{x}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x f(y)\cdot(x-y)^{-q-1}\mathrm{d}y =$$

$$\frac{x}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x f(y)\cdot(x-y)^{-q-1}\mathrm{d}y - \frac{1}{\Gamma(-q)}\cdot\int_a^x y\cdot f(y)\cdot(x-y)^{-q}\mathrm{d}y =$$

$$x\cdot\partial^q_{x-a}f(x) + q\cdot\partial^{q-1}_{x-a}f(x),$$

hiszen $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$ tetszőleges x-re. A végén kapott formula pont a Leibniz-szabályt adja, hiszen tetszőleges q esetén is $\binom{q}{1} = q$ és $\binom{q}{0} = 1$. Linearitást és a 2.1.2 állítást figyelembe véve megfelelő n választásával $q \geq 0$-ra is igaz a fenti gondolatmenet.

Ha $g(x) = x^k$, ahol $k > 1$ egész, akkor $f(x) = x\cdot f(x)$, $g(x) = x$ választással az előző gondolatmenetet megismételve induktívan adódik az állítás, így linearitás miatt teljesül a tétel állítása. □

A láncszabály már az egészrendű deriválás esetén is esetlenül bonyolult volt: Faá di Bruno formulája ad egy képletet, de az csak speciális esetekben használható. Formálisan ugyanez a formula (|1| 80. oldal) levezethető, azonban ezzel nem nyerünk semmi újat, és ha $q < 0$, akkor még a $q = -1$ esetben sem használható a formula triviálisan egyszerű függvényektől eltekintve.

3.5. Alsó határtól való függés

A 1.3.6 tételben megállapítottuk, hogy ha q negatív egész, akkor az alsó határ módosításával a $-n$-edrendű derivált is módosulni fog. Most ugyanezt tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ esetén vizsgáljuk.

3.5.1. tétel. *Tegyük fel, hogy $\Phi(x) \in \mathscr{D}$ analitikus függvény $[a,x]$-en, és $c \in [a,x]$. Ekkor*

$$\partial_{x-a}^{q}\Phi(x) - \partial_{x-c}^{q}\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \partial_{x-c}^{q+k}(1) \cdot \partial_{c-a}^{-k}\Phi(c)$$

Bizonyítás. A Riemann-Liouville-féle definíció alapján ha $q < 0$, akkor

$$\partial_{x-a}^{q}\Phi(x) - \partial_{x-c}^{q}\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^x \Phi(y)\cdot(x-y)^{-q-1}\mathrm{d}y - \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_c^x \Phi(y)\cdot(x-y)^{-q-1}\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^c \Phi(y)\cdot(x-y)^{-q-1}\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^c \Phi(y)\cdot(x-c+c-y)^{-q-1}\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^c \left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1-q}{l}\cdot(x-c)^{-1-q-l}\cdot(c-y)^{l}\right)\cdot\Phi(y)\mathrm{d}y$$

Az 1.2.2 tétel 1.(a) pontja alapján $\binom{-1-q}{l}$ a $k = l$, $q = q + l$ helyettesítéssel átírható Gamma-függvények hányadosává, így

$$\partial_{x-a}^{q}\Phi(x) - \partial_{x-c}^{q}\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-c)^{-1-q-k}}{\Gamma(-q-k)} \cdot \frac{(c-y)^k}{\Gamma(k+1)} \cdot \Phi(y)\mathrm{d}y =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_{x-c}^{q+k+1}(1) \cdot \int_a^c \frac{1}{\Gamma(k+1)} \cdot \Phi(y)\cdot(c-y)^k\mathrm{d}y =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_{x-c}^{q+k+1}(1) \cdot \partial_{c-a}^{k-1}\Phi(c),$$

melyből $k = 1$-től indítva a szummázást megkapjuk a bizonyítandó állítást, hiszen mind a két oldal analitikus, így meg kell egyezniük, ha $q < 0$. Ha pedig $q \geq 0$, akkor a 2.1.2 állítás ismét használható. □

Érdemes észrevenni, hogy ha $q \in \mathbb{N}$, akkor akkor a formula minden tagjában az $f(x) \equiv 1$ függvény természetes rendű deriváltja szerepel, így a különbség 0, ahogy azt a természetes rendű deriválásnál megszoktuk.

Ha $q = -n$, akkor speciális esetként megkapjuk azt a formulát, amit a 1.3.6 tételben adtunk meg:

$$\partial_{x-a}^{-n}\Phi(x) - \partial_{x-c}^{-n}\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x-c}^{k-n}(1) \cdot \partial_{c-a}^{-k}\Phi(c) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x-c)^{n-k}}{\Gamma(n-k+1)} \cdot \partial_{c-a}^{-k}\Phi(c),$$

hiszen $\Gamma(n-k+1) = (n-k)!$.

3.6. Egyéb tulajdonságok

Ebben az alfejezetben azt fogom vizsgálni, hogy a q-adrendű derivált hogyan viselkedik az alsó határ közelében, az alsó határtól távol, továbbá megvizsgálom az átskálázás és eltolás hatását a q-adrendű deriváltra.

Ha $q \in \mathbb{N}$, akkor az alsó határ megválasztása nem számít, ahogy azt már tárgyaltuk. Ha $q \notin \mathbb{N}$, akkor az $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ véges összegnek elég a tagjait vizsgálni:

$$\partial_{x-a}^{q} f_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \cdot \Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p+l-q+1)} \cdot (X-a)^{p+j-q}$$

Mivel $p > -1$, ezért mind $\Gamma(p+j+1)$ véges, míg $\frac{1}{\Gamma(p+l-q+1)}$ mindig véges, így a jobb oldali szummában $a_0 \neq 0$ dominál, ha $(x-a)$ elég kicsi. Így a következő esetek fordulhatnak elő:

$$\lim_{x\to a} \partial_{x-a}^{q} f_k(x) = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^{p-q} \cdot a_0 \cdot \Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p > 0, \\ a_0 \cdot \Gamma(p+1), & \text{ha } p = q, \\ \infty, & \text{ha} p < q \end{cases}$$

Ha $x \gg a$, akkor az alábbi aszimptotika használható tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$ esetén:

$$(x-a)^{k-q} = x^{k-q} \cdot \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{k-q} =$$
$$x^{k-q} \cdot \left(1 - (k-q) \cdot \frac{a}{x} + O\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\right) \simeq$$
$$x^{k-q} + (q-k) \cdot \frac{a \cdot x^k}{x^{q+1}}$$

Ha $\Phi(x)$ analitikus függvény, akkor |1| (57. oldal) alapján

$$\partial_{x-a}^{q} \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x-a)^{k-q}}{\Gamma(-q) \cdot (k-q) \cdot k!} \cdot \partial_{x-a}^{k} \Phi(x)$$

Ebbe a fenti aszimptotikát behelyettesítve, a 1.2.2 tétel 1.(d) pontja alapján, szokásos $\Phi^{(k)} = \partial_{x-a}^{k} \Phi(x)$ jelöléssel élve:

$$\partial_{x-a}^{q} \Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x-a)^{k-q}}{(k-q) \cdot k!} \cdot \Phi^{(k)} \simeq$$
$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-q}}{(k-q) \cdot k!} \cdot \Phi^{(k)} + \frac{a}{x^{q+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!} \cdot \Phi^{(k)} \right) =$$
$$\partial_{x}^{q} \Phi(x) + \frac{\sin(\pi \cdot q) \cdot \Gamma(q+1)}{\pi} \cdot \frac{a}{x^{q+1}} \cdot \Phi(0),$$

Ha $q > 0$ egész, akkor $\sin(\pi \cdot q)$ miatt a második tag eltűnik, így a formulának egy speciális esete az, hogy pozitív egész rendű deriváltak esetén szabadon választható az alsó határ.

Tekintsük most a függvénytranszformációk két egyszerű esetét, az átskálázást és az eltolást. Legyen $A > 0$ egy konstans, és $f(x)$ helyett tekintstük $f(x+A)$-t. A kérdés az, hogy mi $\partial_{x-a}^{q} f(x+A)$ és $\partial_{x-a}^{q} f(x)$ viszonya. Ahhoz, hogy ezt vizsgálhassuk, fel kell tennünk, hogy $\min(a, a+A)$ és $\max(x, x+A)$ között létezik $f(x)$ q-adrendű deriváltja. Ismét a Riemann-Liouville-féle definíció ad útmutatást:

$$\partial_{x-a}^{q} f(x+A) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_{a}^{x} f(y+A) \cdot (x-y)^{-q-1} \mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_{a+A}^{x+A} f(Y_A) \cdot (x+A-y)^{-q-1} \mathrm{d}Y_A,$$

ahol $Y_A = y + A$, hiszen egy A-val vett eltolás esetén a határok is tolódnak A-val. Jelölje Δ az eltolással keletkezett változást. Ekkor a 3.5.1 tétel alapján

$$\partial^q_{x-a} f(x+A) = \partial^q_{x+A-a} f(x+A) - \Delta =$$

$$\partial^q_{x+A-a} f(x+A) - \sum_{k=1}^{\infty} \partial^{q+k}_{x+A-a}(1) - \partial^{-k}_{a+A-a} f(a+A) \tag{3.6.1}$$

A Riemann-Liouville-féle definíció csak $q < 0$ esetben alkalmazható, azonban a 2.1.2 állítás segítségével (3.6.1) ismét kiterjeszthető nemnegatív q-kra is, így az eltolásra vonatkozó kérdést megválaszoltuk.

Ha az $[a, x]$ intervallumot szeretnénk egy $\beta \neq 0$ skalárral átskálázni, akkor ahhoz először érdemes az intervallum egyik végpontját betolni 0-ba, majd átskálázni, végül visszatolni az átskálázott intervallumot. A 0-ba tolt intervallum $[0, x-a]$ alakú, ennek β-szorosa, majd visszatolása pedig $[a, \beta \cdot x - \beta \cdot a + a]$ alakú. Így az átskálázás során $f(x)$ helyett $f(\beta \cdot x - \beta \cdot a + a)$-t kell tekintenünk. Legyen $Y_\beta = \beta \cdot x - \beta \cdot a + a$. Az eltoláshoz hasonlóan az a kérdés, hogy $\partial^q_{x-a} f(Y_\beta)$ hogyan viszonyul $\partial^q_{x-a} f(x)$-hez. Legyen $X_\beta = x - \frac{a-\beta \cdot a}{\beta}$; ekkor a Riemann-Liouville-féle definíció alapján

$$\partial^q_{x-a} f(\beta \cdot x - \beta \cdot a + a) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^x f(\beta \cdot y - \beta \cdot a + a) \cdot (x-y)^{-q-1} \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^{\beta \cdot X_\beta} \frac{f(Y_\beta)}{\beta} \cdot \left(\frac{\beta \cdot X_\beta - Y_\beta}{\beta} \right)^{-q-1} \mathrm{d}Y_\beta =$$

$$\frac{\beta^q}{\Gamma(-q)} \cdot \int_a^{\beta \cdot X_\beta} f(Y_\beta) \cdot (\beta \cdot X_\beta - Y_\beta)^{-q-1} \mathrm{d}Y_\beta =$$

$$\beta^q \cdot \partial^q_{\beta \cdot X_\beta - a} f(\beta \cdot X_\beta) \tag{3.6.2}$$

Vegyük észre, hogy ha $a = 0$, akkor $X_\beta = x$, így ekkor (3.6.2) nagyban leegyszerűsödik:

$$\partial^q_x f(\beta \cdot x) = \beta^q \cdot \partial^q_{\beta \cdot x} f(\beta \cdot x)$$

Azonban ha $a \neq 0$, akkor csak úgy tudjuk $f(x)$-et $f(\beta \cdot x)$-re átskálázni, ha egy eltolást is alkalmazunk.

3.7. Végeredmény

Az egészrendű deriváltoperátor természetes módon kiterjeszthető tetszőleges valós rendű deriváltoperátorrá, azonban a Riemann-Liouville-féle definíció szükséges ahhoz, hogy tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ rend esetén tudjuk vizsgálni az operátor tulajdonságait. Az általunk használt két definíció előnye az, hogy természetes utat mutatnak arra, hogy akár komplex rendre is kiterjesszük a deriválást.

A linearitás mindkét kimondott definíció szerint teljesül, továbbá amíg $\mathscr{D}$-n belül maradunk, addig tagonként is elvégezhető a deriválás. Azt fogjuk most vizsgálni, hogy ezen azonosságok gyengültek-e az 1.3.6 tételben szereplőkhöz képest.

Az egymás utáni deriválás már egész rend esetén sem volt mindig igaz, hiszen a $q \in \mathbb{Z}^-, r \in \mathbb{Z}^+$ esetben szükség volt egy extra feltételre. Amikor a $q, r \in \mathbb{R}$ esetet vizsgáltuk, akkor a végső állítás, azaz a 3.3.1 tétel megnevez két esetet, amikor a deriváltak felcserélhetősége nem feltétlenül teljesül – cserébe kaptunk egy formulát arra, hogy mekkora az eltérés, és ez a formula speciális esetként magába foglalja az 1.3.6 tétel extra feltételeit.

A Leibniz-szabályt sikerült formájában megőrizni, azonban csak speciális függvénycsoportokra. A dolgozatomban azokat az eseteket tekintettük, amikor $f(x)$ és $g(x)$ analitikus függvény, vagy $f(x)$ tetszőleges q-adrendűen deriválható függvény, $g(x)$ pedig polinomfüggvény.

A láncszabály már az egészrendű operátor esetén is túlságosan bonyolult volt pár speciális esettől eltekintve – ez nem változott a tetszőleges rendű operátor esetén sem, sőt annyit tán vesztettünk, hogy $q \in \mathbb{Z}^-$ esetén vissza tudtuk a q-adrendű deriváltat vezetni egy súlyozott -1-edrendű deriváltra, $q \in \mathbb{R}^-$ esetén erre már nincs lehetőségünk, és már a $q = -1$ esetben is nagyon bonyolult a formula (1 80. oldal).

Az alsó határtól való függést gond nélkül sikerült általánosítani, továbbá a $\mathscr{D}$-beli függvények esetén formulát tudtunk adni arra, hogy a q-adrendű derivált hogyan viselkedik az alsó határ közelében, valamint az alsó határtól távol. Végezetül találtunk egy formulát arra, hogy egy függvény eltoltja és átskálázottja hogyan viszonyul az eredeti függvényhez.

Összefoglalva az 1.3.6 tételbeli azonosságok nagy részét sikerült általánosítani, azonban szinte mindenhol kellett egy kicsit gyengíteni a tételeken, mindenhol fizettünk egy kis árat. Azonban valós fizikai alkalmazásai is vannak a törtkalkulusnak, és az is látszik, hogy érdemes azt a kérdést is feltenni, hogy komplex rendre is kiterjeszthető-e a deriválás, emiatt a valós rendre való kiterjesztés jól sikerült.

4. fejezet

Kitekintés

Tanulmányaim során láttam, hogy az egyváltozós valós függvények kalkulusából hogyan tudjuk felépíteni a többváltozós, valamint vektorértékű függvények kalkulusát, a komplex függvénytant, továbbá a disztribúcióelméletet. Ez egy természetes kitekintési lehetőséget ad dolgozatomban: hogyan lehet tovább általánosítani a deriváltfogalmat, és ezt hogyan lehet több változóba átvinno?

A Grünwald-Post-féle és Riemann-Liouville-féle definíciók mllett több érdekes, említésre méltó definíció is született.

Riemann egy 1953-as művében |9| a Taylor-sorok fogalmát olyan módon bővítette ki, hogy a hatványkitevők nem egészek, és ennek segítségével megadott egy általános formulát:

4.0.1. definíció. Legyen $p, q \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}^q x^p}{\mathrm{d}x^q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} \cdot x^{p-q}$$

Ezen formula segítségével – ha a hatványsorok deriválhatóak tagonként – már tetszőleges q. deriváltját meghatározhatjuk egy függvénynek, amennyiben ismerjük a hatványsorát az általánosított Taylor-sorok szerint. Vegyük észre, hogy ez a megközelítés egy hatványfüggvény n. deriváltjának egyfajta kiterjesztése.

Liouville 1832-ben |10| exponenciális függvények soraként előálló függvények q. deriváltját határozta meg általánosan:

4.0.2. definíció. Legyen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot e^{b_k \cdot x}$, $q \in \mathbb{R}$. Ekkor $f(x)$ q-adrendű deriváltja:

$$\frac{\mathrm{d}^q f(x)}{\mathrm{d}x^q} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot b_k^q \cdot e^{b_k \cdot x}$$

Ebben a deriváltfogalomban felfedezhető $e^{f(x)}$ deriválásának szabálya. Krug 1890-ben |11| megmutatta, hogy ez megegyezik a Riemann-Liouville-féle definícióval $a = -\infty$ alsó határral. Ugyanezen irányban továbbmenve szummák helyett integrálokkal is lehet definiálni a q-adrendű deriváltat, ebből a Weyl-integrál |12| mindenképp említésre méltó, hiszen erősen hasonlít a Riemann-Liouville-féle definícióra:

4.0.3. definíció. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus függvény, $q \in \mathbb{R}$. Ekkor $f(x)$ q-adrendű deriváltja:

$$\frac{\mathrm{d}^q f(x)}{\mathrm{d}x^q} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(y)}{(x-y)^{q+1}} \mathrm{d}y$$

Egy másik megközelítés az, amikor komplex vonalintegrálokat vizsgálunk, és a Cauchy integrálformula segítségével adjuk meg egy függvény q. deriváltját |13|, ha q nem negatív egész:

4.0.4. definíció. Legyen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény, $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Ekkor $f(z)$ q-adrendű deriváltja:

$$\frac{\mathrm{d}^q f(z)}{\mathrm{d}x^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{q+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

ahol C egy $\zeta = 0$-n átmenő, z-t egyszer pozitív irányban körbejáró görbe.

A $(\zeta - z)^{q+1} = e^{(q+1)\cdot \ln(\zeta - z)}$ helyettesítéssel élve megmutatható, hogy ez a definíció megegyezik a Riemann-Liouville-féle definícóval $a = 0$ alsó határ esetén. Vegyük észre, hogy itt a Riemann-Liouville-féle definíciót komplex számokra használtuk.

Riesz Frigyes 1949-ben |14| a definíciót komplex q értékekre tekintette, és $\mathrm{Re}(q) < 0$ esetben megmutatta, hogy az integrál konvergens, továbbá a 2.1.2 állításban szereplő tulajdonság segítségével a teljes komplex síkra kiterjeszthető a fogalom. A fejezetben felsorolt, komplex integrál alapú definíciók mindegyike vizsgálható $q \in \mathbb{C}$ esetben is, hiszen a Gamma-függvény értelmezhető komplex számokra is.

A többváltozós valós analízishez hasonlóan a törtkalkulus is művelhető többváltozóban: Odzijewicz, Malinowska és Torres 2013-as cikke |15| ezen definíciókat igyekezett egységesíteni, és deriválási szabályokat megadni – cikkükben érnek el sikereket, de azt is beismerték, hogy a cikk írásának idejében a téma még friss volt.

Irodalomjegyzék

[1] Oldham, K.B., Spanier, J. (1974). *Fractional Calculus.*

[2] Askey, R. (1975). *Orthongonal polynomials and special functions*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 21

[3] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*

[4] Knopp, K. (1945). *Theory of Functions*, Vol. 1

[5] de Boor, C. (2004). *Divided Differences*, `https://www.emis.de/journals/SAT/papers/2/2.pdf`

[6] Wikipedia *Binomial Coefficients*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient`

[7] Wikipedia *Gamma Function* `https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function`

[8] Wikipedia *Analytic function* `https://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_function`

[9] Riemann, B. (1953). *Versuch einer allgemeinen Auffasung der Integration und Differentiation*, The Collected Works of Bernhard Riemann, 2nd ed.

[10] Liouville, J. (1832). *Mémoire: Sur le calcul des différentielles à indices quelconques*

[11] Krug, A. (1890). *Theorie der Derivationen*

[12] Weyl, H. (1917). *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung*

[13] Nekrassov, P. A. (1888). *General differentiation*

[14] Riesz, M. (1949). *L'intégral de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*

[15] Odzijewicz, T., Malinowska, A. B., Torres, D. F. M. (2013). *Fractional calculus of variations of several independent variables*