

NYILATKOZAT

Név: Szabó Balázs István

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: OGDBJO

Szakdolgozat címe:

Káosz dinamikai rendszerekben

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.30.

Szabó Balázs István
a hallgató aláírása

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szabó Balázs István

KÁOSZ DINAMIKAI RENDSZEREK BEN

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Neogrády-Kiss Márton

Alkalmazott analízis és számításmatematikai tanszék



Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

1. Diszkrét dinamikai rendszerek	6
1.1. Bevezető	6
1.2. Lyapunov-exponens diszkrét esetben	7
1.3. Káosz definíciója diszkrét esetben	9
1.4. Logisztikus leképezés	9
1.5. Patkó leképezés	13
2. Folytonos dinamikai rendszerek	17
2.1. Határhalmazok	17
2.2. Lyapunov-exponens folytonos esetben	19
2.3. Káosz definíciója folytonos esetben	22
2.4. Poincaré-Bendixson tétel	24
2.5. Lorenz rendszer	29
Irodalomjegyzék	35

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Neogrády-Kiss Mártonnak a támogatását, a rendszeres konzultációkat és a szakdolgozat átnézését.

Bevezetés

A káoszelmélet olyan dinamikai rendszerekkel foglalkozik, amelyek viselkedése hosszútávon nem jelezhető előre, egy idő után bonyolult képet mutat. Közös jellemzőjük az érzékeny függés a kezdeti feltételektől, vagyis már a kezdeti értékek egészen apró megváltoztatása nagymértékű változást eredményezhet a rendszer viselkedésében. A kaotikus viselkedés tanulmányozása nagy hatással volt az emberek gondolkodásmódjára. Például az időjárás-előrejelzésnél sokáig azt gondolták, hogy a modellek nem elég pontosak, vagyis az előrejelzés hatékonyságának kulcsa kizárólag a modellek pontosabbá tételében rejlik. A káoszelmélet rámutatott arra, hogy hiába pontosítjuk a modelljeinket, ha már a kezdeti értékek nagyon kicsi pontatlansága is hatalmas eltéréseket eredményezhet. A kaotikus viselkedést először diszkrét idejű, majd folytonos dinamikai rendszerek esetében vizsgáljuk meg. Az első fejezetben a diszkrét idejű dinamikai rendszereken belül először a logisztikus leképezést mutatjuk be, amelyről belátjuk, hogy megszámlálhatóan sok kivételtől eltekintve az összes pályája kaotikus viselkedést mutat.[3] Ezután bevezetjük a kétdimenziós Smale-féle patkó leképezést és mutatunk egy olyan pályát, amely az invariáns halmaz minden pontjához tetszőlegesen közel kerül.[2] A második fejezetben folytonos dinamikai rendszerekkel foglalkozunk. A Poincaré-Bendixson tétel bizonyításával igazoljuk, hogy kétdimenziós esetben nincs káosz.[1] Ezután Edward Lorenz amerikai matematikus háromdimenziós rendszerét vizsgáljuk meg, ami leegyszerűsítve modellezi egy alulról fűtött, felülről hűtött folyadék viselkedését. Meghatározzuk a rendszer egyensúlyi pontjait, megvizsgáljuk azok stabilitását. Adott paraméterek mellett ez a rendszer rendkívül látványos példát szolgáltat a kaotikus viselkedésre folytonos esetben.[1] [3] [4]

1. fejezet

Diszkrét dinamikai rendszerek

1.1. Bevezető

A diszkrét dinamikai rendszerek kaotikus viselkedésének tanulmányozása előtt bevezetünk néhány fontos fogalmat.

1.1. Definíció. A $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést diszkrét dinamikai rendszernek nevezzük, ha

1. $\varphi(0, p) = p$ minden $p \in \mathbb{R}^n$
2. $\varphi(m+k, p) = \varphi(m, \varphi(k, p))$ minden $m, k \in \mathbb{Z}$ és $p \in \mathbb{R}^n$ esetén.

1.2. Definíció. Egy $p \in \mathbb{R}^n$ pont fixpontja a dinamikai rendszernek, ha $\varphi(k, p) = p$ minden $k \in \mathbb{Z}$.

1.3. Definíció. Egy $p \in \mathbb{R}^n$ fixpont stabil, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $\|p - q\| < \delta$, akkor $\|\varphi(k, p) - \varphi(k, q)\| < \varepsilon$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$ esetén.

A p fixpont aszimptotikusan stabil, ha stabil és $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k, p) = p$.

A p fixpont instabil, ha nem stabil.

1.4. Definíció. Egy $q \in \mathbb{R}^n$ pont periodikus, ha nem fixpont és létezik $k > 1$ egész szám, amelyre $\varphi(k, q) = q$.

1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $p \in \mathbb{R}^n$ pont aszimptotikusan periodikus, ha egy periodikus pályához tart, azaz ha létezik $q \in \mathbb{R}^n$ periodikus pont, amelyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi(k, p) - \varphi(k, q)\| = 0.$$

1.6. Tétel. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és vegyük az általa generált ψ diszkrét dinamikai rendszert ($\psi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(n, x) = f^n(x)$).

Tegyük fel, hogy p ψ fixpontja, vagyis $f(p) = p$.

1. Ha $|f'(p)| < 1$, akkor p aszimptotikusan stabil.
2. Ha $|f'(p)| > 1$, akkor p instabil.

1.7. Definíció. Legyenek $M, N \subset \mathbb{R}^n$ halmazok. A $h: M \rightarrow N$ leképezést homeomorfizmusnak nevezzük, ha folytonos, bijekció és az inverze is folytonos.

1.8. Definíció. Legyenek $M, N \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, nyílt halmazok, valamint $\phi: \mathbb{Z} \times N \rightarrow N$ és $\psi: \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ diszkrét dinamikai rendszerek. Azt mondjuk, hogy ϕ és ψ topologikusan konjugáltak, ha létezik $h: N \rightarrow M$ homeomorfizmus, amelyre $h(\phi(t, p)) = \psi(t, h(p))$ minden $t \in \mathbb{Z}$ és $p \in N$ esetén.

1.9. Állítás. Legyenek $\phi: \mathbb{Z} \times N \rightarrow N$, $\psi: \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ diszkrét dinamikai rendszerek és $f: N \rightarrow N$, $f(p) = \phi(1, p)$, valamint $g: M \rightarrow M$, $g(p) = \psi(1, p)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A ϕ és ψ dinamikai rendszerek topologikusan konjugáltak.
2. Létezik $h: N \rightarrow M$ homeomorfizmus, amelyre $h \circ f = g \circ h$.

Bizonyítás: (1) \Rightarrow (2): Ekkor a definíció szerint létezik $h: N \rightarrow M$ homeomorfizmus, amelyre $h(\phi(t, p)) = \psi(t, h(p))$ minden $t \in \mathbb{Z}$ és $p \in N$ esetén. Legyen $t = 1$, ekkor:

$$h(f(p)) = h(\phi(1, p)) = \psi(1, h(p)) = g(h(p))$$

minden $p \in N$ esetén, vagyis $h \circ f = g \circ h$ és h homeomorfizmus.

(2) \Rightarrow (1): A feltétel szerint $h \circ f = g \circ h$, ahol $h: N \rightarrow M$ homeomorfizmus. Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} h(\phi(t, p)) &= h(f^t(p)) = (h \circ f \circ f^{t-1})(p) = (g \circ h \circ f \circ f^{t-2})(p) = \\ &= (g^2 \circ h \circ f \circ f^{t-3})(p) = \dots = (g^t)(p) = g^t(h(p)) = \psi(t, h(p)), \end{aligned}$$

vagyis minden $t \in \mathbb{Z}$ és $p \in N$ esetén $h(\phi(t, p)) = \psi(t, h(p))$, ahol h homeomorfizmus. Tehát beláttuk, hogy ϕ és ψ topologikusan konjugáltak. \square

1.2. Lyapunov-exponens diszkrét esetben

A kaotikus viselkedés egyik fontos eleme a kezdeti feltételre való érzékenység, amelynek mérésére szolgál a Lyapunov-exponens.

Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény és tekintsük az f által definiált diszkrét dinamikai rendszert:

$$\varphi(k, p) = f^k(p),$$

ahol $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}^n$ és $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ a k tagú kompozíció. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a rendszert a következőképpen:

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad x(0) = p_0$$

Szeretnénk megvizsgálni, hogy ha a kezdeti értéket egy infinitezimális vektorral megváltoztatjuk hogyan viselkedik az új pálya az eredetihez képest. Tekintsük az $x(0) + w_0$ pontból induló pályát, ahol $w_0 \in \mathbb{R}^n$ nagyon kicsi vektor. Jelölje ezt a megoldást

y , azaz $y(0) = x(0) + w_0$ és $y(k+1) = f(y(k))$. Legyen w_k az x és y megoldások közötti eltérés a k . időpillanatban. Ezek alapján $y(k)$ felírható $x(k) + w_k$ alakban. A pályák eltávolodásának mértékét egy pont környezetében a függvény deriváltja méri:

$$f(x(k) + w_k) = f(x_k) + f'(x(k))w_k + o(w_k)$$

A lineáris közelítést alkalmazva

$$f(y(k)) = f(x(k) + w_k) \approx f(x(k)) + f'(x(k))w_k$$

Ezekből következik, hogy

$$x(k+1) + w_{k+1} = y(k+1) = f(y(k)) \approx f(x(k)) + f'(x(k))w_k = x(k+1) + f'(x(k))w_k.$$

Ebből w_{k+1} -re a következő becslést kapjuk:

$$w_{k+1} \approx f'(x(k))w_k$$

Ezen becslés többszöri alkalmazásával kapjuk a következőt:

$$w_{k+1} \approx (f'(x(k)) \cdot f'(x(k-1)) \cdot \dots \cdot f'(x(0)))w_0$$

Az egyszerűbb jelölés érdekében legyen $J_k = f'(x(k)) \cdot f'(x(k-1)) \cdot \dots \cdot f'(x(0))$. Mivel $x(k) = f^k(p)$ és $x(0) = p$, így $J_k = f'(f^k(p)) \cdot f'(f^{k-1}(p)) \cdot \dots \cdot f'(p)$ alakban írható.

1.10. Definíció. Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, $p \in \mathbb{R}^n$ és tekintsük az f által definiált diszkrét dinamikai rendszert. A p pontból induló pályához és egy $v \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz tartozó Lyapunov-exponensnek az

$$\chi_p(v) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln(|J_k v|)$$

értéket nevezzük, ahol \ln a természetes alapú logaritmust jelöli.

Vizsgáljuk meg, hogy mit mond a definíció egydimenziós esetben. Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $p, v \in \mathbb{R}$, akkor

$$\chi_p(v) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln(|J_k v|) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k} \ln(|J_k|) + \frac{1}{k} \ln(|v|) \right) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln(|J_k|)$$

Tehát $v \in \mathbb{R}$ esetén $\chi_p(v)$ értéke független v választásától. Ezek alapján egydimenziós esetben definiálhatjuk a Lyapunov-szám fogalmát:

1.11. Definíció. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és $p \in \mathbb{R}$. A p pontból induló pályához tartozó Lyapunov-szám:

$$L(p) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (|f'(f^k(p)) \cdot f'(f^{k-1}(p)) \cdot \dots \cdot f'(p)|)^{\frac{1}{k}}$$

A Lyapunov-exponens a Lyapunov-számnak természetes alapú logaritmus.

1.3. Káosz definíciója diszkrét esetben

Bevezetünk egy definíciót a kaotikus viselkedésre egydimenziós diszkrét idejű esetben. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és jelölje φ az általa generált diszkrét dinamikai rendszert, azaz $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\varphi(k, p) = f^k(p)$.

- 1.12. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy $p \in \mathbb{R}$ pont pályája kaotikus, ha
1. korlátos, azaz ha $\{\varphi(t, p) : t \in \mathbb{N}\}$ korlátos halmaz
 2. érzékenyen függ a kezdeti feltételtől, vagyis $L(p) > 1$
 3. nem aszimptotikusan periodikus

1.4. Logisztikus leképezés

Az egydimenziós diszkrét dinamikai rendszerek kiindulópontot jelentenek a kaotikus viselkedés tanulmányozásában, mivel itt találjuk a legegyszerűbb példákat. Elsőként a logisztikus leképezést fogjuk áttekinteni, majd az $a=4$ paraméterhez tartozó logisztikus leképezéssel konjugált sátorleképezést vezetjük be a kaotikus pályák hatékonyabb tanulmányozásához.

- 1.13. Definíció.** Az $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax(1-x)$ függvényt logisztikus leképezésnek nevezzük, ahol $a \in (0,4]$ rögzített paraméter.

A leképezés fixpontjai a 0 és az $1 - \frac{1}{a}$, természetesen az $1 - \frac{1}{a}$ csak akkor fixpont, ha $a > 1$ is teljesül. Ha $a \in (0,1)$, akkor $|f'(0)| < 1$, amiből következik a 1.6 tétel alapján, hogy a 0 pont aszimptotikusan stabilis és belátható, hogy minden $[0,1]$ -beli pontból induló pálya a 0 ponthoz tart. Ha $1 < a < 3$, akkor $|f'(1 - \frac{1}{a})| = |2 - a| < 1$, vagyis az $1 - \frac{1}{a}$ aszimptotikusan stabilis fixpont és minden $[0,1]$ -beli pontból induló pálya az $1 - \frac{1}{a}$ ponthoz tart. Tovább növelve a értékét az $1 - \frac{1}{a}$ pont elveszti a stabilitását és egy 2-periodikus pálya veszi át a helyét. Ha $3 < a < 1 + \sqrt{6}$, akkor a 2-periodikus pálya aszimptotikusan stabilis.

- 1.14. Definíció.** A $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - |2x - 1|$ függvényt sátorleképezésnek nevezzük.

A leképezés a $[0,1]$ intervallumot önmagába képezi. Két fixpontja van a 0 és a $\frac{2}{3}$.

- 1.15. Állítás.** A sátorleképezés ($g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - |2x - 1|$) és a logisztikus leképezés $a=4$ paraméterrel ($f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x(1-x)$) C^0 -konjugáltak, vagyis létezik $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$ homeomorfizmus, amelyre $h \circ f = g \circ h$.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $h = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$ homeomorfizmus megfelel a feltételeknek.

$$(f \circ h)(x) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin^2(\pi x)$$

Ha $x \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$(h \circ g)(x) = \sin^2\left(\frac{\pi 2x}{2}\right) = \sin^2(\pi x)$$

Ha $x \in (\frac{1}{2}, 1]$:

$$(h \circ g)(x) = \sin^2\left(\frac{\pi(2-2x)}{2}\right) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2(\pi x)$$

Tehát h -ra teljesül $h \circ f = g \circ h$, ezzel az állítást beláttuk. \square

Igazolni fogjuk, hogy a sátorleképezésnek a $[0,1]$ intervallumból kiinduló pályái megszámlálhatóan sok kivételével kaotikus pálya. Ehhez először bevezetünk pár fontos definíciót és jelölést.

Legyen g a sátorleképezés és H a $[0,1]$ intervallum azon pontjainak halmaza amelyekből induló pálya nem lép az $\frac{1}{2}$ pontba, vagyis $H = \{x \in [0,1] : g^n(x) \neq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}\}$. Továbbá legyen Γ az R és az L betűkből álló sorozatok halmaza, vagyis $\Gamma = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \{R, L\}\}$. Definiáljuk a $\tau : H \rightarrow \Gamma$ leképezést a következőképpen: $\tau(x) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ahol $a_n = R$, ha $g^n(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$ és $a_n = L$, ha $g^n(x) \in [0, \frac{1}{2})$.

Tehát a τ leképezés a H halmaz pontjaihoz sorozatokat rendel az alapján, hogy az adott pontból indított pálya n . eleme a $[0,1]$ intervallum jobb vagy bal felében van. Például az $\frac{1}{3}$ ponthoz tartozó sorozat az (L, R, R, R, \dots) , mivel az $\frac{1}{3}$ pontból induló pálya egy lépés után $\frac{2}{3}$ fixpontba kerül és így ott is marad. A τ függvény bijekció H és Γ között. Ehhez belátjuk, hogy τ injektív és szürjektív.

1.16. Állítás. *A $\tau : H \rightarrow \Gamma$ leképezés injektív.*

Bizonyítás: Legyen $x, y \in H$, $x \neq y$ és tegyük fel indirekt, hogy $\tau(x) = \tau(y)$. Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\frac{g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y)}{g^n(x) - g^n(y)}| = 2$, mivel $g^{n+1}(x)$ és $g^{n+1}(y)$ a $[0,1]$ intervallum ugyanazon oldalán van, valamint a sátorleképezés meredeksége a $[0, \frac{1}{2})$ intervallumon 2, a $(\frac{1}{2}, 1]$ -n pedig -2. Teljes indukcióval belátható, hogy $|g^n(x) - g^n(y)| = 2^n|x - y|$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} |g^n(x) - g^n(y)| = \infty$, ami ellentmondás, hiszen $|g^n(x) - g^n(y)| \leq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezekből következik, hogy τ injektív. \square

1.17. Állítás. *A $\tau : H \rightarrow \Gamma$ leképezés szürjektív.*

Bizonyítás: Vegyünk egy tetszőleges $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elemet Γ -ból és keressünk olyan x -et, amelyre $\tau(x) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (L, L, L, \dots)$, akkor $x=0$ jó lesz és az injektivitás miatt egyértelmű is. Hasonlóan, ha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (R, L, L, \dots)$, akkor $x = 1$ az egyetlen megfelelő pont. Vizsgáljuk meg a többi esetet. a_1 meghatározza, hogy $x \in (0, \frac{1}{2})$ vagy $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Minden további tag felére csökkenti a lehetséges intervallum hosszát. Például, ha $a_1 = R$, akkor $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, továbbá ha $a_2 = R$, akkor $x \in (\frac{2}{4}, \frac{3}{4})$. Tehát x lehetséges értékeit egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat adja meg, ahol az intervallumok hossza mindig a felére csökken. A Cantor-féle közöspont tétel szerint

az intervallumsorozatnak egyetlen közös pontja van és ehhez a ponthoz τ az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot rendeli. \square

Tehát τ egy bijektív megfeleltetés H és Γ pontjai között. Vegyük az $\eta : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\eta((a_0, a_1, a_2, \dots)) = (a_1, a_2, \dots)$ leképezést. Belátjuk, hogy az η leképezés konjugált a sátorleképezéssel, ehhez pedig elegendő belátni, hogy $\tau : H \rightarrow \Gamma$ egy olyan homeomorfizmus, amelyre $\eta \circ \tau = \tau \circ g$. Először igazolnunk kell, hogy τ valóban homeomorfizmus, vagyis folytonos, bijekció és az inverze is folytonos. Azt, hogy τ bijekció már belátuk, a folytonosság igazolásához először definiálunk egy $d : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ metrikát. Legyen d tetszőleges $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma$ esetén a következő:

$$d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{a_k b_k} 2^{-k},$$

ahol

$$\delta_{a_k b_k} = \begin{cases} 0 & \text{ha } a_k = b_k \\ 1 & \text{ha } a_k \neq b_k \end{cases}$$

1.18. Állítás. τ folytonos és az inverze is folytonos.

Bizonyítás: Először τ folytonosságát igazoljuk. Legyen $x \in H$ és $\varepsilon > 0$ valós szám. Belátjuk, hogy létezik $\delta > 0$, hogy minden $y \in H$ esetén, ha $|x - y| < \delta$, akkor $d(\tau(x), \tau(y)) < \varepsilon$. Legyen $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ és legyen $j \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{j}{2^{k+1}} < x < \frac{j+1}{2^{k+1}}$. Ha $|x - y| < \min\{x - \frac{j}{2^{k+1}}, \frac{j+1}{2^{k+1}} - x\}$, akkor $x, y \in (\frac{j}{2^{k+1}}, \frac{j+1}{2^{k+1}})$, amiből pedig következik, hogy $\tau(x)$ és $\tau(y)$ első $k+1$ karaktere megegyezik, vagyis $d(\tau(x), \tau(y)) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Tehát $\delta = \min\{x - \frac{j}{2^{k+1}}, \frac{j+1}{2^{k+1}} - x\}$ esetén ha $|x - y| < \delta$, akkor $d(\tau(x), \tau(y)) < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy τ folytonos.

τ^{-1} folytonossága hasonlóan bizonyítható. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$ valós szám, $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ és legyen $\delta = \frac{1}{2^k}$. Ha $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma$ és $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) < \delta$, akkor $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ első $k+1$ eleme megegyezik, vagyis létezik $j \in \mathbb{N}$, hogy $\tau^{-1}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}), \tau^{-1}((b_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in (\frac{j}{2^{k+1}}, \frac{j+1}{2^{k+1}})$. Tehát $|\tau^{-1}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) - \tau^{-1}((b_n)_{n \in \mathbb{N}})| < \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$, amiből következik, hogy τ^{-1} folytonos. \square

Az 1.16, 1.17 és 1.18 állításokból következik, hogy τ homeomorfizmus. Ezt felhasználjuk a következő állításhoz.

1.19. Állítás. $\eta \circ \tau = \tau \circ g|_H$, ahol $g|_H$ a H -ra megszorított sátorleképezés.

Bizonyítás: Legyen $\tau(x) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, ahol $x \in H$.

$$(\eta \circ \tau)(x) = \eta((a_0, a_1, a_2, \dots)) = (a_1, a_2, \dots)$$

$$(\tau \circ g)(x) = \tau(g(x)) = (a_1, a_2, \dots)$$

Ezzel az állítást beláttuk. \square

A következőkben a g sátorleképezés H -beli pontból induló pályáit fogjuk vizsgálni kaotikusság szempontjából. Mivel minden $p \in H$ esetén a p -ből induló pálya

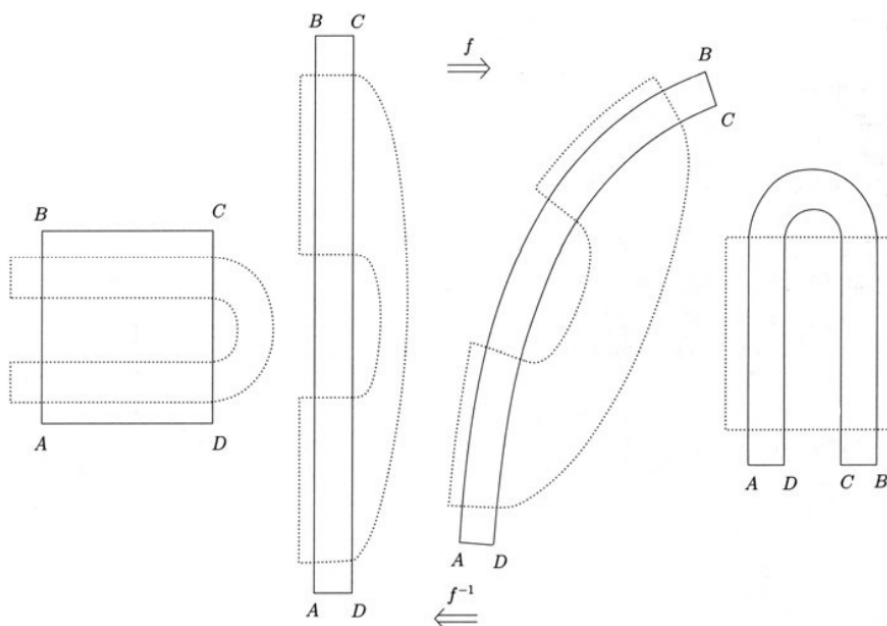
korlátos és $|g'(p)| = 2$, így egy pálya pontosan akkor lesz kaotikus, ha nem aszimptotikusan periodikus. Egy p pont csak akkor lehet aszimptotikusan periodikus, ha periodikus vagy a belőle induló pálya véges sok lépést követően rálép egy periodikus pályára, ezeket végül-periodikusnak nevezzük. A periodikus vagy végül-periodikus pontokat elég az η leképezésnél vizsgálnunk a 1.19 állítás miatt. Például az η leképezés 3-periodikus pontjai a következők: $(R, L, L, R, L, L, \dots)$, $(R, R, L, R, R, L, \dots)$, $(R, L, R, R, L, R, \dots)$, $(L, R, R, L, R, R, \dots)$, $(L, L, R, L, L, R, \dots)$ és $(L, R, L, L, R, L, \dots)$. Minden $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén véges sok k -periodikus pálya van, hiszen 2^k azon pályák száma, amelyek periódusának hossza legfeljebb k . Ebből következik, hogy megszámlálhatóan sok periodikus pálya van. Végül-periodikus pályát pedig úgy kapunk, hogy egy tetszőleges véges sorozatot illesztünk egy periodikus pálya elé, vagyis ezen pályák számossága is megszámlálható. Tehát megszámlálhatóan sok H -beli pontból induló aszimptotikusan periodikus pályája van a sátorleképezésnek. Mivel a $[0,1] - H$ halmaznak is megszámlálhatóan sok eleme van elmondható, hogy a $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $g(x) = 1 - |2x - 1|$ sátorleképezésnek megszámlálható sok kivétellel az összes pályája kaotikus. A 1.19 állításból következik a következő állítás.

1.20. Állítás. *Az $a = 4$ paraméterhez tartozó logisztikus leképezés esetén a $[0,1]$ intervallum pontjaiból induló pályák megszámlálható sok kivétellel mind kaotikusak.*

1.5. Patkó leképezés

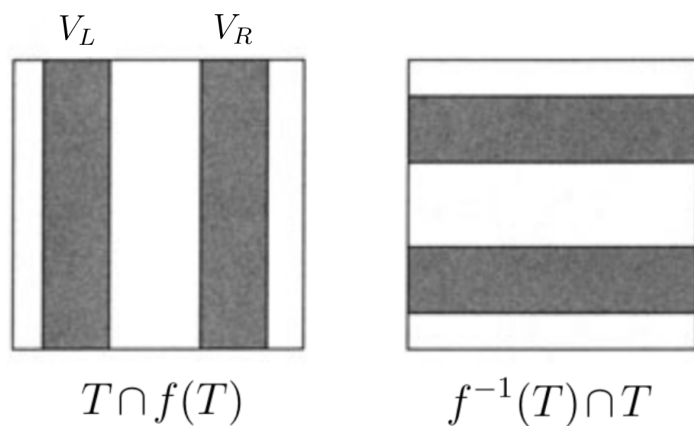
A kétdimenziós dinamikai rendszerek közül érdekes példát szolgáltat a kaotikus viselkedésre a patkóleképezés. A leképezést geometriai úton fogjuk definiálni. Vegyünk egy $ABCD$ négyzetet a síkon. Húzzuk össze vízszintes irányban és nyújtsuk meg függőleges irányban. Ezután hajtsuk össze középen és helyezzük az eredeti négyzetre úgy, hogy a metszetük két függőleges sáv legyen. Így kapunk egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést. A négyzet képe hasonlít egy patkóra, ezért hívjuk patkó leképezésnek. A kép pontos formája nem lényeges, de feltesszük az egyszerűség kedvéért, hogy a nyújtás és az összehúzás lineáris, valamint a metszetként kapott függőleges sávok téglalapok. Értelmezhetjük a leképezés inverzét is, ekkor a metszetként előállított sávok vízszintesek. A leképezést a 1.1 ábra szemlélteti.

Jelölje a kiinduló négyzetet T . Az előzőek alapján $f(T) \cap T$ két függőleges sáv, $f^{-1}(T) \cap T$ pedig két vízszintes sáv, ahogy az 1.2 ábra mutatja. Az iterációt folytatva a két függőleges sáv átalakul két vékony patkóvá és a négyzettel való metszetük, vagyis $f^2(T) \cap f(T) \cap T$ két-két vékonyabb függőleges sáv lesz. Hasonlóan $f^{-2}(T) \cap f^{-1}(T) \cap T$ négy vékonyabb vízszintes sáv, ahogyan azt a 1.3 ábra mutatja.

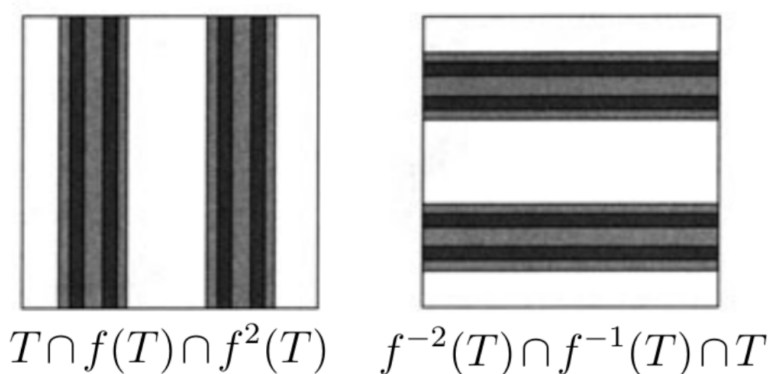


1.1. ábra. patkóleképezés

Könnyen látható, hogy $\bigcap_{i=0}^k f^i(T)$ 2^k darab függőleges sáv uniója és $\bigcap_{i=0}^{-k} f^i(T)$ 2^k vízszintes sáv uniója, ahol f^0 az identitás. A logisztikus leképezéshez hasonlóan a szimbolikus dinamika eszközt fogjuk felhasználni a patkóleképezés vizsgálatához. Jelölje H a dinamikai rendszer invariáns halmazát, azaz $H = \{x \in T : f^k(x) \in T \forall k \in \mathbb{Z}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} (\bigcap_{i=-k}^k f^i(T))$. Az $f^{-1}(T) \cap T \cap f(T)$ metszet négy négyzet uniója, $f^{-2}(T) \cap f^{-1}(T) \cap T \cap f(T) \cap f^2(T)$ pedig tizenhat kisebb négyzet uniója, ahogyan az 1.4 ábra szemlélteti, azaz egy Cantor-halmazhoz jutunk.



1.2. ábra. első iteráció



1.3. ábra. második iteráció

Legyen Ω az R és L betűkből álló, mindkét irányban végtelen sorozatok halmaza, azaz $\Omega = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in \{R, L\}\}$. Belátjuk, hogy H és Ω bijektív. Legyen V_L és V_R az $f(T) \cap T$ metszet két függőleges sávja, vagyis $f(T) \cap T = V_L \cup V_R$.

1.21. Állítás. $\varphi : H \rightarrow \Omega$, $\varphi(x) := (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bijekció, ahol

$$a_k = \begin{cases} L & \text{ha } f^k(x) \in V_L \\ R & \text{ha } f^k(x) \in V_R \end{cases}$$

Bizonyítás: A φ leképezés jól definiált, mivel minden $x \in H$ -hoz egyértelműen rendel

egy sorozatot. Belátjuk, hogy φ invertálható. Legyen $\omega \in \Omega$ és $m \in \mathbb{N}$. Jelölje U_m^ω azon $x \in T$ pontok halmazát, amelyekre $\varphi(x)_k = \omega_k$ minden $-(m-1) \leq k \leq m$ esetén. Például $m=1$ esetén U_m^ω az $f^{-1}(T) \cap T \cap f(T)$ metszet négy négyzete közül az egyik, mivel ω_0 meghatározza, hogy $U_1^\omega \subset V_L$ vagy $U_1^\omega \subset V_R$, ω_1 pedig megmutatja, hogy a két vízszintes sáv közül melyik tartalmazza U_1^ω -t. Általánosságban elmondható, hogy U_m^ω egy függőleges sáv és egy vízszintes sáv metszete. Ezek a sávok egyre vékonyabbak lesznek, ahogy m -mel végtelenhez tartunk, vagyis a metszetként kapott négyzeteknek egy közös pontjuk lesz. Tehát φ bijekció. \square

Vegyük $T \subset \mathbb{R}^2$ -en a sztenderd metrikát, Ω -n pedig a következő ρ metrikát. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Omega$.

$$\rho((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{a_k b_k} 2^{-|k|},$$

ahol

$$\delta_{a_k b_k} = \begin{cases} 0 & \text{ha } a_k = b_k \\ 1 & \text{ha } a_k \neq b_k \end{cases}$$

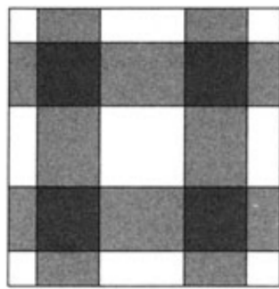
Belátható, hogy $\varphi: H \rightarrow \Omega$ homeomorfizmus. Vegyük a $\eta: \Omega \rightarrow \Omega$, $\eta((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (a'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eltolásoperátort, ahol $a'_k = a_{k+1}$. Igazolható, hogy $\varphi(f(x)) = \eta(\varphi(x))$ minden $x \in H$ esetén, azaz f és η topologikusan konjugáltak. Az Ω -n definiált szimbolikus dinamika vizsgálatával a következőket mondhatjuk el a patkóleképezésről.

1.22. Állítás. *A patkóleképezés invariáns halmaza megszámlálható sok pontot tartalmaz, amelynek periodikus pályája van és a nem periodikus pályák között van olyan, amely az invariáns halmaz minden pontjához tetszőlegesen közel kerül.*

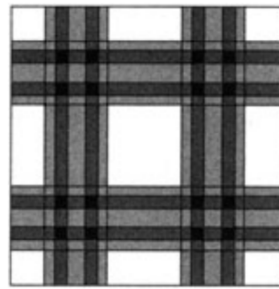
Vegyük a következő H -beli pontot:

$$a = (\dots, R, L, R, R, R, L, L, R, L, L, R, R, R, R, R, L, R, L, R, L, R, R, \dots),$$

azaz vesszük minden n pozitív egész számra az összes n hosszú R, L sorozatot és egymás után felsoroljuk. Könnyen látható, hogy a pályája minden Ω -beli ponthoz tetszőlegesen közel kerül a d metrika szerint.



$$f^{-1}(T) \cap T \cap f(T)$$



$$f^{-2}(T) \cap f^{-1}(T) \cap T \cap f(T) \cap f^2(T)$$

1.4. ábra. invariáns halmaz

2. fejezet

Folytonos dinamikai rendszerek

Ebben az alfejezetben definiáljuk folytonos esetben a Lyapunov-exponenst, valamint az omega és alfa határhalmazt, amelyek segítségével bevezetünk egy definíciót a kaotikus viselkedésre.

Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és jelölje $\varphi(t, p_0)$ az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ autonóm differenciálegyenlet $x(0) = p_0$ feltételt kielégítő megoldását.

2.1. Határhalmazok

Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és jelölje $\varphi(t, p_0)$ az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ autonóm differenciálegyenlet $x(0) = p_0$ feltételt kielégítő megoldását.

2.1. Definíció. *A p_0 ponthoz tartozó omega határhalmaz azon $v \in \mathbb{R}^n$ pontokból áll, amelyekhez létezik egy $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nemkorlátos, monoton növekvő valós számsorozat, amelyre*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p_0) = v.$$

A p_0 pont omega határhalmazát jelölje $\omega(p_0)$. Az alfa határhalmaz pontjai pedig azon $v \in \mathbb{R}^n$ pontok, amelyekhez létezik egy $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nemkorlátos, monoton csökkenő sorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p_0) = v$. A p_0 pont alfa határhalmazát jelölje $\alpha(p_0)$.

Tekintsünk két nagyon egyszerű példát az omega határhalmaz definíciójára. Ha p egy egyensúlyi pont, akkor $\omega(p) = p$. Ha p pályája periodikus, akkor p omega határhalmaza p egész pályája. A következő állításban megfogalmazzuk az omega határhalmaz pár tulajdonságát.

2.2. Állítás. *Az omega határhalmaz néhány fontos tulajdonsága:*

1. *Ha a $\{\varphi(t, p_0) : t \geq 0\}$ pálya korlátos, akkor az ω_{p_0} nem üres.*
2. *Zárt, azaz minden $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\omega(p_0)$ -beli konvergens sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in \omega(p_0)$*
3. *Ha $v \in \omega(p_0)$, akkor a $\{\varphi(t, v) : t \in \mathbb{R}\}$ pálya összes pontja eleme $\omega(p_0)$ -nak.*
4. *Ha a $\{\varphi(t, p_0) : t \geq 0\}$ pálya korlátos, akkor $\omega(p_0)$ összefüggő.*
5. *Ha $v \in \omega(p_0)$ és $u \in \omega(v)$, akkor $u \in \omega(p_0)$ is teljesül.*

Bizonyítás: (1) : Legyen $v_n = \varphi(n, p_0)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel $\{\varphi(t, p_0) : t \geq 0\}$ korlátos, így a $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat korlátos. A Bolzano-Weierstrass tétel miatt létezik konvergens részsorozata, jelölje $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ és legyen $q = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k}$. A q pont eleme $\omega(p_0)$ -nak, mert $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nemkorlátos, monoton növekvő számsorozat, amelyre $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(n_k, p_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} = q$.

(2) : Vegyünk egy $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\omega(p_0)$ -beli konvergens sorozatot, legyen $u = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Mivel $v_n \in \omega(p_0)$, így létezik egy $(t_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ nemkorlátos, monoton növekvő valós számsorozat, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n,k} = v_n$. Megadunk egy $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ nemkorlátos, monoton növekvő sorozatot, amelyre $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, p_0) = u$. Legyen $t_0 = t_{0,0}$. Tegyük fel, hogy $j > 0$ és az első $j - 1$ tagot már definiáltuk. Legyen $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\|v_n - u\| < \frac{1}{2^j}$, továbbá $K \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\|\varphi(t_{N,K}) - v_N\| < \frac{1}{2^j}$ és $t_{N,K} - t_{j-1} > 1$. Legyen $t_j = t_{N,K}$, akkor elmondható, hogy $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ nemkorlátos, monoton növekvő valós számsorozat, amire $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, p_0) = u$, azaz $u \in \omega(p_0)$.

(3) : Tegyük fel, hogy $v \in \omega(p_0)$, azaz létezik $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nemkorlátos, monoton növekvő valós számsorozat, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p_0) = v$. Legyen w egy tetszőleges pont a v -ből induló pályán, azaz $w = \varphi(s, p_0)$ egy megfelelő s valós számra. Definiáljuk a $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot úgy, hogy $t'_n = t_n + s$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Könnyen látható, hogy a $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is nemkorlátos, monoton növekvő valós számsorozat. φ csoporttulajdonságából következik, hogy $\varphi(s + t_n, p_0) = \varphi(s, \varphi(t_n, p_0))$ minden n esetén. Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t'_n, p_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s + t_n, p_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s, \varphi(t_n, p_0)) = \varphi(s, v) = w,$$

vagyis $w \in \omega(p_0)$. Ezzel beláttuk, hogy $\{\varphi(t, v) : t \in \mathbb{R}\}$ részhalmaza $\omega(p_0)$ -nak.

(4) : Tegyük fel indirekt, hogy $\{\varphi(t, v) : t \geq 0\}$ korlátos, de $\omega(p_0)$ nem összefüggő, azaz léteznek A és B diszjunkt halmazok, hogy $\omega(p_0) = A \cup B$, valamint A és B távolsága $d > 0$. Mivel $\{\varphi(t, p_0) : t \geq 0\}$ korlátos, így $\omega(p_0)$ is korlátos, amiből következik A korlátossága. Vegyük azon pontok H halmazát, amelyek távolsága A -tól $\frac{d}{2}$, azaz $H = \{r \in \mathbb{R}^n : \inf_{x \in A} \|x - r\| = \frac{d}{2}\}$, ez korlátos hiszen A korlátos. Mivel A és B részhalmaza $\omega(p_0)$ -nak, így p_0 pályája végtelen sokszor metszi H -t. Ha a $V = H \cap \{\varphi(t, p_0) : t \geq 0\}$ halmaznak végtelen sok eleme van, akkor van torlódási pontja, mivel korlátos és ezt a torlódási pontot jelölje v . Ha V véges sok pontot tartalmaz, akkor van olyan pont, amiben végtelen sokszor metszi p_0 pályája H -t, ebben az esetben v ezt a pontot jelölje. Mindkét esetben létezik egy $(\varphi(t_n, p_0))_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ sorozat, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p_0) = v$, vagyis $v \in \omega(p_0)$. Ez ellentmondás, mivel v távolsága A -tól és B -től is legalább $\frac{d}{2}$, tehát $v \notin A \cup B = \omega(p_0)$.

(5) : Tegyük fel indirekt, hogy $v \in \omega(p_0)$ és $u \in \omega(v)$, de $u \notin \omega(p_0)$. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$ és $T > 0$, hogy $B(u, \varepsilon) \cap \{\varphi(t, p_0) : t > T\} = \emptyset$, ahol $B(u, \varepsilon)$ az u pont ε sugarú nyílt környezetét jelöli. Mivel $u \in \omega(v)$ létezik $s_1 > 0$, hogy $\varphi(s_1, v) \in B(u, \frac{\varepsilon}{2})$. Ugyanakkor $v \in \omega(p_0)$, vagyis a 3. tulajdonság alapján v egész pályája $\omega(p_0)$ -ban van, speciálisan $\varphi(s_1, v) \in \omega(p_0)$. Ebből következik, hogy létezik $s_2 > T$, hogy $\varphi(s_2, p_0) \in B(\varphi(s_1, v), \frac{\varepsilon}{2})$. Összefoglalva $\varphi(s_1, v) \in B(u, \frac{\varepsilon}{2})$ és $\varphi(s_2, p_0) \in B(\varphi(s_1, v), \frac{\varepsilon}{2})$, vagyis $\varphi(s_2, p_0) \in B(u, \varepsilon)$, ami ellentmond annak, hogy $B(u, \varepsilon) \cap \{\varphi(t, p_0) : t > T\} = \emptyset$. Tehát $u \in \omega(p_0)$ teljesül. \square

Az omega határhalmazra vonatkozó állítások az alfa határhalmazra is teljesülnek a feltételek minimális megváltoztatásával.

- 2.3. Állítás.** 1. Ha a $\{\varphi(t, p_0) : t \leq 0\}$ pálya korlátos, akkor az α_{p_0} nem üres.
 2. Zárt, azaz minden $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\alpha(p_0)$ -beli konvergens sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in \alpha(p_0)$
 3. Ha $v \in \alpha(p_0)$, akkor a $\{\varphi(t, v) : t \in \mathbb{R}\}$ pálya összes pontja eleme $\alpha(p_0)$ -nak.
 4. Ha a $\{\varphi(t, p_0) : t \leq 0\}$ pálya korlátos, akkor $\alpha(p_0)$ összefüggő.
 5. Ha $v \in \alpha(p_0)$ és $u \in \alpha(v)$, akkor $u \in \alpha(p_0)$ is teljesül.

Az állítások bizonyítása hasonlóan működik, mint az omega határhalmaz esetén.

2.2. Lyapunov-exponens folytonos esetben

Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény és tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ autonóm differenciálegyenletet. Jelölje $\varphi(t, v)$ a differenciálegyenlet $x(0) = v$ kezdeti feltételhez tartozó megoldásának t -beli értékét. Tehát $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, és $\partial_t \varphi(t, v) = f(\varphi(t, v))$.

A kezdeti feltételre való érzékenységet szeretnénk megvizsgálni egy $v \in \mathbb{R}^n$ pont környezetében, ehhez pedig a v és a $v + w$ pontokból induló pályák t idő múlva fellépő eltérését becsüljük meg, ahol $w \in \mathbb{R}^n$ egy nagyon kicsi vektor.

$$\varphi(t, v + w) = \varphi(t, v) + \partial_v \varphi(t, v)w + o(w)$$

Ebből következik, hogy

$$\varphi(t, v + w) \approx \varphi(t, v) + \partial_v \varphi(t, v)w.$$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelölést:

$$J(t) = \partial_v \varphi(t, v)$$

2.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, $v \in \mathbb{R}^n$ és tekintsük az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenletet. A v pontból induló pályához és egy $w \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz tartozó Lyapunov exponens:

$$\chi_v(w) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|J(t)w\|),$$

ahol $J(t) = \partial_v \varphi(t, v)$.

2.5. Állítás.

$$\partial_v \varphi(t, v) \cdot f(v) = f(\varphi(t, v)) \tag{2.1}$$

Bizonyítás: A feltétel szerint:

$$\partial_t \varphi(t, v) = f(\varphi(t, v)) \quad (2.2)$$

Ezt a v változó szerint deriválva kapjuk a következő egyenletet:

$$\partial_t(\partial_v \varphi(t, v)) = f'(\varphi(t, v)) \cdot \partial_v \varphi(t, v) \quad (2.3)$$

Vezessük be az $A(t) = f'(\varphi(t, v))$ jelölést és az egyenletet szorozzuk meg $f(v)$ -vel:

$$\partial_t(\partial_v \varphi(t, v)) \cdot f(v) = A(t) \cdot \partial_v \varphi(t, v) \cdot f(v)$$

Ebből az $u(t) = \partial_v \varphi(t, v) \cdot f(v)$ jelölést bevezetve a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t)$$

Deriváljuk le a 2.2 egyenletet t szerint:

$$\partial_t(\partial_t \varphi(t, v)) = f'(\varphi(t, v)) \cdot \partial_t \varphi(t, v)$$

Felhasználva, hogy $\partial_t \varphi(t, v) = f(\varphi(t, v))$ és bevezetve a $w(t) = f(\varphi(t, v))$ jelölést a következő egyenlethez jutunk:

$$\dot{w}(t) = A(t) \cdot w(t)$$

Az u és w megoldások kezdeti értéke megegyezik:

$$\begin{aligned} u(0) &= \partial_v \varphi(0, v) \cdot f(v) = I \cdot f(v) = f(v) \\ w(0) &= f(\varphi(0, v)) = f(v) \end{aligned}$$

Tehát u és w ugyanannak a differenciálegyenletnek a megoldásai ugyanazzal a kezdeti feltétellel. Ebből következik, hogy $u(t) = w(t)$, azaz

$$\partial_v \varphi(t, v) \cdot f(v) = f(\varphi(t, v))$$

2.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ autonóm differenciálegyenletnek a $v \in \mathbb{R}^n$ pontból induló pályája korlátos, azaz $\{\varphi(t, v) : t \in \mathbb{R}\}$ korlátos halmaz. Ekkor a következő két állítás közül legalább az egyik teljesül:*

1. *Létezik $w \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $\chi_v(w)$ nem nulla.*
2. *v omega-határhalmazában van egyensúlyi pont.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy (2) nem teljesül, vagyis v omega-határhalmazában nincs egyensúlyi pont. Emiatt létezik $c_1 > 0$ valós szám, amelyre $\|f(\varphi(t, v))\| > c_1$ minden $t > 0$ esetén. Mivel $\{\varphi(t, v) : t \in \mathbb{R}\}$ korlátos és f folytonos létezik egy c_2 valós szám, amelyre $\|f(\varphi(t, v))\| < c_2$ minden t -re. Felhasználva a 2.1 egyenletet az $f(v)$ -hez tartozó Lyapunov-exponens:

$$\chi_v(f(v)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|J(t)f(v)\|) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|f(\varphi(t, v))\|)$$

A $c_1 < \|f(\varphi(t, v))\| < c_2$ feltételből következik, hogy

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} c_1 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|f(\varphi(t, v))\|) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} c_2 \leq 0$$

Tehát $\chi_v(f(v)) = 0$, vagyis (1) teljesül. \square

A 2.3 egyenlet a $J(t) = \partial_v \varphi(t, v)$ és az $A(t) = f'(\varphi(t, v))$ jelölésekkel felírva:

$$\dot{J}(t) = A(t)J(t)$$

Jelölje a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $J(t)$ mátrix determinánsát, azaz $g(t) := \det(J(t))$.

2.7. Állítás. *A $g(t) = \det(J(t))$ függvény kielégíti a következő differenciálegyenletet a $g(0) = 1$ kezdeti feltétellel:*

$$\dot{g}(t) = \text{tr}(A(t)) \cdot g(t),$$

ahol $\text{tr}(A(t))$ az $A(t)$ mátrix nyoma.

Bizonyítás: Jelölje S_n az $\{1, 2, \dots, n\}$ permutációit és $sg(\sigma)$ egy σ permutáció inverziószámát.

$$\begin{aligned} g'(t) &= (\det(J(t)))' = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sg(\sigma)} (J_{1,\sigma(1)}(t) \cdot J_{2,\sigma(2)}(t) \cdot \dots \cdot J_{n,\sigma(n)}(t))' = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sg(\sigma)} \sum_{i=1}^n J_{1,\sigma(1)}(t) \cdot \dots \cdot J'_{i,\sigma(i)}(t) \cdot \dots \cdot J_{n,\sigma(n)}(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} J_{1,1}(t) & J_{1,2}(t) & \dots & J_{1,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J'_{i,1}(t) & J'_{i,2}(t) & \dots & J'_{i,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{n,1}(t) & J_{n,2}(t) & \dots & J_{n,n}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A $\dot{J}(t) = A(t)J(t)$ feltétel szerint

$$J'_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^n A_{i,k}(t) \cdot J_{k,j}(t).$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} J_{1,1}(t) & \dots & J_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ J'_{i,1}(t) & \dots & J'_{i,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ J_{n,1}(t) & \dots & J_{n,n}(t) \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} J_{1,1}(t) & \dots & J_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,k}(t) \cdot J_{k,1}(t) & \dots & A_{i,k}(t) \cdot J_{k,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ J_{n,1}(t) & \dots & J_{n,n}(t) \end{pmatrix} = \\ &= A_{i,i}(t) \cdot \det \begin{pmatrix} J_{1,1}(t) & J_{1,2}(t) & \dots & J_{1,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{i,1}(t) & J_{i,2}(t) & \dots & J_{i,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{n,1}(t) & J_{n,2}(t) & \dots & J_{n,n}(t) \end{pmatrix} = A_{i,i}(t) \cdot \det(J(t)) \end{aligned}$$

Tehát

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} J_{1,1}(t) & J_{1,2}(t) & \dots & J_{1,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J'_{i,1}(t) & J'_{i,2}(t) & \dots & J'_{i,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{n,1}(t) & J_{n,2}(t) & \dots & J_{n,n}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_{i,i}(t) \cdot \det(J(t)) = \text{tr}(A(t)) \cdot g(t).$$

A kezdeti feltétel könnyen ellenőrizhető, $g(0) = \det(J(0)) = \det(I) = 1$. \square

2.3. Káosz definíciója folytonos esetben

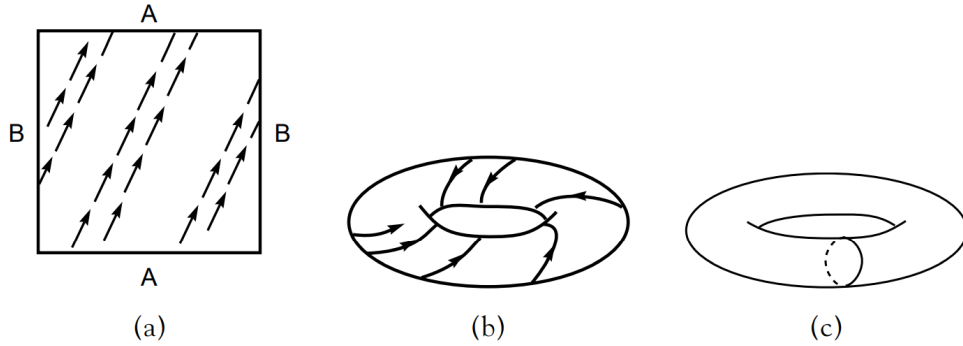
Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és jelölje $\varphi(t, p_0)$ az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlet $x(0) = p_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

2.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\varphi(t, p_0)$ megoldás pályája kaotikus, ha a következők teljesülnek:

1. $\{\varphi(t, p_0) : t \geq 0\}$ korlátos
2. $\varphi(t, p_0)$ -nak van pozitív Lyapunov-exponense, azaz létezik $v \in \mathbb{R}^n$, hogy $\chi_{p_0}(v) > 0$
3. $\omega(p_0)$ nem periodikus, nem csak egyensúlyi pontokból áll és nem igaz, hogy minden $q \in \omega(p_0)$ -ra $\omega(q)$ és $\alpha(q)$ egyensúlyi pont

A káosz egzakt definiálása nem egyszerű feladat. Az előbb bevezetett definíció is inkább szükséges, mint elégséges feltétel. A dimenziók számának növekedésével mind a pályák, mind azok határhalmazai egyre bonyolultabb alakzatokat vehetnek fel. Már 3-dimenziós esetben találunk olyan példát, amely kielégíti a fent említett káosz definíció feltételeit, de mégsem tekinthető kaotikusnak.

Vegyünk egy egységnyezetet és rajta egy vektormezőt a 2.1 ábrának megfelelően, ahol minden ponthoz ugyanaz a vektor van rendelve. A vektorok meredeksége



2.1. ábra.

egy q irracionális szám. A négyzet alsó és felső szélét összeragasztva, majd az így kapott henger két szélét ragasztva össze egy tóruszhoz jutunk, amin vehetjük a négyzet által meghatározott vektormezőt. Vegyük a tóruszon definiált vektormező egy megoldásának pályáját. Mivel q irracionális a pálya biztosan nem periodikus. Belátjuk, hogy a pálya omega határhalmaza az egész tórusz. Ehhez elegendő belátni, hogy minden $x_0 \in [0,1)$ esetén az $\{(x_0, y) : y \in [0,1)\}$ körvonal (2.1 ábra (c)) részhalmaza az omega határhalmaznak. Vegyük a pálya és körvonal egy metszéspontját, ez legyen (x_0, y_0) . A pálya és a körvonal egymást követő metszéspontjai $(x_0, \{y_0 + kq\})$, ahol $k \in \mathbb{N}$ és $\{\}$ a törtrészt jelöli. Tegyük fel indirekt, hogy létezik a körvonalon olyan pont, ami nem eleme az omega határhalmaznak, azaz létezik $z \in [0,1)$ és $\varepsilon > 0$, hogy $(x_0, \{y_0 + kq\}) \notin \{(x_0, y) : z - \varepsilon < y < z + \varepsilon\}$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\frac{1}{N} < \varepsilon$ és vegyük az $(x_0, \{y_0 + q\}), (x_0, \{y_0 + 2q\}), \dots, (x_0, \{y_0 + (N+1)q\})$ metszéspontokat. A skatulyaelv miatt létezik $1 \leq i < j \leq N+1$, hogy $|\{y_0 + jq\} - \{y_0 + iq\}| < \frac{1}{N}$. Ebből következik, hogy $\{(j-i)q\} < \frac{1}{N}$ vagy $\{(j-i)q\} > \frac{N-1}{N}$. Meggondolható, hogy ekkor létezik $k \in \mathbb{N}$, amelyre $(x_0, \{y_0 + k(j-i)q\}) \in \{(x_0, y) : z - \varepsilon < y < z + \varepsilon\}$, ami ellentmondás. Tehát $\{(x_0, y) : y \in [0,1)\}$ részhalmaza az omega határhalmaznak. Ezzel beláttuk, hogy az omega határhalmaz a tórusz. A vektormező pedig kiterjeszthető \mathbb{R}^3 -ra, hogy a pályának legyen pozitív Lyapunov-exponense. Tehát ez a példa megfelel a megadott káosz definíciónak, de maga a pálya mégsem tekinthető kaotikusnak.

2.4. Poincaré-Bendixson tétel

A Poincaré-Bendixson tétel egyik fontos következménye, hogy kétdimenziós esetben nincs káosz.

2.9. Tétel. (Poincaré-Bendixson) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható és $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Jelölje $\phi(t, p_0)$ az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ autonóm differenciálegyenlet $x(0) = p_0$ feltételt kielégítő megoldását. Tegyük fel, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlet egyensúlyi pontjai izoláltak és a $\{\phi(t, p_0) : t \geq 0\}$ pálya korlátos. Ekkor a következők közül pontosan az egyik teljesül.

1. $\omega(p_0)$ egy egyensúlyi pont
2. $\omega(p_0)$ egy periodikus pálya
3. minden $q \in \omega(p_0)$ -re q omega és alfa határhalmaza is egy-egy egyensúlyi pont

Először bevezetünk néhány fontos jelölést, definíciót és néhány hasznos lemmát a bizonyításhoz.

2.10. Definíció. Legyen $q \in \mathbb{R}^2$, ami nem egyensúlyi pont. Egy kellően rövid $S_q \subseteq \mathbb{R}^2$ szakaszt q transzverzálisának nevezzük, ha a következők teljesülnek:

1. $q \in S$
2. S_q merőleges az $f(q)$ vektorra
3. S_q nem tartalmaz egyensúlyi pontot
4. minden $s \in S_q$ pontra $f(s)$ nem érinti S_q -t
5. ha egy megoldás pályája metszi S_q -t, akkor ugyanarról az oldalról metszi, mint a q pályája.

Minden nemegyensúlyi ponthoz létezik ilyen transzverzális. Az első két tulajdonság meghatározza a szakasz helyzetét. Mivel az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlet egyensúlyi pontjai izoláltak, azaz minden korlátos halmazban csak véges sok egyensúlyi pont van, így az 3. tulajdonság könnyedén teljesíthető a szakasz hosszának megválasztásával. f folytonossága miatt a 4. szintén teljesül, ha S_q kellően rövid. Az 5. tulajdonság pedig lényegében következik az első négyből.

2.11. Definíció. Legyen $q \in \mathbb{R}^2$ és S_q q egy transzverzálisa. q egy δ -négyzet környezetén egy olyan négyzetet értünk, amelynek a középpontja q , átlóinak hossza 2δ és az egyik átlója illeszkedik S_q -re. Jelölés $T_\delta(q)$.

2.12. Lemma. Legyen $q \in \mathbb{R}^2$ egy nemegyensúlyi pont és S_q egy transzverzálisa. Ekkor létezik $\delta \geq 0$, hogy minden $v \in T_\delta(q)$ pont esetén megadható egy pályaszakasz, ami illeszkedik v -re, $T_\delta(q)$ teljes egészében tartalmazza és metszi S_q -t, azaz létezik $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, hogy $\{\phi(t, v) : t_1 \leq t \leq t_2\} \subseteq T_\delta(q)$ és $\{\phi(t, v) : t_1 \leq t \leq t_2\} \cap S_q \neq \emptyset$.

Bizonyítás: Először válasszuk meg úgy a koordináta rendszert, hogy q legyen az origóban és $f(q) = (c, 0)$ alakú legyen. Ekkor az S_q szakasz az y -tengelyre illeszkedik,

vagyis egy δ -négyzet környezet két átlója az x - és y -tengelyeken fekszik. Legyenek $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ f koordinátafüggvényei, azaz $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, valamint $x_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ és $x_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ az x koordinátafüggvényei, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Válasszuk meg δ -t úgy, hogy minden $u \in T_\delta(q)$ esetén $f_1(u) > \frac{c}{2}$ és $\frac{f_2(u)}{f_1(u)} \in (-1, 1)$ teljesüljön. Ez megvalósítható, mivel f folytonos és $\frac{f_2(q)}{f_1(q)} = 0$. A $\frac{f_2(u)}{f_1(u)} \in (-1, 1)$ feltételből következik, hogy egy megoldás pályája $T_\delta(q)$ környezet bal oldalán léphet be ebbe az elforgatott négyzetbe és a jobb oldalán léphet ki. Ha $t > 0$ olyan, hogy $\{\phi(s, v) : 0 \leq s \leq t\} \subseteq T_\delta(q)$, akkor

$$\frac{c}{2}t < \int_0^t f_1(x(s))ds = x_1(t) - x_1(0) < 2\delta,$$

ahol most x konkrétan az $x(0) = v$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást jelöli. Ebből következik, hogy $t < \frac{4\delta}{c}$, vagyis a megoldás pályája v -ből indulva legfeljebb $\frac{4\delta}{c}$ időn belül metszi a δ -négyzet jobb oldalát. Legyen $t_2 > 0$ a legelső időpillanat, amikor a v -ből induló pálya elhagyja $T_\delta(q)$ -t. Hasonlóan legyen $-\frac{4\delta}{c} < t_1 < 0$ a legnagyobb érték, amelyre a megoldás pályája metszi a δ -négyzet bal oldalát. Ekkor az $L = \{\phi(t, v) : t_1 \leq t \leq t_2\}$ pályaszakasz megfelelő, hiszen $L \subseteq T_\delta(q)$ és L metszi S_q -et. \square

2.13. Lemma. *Legyen $q \in \mathbb{R}^2$ nemegyensúlyi pont és S_q egy transzverzális, továbbá legyen $p \in \mathbb{R}^2$ és $s_1 < s_2$ valós számok. Tegyük fel, hogy p pályája ezekben az időpontokban metszi S_q -t és ezek a metszéspontok különbözők. Ekkor a s_1 és s_2 időpontok között csak véges sokszor metszheti p pályája S_q -t.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy léteznek t_0, t_1, t_2, \dots s_1 -nél nagyobb, s_2 -nél kisebb időpontok, amelyekben p pályája metszi S_q -t. $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy korlátos sorozat, így kiválasztható egy konvergens részsorozata, legyen ez $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, amelynek a határértékét jelölje s . Ekkor $(\phi(t_{n_k}, p))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq S_q$ sorozat is konvergens és $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(t_{n_k}, p) = \phi(s, p)$. Az egyszerűség kedvéért $\phi(s, p)$ -t jelölje u . u eleme S_q lezártjának. Mivel u nemegyensúlyi pont vegyünk hozzá egy $T_\delta(u)$ környezetet a 2.12 lemma alapján. Ekkor létezik $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, hogy $\{\phi(t, u) : l_1 \leq t \leq l_2\} \subseteq T_\delta(u)$. Legyen $\varepsilon = \min\{|l_1|, |l_2|\}$. ϕ csoporttulajdonsága miatt $\{\phi(t, u) : l_1 \leq t \leq l_2\} = \{\phi(s+t, p) : l_1 \leq t \leq l_2\}$. Mivel a $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat határértéke s , így létezik $K > 0$ küszöbindex, hogy $k > K$ esetén $t_{n_k} \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, vagyis $\phi(s+t_{n_k}, p) \in L_u$. Ha S_q párhuzamos S_u -val, akkor L_u többször is metszi S_u -t, ami csak úgy lehetséges, hogy két különböző irányból metszi, ami ellentmond a 2.10 definíció 5.pontjának. Ha S_q nem párhuzamos S_u -val, akkor S_q az S_u által két részre osztott $T_\delta(u)$ egyik felében van benne. Ekkor L_u csak úgy metszheti S_q -t többször is, hogy mindkét irányból metszi, ami ellentmond a transzverzális definíciójának. Tehát ellentmondásra jutottunk, vagyis p pályája csak véges sokszor metszheti S_q -t egy véges időintervallumon belül.

2.14. Lemma. *Legyen $q \in \mathbb{R}^2$ nemegyensúlyi pont és S_q egy transzverzális, továbbá legyen $p \in \mathbb{R}^2$ és $t_1 < t_2 < t_3$ valós számok. Tegyük fel, hogy $\phi(t_1, p), \phi(t_2, p), \phi(t_3, p) \in S_q$*

különböző pontok. Ekkor $\phi(t_2, p)$ a $\phi(t_1, p)$ és $\phi(t_3, p)$ pontok között helyezkedik el az S_q szakaszon.

Bizonyítás: Mivel a 2.13 lemma alapján a t_1 és t_3 időpont között p pályája csak véges sokszor metszi S_q -t elegendő azt az esetet bizonyítani, amikor t_1, t_2, t_3 három egymást követő metszési időpont. Legyen S' az S_q szakasznak a $\phi(t_1, p)$ és $\phi(t_2, p)$ pontokat összekötő része, továbbá legyen $G = \{\phi(t, p) : t_1 \leq t \leq t_2\} \cup S'$. G egy egyszerű zárt görbe, ami két részre osztja a síkot, egy belső korlátos és egy külső nemkorlátos részre. p pályája a t_2 időpont után nem hagyja el a belső korlátos tartományt, mivel ha a pálya S_q -t metszené, akkor az ellentmondana a transzverzális 2.10 definíciójában szereplő 5. tulajdonságnak, ha pedig $\{\phi(t, p) : t_1 \leq t \leq t_2\}$ -t metszené, akkor az ellentmondana a megoldás egyértelműségének. Tehát a pálya a továbbiakban csak G belsejében metszheti S_q -t, amiből következik, hogy $\phi(t_1, p), \phi(t_2, p), \phi(t_3, p) \in S_q$ három egymást követő pont ebben a sorrendben. \square

2.15. Lemma. *Legyen $p, q \in \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy q nemegyensúlyi pont és $q \in \omega(p)$. Ekkor létezik $T_\delta(q)$ környezet, hogy $T_\delta(q) \cap \omega(p)$ q pályájának egy szakasza.*

Bizonyítás: Az 2.12 lemma alapján válasszuk meg δ -t úgy, hogy minden $v \in T_\delta(q)$ pont esetén megadható legyen egy pályaszakasz, ami illeszkedik v -re, $T_\delta(q)$ teljes egészében tartalmazza és metszi S_q -t. Legyen $v = q$ -ra ez a pályaszakasz L_q . Legyen $u \in T_\delta(q) \cap \omega(p)$ tetszőleges pont és $v = u$ esetén jelölje ezt a pályaszakaszt L_u és legyen u' L_u -nak és S_q -nak metszete. Az 2.2 állítás alapján $L_u \subseteq \omega(p)$, mivel $u \in \omega(p)$. Ebből következik, hogy u' is eleme $\omega(p)$ -nek. Legyenek $t_0 < t_1 < \dots$ azon időpontok, amelyekre $\phi(t_i) \in S_q \cap T_\delta(q)$. A 2.14 Lemmából következik, hogy a $\{\phi(t_i, p) : i \in \mathbb{N}\}$ halmaznak csak egy határpontja lehet. Mivel q és u' is határpont, így $u' = q$. Ebből következik, hogy $u \in L_q$ a megoldás egyértelműsége miatt. Tehát $T_\delta(q) \cap \omega(p)$ q pályájának egy szakasza.

2.16. Lemma. *Legyen $p, q, u \in \mathbb{R}^2$ és tegyük fel, hogy $q \in \omega(p)$, $u \in \omega(q)$ és u nemegyensúlyi pont. Ekkor q egy periodikus pályán van.*

Bizonyítás: Mivel $u \in \omega(q)$ és $q \in \omega(p)$, így a 2.2 állítás 5.pontja miatt $u \in \omega(p)$. u egy nemegyensúlyi pont és $u \in \omega(p)$, vagyis a 2.15 lemma alapján létezik $\delta > 0$, hogy $T_\delta(u) \cap \omega(p)$ u pályájának egy szakasza, legyen ez L_u . Az $u \in \omega(q)$ feltételből és az omega határhalmaz definíciójából következik, hogy létezik $s \in \mathbb{R}$, hogy $\phi(s, q) \in T_\delta(u)$. Mivel $q \in \omega(p)$ a 2.2 állítás 3.pontja miatt $\{\phi(t, q) : t \in \mathbb{R}\} \in \omega(p)$. Ebből következik, hogy $\phi(s, q)$ eleme $\omega(p)$ -nek. Ugyanakkor $\phi(s, q)$ eleme $T_\delta(u)$ -nak is, vagyis $\phi(s, q) \in L_u = T_\delta(u) \cap \omega(p)$. A megoldás egyértelműségéből következik, hogy u és q ugyanazon pályán vannak. Tehát $q \in \{\phi(t, u) : t \in \mathbb{R}\}$, ugyanakkor a $u \in \omega(q)$ feltételből a 2.2 állítás 3.pontja alapján következik, hogy u egész pályája $\omega(q)$ -ban van. Ezekből következik, hogy $q \in \omega(q)$.

Be fogjuk látni, hogy ebben az esetben q egy periodikus pályán van. Mivel q eleme

a saját omega határhalmazának a 2.2 állítás 3.pontja szerint q pályája teljes egészében részalmazza $\omega(q)$ -nak. q nemegyensúlyi pont, mivel ellenkező esetben $\omega(q)$ csak a q pontból állna, de tudjuk, hogy $u \in \omega(q)$ és u nemegyensúlyi pont. A 2.15 lemmát felhasználva kapjuk, hogy létezik $\delta' > 0$, amelyre $T_{\delta'}(q) \cap \omega(q)$ q pályájának L_q szakasza. Tegyük fel indirekt, hogy q pályája nem periodikus. Ekkor ebből és az omega határhalmaz definíciójából következik, hogy létezik $r > 0$, amelyre $\phi(r, q)$ eleme $T_{\delta'}(q)$ -nak, de nem eleme L_q -nak. Ugyanakkor q egész pályája $\omega(q)$ -ban, vagyis $\phi(r, q)$ eleme $T_{\delta'}(q)$ és $\omega(q)$ metszetének. Ez viszont ellentmondás, hiszen $T_{\delta'}(q) \cap \omega(q) = L_q$ és $q \notin L_q$. Tehát q egy periodikus pályán van. \square

2.17. Lemma. *Legyen $p \in \mathbb{R}^2$ és tegyük fel, hogy $\{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ korlátos és $\omega(p)$ tartalmaz egy W periodikus pályát. Ekkor $\omega(p) = W$.*

Bizonyítás: Mivel $\{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ korlátos a 2.2 állítás 4.pontja alapján következik, hogy $\omega(p)$ összefüggő. Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(p) \neq W$, vagyis létezik egy $q_0 \in \omega(p)$ pont, ami nem eleme W -nek. q_0 és W távolsága legyen d . Mivel $\omega(p)$ összefüggő létezik egy $q_1 \in \omega(p)$ pont, ami nem eleme W -nek, valamint q_1 és W távolsága legfeljebb $\frac{d}{2}$. Hasonlóan létezik egy $q_2 \in \omega(p)$ pont, amelynek a távolsága W -től kisebb, mint $\frac{d}{2^2}$, de nem eleme W -nek. Vegyük az így definiált $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, vagyis q_n távolsága W -től kisebb, mint $\frac{d}{2^n}$ és nem eleme W -nek. Mivel W d -sugarú környezete tartalmazza a $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat minden elemét, így korlátos és létezik torlódási pontja, legyen ez u . Mivel $u \in W$, így $u \in \omega(p)$. u nemegyensúlyi pont, hiszen a pályája W . A 2.15 lemma alapján létezik $T_\delta(u)$ környezet, hogy $T_\delta(u) \cap \omega(p)$ u pályájának, vagyis W -nek egy szakasza. Ugyanakkor u a $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontja, vagyis létezik egy q_N pont, hogy $q_N \in T_\delta(u)$. Ezek szerint $q_N \in T_\delta(u) \cap \omega(p)$, de $q_N \notin W$, ami ellentmondás. Tehát $\omega(p)$ nem más, mint W . \square

Bizonyítás:(Poincaré-Bendixson)

Foglaljuk össze az eddigi eredményeket. Mivel a $\{\phi(t, p_0) : t \geq 0\}$ pálya korlátos, így a 2.2 állítás 1.pontja alapján $\omega(p_0)$ nem üres. Ugyanakkor p_0 pályájának korlátosságából $\omega(p_0)$ korlátossága is következik. Vagyis minden $q \in \omega(p_0)$ pont pályája korlátos, hiszen $\omega(p_0)$ q egész pályáját tartalmazza a 2.2 állítás 3.pontja alapján. Ebből következik, hogy $\alpha(q)$ és $\omega(q)$ sem üres.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\omega(p_0)$ csak egyensúlyi pontokat tartalmaz. A 2.2 Állítás 4.pontja miatt $\omega(p_0)$ összefüggő. Ugyanakkor a tétel feltétele szerint az egyensúlyi pontok izoláltak. Ezekből következik, hogy $\omega(p_0)$ egyetlen egyensúlyi pontból állhat ebben az esetben.

Tegyük fel, hogy $\omega(p_0)$ tartalmaz nemegyensúlyi pontot. Ha van olyan q nemegyensúlyi pontja $\omega(p_0)$ -nak, amelyre $\omega(q)$ tartalmaz nemegyensúlyi pontot, akkor a 2.16 Lemma alapján q egy periodikus pályán van. Mivel $q \in \omega(p_0)$ a 2.2 állítás 3.pontja miatt q egész pályája benne van $\omega(p_0)$ -ban, vagyis $\omega(p_0)$ tartalmaz periodikus pályát. Ekkor a 2.17 lemma alapján $\omega(p_0)$ egy periodikus pálya.

Tegyük fel, hogy $\omega(p_0)$ tartalmaz nemegyensúlyi pontot és minden $q \in \omega(p_0)$ nemegyensúlyi pontra $\omega(q)$ csak egyensúlyi pontokból áll. Mivel $\{\phi(t, p_0) : t \geq 0\}$ korlátos, így $\omega(p_0)$ is korlátos. Ekkor a 2.2 állítás 3.pontja alapján minden $\omega(p_0)$ -beli pont egész pályáját tartalmazza $\omega(p_0)$, azaz minden $\omega(p_0)$ -beli pont pályája korlátos. Tehát minden $q \in \omega(p_0)$ nemegyensúlyi pontra teljesülnek a 2.2 állítás 4. pontjának feltételei, vagyis $\omega(q)$ összefüggő. Mivel az egyensúlyi pontok izoláltak következnek, hogy minden $q \in \omega(p_0)$ nemegyensúlyi pontra $\omega(q)$ pontosan egy egyensúlyi pontból áll. Szeretnénk belátni, hogy $\alpha(q)$ is egy egyensúlyi pontból áll minden $q \in \omega(p_0)$ nemegyensúlyi pontra. Ha $\alpha(q)$ csak egyensúlyi pontokat tartalmaz, akkor csak egy egyensúlyi pontból áll, mivel az egyensúlyi pontok izoláltak és $\alpha(q)$ összefüggő a 2.3 állítás 4. pontja alapján. Tegyük fel indirekt, hogy $\alpha(q)$ tartalmaz egy nemegyensúlyi pontot. Ekkor $\omega(p_0)$ egy periodikus pálya lenne, ami ellentmondás, hiszen $\omega(p_0)$ tartalmazza $\omega(q)$ -t, ami egy egyensúlyi pont. Tehát $\alpha(q)$ is egy egyensúlyi pont minden $q \in \omega(p_0)$ nemegyensúlyi pontra. Ha pedig $u \in \omega(p_0)$ egyensúlyi pont, akkor $\alpha(u)$ és $\omega(u)$ is $\{u\}$, vagyis egy egyensúlyi pont. \square

2.5. Lorenz rendszer

Az 1950-es évek végén a számítógépek fejlődése és elterjedése megfelelő körülményeket teremtett a kaotikus viselkedés megismerésére, tanulmányozására. Edward Lorenz, az MIT meteorológusa számítógép segítségével közelítő megoldásokat számított ki a 12 differenciálegyenletből álló rendszerére, ami a légkört modellezte. Egyik alkalommal, hogy időt spóroljon átállította a gépet, hogy csak három jegy pontossággal nyomtassa ki az eredményeket, de a számítógép továbbra is az eredeti pontossággal számolt, azaz háromnál néhány jeggyel pontosabban. Egy érdekesnek mutakozó megoldás után úgy döntött, hogy megismétli a számításokat, hogy részletesebben tanulmányozni tudja. A kezdeti értékeket a kinyomtatott kimenetről adta meg a számítógépnek, amelyen csak három jegy pontossággal szerepeltek az adatok. Azt tapasztalta, hogy az újraindított és az eredeti pálya nagy mértékben eltér egymástól, annak ellenére, hogy a kezdeti értékek három jegy pontossággig megegyeztek. Ezzel bizonyítékot talált a kezdeti értékektől való érzékeny függésre. Meggyőződése volt, hogy ez a tulajdonság nem csak erre a 12 egyenletből álló rendszerre teljesülhet, hanem a kezdeti értékektől való érzékeny függés ennél általánosabb jelenség. Ezért megpróbálta csökkenteni a rendszer méretét és így született meg a következő, három differenciálegyenletből álló rendszer, amely egy alulról fűtött, felülről pedig hűtött folyadék viselkedését modellezte:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y \quad (2.4)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y \quad (2.5)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (2.6)$$

A meleg folyadék alulról felemelkedik, a hideg folyadék pedig felülről lesüllyed, ezzel kialakítva egy áramlást. σ , r és b a rendszer paraméterei, σ a Prandtl-szám. Az x változó arányos a keringő folyadék áramlási sebességével, ha $x > 0$, akkor az óramutató járásával megegyező irányban áramlik a folyadék, ha $x < 0$, akkor az óramutató járásával ellentétes irányban. Az áramlási pályák szélességének a b paraméter felel meg. A felemelkedő és a lesüllyedő folyadékelemek hőmérsékleti különbségével arányos az y változó. A z változó pedig arányos a függőleges egyensúlyi hőmérséklettől való eltéréssel.

A továbbiakban legyen $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ és $r > 0$. Az egyensúlyi pontok megkereséséhez a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$0 = -\sigma x + \sigma y$$

$$0 = -xz + rx - y$$

$$0 = xy - bz$$

Ezek alapján a $(0,0,0)$ pont egyensúlyi pont tetszőleges $r > 0$ esetén, ha pedig $r \geq 1$, akkor $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ és $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ is egyensúlyi

pont.

A következő tételt fogjuk felhasználni a $(0,0,0)$ egyensúlyi pont stabilitásának vizsgálatához.

2.18. Tétel. *Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény és $p \in \mathbb{R}^n$ az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlet egyensúlyi pontja.*

1. *Ha $f'(p)$, azaz az f függvény p pontbeli Jacobi-mátrixának minden λ sajátértékére $\operatorname{Re} \lambda < 0$, akkor p aszimptotikusan stabil.*

2. *Ha $f'(p)$ -nek létezik olyan λ sajátértéke, amelyre $\operatorname{Re} \lambda > 0$, akkor p instabil.*

Legyen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-\sigma x + \sigma y, -xz + rx - y, xy - bz)$. Ekkor f Jacobi-mátrixa:

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

A $(0,0,0)$ egyensúlyi pont stabilitásához elegendő meghatározni az

$$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit. A sajátértékek a $(-\frac{8}{3} - \lambda)((-10 - \lambda)(-1 - \lambda) - 10r) = 0$ egyenlet megoldásai, amelyek a következők: $-\frac{8}{3}$, $\frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2}$ és $\frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2}$. Ha $r < 1$, akkor minden sajátérték valós része kisebb, mint 0, vagyis a 2.18 tételből következik, hogy ekkor az origó aszimptotikusan stabil. Ha $r > 1$, akkor a $\frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2}$ sajátérték valós része nagyobb, mint 0, vagyis ekkor $(0,0,0)$ instabil egyensúlyi pont.

A $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ és $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ egyensúlyi pontok stabilitásának vizsgálatához a következő tételt használjuk fel.

2.19. Tétel (Routh–Hurwitz). *Legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható és $p \in \mathbb{R}^n$ az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ differenciálegyenlet egyensúlyi pontja. A p egyensúlyi pont pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha az $f'(p)$ mátrix $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ karakterisztikus polinomjának együtthatóiból álló $n \times n$ -es*

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

mátrix főminorjai pozitívak.

$$f'(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $f'(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ és $f'(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ mátrixok karakterisztikus polinomja $P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0$. Ebben az esetben a 2.19 tételben az együttthatókból képzett mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} \sigma + b + 1 & 1 & 0 \\ 2\sigma b(r-1) & b(\sigma + r) & \sigma + b + 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma b(r-1) \end{pmatrix}$$

Ennek alapján a következő egyenlőtlenség-rendszernek kell teljesülnie a két egyensúlyi pont stabilitásához:

$$\begin{aligned} \sigma + b + 1 &> 0 \\ (\sigma + b + 1)(b(\sigma + r)) - 2\sigma b(r-1) &> 0 \\ (2\sigma b(r-1))((\sigma + b + 1)(b(\sigma + r)) - 2\sigma b(r-1)) &> 0 \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség-rendszer pontosan akkor teljesül a $\sigma=10$ és $b=\frac{8}{3}$ értékek mellett, ha $r < \frac{470}{19}$. Tehát a $(\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, r-1)$ és $(-\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, -\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, r-1)$ egyensúlyi pontok $r < \frac{470}{19}$ esetén aszimptotikusan stabilak, $r > \frac{470}{19}$ esetén pedig instabilak.

2.20. Állítás. *Tekintsük a Lorenz-rendszert pozitív paraméterekkel. Ekkor létezik korlátos tartomány a háromdimenziós térben, hogy minden megoldás pályája kellően sok idő elteltével belép ebbe a tartományba és többé nem hagyja el.*

Bizonyítás: Legyen $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2)$. Ekkor V lényegében a $p = (0, 0, \sigma + r)$ ponttól való távolság négyzetének felét írja le. Vegyünk egy tetszőleges $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ megoldást és vizsgáljuk meg, hogyan változik V értéke a pályán haladva. Ehhez vezessük be a $V^*(t) = V(u(t))$ függvényt.

$$\begin{aligned} \dot{V}^* &= \langle V'(x, y, z), \dot{u} \rangle = \langle (x, y, z - \sigma - r), (-\sigma x + \sigma y, -xz + rx - y, xy - bz) \rangle = \\ &= -\sigma x^2 - y^2 - bz^2 + b(\sigma + r)z = -\sigma x^2 - y^2 - b\left(z - \frac{\sigma + r}{2}\right)^2 + b\frac{(\sigma + r)^2}{4} \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha a következő három egyenlőtlenség közül legalább az egyik teljesül, akkor \dot{V}^* biztosan negatív:

$$x^2 > \frac{b(\sigma + r)^2}{4\sigma}$$

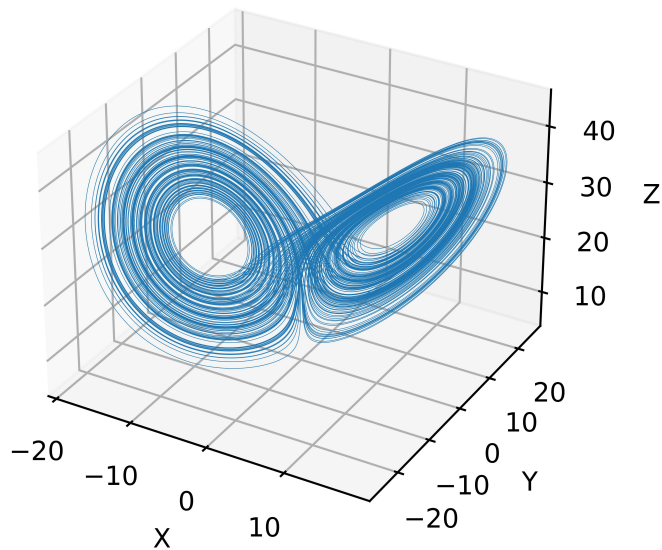
$$y^2 > \frac{b(\sigma+r)^2}{4}$$

$$(z - \sigma - r)^2 > 2(\sigma+r)^2$$

Legyen $R = \frac{b(\sigma+r)^2}{4\sigma} + \frac{b(\sigma+r)^2}{4} + 2(\sigma+r)^2 = \frac{(\sigma+r)^2(b+\sigma b+8\sigma)}{4\sigma}$. Ha $V(x, y, z) > \frac{R}{2}$, akkor a három egyenlőtlenségből az egyik biztosan teljesül, vagyis ekkor $\dot{V}^* < 0$. Tehát $\dot{V}^*(t)$ negatív, ha $\|u(t) - p\| > \frac{R}{2}$, ami azt jelenti, hogy ekkor $u(t)$ pályája közeledik a p ponthoz. Ebből következik, hogy kellően sok idő elteltével minden megoldás pályája belép a p pont R sugarú nyílt környezetébe és ott is marad. \square

2.21. Definíció. A fázistér egy A részhalmazát attraktornak nevezzük a következők teljesülése esetén:

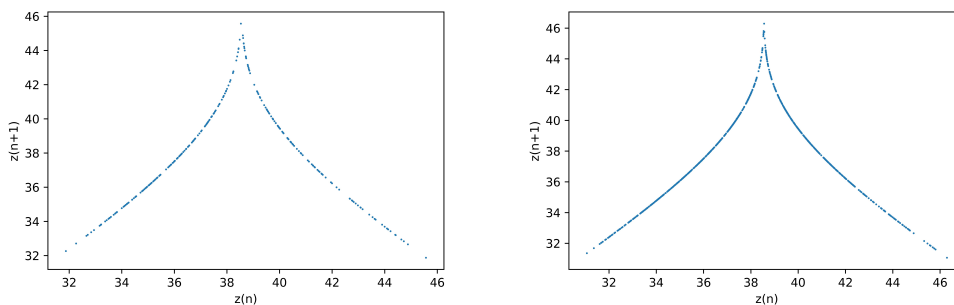
1. ha $p \in A$, akkor $\{\varphi(t, p) : t \geq 0\} \subset A$
2. létezik A -nak egy olyan V környezete, amely tartalmazza a fázistér összes olyan q pontját, amelyre teljesül, hogy A minden U nyílt környezete esetén létezik $T > 0$, hogy $\{\varphi(t, q) : t > T\} \subset U$
3. nem létezik A -nak olyan valódi részhalmaza, ami az előző két tulajdonságot teljesíti



2.2. ábra. Lorenz attraktor

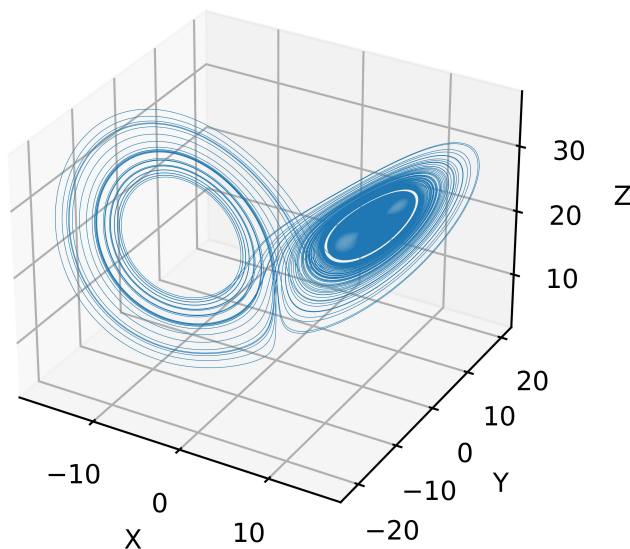
A 2.2 ábra egy numerikusan meghatározott megoldás pályájának egy szakaszát mutatja a $\sigma=10, b=\frac{8}{3}, r=28$ paraméterek esetén. Ahogy az ábrán látható, a megoldás pályája egy ideig spirális pályán halad az egyik egyensúlyi pont körül, majd elérve egy kritikus távolságot az egyensúlyi ponttól a másik egyensúlyi pont körül folytatja keringését. Mivel a kezdeti értékek kis megváltoztatása hasonló pályákat eredményez

arra következtethetünk, hogy van attraktor és az alakja is hasonló.



2.3. ábra. z maximumok

A 2.3 ábrák azt a leképezést ábrázolják, amely a z koordinátafüggvény n . lokális maximumához hozzárendeli az $n + 1$. lokális maximumát a vizsgált pályaszakaszon. Mindkét ábra a 2.2 ábrán látható megoldáshoz tartozik, annyi eltéréssel, hogy a második esetben a vizsgált időintervallum 3-szor akkora. Jól megfigyelhető, hogy az ábrázolt pontok száma a vizsgált időintervallummal együtt növekszik. Könnyen látható, hogy periodikus pálya esetén elég nagy időintervallumot vizsgálva nem lát-nánk különbséget. A leképezés hasonlóságot mutat a sátorleképezéssel, a meredekség abszolút értéke nagyobb, mint 1. Ebből arra lehet következtetni, hogy az attraktor nem periodikus.



2.4. ábra. Átmeneti káosz

A 2.4 ábra szintén egy megoldás pályájának szakaszát ábrázolja, viszont ebben az esetben r értéke 23. Megfigyelhető, hogy a pálya átmenetileg a 2.2 ábrához hasonló kaotikus viselkedést mutat, majd hirtelen az egyik egyensúlyi ponthoz kezd el közelíteni, ami aszimptotikusan stabil, mivel $r < \frac{470}{19}$. Ezt a jelenséget átmeneti káosznak nevezzük.

A 2.7 állítás alapján a Lorenz rendszer esetén

$$\det J(t) = \exp^{-(\sigma+1+b)t},$$

mivel $\text{tr}(A(t)) = -(\sigma+1+b)$. Ez azt jelenti $\sigma = 10$ és $b = \frac{8}{3}$ esetén, hogy egységnyi idő alatt a pálya mentén haladva a térfogat körülbelül $\exp^{-\frac{41}{3}} \approx 0.00000116$ - szeresére csökken, vagyis a Lorenz rendszer disszipatív. A 2.2 ábrán látható pályához nagyon hasonló pálya esetén numerikusan kiszámolt Lyapunov-exponensek: 0.905, 0, -14.57. Ezekből rajzolódik ki az a következtetés, hogy az attraktor alakja rendkívül lapos és az általa vonzott pályák kaotikusak.

Irodalomjegyzék

- [1] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James A. Yorke: Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer, 2000.
- [2] : Yuri A. Kuznetsov: Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 2000.
- [3] Simon L. Péter: Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek, Typotex, 2012.
- [4] Simon L. Péter, Tóth János: Differenciálegyenletek, Typotex, 2020.
- [5] Edward Ott: Chaos in Dynamical Systems, Cambridge, 2002.