NYILATKOZAT

Név: Raffay Rebeka Blanka

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc - Elméleti matematikus

NEPTUN azonosító: S2ZF39

Szakdolgozat címe:

A Kontinuum hipotézisről

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. 05. 30.

Raffay Rebeka Blanka

a hallgató aláírása

A Kontinuum hipotézisről

Szakdolgozat

Raffay Rebeka Blanka

Matematika BSc
Elméleti matematikus szakirány

Témavezető:
Dr. Komjáth Péter, egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2022.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a családom és a barátaim támogatását, témavezetőm gondos munkáját, korrekcióját.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A végtelen fogalma már jóval az időszámításunk kezdetét megelőző koroktól foglalkoztatta az embereket.[1] A görög és sumer eredettörténetek kiindulópontjában is a „káosz”, a végtelen, mindent kitöltő jelenség az uralkodó, amelyből lassanként kialakul az élet. Míg Platón és a püthagoreusok filozófiájában a végtelen elutasításra kerül, úgy Arisztotelész, az Euklideszi geometria követői és az atomisták már részben alkalmazzák a koncepciót. Arisztotelészhez köthető a Természetes számok végtelenségéről szóló első eszmefuttatás is. A nagy vallások kialakulása szintén a végtelen megértésének kísérletéhez fűződik, Istent és hatalmát bármely vallás szövegeinek legtöbb szerzője a végtelennel azonosítja. A matematika fejlődése is nagyban kapcsolódik a végtelen tanulmányozásához, kezdetben az egyenesek és pontok, Zénón paradoxonjai, majd Galileo Galilei paradoxonja és megoldási kísérlete adott lökést a fejlődésnek. A matematika mellett a többi természettudomány is összefüggésbe hozható a fogalommal. Nemcsak az univerzum végtelensége, az idő megértése vagy a végtelen kis mennyiségekkel való számolás kapcsolható ide, de akár az örök élet kutatása is. A mai reál tudományok kialakulása és a középkori hermetizmus között szorosabb viszony lelhető fel, mint a tudományok és a skolasztikus filozófia kötött. A sötét középkor valójában „világos” volt a tudomány számára. A középkori misztikusok viszont az anyagok kutatása mellett a végtelennel foglalkoztak, keresték az élet vizét és olyan szereket gyártottak, amelyek hatására el kívánták érni az végtelen lét kapuját.

Ezek alapján mondhatjuk, hogy a vallás és a mai természettudományok kialakulásának egyik alapköve a végtelen. Ennek ellenére a mai ember gyakran távol marad ennek közelebbi vizsgálatától. Főként csak a filozófiában, fizikában vagy a matematikában lelhetjük fel a nagy eszme változatait. Ebben az írásban, ha nem is filozófiailag-fizikailag, de

[1] A történeti bevezető a jelen dolgozatban felhasznált irodalomat bemutató bibliográfia [42] tételén alapul.(A szakdolgozat egészében a lábjegyzetekben feltüntetett számok mindig az adott bibliográfiai tételre utalnak.)

matematikailag tekintjük át a végtelent, pontosabban a különböző nagyságú végtelenek - végtelen számosságok - kapcsolatát.

1.1. Alapfogalmak

A Kontinuum hipotézis problémája előtt a továbbiakban az elengedhetetlenül fontos alapvető definíciókat és tételeket taglaljuk.[2]

1.1.1. Definíció (Formalizált rendszer). *Következtetési szabályokkal ellátott axiómarendszer, amelyben új tételeket lehet létrehozni.*

1.1.2. Definíció (Konzisztencia). *Egy formális rendszer konzisztens, ha nem létezik olyan állítás benne, hogy maga a kijelentés és a tagadása is bizonyítható a rendszerben.*

1.1.3. Definíció (Tranzitív osztály). *Egy osztály tranzitív, ha az elemei részhalmazai is egyben.*

1.1.4. Definíció (Tranzitív halmaz). *Egy H halmaz tranzitív, ha $x \in H$ és $y \in x$ esetén $y \in H$.*

1.1.5. Definíció (Rendezett pár). $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ *az x és y rendezett párja.*

1.1.6. Definíció (Őselem). *Olyan objektum, amely nem halmaz, de lehet halmaznak az eleme.*

1.1.7. Definíció (Hatványhalmaz). *Ha H egy halmaz, akkor annak hatványhalmaza az összes részhalmazából álló halmaz.* $\mathcal{P}(H) = \{X : \forall y(y \in X \to y \in H)\}$.

A következő tétel meghatározó fontosságú volt a Kontinuum hipotézis feltevéséhez vezető úton.

1.1.8. Tétel (Cantor). *Nem létezik bijekció H és $\mathcal{P}(H)$ között.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f egy bijekció H és $\mathcal{P}(H)$ között. Legyen $A = \{h \in H : h \notin f(h)\} \subseteq H$. Mivel tudjuk, hogy f bijekció, így létezik olyan $a \in H$, hogy $f(a) = A$. Ekkor viszont, ha $a \in A$, akkor $a \notin f(A) = A$, és ha $a \notin A = f(a)$, akkor $a \in A$, amely ellentmondás. □

[2] Ebben az írásban a Kontinuum hipotézis bizonyításával és cáfolásával különböző modellekben nem foglalkozunk, annak tanulmányozására ajánljuk a [17] és az [5] forrásokat. Az állítások bizonyításai megtalálhatóak például [31]-ben.

1.1.9. Definíció (Kiválasztási függvény). *Legyen $H \subseteq X \times Y$ halmaz. Egy $f : X \to Y$ függvényt H kiválasztási függvényének nevezzük, ha minden $x \in X$ esetén, ha létezik $y \in Y$, hogy $(x, y) \in H$, akkor $(x, f(x)) \in H$.*

1.1.10. Definíció (Jólrendezett halmaz). *A $(H, <)$ rendezett halmaz jólrendezett, ha minden nemüres részhalmazának létezik a rendezésre nézve legkisebb eleme.*

1.1.11. Definíció (Részbenrendezett halmaz). *A $(H, \leq)$ halmaz részbenrendezett, ha:*

1) *A rendezés irreflexív, vagyis $x < x$ nem teljesül semely $x \in H$ esetén;*

2) *Ha $x, y, z \in H$ és $x < y$, $y < z$, akkor $x < z$ is teljesül, tehát a rendezés tranzitív.*

1.1.12. Tétel. *$\widetilde{\alpha} = \{\beta : \beta < \alpha\}$ jólrendezhető, rendszáma pedig α.*

1.1.13. Állítás. *Minden jólrendezett halmaz izomorf pontosan egy $\widetilde{\alpha}$ halmazzal.*

1.1.14. Állítás. *Ha $(H, <)$ jólrendezett, $h \in H$, akkor $(H, <)$ és $(H|h, <)$ nem izomorf, nincs közöttük rendezéstartó bijekció.*

1.1.15. Tétel (Rendszámtulajdonságok minimalitásának elve). *Ha létezik olyan rendszám, amelyre teljesül a T tulajdonság, akkor létezik legkisebb ilyan rendszám is.*

1.1.16. Tétel (Jólrendezési). *Minden halmaz jólrendezhető, tehát megadható minden halmazon egy-egy rendezés, hogy azzal ellátva a halmaz jólrendezett.*

1.1.17. Tétel (Transzfinit indukció). *Legyen $T(\alpha)$ egy matematikai állítás az α rendszámról, amelyre teljesül, hogy ha minden $\beta < \alpha$ rendszámra igaz $T(\beta)$, akkor $T(\alpha)$ is igaz. Ekkor $T(\alpha)$ minden α rendszámra igaz.*

1.1.18. Tétel (Transzfinit rekurzió). *Legyen G olyan operáció, amely minden függvényen éretlmezett. Ekkor egyértelműen létezik egy F, minden rendszámon értelmezett operáció, hogy $F(\alpha) = G(F|\widetilde{\alpha})$.*

Megjegyzés. Ha $Y = \{F(x) : x \in X\}$, akkor $F|X = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y : y = F(x)\}$.

1.1.19. Tétel (Schröder-Bernstein). *Ha K, L halmazok, hogy $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$ és K és L, valamint L és K között is létezik injekció, akkor létezik bijekció is közöttük.*

A Természetes számok számosságát $\aleph_0$-lal, rendszámát pedig ω-val jelöljük. Mivel léteznek nem megszámlálható rendszámok, így a Rendszámtulajdonságok minimalitásának elve szerint létezik ezek közül legkisebb is, ezt ω_1-el jelöljük és számosságát $\aleph_1$-nek hívjuk. Hasolóan eljárva definiálhatjuk egyre nagyobb végtelen jólrendezett halmazok számosságát és rendszámát. Amennyiben a Kiválasztási Axióma teljesül, úgy minden végtelen számosság felírható $\aleph_\alpha$ alakban.

1.2. Elsőrendű logika

A Halmazelmélet az elsőrendű logika nyelvét használja, ezért ennek alapvető felépítését is áttekintjük.[3]

1.2.1. Definíció (Elsőrendű logika nyelvezete)**.** *Az elsőrendű logika kétfajta kvantort használ, ezek a $\forall$-minden és a $\exists$-létezik. Nyelvezetében az egyenlőség jel, a relációs jelek és a logikai jelek, valamint más szimbólumok (például zárójel) és függvények is megtalálhatóak. Azokat függvényeket, amelyeknek nincs argumentuma, konstansoknak nevezzük. Nyelve végtelen sok változót tartalmaz.*

1.2.2. Definíció (Szavak)**.** *Minden változó egy szó. Ha f egy n-változós függvény és $t_0, ..., t_{n-1}$ szavak, akkor $f(t_0, ..., t_{n-1})$ is egy szó. Minden szó megkapható az előzőek többszöri alkalmazása alapján.*

1.2.3. Definíció (Formulák)**.** *Ha t és s szavak, akkor $s = t$ egy formula. Ha R egy n-változós reláció és $t_1, ..., t_n$ szavak, akkor $R(t_1, ..., t_n)$ egy formula. A formulákat általában ϕ, φ vagy ψ jelöli. Így $\neg(\varphi)$, $(\varphi) \to (\psi)$ is formulák. Ha x egy változó, akkor $\forall X(\varphi)$ is egy formula. Az összes formula megkapható az előzőek ismétlésével.*

1.2.4. Definíció (Kijelentés)**.** *Legyen $\varphi = ..\forall x(\psi)..$ alakú formula. Ekkor ψ a kvantor értékkészlete, és az x változó minden megjelenését ψ-ben korlátosnak nevezzük. Ha egy változó nem korlátos φ-ben, akkor szabadváltozónak nevezzük. A kijelentés egy szabadváltozók nélküli formula.*

Az elsőrendű logikának is meg lehet fogalmazni az axiómáit, ezek közé tartoznak például $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$, vagy a tiszta logika következtetési szabályai is.

1.2.5. Definíció (Modell)**.** *Ha L egy elsőrendű logikában megfogalmazott nyelv, akkor ennek modellje $M = (\mathcal{M}, \mathcal{R}, F)$, ahol $\mathcal{M}$ az alaphalmaz, $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ az R_i relációk halmaza és $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ függvények halmaza.*

1.2.6. Definíció (Halmazelméleti modell)**.** *Az (M, E) modell pontok egy halmaza (osztálya), amelyen értelmezett egy kétváltozós reláció. A pontokat a halmazoknak, míg az E relációt az „eleme" $\in$ műveletnek feleltetjük meg. M-ben az eleme relációval tudunk halmazokat definiálni, és megmondani, hogy egy adott halmaz benne van-e M-ben.*

1.2.7. Definíció ($\in$-modell)**.** *Amint a modell alaphalmaza, M, szintén halmaz (osztály), ezért létezik benne egy másik „eleme" reláció, méghozzá az „eredeti" vagy „természetes" halmazok közötti reláció. Ha ezen és a definiált relációk megegyeznek, vagyis $xEy \Leftrightarrow x \in y$, akkor a modellt $\in$-modellnek szoktuk nevezni, jelölni pedig $(M, \in)$-el szokás.*

[3] Ez az alfejezet főként [61]-en és [55]-ön alapul.

1.2.8. Definíció (Belső modell)**.** *Olyan tranzitív osztály, amely tartalmazza a rendszámok osztályát és teljesíti ZFC axiómáit.*

A következő jelöléseket is használni fogjuk a továbbiakban: ha Γ formulák egy halmaza, akkor $\Gamma \vdash \varphi$ azt jelenti, hogy létezik formális bizonyítása φ-nek Γ-ból, valamint azt mondjuk, hogy $\Gamma \models \varphi$, ha az összes olyan modell, amely teljesíti Γ formuláit, az φ-t is teljesíti. $M \models \varphi$ pedig azt jelöli, ha az M modellben teljesül φ.

Az elsőrendű logika csak olyan változókat számszerűsít, amelyek értékkészlete az alaphalmaz egy-egy eleme. Így az elsőrendű logika kibővíthető olyan logikává, amelyben nem csak ezen változókat lehet számszerűsíteni. Azon logikát, amely a relációkra, halmazokra, függvényekre, formulákra és más változókra is alkalmazza a kvantorokat, másodrendű logikának nevezzük. Ehhez hasonlóan további magasabb-rendű logikákat is lehet definiálni.

Az alábbiakban Kurt Gödel definícióit vezetjük be, mert a későbbiekben ilyen formában lesz szükségünk rájuk.

1.2.9. Definíció (Logikai kifejezés)**.** *Elsőrendű logikai kifejezés identitás nélkül.*

1.2.10. Definíció (Cáfolható kifejezés)**.** *Egy kifejezés cáfolható, ha a negációja bizonyítható.*

1.2.11. Definíció (Valid kifejezés)**.** *Egy kifejezés valid, ha igaz minden interpretációban.*

1.2.12. Definíció (Kielégíthető kifejezés)**.** *Egy kifejezés kielégíthető, ha létezik olyan interpretáció, amelyben igaz.*

2. fejezet

A Kontinuum hipotézis történeti háttere

A Kontinuum hipotézis tárgyalása előtt felettébb szükséges az axiomatikus Halmazelmélet kialakulását áttekinteni, mivel ez sok későbbiekben felmerülő kérdés megválaszolásában fontos lehet.

2.1. A naiv hamazelmélet

A Halmazelmélet legkorábbi változatát szokás naiv Halmazelméletnek nevezni.[1] A naiv jelző egyaránt utal a nem axiomatikus felépítésre, a tudományág inkonzisztenciájára és a szaknyelv kezdetleges állapotára. Ennek a területnek az alaptételei csak a múlt században alakultak ki, annak ellenére, hogy a Halmazelmélet tekinthető a matematika alapjának. A később felállított axiómákból a mai matematika összes bizonyított tétele levezethető, azonban akadnak olyan állítások is, amelyek igazsága (hamissága) ezektől független - az egyik ilyen, maga a Kontinuum hipotézis.

A Halmazelmélet kialakulása a 19. század második felére tehető, az 1870-es évek közepére. Georg Cantor munkássága teremtette meg az alapjait, ő jött rá elsőként arra, hogy léteznek különböző számosságú végtelen halmazok.[2] Cantor nem dolgozott ki axiomatikus rendszert, s ennek a hiányosságnak hatására több paradoxon is keletkezett.

2.1.1. Definíció (Paradoxon). *Olyan állítás, amely valamely logikai hibán alapul, és ennek következtében ellentmondásra jut.*

[1]Az alfejezet főként a következő forrást használja: [25].

[2][3], egyes kutatások szerint a vallásokban megjelenő végtelenséggel is összefüggésbe hozható Cantor kutatása, lásd például [42].

Az első Halmazelméleti paradoxonra is Cantor talált rá az 1890-es években. Ezt először Richard Dedekindnek, egyik 1899-ben írott levelében, említi meg.[3] Dedekinddel 1872-ben kezdtek levelezni, míg üzeneteiben Cantor új problémákat vetett fel, addig a német matematikus Cantor ötleteihez és bizonyításaihoz fűzött kritikát.[4]

2.1.2. Paradoxon (Cantor paradoxon)**.** *Az összes számosságok nem alkotnak halmazt - nem létezik legnagyobb számosság.*

Megjegyzés. Cantor tétele éppen azt mutatja, hogy minden halmazhoz létezik egy olyan halmaz, amelynek a számossága szigorúan nagyobb, mint az eredeti halmazé (a tételben a hatványhalmaz számossága szerepel). Ha Cantor tételét a halmazok halmazára vagy az „egész világra" alkalmazzuk, akkor keletkezik a paradoxon. Tegyük fel, hogy létezik legnagyobb számosság. Ez a halmazok halmazának adja meg a nagyságát (hiszen ez a halmaz a legnagyobb számosságú). Vegyük a halmazok halmazának a hatványhalmazát. Ekkor ez utóbbinak nagyobb a számossága, de ez ellentmondás, mert a halmazok halmazánál nem lehet nagyobb számosságú halmaz.

Közel 80 éven át úgy vélték a matematikusok, hogy az első publikált Halmazelméleti paradoxon Cesare Burali-Forti egy 1897-ben íródott cikkében jelent meg,[5] mígnem az 1980-as években hosszas kutatómunka során fény derült a valódi eredetére. Valójában Bertrand Russell - Matematika alapelvei című, 1903-ban megjelent könyvében - említette legelőször a következő paradoxont, jóllehet ezt Burali-Fortinak tulajdonította. Cesare Burali-Forti a cikkében expliciten nem említette az ellentmondást, viszont azt elolvasva Russell megfogalmazta a paradoxont, amelyet a közölt eredmények és Cantor egy tanulmányának összevetéséből következtetett.[6]

2.1.3. Paradoxon (Burali-Forti paradoxon)**.** *Az összes rendszámok nem alkotnak halmazt - nem létezik legnagyobb rendszám.*

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy létezik az összes rendszámok halmaza ($:= H$). H-ról tudjuk, hogy jólrendezett, vagyis ehhez a halmazhoz is tudunk rendszámot definiálni. H rendszámára viszont egyszerre teljesül, hogy H eleme és H minden eleménél nagyobb, amely ellentmondás.

König Gyula 1905-ben megjelentetett paradoxonja az axiómák hiányában nem formalizált matematikai jelölések miatt jöhetett létre. König állítása azon a tényen alapul, hogy a Valós számok halmaza jólrendezhető, amelyet Ernst Zermelo látott be 1904-ben.

[3]Többek között [9]-ben a dátum 1899-nek szerepel, míg például [10]-ben 1897 szerepel, valamint itt Dedekind helyett Hilbert a címzett.

[4][20]

[5][6]

[6][36]

2.1.4. Paradoxon (König paradoxon). *A Valós számok számossága kontinuum, viszont a végesen definiálható Valós számok halmazának számossága megszámlálhatóan végtelen.*

Megjegyzés. Azok a Valós számok, amelyek végesen nem definiálhatóak, egy részhalmazát alkotják a Valós számoknak. Ha ennek tekintünk egy jólrendezését - amely Zermelo tétele alapján létezik -, akkor ezzel a jólrendezéssel lenne egy olyan első Valós szám, amely végesen nem definiálható. Ezzel ellentmondásra jutunk, mert ezt a Valós számot éppen most definiáltuk végesen - ez a szám az első végesen nem definiálható Valós szám.

Nem csak az axiomatikus felépítés hiánya, de annak rosszul tervezettsége is vezetett paradoxonokhoz. A Halmazelmélet egyik első axiomatikus felépítésére példát Gottlob Frege munkáiban, az 1893-ban (1. kötet) és 1903-ban (2. kötet) megjelent Az aritmetika alaptörvényei című művében találunk. Bertrand Russell ezt az axiomatikus felépítést kritizálta, amikor bemutatta paradoxonját, amely Frege V. Axiómájából egyenesen levezethető.[7]

2.1.5. Paradoxon (Russell paradoxon). *Legyen* $H = \{x \mid x \notin x\}$*, akkor igaz, hogy* $H \in H \iff H \notin H$

Frege könyvének megjelenéséhez képest 100 évvel később Richard G. Heck Jr. bebizonyította, hogy az V. Axiómát elhagyva nem található ellentmondás a német matematikus ettől független logikai gondolkodásában.[8]

2.1.6. Axióma (V. Axióma). *Legyen f és g két kifejezés. Ha nézzük azokat a halmazokat, hogy* $F := \{x \mid x \text{ kielégíti } f\text{-et }\}$ *és* $G := \{x \mid x \text{ kielégíti } g\text{-t }\}$*, akkor*

$$F = G \iff \forall x : f(x) = g(x)$$

Azon objektumok, amelyek kielégítik f-et és azok az objektumok, amelyek kielégítik g-t megegyeznek, akkor és csak akkor, ha minden objektumra f és g értéke megegyezik egymással.[9]

A naiv Halmazelmélet többek között a tárgyaltak miatt inkonzisztensnek bizonyult, s ilyen mivoltának a megszüntetése kulcsfontosságúvá vált. Amint a Halmazelmélet a matematika alapzata, így ha itt ellentmondások találhatóak, úgy az egész felépített tudás összeomlik, mert egy ellentmondásos rendszerben minden állítás bebizonyíthatóvá válik a logika elvei szerint. A naiv Halmazelmélet egyes paradoxonjainak megtalálása nagyon fontos lépés volt a tudományág fejlődésében, gyakorta ezek adtak lökést újabb és újabb ötletekhez, eredményekhez. A fenti paradoxonok nélkül talán máig sem alakult volna ki az eddig konzisztensnek gondolt modern Halmazelmélet.

---

[7] [12]
[8] [23]
[9] [15]

2.2. Axiomatikus felépítés

A fent említett paradoxonok megszüntetésével több neves matematikus is próbálkozott a huszadik század elején.[10] Főként a Russell-paradoxont szerették volna megoldani a kortársak. König paradoxonja a formális nyelvezet kialakulása után már nem lép fel. Cantor és Buralli-Forti paradoxonja az olyan állítások értelmetlenségét mutatja, amely valamely objektumok összességének halmazával foglalkozik. Eme logikai irracionalitás elkerülése érdekében vezették be az Ördögi kör elvének nevezett állítást. Ez Russell és Alfred North Whitehead közös könyvében a következőképpen van definiálva:[11]

2.2.1. Elv (Ördögi kör). *Ez az elv kimondja, hogy bármely dolog, amely tartalmazza valaminek az összességét, az nem lehet az összesség része.*

Russell paradoxonjáért a naiv Halmazelmélet az alábbi elfogadott állítása volt a felelős. Cantor még Russell felfedezése előtt elítélte ezt a feltételezést a rendszámok és számosságok fogalmának tanulmányozásakor.[12]

2.2.2. Axióma (Korlátlan halmazképzés). *Minden feltételhez létezik azoknak a dolgoknak a halmaza, amelyek teljesítik a feltételt:* $\{x : F(x)\}$ *halmaz.*

A korlátlan halmazképzés axiómájának kiváltásával az 1900-as évek elején többen próbálkoztak. David Hilbert a 19. század végén kidolgozott egy módszert, amely egy matematikai terület axiomatizációs eljárásának lépéseit írja le. Ernest Zermelo részben ezt a stratégiát követte egy konzisztens Halmazelmélet kialakítása reményében.[13] Hilberttől főként az axiómák bevezetésének és a bizonyítások ellenőrzésének lépéseit vette át. Zermelo két különböző időszakban foglalkozott az alaptételek lefektetésével. Az első időkben Hilbert programját követte, de a második szakaszban eltért az előbbi tanaitól, mert a bizonyítások végességének kérdésében nem értett vele egyet.[14]

Zermelo első axiomatizálási tevékenysége a Jólrendezési tétel új bizonyításához köthető. Már az 1904-es első bizonyításában is használt egy axiómát, méghozzá a Kiválasztási Axióma kezdetleges változatát. Az új bizonyítás és az axiomatikus rendszerének első változata - két különálló tanulmányban - a Mathematische Annalen azonos számában jelent meg 1908-ban.

Az első cikkében a következő axiómákat nevezte meg:

[10] Az alfejezet főként a [25]. forráson alapul.

[11] [56]

[12] [35]

[13] [10]

[14] [40]

2.2.3. Axióma (Részhalmaz). *Bármely A halmazból ki lehet választani valamely meghatározott tulajdonság alapján azokat az elemeket, amelyekre szintén igaz a tulajdonság.*

2.2.4. Axióma (Hatványhalmaz). *Minden halmazhoz létezik olyan halmaz, amelynek elemei pontosan az eredeti halmaz összes részhalmaza.*

2.2.5. Axióma (Kiválasztási). *Bármely nemüres és páronként diszjunkt halmazokhoz létezik olyan halmaz, amely minden adott halmazból pontosan egy elemet tartalmaz.*

Megjegyzés. Belátható, hogy a Kiválasztási Axióma ekvivalens a Zermelo által formulált Jólrendezési tétellel.

A második írásában, amelynek már fő célja az axiomatizálás, a fentieket az alábbiakkal egészítette ki:

2.2.6. Axióma (Meghatározottság). *Minden halmazt meghatároznak az elemei, vagyis:*

$$A = B \iff \forall x \in A \to x \in B \land \forall x \in B \to x \in A$$

2.2.7. Axióma (Létezés). *Létezik üres halmaz, bármilyen a-hoz létezik $\{a\}$ halmaz, bármely a-hoz és b-hez létezik $\{a, b\}$ halmaz.*

2.2.8. Axióma (Unió). *Minden halmaznak az elemeinek az elemeinek az összessége is halmazt alkot.*

2.2.9. Axióma (Végtelenség). *Létezik végtelen halmaz - méghozzá az a halmaz ($:= H$), amely tartalmazza az üres halmazt és $\forall a \in H$ esetén $\{a\} \in H$.*

Zermelo a Korlátlan halmazképzés axiómáját a Részhalmaz axiómájával helyettesítette. Kortársait a „meghatározott tulajdonság" kifejezés nem biztosította arról, hogy ez a váltás elég erős volt, hiszen a szókapcsolat nem volt matematikailag jóldefiniált, így König paradoxonja vagy ehhez hasonló jelenségek is színre tudtak volna lépni.

A „meghatározottság" definíciójának széles körökben elfogadott szigorítására végül nem kerül sor, annak ellenére, hogy még Zermelo az 1929-ben megjelentetett cikkében is ezt próbálta kivitelezni, sőt egy újabb axiómát is bevezetett ennek érdekében. Abraham Fraenkel és Thoralf Skolem az elsők között bírálta Zermelo elméletét. Egymástól független kutatásaik során kigondolt alaptétel egészíti ki a mai Halmazelméletben a Részhalmaz Axiómát.[15]

[15] Más kortárs és későbbi matematikusok is adtak megfelelő helyettesítést, többen axiomatikus rendszereket is alakítottak. Lásd például: 15. oldal

Skolem az 1930-as Fundamenta Mathematicae-ban közölt cikkében Zermelo 1929-es törekvéseit kritizálja, többek között Russell paradoxonját is levezeti az írásában.[16]Mai szemszögből nézve a legfontosabb része a „Megjegyzés"-nek az volt, hogy felhívta Zermelo figyelmét arra az állításra, amelyet ma Skolem-paradoxonként szoktak emlegetni.

2.2.10. Paradoxon (Skolem)**.** *Az elsőrendű logika nyelvén megfogalmazott Halmazelmélet - ha konzisztens -, megszámlálható modellel leírható, annak ellenére, hogy léteznek megszámlálhatatlan halmazok.*

Skolem ezen következtetése egy, már 1923-ban megjelent, írásában közölt Löwenheim-Skolem tételen alapult. Ez a következőket mondja ki:

2.2.11. Tétel (Löwenheim-Skolem)**.** *Bármely elsőrendű elméletnek, amely megszámlálható nyelven van kifejezve és létezik modellje, létezik megszámlálható modellje is.*

Zermelo az 1930-as axiomatizálásában ennek hatására másodrendű logika használatával szerette volna leírni a korábbi axiómákat, emiatt néhány elsőrendű logikát használó axiómát ki is hagyott közülük. A cikkének második felében bebizonyította, hogy a másodrendű axiomatizálás modelljei is helyesen számolnak a számosságokkal, rendszámokkal és hatványhalmazokkal. Ebből következik, hogy a másodrendű logika használatával a Halmazelmélet egyetlen modellje sem megszámlálható, így a Skolem-pardoxon nem lép fel.[17] A Részhalmaz axiómában - a korábbi sikertelen megszorítási kísérletek és a másodrendű logika preferálása miatt - nem használja a „meghatározott tulajdonság" kifejezést, hanem az alábbi módon fogalmazza meg azt:

2.2.12. Axióma (Részhalmaz)**.** *Minden $f(x)$ függvény minden H halmaznak megadja azon részhalmazát, amely az összes olyan H-beli x elemet tartalmazza, amelyre $f(x)$ igaz, azaz H minden részéhez létezik egy olyan halmaz, amelynek az elemei csak H kiválasztott részének az elemeiből áll.*

Fraenkel és Skolem által az 1920-as évek elején bevezetett Pótlás axiómáját elfogadta és cikkében a többi axióma között tüntette fel. A Pótlás axiómája magában foglalja a Részhalmaz axiómát és lehetővé teszi a transzfinit indukciót és rekurziót - amelyet az eredetivel nem lehetett alkalmazni.[18]

[16] [48]

[17] [1]

[18] Akihiro Kanamori [11]-ben (390. oldal) azt írja, hogy: „It was however the work of von Neumann 1928d, done in the early 1920s, that made evident the importance of adopting replacement, for the formalization of transfinite recursion and the existence of sets defined therewith", Neumann 1925-ben vezette be, míg Zermelo 1930-ban.

2.2.13. Axióma (Pótlás). *Ha egy H halmaz x elemeire egy tetszőleges F operációt alkalmazunk, akkor a kapott F(x)-ek is halmazt alkotnak.* $F(H) = \{F(x) : x \in H\}$ *halmaz.*

Cikkében a Kiválasztási axiómát és a Végtelenség axiómát nem sorolja fel - nem úgy, mint 1908-ban -, előbbit azért, mert „különbözik karakterében a többi axiómától, valamint nem lehet használni arra, hogy a tartományt szűkítsük. Jóllehet használjuk, mint általános logikai elvet, amelyen az egész vizsgálódásunk nyugszik (...)”[19], míg utóbbit az elsőrendű logikai kifejezésmódja miatt.

Megjegyzés. Fontos megemlíteni, hogy ez az axiómarendszer a Végtelenség axiómája nékül a tranzitív tartalmazást nem igazolja, így léteznek olyan modellek, amelyek közötti relációk nem jólfundáltak.[19]

2.2.14. Definíció (Jólfundált reláció). *Egy bináris reláció jólfundált egy O osztályon, ha minden* $H \subseteq O, H \neq \emptyset$ *esetén igaz, hogy van legkisebb eleme a relációra nézve.*

Végleges axiómáiban a korábbi Létezés helyett a Pár axiómát használja, valamint a Regularitás axiómáját is kimondja, amely miatt a transzfinit rekurzió és indukció használatával minden halmazról értéket lehetne kapni.[20]

2.2.15. Axióma (Pár). *Ha a és b két objektum, akkor létezik olyan halmaz, amely csak a-t és b-t tartalmazza.*

2.2.16. Axióma (Regularitás). *Bármely csökkenő halmazok láncára - minden elem az eleme az előzőnek - igaz, hogy véges indexxel befejeződik egy őselemnél.*

Megjegyzés. Zermelo hozzáteszi, hogy ez azt jelenti: minden T alaphalmaznak van legalább 1 olyan eleme, amelynek nincs eleme T-ben. Ebből csak abban az esetben következik az axióma, ha feltesszük nemcsak a korábbi axiómákat, de a Kiválasztási axiómát is.[17]

2.2.17. Állítás. *A végleges axiómákkal a korábbi - többek között a fentebb említett - paradoxonok nem lépnek fel.*

Bizonyítás. A Részhalmaz axióma miatt egy halmazt nem lehet teljesen függetlenül definiálni, hanem minden halmazt egy másik (adott) halmaz részhalmazaként lehet előállítani. Ebből következik, hogy a Halmazok halmaza, a Számosságok halmaza, a Rendszámok halmaza valójában nem alkotnak halmazt, így ezekből nem vezethetőek le ellentmondások.

A regularitás axiómájából rögtön következik, hogy a Russell-paradoxon nem állhat fent, mivel $\forall x : x \notin x$ igaz, ezért $\{x | x \notin x\}$ - a Russell-halmaz - az egész világ, így nem halmaz. □

[19] [11] (405.oldal): „it differs in character from the other axioms and cannot be used to delimit the domains. However, we use it as a general logical principle upon which our entire investigation is based”

[20] Ennek az axiómának a relatív konzisztenciájának bizonyítása például [29]-ben olvasható.

A mai Halmazelmélet alapjaként általánosan az elsőrendű Zermelo-Fraenkel axiómarendszert tekintik, amelyben a Végtelenség axióma igen, Regularitás axiómája viszont nem ilyen formában szerepel, ezért a Russell-paradoxonját ebben az esetben is vizsgálni szükséges.

Zermelo az 1908-as axiomatizálása során megfogalmazta az alábbi tételt, amelynek következtében a Regularitás nélkül is megszűnik az ellentmondás.

2.2.18. Tétel. *Minden H halmaznak létezik legalább egy olyan H_0 részhalmaza, hogy H_0 nem eleme H-nak.*

Bizonyítás. Nézzük H azon részhalmazát, amelyet úgy definiálunk, hogy H azon x elemeit tartalmazza, amelyekre igaz, hogy $x \notin x$. $H_0 = \{x \in H | x \notin x\}$. Azt fogjuk belátni, hogy H_0 nem eleme H-nak.

Elsőször is az a kérdés, hogy H_0 része-e önmagának. Tegyük fel, hogy igen. Ekkor létezik egy olyan x H_0-ban, amely eleme önmagának, méghozzá $x = H_0$, így ellentmondásra jutottunk. Az axiómák miatt ha x $\in x$ Tegyük fel, hogy H_0 H eleme. Akkor mivel nem eleme önmagának, így H_0 eleme lenne, amely ellentmondás. Tehát valóban találtunk egy olyan részhalmazát H-nak, amely nem eleme. □

Következmény. A Russell-paradoxon nem valósul meg.

Bizonyítás. Az egész világ nem lehet halmaz, mert minden halmaznak van egy olyan részhalmaza, amely nem az eleme. Tegyük fel, hogy a Russell-halmaz valóban halmaz. A Részhalmaz axióma miatt így léteznie kell egy halmaznak, amelynek a részhalmaza ez, legyen $R \in H$. Eszerint H nem az egész világ. Erre az R-re is teljesül, hogy vagy önmaga eleme vagy nem. Tegyük fel, hogy R önmaga eleme. Mivel R-ben csak olyan elemek vannak, amelyek H elemei is, így ha önmaga eleme, akkor H eleme is. Viszont a fenti tétel miatt nem lehet H eleme. Tehát R nem eleme R-nek. Ebben az esetben nem fog ebből következni, hogy R eleme R, mert R-ben csak H elemei lehetnek, de R nem H eleme. Ha feltesszük, R eleme R-nek, akkor a fenti tétel miatt ellentmondásra jutunk. Így R nem halmaz. □

2.2.1. Neumann-Bernays-Gödel axiómarendszer

Az első- és másodrendű Zermelo-Fraenkel - ZF, a Kiválasztási axiómával ZFC - axiómarendszer mellett számos más axiomatizációs programok valósultak meg a 20. században.[21]

[21] Ez az alfejezet főként az [50]-es és [59]-es forrásokon alapul.

Ezek kezdetben a paradoxonok leküzdésére irányultak, majd később elsősorban a fent említett Részhalmaz axióma kiváltására vagy szigorítására adtak alternatív megoldásokat.

Számunkra a legfontosabb eljárás Neumann János nevéhez fűződik. Neumann először 1925-ben axiómákkal egészítette ki a ZFC rendszert, amelyet a későbbiekben jómaga, Paul Bernays és Kurt Gödel tökéletesített. Gödel a Kontinuum hipotézis negáltjának a ZFC-től való függetlenségének bizonyítása során is Neumann modellezési ötletét alkalmazta.

Megjegyzés. Zermelo nem fejlesztett ki hivatalos matematikai nyelvet a Halmazelmélet számára. Írásaiban informálisan fogalmazta meg kijelentéseit. A Neumann-Bernays-Gödel axiómarendszer viszont formális nyelvezetet használ, matematikailag megfogalmazott definíciókat és állításokat közöl. Így a König-paradoxonban megjelenő „végesen definiált" kifejezés is értelmetlenné válik, ilyen tulajdonságú csak akkor lehet valamilyen objektum, ha létezik aritmetikai formula a kiszámítására.

Neumann János a doktori disszertációjában bevezette a rendes osztály kifejezést, valamint újradefiniálta a halmaz fogalmát. Neumann új axiómákat is bevezetett, az egyik ilyennel elérte azt, hogy semely halmaz sem tartalmazhatja önmagát.

2.2.19. Definíció (Rendes osztály)**.** *Olyan osztály, amelyet nem tartalmaz semmilyen másik osztály.*

2.2.20. Definíció (Halmaz)**.** *Olyan osztály, amelyet tartalmaz valamely másik osztály.*

Zermelo a korábban említett formában mondta ki a Regularitás axiómáját, de a mai Halmazelméletben egy, a 2.2.18 tételhez hasonló axiómát szokás így nevezni. A lentebbi új megfogalmazás és a Pár axiómának (valamint az őselemek létezésének) egy következménye az axióma fenti formája.

2.2.21. Axióma (Regularitás)**.** *Minden nemüres halmaznak létezik olyan eleme, amellyel diszjunkt.* $\forall H\ (H \neq \emptyset,\ \textit{akkor}\ \exists x(x \in H\ \textit{ és }\ x \cap H = \emptyset))$.

Következmény. Minden halmaz megkonstruálható a Zermelo-Fraenkel axiómákból, méghozzá alulról felfelé rendezett öröklődéssel. Ha egy halmazt tartalmaz egy másik halmaz, akkor a tartalmazott halmaz előbb jön, mint a tartalmazó a sorrendben.

2.2.22. Állítás. *Ezekkel a definíciókkal és axiómával a Russell-paradoxon nem lép fel.*

Bizonyítás. A fenti axióma kizárja azt, hogy egy halmaz tartalmazza önmagát, így $R = \{x \mid x \notin x\}$ az összes halmazt tartalmazza. Viszont a halmazok „halmaza" rendes osztály, tehát a Russell-halmaz nem lehet halmaz. □

Az NBG axiómarendszer erőssége, hogy nagy objektumokról el tudja dönteni, hogy azok lehetnek-e halmazok. A következő axióma később más megfogalmazással került be a végső rendszerbe, de lényege megmaradt.

2.2.23. Axióma (Méret korlátossága). *Egy osztály rendes osztály, akkor és csak akkor, ha le lehet képezni az összes halmazok osztályára.*

Zermelo által definiált[22], de Neumann Univerzumnak (kumulatív hierarchiának) nevezett osztály később fontos szerepet fog játszani a Kontunuumhipotézis vizsgálata során, így ennek fogalmát az osztályok tárgyalásánál célszerű bevezetni.

2.2.24. Definíció (Örökletes halmaz). *Egy halmazt akkor nevezünk örökletesnek, ha mindegyik eleme örökletes halmaz, vagyis minden eleme a hamaznak maga is halmaz és ezeknek a halmazoknak is az elemei mind halmazok és így tovább.*

2.2.25. Definíció (Neumann Univerzum). *A kumulatív hierarchia (Neumann Univerzum) az örökletes és jólfundált halmazok osztálya, általában V-vel szokás jelölni. Transzfinit rekurzióval a következőképpen lehet meghatározni:*

$V_0 := \emptyset$

$V_{\beta+1} := \mathcal{P}(V_\beta)\,(= \bigcup_{\lambda<\beta+1} \mathcal{P}(V_\lambda))$, *ahol* β, λ *rendszám.*

$V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$, *ahol* α *limeszrendszám.*

$V := \bigcup_\alpha V_\alpha$.

2.2.26. Állítás. *Ha* H *egy halmaz, akkor* $H \in V_\alpha$ *valamely* α *rendszámra.*

2.2.27. Állítás. *Minden* V_α *halmaz tranzitív.*

2.2.28. Állítás. V_ω *végtelen számosságú, az összes (örökletesen) véges halmaz halmaza.*

2.3. Konzisztencia kérdése

Az axiomatikus rendszerek konzisztenciának kérdésében Kurt Gödel Nemteljességi tételei adnak támpontot.[23] Már a 19. század végétől, Hilbert munkásságától kiindulóan felettébb központi kérdéssé vált a formális rendszerek kialakítása és azok konzisztenciájának eldöntése. Neumann és más matematikusok relatív konzisztenciákat bizonyítottak az axiomatikus rendszereikben. Ez azt jelentette, hogy feltevésük alapján néhány axióma konzisztens elméletet alkotott, és azt bizonyították, hogy egy újabb axióma hozzávételével

[22] [62]

[23] Ez az alfejezet főként a [29], [28] és [41] forrásokat használja.

a módosított rendszer is konzisztens maradt - nem lehetett a hozzávett feltevés negációját belátni az alaprendszerből.[24]

Az 1930-as években Gödel két tétele alapján világossá vált, hogy a ZFC renszer konzisztenciáját - jó esetben - nem lehet bizonyítani. A tételek feltételrendszerének kimondásához néhány definíció szükséges.

2.3.1. Definíció (Rekurzív axiomatizálhatóság)**.** *Egy formális rendszer rekurzíven axiomatizálható, ha az axiómák halmazának számossága véges, vagy ha létezik olyan módszer, amelynek segítségével el lehet dönteni, hogy egy adott kijelentés axióma-e.*

Megjegyzés. ZFC és NBG rekurzíven axiomatizálható, NBG axiómáinak halmaza véges, míg ZFC-hez létezik metódus, amellyel meghatározható egy állításról, hogy az egy példánya-e az egyik axiómának.

2.3.2. Definíció (Teljesség)**.** *Egy formális rendszer teljes, ha minden, a rendszer nyelvét használó, állítás vagy a tagadása bebizonyítható, levezethető a rendszerben.*

2.3.3. Definíció (Robinson aritmetika)**.** *Az alábbi 7 axiómából álló rendszer - ahol x' jelöli az x rákövetkezőjét - :*

1. $\neg(0 = x')$
2. $x' = y' \to x = y$
3. $\neg(x = 0) \to \exists y(x = y')$
4. $x + 0 = x$
5. $x + y' = (x + y)'$
6. $x \times 0 = 0$
7. $x \times y' = (x \times y) + x$

2.3.4. Definíció (Rekurzív függvény)**.** $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$ *függvény rekurzív, ha létezik Turing gép, amely $\forall w \in \Sigma_0^*$ inputon leáll, és leálláskor outputja $f(w)$.*[25]

2.3.5. Definíció (Indukciós séma)**.**

$$\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(x')) \to \forall x(\phi(x))$$

2.3.6. Definíció (Primitív rekurzív aritmetika)**.** *A fenti feltevések mellett az összes primitív rekurzív függvényre*[26] *vonatkozóan rekurzívan meghatározott axiómákat tartalmaz,*

[24] Neumann saját axiómarendszerének relatív konzisztenciáját az általa kidolgozott belső modell módszerrel vizsgálta.

[25] Gödel még a Turing-gépek nélkül definiálta a rekurzív függvényeket.

[26] Számítógép programra átírva csak for ciklusokat tartalmazhat legfeljebb, ilyenek például a konstans vagy a rákövetkező függvények.

valamint szigorítja az indukciós séma alkalmazását is:

$$\phi(0) \wedge (\phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow \phi(y)\, valamely\, \phi - re.$$

2.3.7. Definíció (ω-konzisztencia, 1-konzisztencia)**.** *Egy formalizált E elmélet akkor ω-konzisztens, ha nem létezik olyan $\phi(x)$ formula, hogy $E \vdash \neg\phi(n)\forall n(n \in \{0,1,2,...\})$ és $E \vdash \exists x\phi(x)$. Egy formalizált E elmélet 1-konzisztens, ha a fenti feltétel elegendően az olyan formulákra teljesül csupán, amelyek a következő alakban állnak elő: $\exists x_1, \exists x_2, ...\exists x_n\phi$, ahol ϕ nem tartalmaz nemkorlátos kvantorokat.*

2.3.8. Tétel (Nemteljességi I.)**.** *Tegyük fel, hogy E egy rekurzívan axiomatizálható formalizált rendszer, amely tartalmazza a Robinson aritmetikát. Ekkor egy G_E E nyelvén megfogalmazott állítás E-ből megkonstruálható úgy, hogy ha E konzisztens, akkor $E \nvdash G_E$, és ha E 1-konzisztens, akkor $E \nvdash \neg G_E$.*

2.3.9. Tétel (Nemteljességi II.)**.** *Tegyük fel, hogy E egy konzisztens rekurzívan axiomatizálható formális rendszer, amely tartalmazza a primitív rekurzív aritmetikát. Ekkor E-ben nem lehet önmaga konzisztenciáját bizonyítani.*

A két Nemteljességi tétel következtében ha a Zermelo-Fraenkel axiómarendszer valóban konzisztens, akkor ezt nem lehet bizonyítani. ZFC konzisztenciája ekvivalens annak a bebizonyíthatatlanságával, hogy létezik erősen (gyengén) elérhetetlen számosság. Ennek a meggondolásához a kumulatív hierarchiából és Gödel által definiált Konstruálható halmazok Univerzumából indulunk ki.

2.3.10. Definíció ($Def(X)$)**.** $Def(X) := \Big\{\{y \mid y \in X \text{ és } (X, \in) \models \phi(y, z_1, ..., z_n)\} \;\Big|\; \phi$ *elsőrendű logikai kifejezés szabad változók nélkül, és* $z_1, ..., z_n \in X\Big\}$.

2.3.11. Definíció (Konstruálható halmazok Univerzuma)**.** *A konstruálható halmazok univerzuma ($:= L$) azon halmazoknak az osztálya, amelyeket egyszerűbb halmazokkal le lehet írni. Transzfinit rekurzióval a következőképpen lehet felépíteni:*

$L_0 = \emptyset$

$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$ $(= \bigcup_{\lambda<\alpha+1} Def(L_\lambda))$, *ahol* α, λ *rendszám.*

$L_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} L_\alpha$, *ahol* β *limeszrendszám.*

$L := \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} L_\alpha$, *ahol* **Ord** *jelöli a rendszámok osztályát.*

2.3.12. Definíció (Kofinalitás)**.** *(H, <) rendezett halmaz és $G \subseteq H$, H kofinális G-vel, ha $\forall x \in H : \exists y \in G : x \leq y$. (H, <) rendezett halmaz kofinalitása megegyezik azon legkisebb $G \subseteq H$ halmaz számosságával, amellyel H kofinális.*

2.3.13. Definíció (Reguláris számosság). *$|S| = s$ reguláris számosság, akkor és csak akkor, ha minden $T \subseteq S$ nemkorlátos részhalmaz számossága s, vagyis $cf(S, <) = s$, S kofinalitása megegyezik a számosságával.*

2.3.14. Definíció (Szinguláris számosság). *$|S| = s$ szinguláris számosság, akkor és csak akkor, ha $cf(S, <) < s$.*

2.3.15. Definíció (Gyenge limesz számosság). *Egy számosság gyenge limesz számosság, ha nem rákövetkező számosság és nem 0.*

2.3.16. Definíció (Erős limesz számosság). *Egy s számosság erős limesz számosság, ha nem 0 és $\forall \kappa < s \Rightarrow 2^{\kappa} < s$.*

2.3.17. Állítás. *Ha s erős limesz számosság, akkor s gyenge limesz számosság is.*

2.3.18. Definíció (Gyengén elérhetetlen számosság). *Egy megszámlálhatatlan számosság gyengén elérhetetlen, ha reguláris és gyenge limesz számosság.*

2.3.19. Definíció (Erősen elérhetetlen számosság). *Egy s megszámlálhatatlan számosság erősen elérhetetlen, ha nem áll elő kevesebb, mint s számosság összegeként (ahol az összegben szereplő számosságok, $\kappa_i : \kappa_i < s \, \forall i$), és s erős limesz számosság.*

2.3.20. Állítás. *Ha s erősen elérhetetlen számosság $\Rightarrow$ s gyengén elérhetetlen számosság.*

2.3.21. Állítás. *Ha s gyengén elérhetetlen és erős limesz számosság, akkor s erősen elérhetetlen számosság.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy s nem erősen elérhetetlen, így előáll a következő alakban: $s = \sum_{i<s, \kappa_i<s} \kappa_i$, ahol $\kappa_i = |K_i|$, $K_i \subset S$. Viszont ez ellentmondás, mert s reguláris. Hiszen ha a fenti alakban előáll S, akkor valamely K_i-vel kofinális, de $|K_i| < s \Rightarrow cf(S, <) < s$, de a regularitás miatt $cf(S, <) = s$. □

2.3.22. Definíció (Reguláris rendszám). *α reguláris rendszám, ha $cf(\widetilde{\alpha}, <) = \alpha > 1$.*

2.3.23. Állítás. *α rendszám gyengén elérhetetlen számosság $\iff$ α reguláris rendszám és reguláris rendszámok limesze.*

2.3.24. Tétel. *Ha feltesszük, hogy létezik erősen elérhetetlen számosság ($:= \alpha$), akkor V_α ZFC egy modellje.*

Tehát ZFC és a feltevés, hogy létezik erősen elérhetetlen számosság bizonyítaná ZFC konzisztenciáját, mert egy elméletnek pontosan akkor létezik modellje, ha konzisztens - Gödel Teljességi tétele következményeként.[27]

[27] [61]

2.3.25. Tétel (Teljességi). *Legyen Γ formulák egy halmaza.* $\Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \vdash \phi$.

Következmény. Ha Γ formulák egy halmaza, akkor $\Gamma \models \phi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi$, másképpen megfogalmazva Γ-nak létezik modellje $\Leftrightarrow$ Γ konzisztens.

Így, ha ZFC-ből sikerülne belátni, hogy létezik erősen elérhetetlen számosság, akkor a II. Nemteljességi tétel következtében ZFC inkonzisztens lenne.

Megjegyzés. Valójában, amikor Gödel bizonyította az Általános Kontinuum hipotézis és a Kiválasztási Axióma konzisztenciáját ZF-el, akkor belátta, hogy L kielégíti az Általános Kontinuumhopitézist. Ebből következik, hogy L-ben ha α gyengén elérhetetlen, akkor erősen is az.[28] Valamint azt is belátta, hogy $V_\alpha = L_\alpha$, ha α erősen elérhetetlen, tehát L_α is ZFC egy modellje. Mivel L-ben a gyengén és erősen elérhetetlenség egybeesik, így elég a gyengén elérhetetlen számosság létezését bizonyítani ZFC inkonzisztenciájához.

A II. Nemteljességi tétel következményeként így továbbra is csak relatív konzisztenciákat tudunk bizonyítani - amennyiben egy elmélet valóban konzisztens -, ezek belátásához elegendő egy olyan M modelljét találni a kiinduló feltevéseknek, hogy M $\models$ új axióma. Ha M ilyen modell lenne, de mégis levezethető lenne ZFC-ből az új axióma tagadása, akkor a modellben is megjelenne az inkonzisztencia (az új axióma és annak negációja - a bizonyíthatósága miatt - is modellezve lenne), amely ellentmondás.

2.3.1. Modern rekurzivitás

A számítástudomány területének egyik tételéből az I. Nemteljességi tétel következik, ennek kimondásához először néhány definíciót kell bevezetni.[29]

2.3.26. Definíció (Rekurzíve felsorolható nyelv). *Az L nyelv rekurzíve felsorolható, ha $\exists f : \Sigma_0^* \to \Sigma_0^*$ rekurzív függvény, hogy $L = im(f)$, vagy ha üres.*

2.3.27. Definíció (Rekurzív nyelv). *Az L nyelv rekurzív, ha $\exists$ Turing-gép, amely L elemein $1-$et, míg $\overline{L}$ elemein $0-t$ ad outputul.*

2.3.28. Tétel. *Létezik nem rekurzív nyelv, amely rekurzíve felsorolható.*

Következmény. Legyen A egy véges vagy rekurzív axiómarendszer és L nyelv, $L = \{P : P$ olyan állítás, amely A-ból következik$\}$ és L rekurzíve felsorolható, vagyis létezik olyan

[28] A definíciókat összevetve azt kell belátni, hogy egy s gyenge limeszszámosság erős is egyben, ha teljesül az Általános Kontinuum hipotézis. Ez könnyen látszik, mert mivel nem 0 és nem rákövetkező számosság, így egy $\kappa < s$ számosság rákövetkező számossága is kisebb lesz s-nél, de a κ-t követő számosság éppen 2^κ.

[29] Az alfejezet főként a [41]-es forrást használja.

Turing-gép, amely pontosan L elemeire áll meg. Tekintsük ezt a Turing-gépet. Ez le fogja generálni az összes bizonyítást, majd ellenőrzi, hogy jó-e valamelyik tételhez. Ha nézzük azokat a tételeket, hogy $w \in L$ és $w \notin L$, akkor ezek közül létezik olyan, amelyet nem lehet belátni az axiómarendszerből. Tegyük fel, hogy az összes ilyen alakú tételt be lehet látni. Ekkor viszont tejesül, hogy L rekurzív, mert a Turing-gép L elemein 1-et, különben 0-t ad vissza. Viszont a fenti tétel értelmében létezik olyan nyelv, amely nem rekurzív, de rekurzíve felsorolható, így létezik olyan axiómarendszer, amelyben nem lehet minden a fenti formájú tételt belátni - mert különben a nem rekurzív nyelv rekurzív lenne, amely ellentmondás.

Gödel tételei előtt népszerű volt az a feltevés, hogy a matematika teljes, vagyis minden állítás vagy a negációja bebizonyítható az axiómákból, vagy legalábbis létezik olyan axiómarendszer, amelyből igen.[30] Hilbert programja is erre a hipotézisre alapozott többek között - ezt szerette volna belátni az ellentmondás-mentesség mellett.

A Nemteljességi tételek az addig határtalannak gondolt matematikának egyfajta határt adtak, a megszerezhető tudás korlátozottságát jelenítik meg. Ezek a tételek a matematikai filozófiában is fontos következményekkel jártak. Hilbert által képviselt Formalizmus inkább a háttérbe szorult, annak okán, hogy ezen filozófiát követők először egy-egy formális rendszer konzisztenciáját kívánták belátni, mivel következetesen úgy tartották, hogy nem konzisztens rendszerkkel felesleges foglalkozni. Annak ellenére, hogy a formalisták alapelvét Gödel Nemteljességi tételei megdöntötték, Teljességi tétele - miszerint minden valid logikai kifejezés bebizonyítható - részben alátámasztotta eszméiket.

[30]Létezik teljes rendszer, ezekben természetesen nem értelmezettek a tételekben feltett matematikai követelmények. Ilyen például a Természetes számok összeadásának elmélete, amely teljes és rekurzívan axiomatizálható, [41]-ben több példa is található.

3. fejezet

A Kontinuum hipotézis kapcsolata a Halmazelmélet néhány problémájával

A Halmazelmélet alapjainak felállítása mellett, Cantor a Kontinuum hipotézis kialakulásában is fontos szerepet játszott.[1] Amiután belátta a ma Cantor tételnek nevezett felfedezését, pontosabban, hogy a Természetes számok számossága szigorúan kisebb, mint a Valós számoké, azután annak a kérdésnek a feltevése, hogy vajon létezik-e olyan részhalmaza a Valós számoknak, amelynek a számossága szigorúan az előbbi kettő számossága között van, természetesen azonnal következett. Cantor úgy tartotta, hogy nem létezik ezen két számosság között egy másik, s ezt igyekezett is bebizonyítani. A hipotézise igazolásának kutatása során fektette le a mai Halmazelmélet lábazatát.[2]

A Kontinuum hipotézis központi szerepét a 20. század elején az a tény támasztja alá, hogy Hilbert az 1900-as Nemzetközi Matematikai Kongresszuson tartott előadásában felvázolt 10[3] - addig megoldatlan - probléma között, amelyek bizonyítását tűzte ki legfontosabb célul a matematikusok számára, elsőként a Kontinuum hipotézist említette meg. Pontosabban a kérdése az volt, hogy „Hány pont lehet egy egyenesen az Euklideszi térben?" - azaz milyen számosságú részhalmazai léteznek egy egyenesnek az Euklideszi térben.

A Kontinuum hipotézisnek több alakja ismert, ezek ekvivalensek ZFC-ben.

3.0.1. Hipotézis (Kontinuum hipotézis)**.** *Ha κ olyan számosság, amelyre igaz, hogy $\aleph_0 \leq \kappa < 2^{\aleph_0} = c$, akkor $\kappa = \aleph_0$.*

[1] Ez a fejezet főként a következő forrásokon alapul: [16], [47], [21], [2], [28]

[2] Például belátta, hogy létezik bijekció a [0,1] intervallum és $[0,1]^n$ n-dimenziós kocka között: [20]

[3] Az általa összegyűjtött összesen 23 probléma közül, amelyek fennmaradó részét és a 10 bemutatottat az előadása után publikálta.

3.0.2. Hipotézis (Kontinuum hipotézis). *Ha $H \subseteq V_{\omega+1}$ végtelen számosságú, akkor vagy H és V_ω, vagy H és $V_{\omega+1}$ számossága azonos.*

3.0.3. Hipotézis (Speciális Alef hipotézis). $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

Ha a Kiválasztási axiómát nem tesszük fel, akkor a Speciális $\aleph_0$ hipotézis nem ekvivalens a fenti két megfogalmazással.

3.0.4. Állítás. *A Zermelo-Fraenkel axiómákból és a Speciális $\aleph_0$ hipotézisből következik a Kontinuum hipotézis.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ és $\exists H : \aleph_0 \leq |H| < \aleph_1$. Ekkor H jólrendezhető, mert létezik injekció H-ból $\widetilde{\aleph_1}$-be, így számossága $\aleph_i$ alakban fejezhető ki, tehát $|H| = \aleph_0$. □

3.0.5. Állítás. *A Zermelo-Fraenkel axiómákból és a Kontinuum hipotézisből nem következik a Speciális Alef hipotézis.*[4]

A következőkben az Általános Kontinuum hipotézist és az Alef hipotézist, valamint az egymáshoz való viszonyukat vizsgáljuk.

3.0.6. Hipotézis (Általános Kontinuum hipotézis). *Ha κ és λ végtelen számosság és $\kappa \leq \lambda < 2^\kappa$, akkor $\kappa = \lambda$.*

3.0.7. Hipotézis (Alef hipotézis). $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

3.0.8. Definíció (Hartogs Alef). *κ végtelen számosság egy Hartogs Alefje $\aleph(\kappa)$, ha teljesül rá, hogy $\aleph(\kappa) \not\leq \kappa$ és $\aleph(\kappa) \leq 2^{2^{2^\kappa}}$.*

3.0.9. Tétel (Hartogs-Sierpinski). *Minden végtelen számosságnak létezik Hartogs Alefje.*

Bizonyítás. Legyen K halmaz, amelyre igaz, hogy $|K| = \kappa$ végtelen számosság. K hatványhalamzának az elemei részhalmazai K-nak és $\mathcal{P}(K)$ egy tetszőleges részhalmaza ($= L$), K részhalmazainak egy halmaza. Előfordulhat, hogy L jólrendezett halmaz a tartalmazásra nézve. Legyen J az összes olyan $(L, <_{tartalmaz})$-nek a halmaza, amelyek jólrendezettek a tartalmazásra nézve. J a 2^K részhalmazainak egy halmaza, ezért $J \in 2^{2^K}$. Mivel J minden eleme jólrendezett halmaz, ezért tudjuk az elemeit úgy partícionálni, hogy minden részbe az egymással izomorf elemei kerüljenek. Legyen H az ezen partíció egyes

[4] A bizonyításhoz a Solovay modell szükséges, amellyel meg lehet olyan modellt adni, hogy a Speciális Alef hipotézis nem teljesül: [52]. „$2^{\aleph_0}$ és $\aleph_1$, a $\leq$-re nézve, összehasonlíthatatlan legkisebb következő számosságai $\aleph_0$-nak. Tehát a Kontinuum hipotézis teljesül, de a Speciális Alef hipotézis viszont nem.” : [24] (155. oldal). A bizonyításról bővebben olvasni [38]-ban is lehet.

csoportjaiból alkotott halmazok halmaza. H minden eleméhez hozzárendeljük azt a rendszámot, amely az őt alkotó halmazok közös rendszáma, így $(H,<)$-ra ezen rendszámok halmazaként gondolunk, amely a természetes rendezés szerint van rendezve.

Meg szeretnénk mutatni, hogy $|H| \not\leq |K|$. Tegyük fel, hogy $|H| \leq |K|$. Ekkor H számossága valamely $K_1 \subseteq K$ részhalmazának a számosságával megegyezik, létezik bijekció közöttük. Ez a bijekció egy jólrendezését adja K_1-nek H szerint. Legyen S a K_1 elem általi kezdőszeleteinek a halmaza. Ekkor S, K_1 és H rendszáma megegyezik. Mivel S a K egy tartalmazás szerint rendezett részhalmazaiból álló halmaz, ezért J-nek az eleme, így a partíciójának egyik osztályában is benne van, vagyis H egyik halmazában, legyen ez O. Ekkor H-nak az O általi kezdőszeletének a rendszáma megegyezik S rendszámával. De ekkor a fentiek miatt $(H,<)$ és $(H|_O,<)$ izomorf, ami ellentmondás. Tehát $|H| \not\leq |K|$.

Mivel κ végtelen, így $|H|$ is az, mert máskülönben $|H| < |K|$ teljesülne. Ezek alapján $(H,<)$ egy végtelen számosságú jólrendezett halmaz, tehát $|H| = \aleph_j$, valamely j-re. Legyen $\aleph(\kappa)$ ezen $\aleph_j$. Mivel $|K| = \kappa$, ezért $\aleph(\kappa) \not\leq \kappa$.

H a J részhalmazainak egy halmaza, így $H \subseteq 2^J$, mert H minden eleme 2^J-nek is eleme. Viszont $J \subseteq 2^{2^K}$, így $H \subseteq 2^{2^{2^K}}$, vagyis $\aleph(\kappa) \leq 2^{2^{2^\kappa}}$. □

3.0.10. Tétel. *Az Általános Kontinuum hipotézisből következik a Kiválasztási Axióma.*

Bizonyítás.

3.0.11. Lemma. *Ha $\kappa \geq \aleph_0$, akkor $2^\kappa + \kappa = 2^\kappa$.*

Bizonyítás. $2^\kappa \leq 2^\kappa + \kappa \leq 2^\kappa + 2^\kappa = 2 \cdot 2^\kappa = 2^{\kappa+1} = 2^\kappa$. □

3.0.12. Lemma. *Ha κ és λ olyan számosságok, amelyekre igaz, hogy $2\kappa = \kappa$ és $\kappa+\lambda = 2^\kappa$, akkor $\lambda \geq 2^\kappa$.*

Bizonyítás. $2\kappa = \kappa \Rightarrow 2^\kappa \cdot 2^\kappa = \kappa + \lambda$, mert $2^\kappa \cdot 2^\kappa = 2^{\kappa+\kappa} = 2^\kappa = \kappa + \lambda$.

Legyen K és L két diszjunkt halmaz, hogy $|K| = \kappa$ és $|L| = \lambda$, és vegyünk egy bijekciót $f : \mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K) \to K \cup L$.

Ekkor lennie kell egy $J \subseteq K$ halmaznak, hogy $f^{-1}(K)$-ben nem lehet $\{J\} \times \mathcal{P}(K)$ benne (nem lehet az első koordinátája egyik ősképnek sem), mert Cantor tétele miatt úgy ellentmondásba ütköznénk, mutattunk volna bijekciót K és $\mathcal{P}(K)$ között.

Ha tekintünk egy ilyen J halmazt, és nézzük f azon részét, amelyre igaz, hogy az első koordinátája J (a $g(X) = f(J,X)$ függvényt), akkor ez egy injekciót ad $\mathcal{P}(K)$ és L között, tehát $2^\kappa \leq \lambda$. □

Vegyünk egy tetszőleges végtelen számosságot, legyen ez ν. Be szeretnénk látni, hogy $\nu = \aleph_i$ valamely $i-$re. Legyen $\mu = 2^{\aleph_0+\nu}$, meg fogjuk mutatni, hogy μ egy Alef, amelyből következni fog, hogy ν is Alef (jólrendezhető végtelen halmaz).

Legyen $\rho_0 = \mu$, $\rho_1 = 2^{\rho_0}$, $\rho_2 = 2^{\rho_1}$, $\rho_3 = 2^{\rho_2}$. $\aleph_0 \leq \mu \leq \rho_i$, $i = \{0, 1, 2, 3\}$. Ekkor a 3.0.11 Lemma alapján $2 \cdot 2^{\rho_i} = 2^{\rho_i}$.

3.0.13. Lemma. *Ha $\aleph(\mu) \leq \rho_i$, $i = \{1, 2, 3\}$, akkor vagy μ egy Alef vagy $\aleph(\mu) \leq \rho_{i-1}$.*

Bizonyítás. $\rho_{i-1} \leq \aleph(\mu) + \rho_{i-1} \leq \rho_i + \rho_i = \rho_i = 2^{\rho_{i-1}}$.

Az Általános Kontinuum hipotézis alapján a két egyenlőtlenség közül az egyiknek egyenlőségnek kell lennie.

Ha $\aleph(\mu) + \rho_{i-1} = 2^{\rho_{i-1}}$, akkor a 3.0.12. Lemma $\lambda = \aleph(\mu)$ és $\kappa = \rho_{i-1}$ választással a következőket eredményezi:

$\aleph(\mu) \geq 2^{\rho_{i-1}} \geq \mu$, vagyis μ egy Alef.

Ha viszont $\aleph(\mu) + \rho_{i-1} = \rho_{i-1}$, akkor $\aleph(\mu) \leq \rho_{i-1}$. □

A Hartogs-Sierpinski tétel azt mondja, hogy $\aleph(\mu) \leq 2^{2^{2^{\mu}}}$, vagyis $i = 3$-ra teljesül a 3.0.13 Lemma feltétele. Ennek alapján vagy μ egy Alef vagy $i = 2$-re is igaz a feltétel, tehát vagy μ egy Alef vagy $i = 1$-re is lehet alkalmazni a lemmát, vagyis vagy μ egy Alef vagy $i = 0$-ra $\aleph(\mu) \leq \rho_0 = \mu$. Mivel ez utóbbi nem teljesülhet, így μ valóban egy Alef.

Ezzel beláttuk, hogy ν is egy Alef. Tehát minden halmazról beláttuk, hogy jólrendezhető, amely ekvivalens a Kiválasztási Axiómával. □

3.0.14. Tétel (Rubin)**.** *Az Alef hipotézisből következik a Kiválasztási Axióma.*

Bizonyítás. Az Alef hipotézisből következik, hogy minden jólrendezhető halmaznak a hatványhalmaza is jólrendezhető.

3.0.15. Lemma. *Ha minden jólrendezhető halmaznak a hatványhalmaza is jólrendezhető, akkor minden halmaz jólrendezhető.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a lemma feltétele teljesül. Meg szeretnénk mutatni, hogy ekkor a Kiválasztási Axióma is teljesül. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy minden α limeszrendszámra V_α jólrendezhető. V_α a kumulatív hierarchia α-dik szintjét jelöli, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$. Bármely H halmazt tartalmazza egy V_α és mivel V_α tranzitív, $H \subseteq V_\alpha$, így H is jólrendezhető. Tehát azt fogjuk megmutatni, hogy az α-nál kisebb szintekre teljesül a Kiválasztási Axióma.

Legyen α egy tetszőleges limeszrendszám. Meg fogunk konstruálni egy olyan $\{S_\beta | \beta < \alpha\}$ sorozatot, hogy $\forall \beta < \alpha :\ S_\beta$ a jólrendezése V_β-nak. Ez elegendő, mert minden

V_β-ról beláttuk, hogy jólrendezett, az $\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ is jólrendezett lesz, mert definiálunk egy jólrendezést a következő módon ($x < y \, \forall (x,y) \in V_\alpha$):

Ha x szintje kisebb, mint y szintje; ha a szintjeik egyenlőek ($= \phi$) és $<_{\phi+1}$ a jólrendezése $V_{\phi+1}$-nek, akkor $x <_{\phi+1} y$.

Vegyünk egy γ rendszámot, amelyre igaz, hogy az a legkisebb rendszám, hogy $\widetilde{\gamma}$ és V_α között nincs bijekció. Az alapfeltevésünk szerint $\mathcal{P}(\widetilde{\gamma})$ jólrendezhető. Válasszunk ki egy S jólrendezését $\mathcal{P}(\widetilde{\gamma})$-nak. S_β-t rekurzióval definiáljuk $\forall \beta < \alpha$ esetén.

$S_0 = 0$. Ha β limeszrendszám, akkor S_β-t V_β-n $S_\delta \, (\delta < \beta)$ alapján állítjuk össze, a fent leírt módon. Ha β rákövetkező rendszám, $\beta = \delta + 1$, akkor $V_\beta = \mathcal{P}(V_\delta)$. Ekkor viszont V_δ jólrendezhető S_δ által, így létezik egy $\epsilon < \gamma \, (\widetilde{\epsilon} \subset \widetilde{\gamma})$, hogy $\widetilde{\epsilon}$ és V_δ között létezik izomorfizmus. Ezt az izomorfizmust és $\mathcal{P}(\widetilde{\gamma})$-nak az S általi jólrendezését felhasználva megkapjuk az S_β jólrendezést $\mathcal{P}(V_\delta)$-n, mert $\mathcal{P}(\widetilde{\gamma})$ S jólrendezése jólrendezi $\mathcal{P}(\widetilde{\epsilon})$-t, és ez a jólrendezés a rendezéstartó bijekcióval komponálva ($:= S_\beta$) jólrendezi V_β-t. □

A lemmából következik, hogy minden halmaz jólrendezhető, tehát teljesül a Kiválasztási Axióma. □

3.0.16. Tétel. *Az Általános Kontinuum hipotézis és az Alef hipotézis ekvivalens.*

Bizonyítás. A tétel következik a 3.0.10 és 3.0.14 tételekből, mert azok alapján minden halmaz jólrendezhető, így minden számosság rendszám is egyben.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ és $\exists H : \aleph_\alpha \leq |H| < \aleph_{\alpha+1}$. Ekkor H jólrendezhető, mert létezik injekció H-ból $\widetilde{\aleph_{\alpha+1}}$-be, így számossága $\aleph_i$ alakban fejezhető ki, tehát $|H| = \aleph_\alpha$.

$\Rightarrow$: Minden számosság rendszám is egyben, így $2^{\aleph_{\alpha-1}}$ is egy rendszám. Mivel tudjuk az Általános Kontinuum hipotézisből, hogy minden H halmaznak, amelyre teljesül, hogy $\aleph_{\alpha-1} \leq |H| < 2^{\aleph_{\alpha-1}}$, a számossága $\aleph_{\alpha-1}$, vagyis nem kétezik számosság (rendszám) $\aleph_{\alpha-1}$ és $2^{\aleph_{\alpha-1}}$ között, így $2^{\aleph_{\alpha-1}}$ követi $\aleph_{\alpha-1}$-t, vagyis $2^{\aleph_{\alpha-1}} = \aleph_\alpha$, a rendszámok trichotómiája miatt, amely a Kiválasztási Axióma miatt teljesül (mert ekvivalensek). □

Megjegyzés. Ha a Kiválasztási Axiómát nem tesszük fel, akkor elképzelhető, hogy $2^{\aleph_\alpha}$ nem jólrendezhető. A múlt század közepén Wacław Sierpiński bebizonyította[5], hogy ha a Kontinuum hipotézis teljesül κ, 2^κ és 2^{2^κ} számosságokra[6], akkor κ jólrendezhető. Néhány évvel később Ernst Specker belátta[7], hogy ha a hipotézis csak κ-ra és 2^κ-ra teljesül, akkor ebből már következik, hogy 2^κ jólrendezhető. A kérdés, hogy a κ-ra vonatkozó hipotézisből következik-e κ jólrendezhetősége, máig megválaszolatlan maradt.

[5] [47]

[6] Tehát például κ-ra ez azt jelenti, hogy nem létezik köztes számosság κ és 2^κ között.

[7] [49]

3.1. Végtelen számosságok aritmetikája

Az Általános Kontinuum hipotézis fontossága azon a tényen alapul, hogy ennek a segítségével lehetne végtelen számosságokkal számolni, végtelen szorzatuk és hatványozásuk eredményét megkapni.[8]

3.1.1. Kérdés. *Mit lehet mondani κ^λ értékéről, ahol κ és λ végtelen számosságok?*

Ennek az értéknek a kiszámításához tekintsünk át néhány tételt és definíciót.

3.1.2. Definíció. $\kappa^\lambda = |H^G|$, *ahol H^G az összes G-ből H-ba menő függvények halmaza.*

$\kappa + \lambda = |H \cup G|$, *ahol H és G diszjunkt,* $|H| = \kappa$, $|G| = \lambda$.

$\kappa \cdot \lambda = |H \times G|$, *ahol* $|H| = \kappa$ *és* $|G| = \lambda$.

Legyen I indexhalmaz, ekkor $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I} H_i|$, *ahol a H_i halmazok páronként diszjunktak és* $|H_i| = \kappa_i (\forall i \in I)$.

Legyen I indexhalmaz, ekkor $\Pi_{i\in I}\kappa_i = |\Pi_{i\in I} H_i|$, *ahol* $|H_i| = \kappa_i(\forall i \in I)$ *és* $\Pi_{i\in I} H_i$ *azon f I-beli függvények halmaza, amelyekre igaz, hogy* $f(i) \in H_i(\forall i \in I)$.

Megjegyzés. A definícióból adódnak a következő egyszerű állítások. Az összeadás kommutatív és asszociatív, a szorzás kommutatív, asszociatív és disztibutív az összeadásra nézve. Ha κ, λ és μ számosságok, akkor:

1) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$
2) $(\kappa^\lambda)^\mu = (\kappa)^{\lambda\cdot\mu}$
3) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$
4) Ha $\kappa \neq 0$ és $\lambda \leq \mu$, akkor $\lambda^\kappa \leq \mu^\kappa$.
5) Ha $\kappa \neq 0$ és $\kappa \leq \lambda$, akkor $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
6) Ha $I = \bigcup_{j\in J} G_j$, ahol a G_j halmazok páronként diszjunktak, akkor $\Pi_{i\in I}\kappa_i = \Pi_{j\in J}(\Pi_{i\in G_j}\kappa_i)$.

Bizonyítás. 3) Vegyünk egy K, L és M halmazt, hogy $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$, $|M| = \mu$ és $L \cap M = \emptyset$. Nézzük a következő függvényt: $f : K^{L\cup M} \to K^L \times K^M$. Ekkor f egy $g \in K^{L\cup M}$-hez rendelje hozzá az (l, m) párt, ahol l a g megszorítása L-en és m a g megszorítása M-en. Ekkor f bijekció $K^{L\cup M}$ és $K^L \times K^M$ között.

A többi állítás hasonlóan belátható. □

3.1.3. Tétel. *Minden végtelen számosságra igazak a következők:*

1) $\kappa + \kappa = \kappa$
2) $\kappa \cdot \kappa = \kappa$
3) $\kappa + \lambda = max\{\kappa, \lambda\} = \kappa \cdot \lambda$

[8] Ez az alfejezet a következő forrásokon alapul: [54], [43], [37], [39], [60],[29], [31], [27], [51] [46]

Bizonyítás. 1) Elég belátni, hogy $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, mert $\kappa \leq \kappa + \kappa = 2\kappa \leq \kappa \cdot \kappa$, tehát ha ez $= \kappa$, akkor a Schröder-Bernstein tétel szerint $\kappa + \kappa = \kappa$ is teljesül.

2) Első lépésben belátjuk, hogy 2) igaz $\aleph_0$-ra. A Kiválasztási Axióma szerint $\aleph_0$ jólrendezhető, így tekintsünk egy jólrendezését. $\aleph_0 \times \aleph_0$ jólrendezését például a következőképpen adhatjuk meg: $(x, y) \prec (w, z)$, ha $x + y < w + z$ vagy $x + y = w + z$, de $x < w$. Ekkor $(\aleph_0, <)$ és $(\aleph_0 \times \aleph_0, \prec)$ között létezik rendezéstartó bijekció.

Indukcióval szertnénk belátni (a Transzfinit indukció tétele alapján), hogy minden végtelen számosságra igaz a tétel. Tegyük fel, hogy minden $\kappa < \lambda$ számosságra beláttuk, hogy $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, de λ-ra nem igaz, ez a legkisebb olyan számosság, amelyre nem teljesül a feltétel (a Jólrendezési tétel és a Rendszámtulajdonságok Minimalitásának elve miatt van legkisebb ilyen λ). Nézzük az $L = \widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}$ halmazt a lexikografikus rendezéssel. Ez egy jólrendezett halmaz. Tekintsük ennek az egyik részhalmazát: $H = \{(x, y, z) \in L \,|x = max(y, z)\}$, amely az L szerinti rendezést örökölve jólrendezett. H és $L' = \widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}$ között létezik rendezéstartó bijekció. Mivel $\lambda < \lambda^2$, ezért $\widetilde{\lambda}$ a H egyik elemáltali kezdőszeletével izomorf. Tegyük fel, hogy $H' = \{(x, y, z) \in H \,|(x, y, z) < (\alpha, \beta, \gamma)\}$-vel. Viszont ekkor igaz a következő:
$\lambda = |\widetilde{\lambda}| = |H'| \leq |\{(x, y, z) \in H \,|(x, y, z) < (\alpha, \alpha, \alpha)\}| = \alpha^2 = \alpha < \lambda$, ami ellentmondás.

3) Legyen $\kappa \leq \lambda$. $\lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = \lambda$ és $\lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$. □

Következmény. $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{\alpha \cup \beta} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta$.

Következmény. Ha κ végtelen számosság és H_α olyan halmazok sorozata, amelyre igaz, hogy $|H_\alpha| \leq \kappa (\forall \alpha < \kappa)$, akkor $|\bigcup_{\alpha < \kappa} H_\alpha| \leq \kappa$.

3.1.4. Állítás. *Legyen I indexhalmaz és $0 \neq \kappa_i (i \in I)$ számosságok, hogy legalább az egyik $|I|$ és $sup_{i \in I} \kappa_i$ közül végtelen. Ekkor $\sum_{i \in I} \kappa_i = max\{|I|, sup_{i \in I} \kappa_i\}$.*

Bizonyítás. $\sum_{i \in I} \kappa_i \geq \kappa_j (j \in I)$ és $\sum_{i \in I} \kappa_i \geq |I|$. Valamint $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} sup_{i \in I} \kappa_i = sup_{i \in I} \kappa_i \cdot |I| = max\{sup_{i \in I} \kappa_i, |I|\}$. Ha igaz, hogy minden számosságnál létezik nagyobb a számosságok sorozatában, akkor $\sum_{i \in I} \kappa_i > \kappa_j (j \in I)$, tehát $\sum_{i \in I} \kappa_i \geq sup_{j \in I} \kappa_j$, mert mindkét tag nagyobb az összes számosságnál és $sup_{j \in I} \kappa_j$ a legkisebb olyan számosság, amely mindegyik összeadandónál nagyobb. Ha nem igaz, vagyis a $sup_{j \in I} \kappa_j$ valójában maximum, akkor $\sum_{i \in I} \kappa_i \geq sup_{j \in I} \kappa_j = \kappa_k$ is teljesül. Így valóban beláttuk, hogy $\sum_{i \in I} \kappa_i = max\{|I|, sup_{i \in I} \kappa_i\}$. □

Megjegyzés. Cantor tétele az egyik legfontosabb eredmény a számosságokkal való műveletek során, ezt a tételt már az 1. fejezetben tárgyaltuk.

3.1.5. Tétel. *Ha λ végtelen számosság és $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$, akkor $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.*

Bizonyítás. $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \cdot \lambda} = 2^\lambda$. □

Következmény. $c^{\aleph_0} = c$

Következmény. Ha $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$, akkor $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Kurt Gödel 1938-as[9] és Paul Cohen 1963-as[10] bizonyítása együttesen megmutatta, hogy a Kontinuum hipotézis független a Zermelo-Fraenkel axiómarendszertől (a Kiválasztási axiómával együtt is). A függetlenséget nem feltételezve, az 1930-as évek előtt sokan próbálkoztak a Kontinuum hipotézis bizonyításával vagy cáfolásával. Ezen matematikusok soraiba tartozott többek között Hilbert és Kőnig is. Mindkettejük bizonyításairól már a nyilvánosságra hozataluk után kiderült, hogy tévesek, de az utókor mégis fontos matematikai fejlődésként tartja számon ezeket. Kőnig Gyula érvelésében szerepelt a ma Kőnig tételnek nevezett kiemelkedő karakterizáció a kontinuum (nem-)lehetséges értékéről. Hilbert alapötlete pedig hasonlított Gödel 1938-as bizonyításának kiindulóponjához - egyetemi óráin Gödel a két eljárást össze is hasonlította -[11], valamint módszere lökést adott a bonyolultabb rekurzív függvények használatához.[12] A függetlenségből adódóan tehát a kontinuum értékét nem tudjuk a mai tudásunk szerint $\aleph_i$ formában felírni, mert i értéke nem kiszámítható. Azonban a következő tételek értelmében egy kevés támpontot kapunk $2^{\aleph_0}$ értékét illetően.

3.1.6. Tétel (Kőnig I.). *Legyen I egy indexhalmaz. Ha $\kappa_i < \lambda_i \, (\forall i \in I) \Rightarrow \sum_{i \in I} \kappa_i < \Pi_{i \in I} \lambda_i$*

Bizonyítás. Legyen $L_i (i \in I)$ olyan halmazok családja, hogy $|L_i| = \lambda_i$. Tekinsük a $L = \Pi_{i \in I} L_i$ halmazt. A Kiválasztási Axiómával minden L_i-nek válasszunk ki egy J_i részhalmazát, hogy $|J_i| = \kappa_i (< \lambda_i)$. Azt szeretnénk belátni, hogy $\bigcup_{i \in I} J_i \neq L$ ($\Rightarrow \sum_{i \in I} \kappa_i < \Pi_{i \in I} \lambda_i$). Ehhez definiáljunk $M_i = \{f(i) | f \in J_i\}$ halmazokat. Ekkor a következő teljesül: $|M_i| \leq \kappa_i < \lambda_i$. Tehát, ha tekintjük az $N_i = L_i - M_i$ halmazokat, akkor az egyenlőtlenség alapján $N_i \neq \emptyset (\forall i \in I)$. Ekkor a Kiválasztási Axióma miatt $N = \Pi_{i \in I} N_i \neq \emptyset$. Viszont így találtunk egy olyan részhalmazát L-nek, amelyet nem fed le $\bigcup_{i \in I} J_i$, mert ki tudunk N-ből választani olyan g függvényt, hogy $g(i) \notin M_i (\forall i \in I)$, mert így definiáltuk N-t. Tehát ekkor g nincs benne semelyik J_i halmazban sem. $\bigcup_{i \in I} J_i \cap N = \emptyset$, vagyis $\bigcup_{i \in I} J_i \neq L$. □

3.1.7. Tétel (Kőnig II.). $c \neq \aleph_\omega$.

Bizonyítás. A bizonyításhoz először tekintsük a következő lemmát:

[9] [17], amennyiben ZFC konzisztens, úgy nem lehet a CH és GCH negációját belátni.
[10] [5], amennyiben ZFC konzisztens, CH és GCH igazságát nem lehet belátni.
[11] [19]
[12] [8]

3.1.8. Lemma. $\aleph_0 + \aleph_1 + ... = \aleph_\omega$.

Bizonyítás. $\aleph_0 + \aleph_1 + ... \leq \aleph_\omega + \aleph_\omega + ... \leq \aleph_0 \cdot \aleph_\omega = \aleph_\omega$

$(\forall i < \omega)\aleph_i < \sum_{j<\omega} \aleph_j$. A szigorú egyenlőtlenség azért áll fent, mert minden $\aleph_i$-nél szerepel nagyobb számosság az összegben. Tehát az összeg legalább akkora, mint az első számosság, amely az összes $\aleph_i$-nél nagyobb, amely éppen $\aleph_\omega$. □

Azt szeretnénk belátni, hogy $\aleph_\omega \neq \aleph_\omega^{\aleph_0}$, mert azt tudjuk, hogy $c = c^{\aleph_0}$, így ez alapján kiderülne, hogy c értéke nem lehet $\aleph_\omega$.

Indirekt tegyük fel, hogy $\aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}$. Ekkor, ha az előző Lemma alapján veszünk egy $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ számosságú halmazt, legyen ez W, akkor mivel W számossága megegyezik $\aleph_\omega$-val, így felbontható a következő alakban: $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup ....$, ahol $|W_i| = \aleph_i < \aleph_\omega$. Viszont a 3.1.6 tételt alkalmazva a $|W_i|$ számosságokra azt kapjuk, hogy $\sum_{i\in I} |W_i| < \Pi_{i\in I}\aleph_\omega$, ahol $I = \widetilde{\omega}$. A feltevésünk szerint viszont $\Pi_{i\in I}\aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_\omega$, amely ellentmondás. □

Következmény. Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa < \kappa^{cf(\widetilde{\kappa})}$.

Bizonyítás. Legyen κ_i egy számosságokból álló sorozat, hogy $\kappa_i < \kappa$ és $i < cf(\widetilde{\kappa})$. Valamint a κ_i-k összegére, a 3.1.4 Állítás alapján teljesüljön, hogy éppen κ. Így ha alkalmazzuk Kőnig I. tételt: $\sum_{i<cf(\widetilde{\kappa})} \kappa_i = \kappa < \Pi_{i<cf(\widetilde{\kappa})}\kappa = \kappa^{cf(\widetilde{\kappa})}$. □

Következmény. Ha κ végtelen számosság és $2 \leq \lambda$, akkor $\kappa < cf(\widetilde{\lambda^\kappa})$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\kappa \geq cf(\widetilde{\lambda^\kappa})$. Ekkor $\lambda^\kappa < (\lambda^\kappa)^{cf(\widetilde{\lambda^\kappa})} \leq (\lambda^\kappa)^\kappa \leq \lambda^{\kappa\cdot\kappa} = \lambda^\kappa$, ami ellentmondás. □

A Kőnig tétel szemléltetésében alkalmazott 3.1.8 lemmát az alábbi állításként lehet általánosítani.

3.1.9. Állítás. *Ha α limeszszámosság, akkor* $\sum_{\beta<\alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha$.

Bizonyítás. $\sum_{\beta<\alpha} \aleph_\beta \leq \sum_{\beta<\alpha} \aleph_\alpha = \alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Valamint minden $\aleph_\beta$-ra igaz, hogy az összegben az őutána következő tag nála szigorúan nagyobb, így az összeg legalább akkora, mint az első számosság, amely az összes tagjánál nagyobb, amely pontosan $\aleph_\alpha$. □

A következő tételekben a kofinalitás fogalmát részletesebben fogjuk használni, ezért a kofinális függvény definícióját vezetjük be először.

3.1.10. Definíció (Kofinális függvény)**.** *Legyen α és β rendszám, és $f : \widetilde{\alpha} \to \widetilde{\beta}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy f kofinális függvény, ha minden $\gamma \in \widetilde{\beta}$-hoz létezik $\delta \in \widetilde{\alpha}$, hogy $\gamma \leq f(\delta)$.*

Megjegyzés. $cf(\widetilde{0}) = 0$, $cf(\widetilde{\alpha+1}) = 1$ és $cf(\widetilde{\alpha})$, ahol α limeszrendszám, szintén limeszrendszám.

3.1.11. Állítás. $cf(cf(\widetilde{\alpha})) = cf(\widetilde{\alpha})$.

Bizonyítás. Az állítás két lemmából fog következni.

3.1.12. Lemma. *Létezik $\widetilde{cf(\alpha)}$ és $\widetilde{\alpha}$ között olyan kofinális függvény, amely szigorúan monoton növő.*

Bizonyítás. Válasszunk ki egy kofinális függvényt a két halmaz között. Legyen ez f. Ekkor ennek segítségégvel definiálhatjuk a g függvényt, amely kofinális és szigorúan monoton növő: $\beta < cf(\alpha)$ esetén $g(\beta) = max\{f(\beta), sup_{\gamma<\beta} f(\gamma)\}$. □

3.1.13. Lemma. *Ha β limeszrendszám, és létezik $f : \widetilde{\beta} \to \widetilde{\gamma}$ kofinális függvény, amely szigorúan monoton növő, akkor $cf(\widetilde{\beta}) = cf(\widetilde{\gamma})$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges $h : cf(\widetilde{\beta}) \to \widetilde{\beta}$ kofinális függvényt. Ekkor $f \circ h$ kofinális függvény $cf(\widetilde{\beta})$ és $\widetilde{\gamma}$ között, tehát $cf(\widetilde{\gamma}) \leq cf(\widetilde{\beta})$. Ha veszünk egy $g : cf(\widetilde{\gamma}) \to \widetilde{\gamma}$ kofinális függvényt, akkor a $c : cf(\widetilde{\gamma}) \to \widetilde{\beta}$ függvény, ahol $\delta \in cf(\widetilde{\gamma})$ esetén $c(\delta) =$ a legkisebb ρ, hogy $g(\delta) < f(\rho)$, kofinális függvény. Ha feltesszük, hogy létezik olyan $\theta \in \widetilde{\beta}$, hogy nincs hozzá δ, hogy $c(\delta) \geq \theta$, akkor az azt jelenti, hogy a θ-nál nagyobb rendszámokhoz sincs ilyen. Vegyük a legkisebb ilyen θ-t. Ekkor találtunk $\widetilde{\beta}$-nak egy részhalmazát ($:= B$), amelyre igaz, hogy $g(\delta) < f(\eta)(\forall\delta \in cf(\widetilde{\gamma}), \forall\eta \in B)$, viszont mivel az is igaz, hogy $\exists\delta \in cf(\widetilde{\gamma})$, hogy $g(\delta) \geq f(\eta)(\eta \in B)$, mert g kofinális függvény, ezért ellentmondásra jutottunk, így $c(\delta)$ ezzel a definícióval valóban kofinális. □

Ha α limeszrendszám, akkor a Lemmákat alkalmazva rá és $cf(\widetilde{\alpha})$-ra megkapjuk a kívánt eredményt. Ha pedig rákövetkező rendszám, akkor $cf(\widetilde{\alpha}) = 1$ és $cf(\widetilde{1}) = 1$, tehát ekkor is bebizonyítottuk az állítást. □

Következmény. Ha α limeszrendszám, akkor $cf(\widetilde{\aleph_\alpha}) = cf(\widetilde{\alpha})$.

Megjegyzés. Ebből és a 3.1.6 tétel első következményéből Kőnig $c \neq \aleph_\omega$ tételéhez hasonló tételeket lehet belátni. Mivel tudjuk, hogy $\kappa < \kappa^{cf(\widetilde{\kappa})}$, akkor az olyan számosságok, amelyeknek a kofinalitása éppen ω, azok nem lehetnek a kontinuum értékei, mivel $c^{\aleph_0} = c$.[13] A 3.1.6 tétel második következményből pedig kiderül, hogy c kofinalitása szigorúan nagyobb, mint $\aleph_0$ kofinalitása, amely ω - mert $\aleph_0$ reguláris, hiszen nem lehet kofinalitása kisebb, mint ω, mert akkor egy véges halmazzal lenne kofinális, de egy véges halmaz függvényre vett képe is véges.

[13]Emellett Adolf Lindenbaum és Tarski [33]-ban ráadásul belátta, hogy ha $\widetilde{\alpha}$ kofinalitása ω, akkor nem létezik olyan κ számosság, hogy $2^\kappa = \aleph_\alpha$.

3.1.14. Definíció (κ^+). *$\kappa^+ = |\{\alpha \mid \alpha \leq \kappa\}|$, ahol α rendszám. Tehát κ^+ a κ rákövetkező számossága.*

3.1.15. Tétel. *κ^+ reguláris minden κ számosság esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy κ^+ nem reguláris, tehát a kofinalitása szigorúan kisebb, mint κ^+. Vegyünk egy $f : \widetilde{\alpha} \to \widetilde{\kappa^+}$ kofinális függvényt, hogy $\alpha < \kappa^+$. Így κ^+ felírható $|\bigcup_{\alpha<\kappa^+}\{f(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}|$ alakban. Ekkor viszont teljesül, hogy $|\{f(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}| < \kappa^+$. Ez azt jelenti, hogy $\widetilde{\kappa^+}$ előáll κ halmaz uniójaként, amelyek számossága mindegyik esetben kisebb, mint κ^+. Ez viszont ellentmondás, mert a 3.1.3. Tétel egyik következménye alapján az unió számossága legfeljebb κ lehet, de $\kappa < \kappa^+$. □

3.1.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy az Általános Kontinuum hipotézis teljesül. Ekkor a végtelen számosságok hatványozását a következőképpen lehet kiszámolni, ha $2 \leq \kappa$ és λ végtelen számosság:*

1) *Ha $\kappa \leq \lambda$, akkor $\kappa^\lambda = \lambda^+$.*
2) *Ha $cf(\widetilde{\kappa}) \leq \lambda < \kappa$, akkor $\kappa^\lambda = \kappa^+$.*
3) *Ha $\lambda < cf(\widetilde{\kappa})$, akkor $\kappa^\lambda = \kappa$.*

Bizonyítás. 1) A 3.1.5 Tétel alapján ilyenkor $\kappa^\lambda = 2^\lambda$, amely az Általános Kontinuum hipotézis szerint éppen λ^+.

2) A 3.1.6 Tétel első következménye biztosítja, hogy $\kappa < \kappa^\lambda$, tehát $\kappa < \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$. Így $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

3) Mivel $\lambda < cf(\widetilde{\kappa})$, ezért ha veszünk egy $f : \widetilde{\lambda} \to \widetilde{\kappa}$ függvényt, akkor az nem lehet kofinális. Legyen $K = \widetilde{\kappa}$ és $L = \widetilde{\lambda}$ halmazok, ekkor $|K| = \kappa$ és $|L| = \lambda$. Tehát ha nézzük az L-ből K-ba menő függvények halmazát, akkor ennek definíció szerint a számossága κ^λ. κ^λ felírható, mint $|\bigcup_{\alpha<\kappa} \widetilde{\alpha^\lambda}|$. Ekkor $|\widetilde{\alpha^\lambda}| \leq (2^\alpha)^\lambda = (max(|\widetilde{\alpha}|, \lambda))^+ \leq \kappa$, tehát $|\bigcup_{\alpha<\kappa} \widetilde{\alpha^\lambda}| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$. □

Ha az Általános Kontinuum hipotézist nem tesszük fel, akkor a végtelen számosságok hatványozásában az előző tétel 2)-es pontjában szereplő állításban alakulhat ki a legnagyobb változás. Az 1)-es kijelentésben κ^λ értéke 2^λ lesz, amelyről a hipotézis hiányában nem tudjuk eldönteni, hogy melyik végtelen számosságot jelenti. A 3)-as igazsága attól fog függni, hogy létezik-e olyan $\rho < \kappa$ számosság, hogy $\rho^\lambda > \kappa$. Amennyiben nem létezik, akkor az állítás nem változik, más esetben $\kappa^\lambda = \rho^\lambda$ lesz a kívánt eredmény, mert $\rho^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (\rho^\lambda)^\lambda = \rho^\lambda$. A 2)-es bizonyításában $\kappa < \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$ teljesül, viszont itt szűkebb becslést nem tudunk minden esetben adni. Ha κ-ról feltesszük, hogy reguláris számosság, akkor $\kappa^\lambda = \kappa^{cf\widetilde{\kappa})} = \kappa^\kappa = 2^\kappa$. Ellenben, ha κ szinguláris számosság, vagyis $cf(\widetilde{\kappa}) < \kappa$, akkor $\kappa < \kappa^\lambda = \kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} \leq 2^\kappa$. Ilyenkor valójában $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})}$ értéke a kérdéses.

Az eshetőség, hogy κ szinguláris számosságra $\kappa \leq 2^{cf(\widetilde{\kappa})}$, a reguláris számosságok hatványozásához hasonlóan meg van oldva. Korábbi tételek alapján ekkor $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} = 2^{cf(\widetilde{\kappa})}$. Ez a feltétel természetesen nem mindig teljesül, így ennek az esetnek egy lehetséges megoldására felállították a Szinguláris Számosságok hipotézist.

3.1.17. Hipotézis (Szinguláris Számosságok hipotézis)**.** *Ha* $2^{cf(\widetilde{\kappa})} < \kappa \Rightarrow \kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} = \kappa^+$.

Megjegyzés. A 3.1.16 Tételből kiderül, hogy az Általános Kontinuum hipotézisből következik a Szinguláris Számosságok hipotézis, mert akkor minden szinguláris számosságra teljesül, hogy $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} = \kappa^+$. Csakúgy, mint az Általános Kontinuum hipotézisről, a Szinguláris Számosságok hipotézisről is be lehet látni, hogy független a Zermelo-Fraenkel Axiómarendszertől.[14]

A hipotézisre további motivációul szolgál a tény, hogy ha κ erős limeszszámosság, akkor $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})}$ értéke a Szinguláris Számosságok hipotézisre nézve alátámasztaná a Kontinuum hipotézist κ számosságra. Ennek meggondolásához az alábbi definíciót érdemes bevezetni.

3.1.18. Definíció ($\kappa^{<\lambda}$)**.** *κ és λ számosságok, $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu$ számosság, $\nu < \lambda\} = \sum_{\nu<\lambda} \kappa^\nu$.*

3.1.19. Állítás. *Ha κ limeszszámmosság, akkor $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\widetilde{\kappa})}$.*

Bizonyítás. Legyen $\kappa = \sum_{i<cf(\widetilde{\kappa})} \kappa_i$, ahol $(\forall i)\ \kappa_i < \kappa$. Ekkor a teljesül a következő:
$2^\kappa = 2^{\sum_{i<cf(\widetilde{\kappa})} \kappa_i} = \Pi_{i<cf(\widetilde{\kappa})} 2^{\kappa_i} \leq \Pi_{i<cf(\widetilde{\kappa})} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{cf(\widetilde{\kappa})} \leq (2^\kappa)^{cf(\widetilde{\kappa})} = 2^\kappa$. □

3.1.20. Tétel. *Ha κ erős limeszszámosság, akkor $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} = 2^\kappa$.*

Bizonyítás. $2^{<\kappa} = sup\{2^\nu \mid \nu$ számosság, $\nu < \kappa\} = \kappa$, mert κ erős limeszszámosság, vagyis ha $\lambda < \kappa \Rightarrow 2^\lambda < \kappa$. Ezek alapján és a 3.1.19 állítás szerint: $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} = (2^{<\kappa})^{cf(\widetilde{\kappa})} = 2^\kappa$. □

Ezen tétel szerint, ha κ szinguláris erős limeszszámosság és feltesszük a Szinguláris Számosságok hipotézist, akkor $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} = \kappa^+ = 2^\kappa$. Ez azt jelenti, hogy ha a Szinguláris Számosságok hipotézist elfogadjuk, akkor szinguláris erős limeszszámosságokra igaz a Kontinuum hipotézis is.

Következmény. Ha κ erős limeszszámosság, akkor az alábbiak ekvivalensek:
1) κ-ra teljesül a Kontinuum hipotézis, vagyis ha $\kappa < \lambda \leq 2^\kappa$, akkor $\lambda = 2^\kappa$, tehát $\kappa^+ = 2^\kappa$.
2) κ-ra teljesül a Szinguláris Számosságok hipotézis, vagyis $\kappa^{cf(\widetilde{\kappa})} = \kappa^+$.

[14] Lásd például: [34], valójában, ha ZFC be tudná látni azt, hogy nem léteznek elérhetetlen számosságok, akkor SCH-t be lehetne bizonyítani: [26].

A Kontinuum hipotézis fontosságát a fentiek mellett az a tény is alátámasztja, hogy más végtelen számosságok hatványozására is támpontot nyújtana. Ezt leginkább a következő tétel mutatja.

3.1.21. Tétel (Hausdorff). $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.

Bizonyítás. Először tekintsük azt az esetet, amikor $\alpha+1 \leq \beta$. Ekkor $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\beta^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$ a 3.1.5 tétel szerint. Valamint $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta < 2^{\aleph_\beta}$, így a 3.1.3 alapján $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$. Tehát a tételt valóban teljesül ilyenkor.

Tegyük fel, hogy $\beta < \alpha + 1$. Ekkor igaz, hogy $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ és $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_{\alpha+1}$, tehát a 3.1.3 tétel alapján $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.

A másik irányhoz vegyük az $f : \widetilde{\aleph_\beta} \to \widetilde{\aleph_{\alpha+1}}$ függvényeket, amelyek éppen $\widetilde{\aleph_{\alpha+1}}^{\widetilde{\aleph_\beta}}$ elemei. Ha kiválasztunk egy tetszőleges g függvényt, akkor létezni fog olyan $\widetilde{\kappa} \subset \widetilde{\aleph_{\alpha+1}}$ halmaz g-hez, hogy $\kappa < \aleph_{\alpha+1}$ és $g(\lambda) < \kappa (\forall \lambda \in \widetilde{\aleph_\beta})$, mert a 3.1.15 tétel alapján $\aleph_{\alpha+1}$ reguláris és $\aleph_\beta < \aleph_{\alpha+1}$. Így g valójában $g : \widetilde{\aleph_\beta} \to \widetilde{\kappa}$. Tehát $\widetilde{\aleph_{\alpha+1}}^{\widetilde{\aleph_\beta}} = \bigcup_{\kappa<\aleph_{\alpha+1}} \widetilde{\kappa}^{\widetilde{\aleph_\beta}}$. Ekkor minden κ-ra igaz, hogy $\kappa \leq \aleph_\alpha$, tehát a 3.1.3 tétel második következménye szerint $|\bigcup_{\kappa<\aleph_{\alpha+1}} \widetilde{\kappa}^{\widetilde{\aleph_\beta}}| \leq \sum_{\kappa<\aleph_{\alpha+1}} \kappa^{\aleph_\beta}$. Ezek alapján: $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\kappa<\aleph_{\alpha+1}} \kappa^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\kappa<\aleph_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$. □

Abban az esetben, ha a Kiválasztási Axiómát is feltesszük, Hausdorff tétele alapján a Kontinuum hipotézis két újabb ekvivalens megfogalmazását lehet kimondani. Ezek mellett a Kontinuum Problémával - amely azt kutatja, hogy melyik α-ra igaz, hogy $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ - egyenértékű kijelentések is közlésre kerülnek.

3.1.22. Hipotézis (Kontinuum hipotézis). $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Megjegyzés. A következők közül pontosan az egyik teljesül: vagy $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$ vagy $\aleph_1^{\aleph_0} > \aleph_1$. Amennyiben igaz a Kontinuum hipotézis, úgy $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = (\aleph_1)^{\aleph_0}$, vagyis a 3.1.22 forma valóban teljesül. Ha pedig $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$, akkor Hausdorff tételét alkalmazva $\alpha = \beta = 0$ helyettesítéssel: $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = max(2^{\aleph_0}, \aleph_1) = \aleph_1$, vagyis $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$, tehát $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, a Kiválasztási Axióma szerint.

3.1.23. Állítás. $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \Leftrightarrow \alpha$ *a legkisebb rendszám, hogy* $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ekkor $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$. Tegyük fel, hogy létezik $\beta < \alpha$, hogy $\aleph_\beta = \aleph_\beta^{\aleph_0}$. Ekkor $2^{\aleph_0} \leq \aleph_\beta^{\aleph_0} = \aleph_\beta < \aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, amely ellentmondás.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy létezik $\beta \neq \alpha$, hogy $\aleph_\beta = 2^{\aleph_0}$. Ekkor az előzőek miatt igaz, hogy $\aleph_\beta = \aleph_\beta^{\aleph_0}$. Tudjuk, hogy α a legkisebb ilyen tulajdonsággal rendelkező rendszám, így $\alpha < \beta$. Tehát $2^{\aleph_0} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha < \aleph_\beta = 2^{\aleph_0}$, ami ellentmondás, vagyis a Kiválasztási Axióma miatt $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$. □

3.1.24. Hipotézis (Kontinuum hipotézis)**.** $\aleph_1^{\aleph_0} < \aleph_2^{\aleph_0}$.

Megjegyzés. Ha teljesül a Kontinuum hipotézis, akkor $\aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < \aleph_2 \leq \aleph_2^{\aleph_0}$, tehát a hipotézis teljesül. Ha $\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0}$, akkor Hausdorff tételébe először $\alpha = \beta = 0$, majd $\alpha = 1, \beta = 0$ helyettesítéssel $2^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} < \aleph_2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 = max(2^{\aleph_0}, \aleph_2)$, tehát $2^{\aleph_0} < \aleph_2$. Viszont $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$, így a Kiválasztási Axióma alapján $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

3.1.25. Állítás. $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \Leftrightarrow \alpha$ *a legkisebb rendszám, hogy* $\aleph_\alpha^{\aleph_0} < \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}$.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ekkor igaz, hogy $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} \geq \aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha = 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$. Viszont tegyük fel, hogy létezik $\beta < \alpha$, hogy $\aleph_\beta^{\aleph_0} < \aleph_{\beta+1}^{\aleph_0}$. Mivel $\beta < \alpha$, ezért $\beta + 1 \leq \alpha$, így $2^{\aleph_0} \leq \aleph_\beta^{\aleph_0} < \aleph_{\beta+1}^{\aleph_0} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, ami ellentmondás.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy létezik $\beta \neq \alpha$, hogy $\aleph_\beta = 2^{\aleph_0}$. Ekkor a fentiek szerint $\aleph_\beta^{\aleph_0} < \aleph_{\beta+1}^{\aleph_0}$, tehát mivel α a legkisebb olyan számosság, amelyre ez teljesül, így $\alpha < \beta$ és $\alpha + 1 \leq \beta$. Viszont $2^{\aleph_0} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0} < \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} \leq \aleph_\beta^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, ami ellentmondás, így a Kiválasztási Axióma miatt $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$. □

Megjegyzés. Az Általános Kontinuum hipotézis hiányában általánosságban azt sem lehet eldönteni, hogy ha $\alpha < \beta$, akkor $2^{\aleph_\alpha} < 2^{\aleph_\beta}$ teljesül-e. Ha $\kappa < \lambda$ reguláris számosság, akkor létezik olyan modellje ZFC-nek, amelyben $2^\kappa = 2^\lambda$, de létezik olyan is, hogy $2^\kappa = 2^\lambda$.[15]

A következő állítás - amely egy általánosításaként tekinthető a 3.1.8 lemmának - Hausdorff tételéhez hasonló módon látható be.

3.1.26. Állítás. *Ha* $\lambda < cf(\widetilde{\kappa})$ *és* κ *limeszszámosság, akkor* $\sum_{\rho<\kappa} \rho^\lambda = \kappa^\lambda$.

Bizonyítás. $\sum_{\rho<\kappa} \rho^\lambda \leq \sum_{\rho<\kappa} \kappa^\lambda = \kappa \cdot \kappa^\lambda = \kappa^\lambda$. A másik irány belátásához elegendő $\widetilde{\kappa}^{\widetilde{\lambda}}$-t felbontani $\bigcup_{\rho<\kappa} \widetilde{\rho}^{\widetilde{\lambda}}$ alakba, mert akkor $\kappa^\lambda = |\bigcup_{\rho<\kappa} \widetilde{\rho}^{\widetilde{\lambda}}| \leq \sum_{\rho<\kappa} \rho^\lambda$.

A felbontás létezésének bizonyításához vegyük az $f : \widetilde{\lambda} \to \widetilde{\kappa}$ függvényeket, amelyek pontosan $\widetilde{\kappa}^{\widetilde{\lambda}}$ elemei. Vegyünk egy tetszőleges g függvényt, ekkor létezni fog olyan $\widetilde{\mu} \subset \widetilde{\kappa}$ halmaz g-hez, hogy $\mu < \kappa$ és $g(\nu) < \mu (\forall \nu \in \widetilde{\lambda})$, mert $cf(\widetilde{\kappa}) > \lambda = |\widetilde{\lambda}|$. Tehát g a $\widetilde{\lambda}$ és $\widetilde{\rho}$ közötti függvény valójában. Így $\widetilde{\kappa}^{\widetilde{\lambda}} = \bigcup_{\rho<\kappa} \widetilde{\rho}^{\widetilde{\lambda}}$, amit szerettünk volna. □

Ha Hausdorff tételébe β helyére 0-t helyettesítünk, majd α helyére egyre nagyobb rendszámokat, akkor az alábbiakat kapjuk:

$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

$\aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_2$

$\aleph_3^{\aleph_0} = \aleph_2^{\aleph_0} \cdot \aleph_3 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 \cdot \aleph_3 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_3$

[15] Ezt Easton-tételnek is szokás nevezni. Easton azt is belátta, hogy a König-tételek következményei és ezen állítás az egyedüli ZFC-ből bizonyítható korlát 2^κ értékére, amennyiben κ reguláris számosság.

Indukcióval be lehet látni, hogy $\aleph_n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_n$, ha $n < \omega$.
Már láttuk, hogy $n = 1, 2, 3$ esetén teljesül az állítás, így tegyük fel, hogy $n = k$-ig igaz. Nézzük meg az $n = k + 1$ esetet.
A Hausdorff tétel alapján $\aleph_{k+1}^{\aleph_0} = \aleph_k^{\aleph_0} \cdot \aleph_{k+1}$. Az indukciós feltevés alapján $\aleph_k^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_k$. Így $\aleph_{k+1}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_k \cdot \aleph_{k+1} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_{k+1}$.

Viszont az indukciónak ω egyfajta határa, mert a következő állítás teljesül.

3.1.27. Állítás. $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_\omega \Leftrightarrow \aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$.

Bizonyítás. Minden esetben teljesül, hogy $\aleph_\omega^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_\omega = max(2^{\aleph_0}, \aleph_\omega)$, mert $\aleph_\omega^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0}$ és $\aleph_\omega^{\aleph_0} \geq \aleph_\omega$.

$\Leftarrow$: Az egyenlőséghez még be kell látni, hogy a jobb oldal is $\geq$ a bal oldalnál. Vagyis kell, hogy $\aleph_\omega^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0}$ vagy $\aleph_\omega^{\aleph_0} \leq \aleph_\omega$. A második egyenlőtlenség viszont nem igaz, mert $\aleph_\omega^{\aleph_0} \geq \aleph_\omega$ és a Kőnig tétel szerint $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$, így $\aleph_\omega^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0}$ állítást kell belátni, amely következik a feltevésből, mert $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

$\Rightarrow$: Ha az egyenlőség igaz, az a fentiek alapján csak akkor teljesülhet, ha $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Tegyük fel, hogy $\aleph_\omega > 2^{\aleph_0}$. Ekkor $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega > 2^{\aleph_0}$ Kőnig tétele szerint, amely ellentmondás, tehát $\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$. □

A fentiek alapján a végtelen számosságok alapvető végtelen hatványainak pontos kiszámításához is elengedhetetlen a kontinuum „valós" értéke. Nemcsak a hatványozásnál, de a végtelen szorzatoknál is gyakran meghatározó szerepet tölt be $2^{\aleph_0}$. Az ehhez kapcsolódó állítások előtt először megnézzük az alábbi tételt, amely a végtelen szorzatok kiszámításáról szól.

3.1.28. Tétel. *Ha λ végtelen számosság és a $\{\kappa_i\}_{(i<\lambda)}$ egy nemcsökkenő sorozata olyan számosságoknak, amelyek egyike sem 0, akkor $\Pi_{i<\lambda}\kappa_i = (sup_i\kappa_i)^\lambda$.*

Bizonyítás. Mivel $\kappa_i \leq sup_i\kappa_i (i < \lambda)$, ezért $\Pi_{i<\lambda}\kappa_i \leq \Pi_{i<\lambda} sup_i\kappa_i = (sup_i\kappa_i)^\lambda$. A másik irányú egyenlőtlenség belátásához bontsuk fel a $\widetilde{\lambda}$ halmazt G_j-k diszjunkt uniójára, hogy $|G_j| = \lambda$ és $\widetilde{\lambda} = \bigcup_{j<\lambda} G_j$ teljesüljön. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy veszünk egy $f : \widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda} \to \widetilde{\lambda}$ bijekciót és G_j-t válasszuk $f(\widetilde{\lambda} \times \{j\})$-nek. A végtelen szorzat minden tényezőjénél vagy nagyobb vagy egyenlő, így $(\forall j < \lambda)\Pi_{i\in G_j}\kappa_i \geq sup_{i\in G_j}\kappa_i = sup_i\kappa_i$.

Ekkor a 3.1.2 definíció következménye alapján $\Pi_{i<\lambda}\kappa_i = \Pi_{j<\lambda}(\Pi_{i\in G_j}\kappa_i)$. Viszont a fentiek miatt $\Pi_{j<\lambda}(\Pi_{i\in G_j}\kappa_i) \geq \Pi_{j<\lambda} sup_i\kappa_i = (sup_i\kappa_i)^\lambda$ is teljesülni fog, így a tételt beláttuk. □

Következmény. $\Pi_{0<n<\omega} n = 2^{\aleph_0}$.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján $\Pi_{0<n<\omega} n = \aleph_0^{\aleph_0}$, amelyről a 3.1.5 tétel alapján tudjuk, hogy $2^{\aleph_0}$. $\square$

Következmény. $\Pi_{n<\omega}\aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján $\Pi_{n<\omega}\aleph_n = (sup_n \aleph_n)^{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$. $\square$

Ebben az alfejezetben több alkalommal szerepelt $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ értéke. Ennek pontos formáját a kontinuum értékéhez hasonlóan nem ismerjük. A fenti tételek eredményeképpen annyival szűkítettük lehetséges értékeit, hogy ha $\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$, akkor $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Más esetben pedig az eddig adott legjobb szigorú felső becslés $\aleph_{\omega_4}$ a következő tétel[16]alapján.

3.1.29. Tétel (Shelah). $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4} \cdot (2^{\aleph_0})^+$.

[16] [44]

4. fejezet

Újabb axiómák

A Kontinuum hipotézis függetlenségére utaló spekulációk már az 1963-as bizonyítás előtt születtek.[1] Gödel úgy tartotta, hogy az axiómarendszert szükséges lenne újabb axiómákkal bővíteni. Kifejtette, hogy maga a halmaz fogalma, amelyen az elmélet alapszik, azt mutatja, hogy érdemes lenne az axiómákat kiegészíteni, hogy az „ennek a halmaza”[2] operációt többször lehessen elvégezni. Gödel és Zermelo egyetértett abban, hogy legalább[3] a következő axiómával lenne elengedhetetlen megtoldani a Halmazelmélet alapjait.[4]

4.0.1. Axióma (Erős végtelenség). *Létezik gyengén és erősen elérhetetlen számosság, azaz olyan halmaz, amelynek a számossága erősen (gyengén) elérhetetlen.*

Ez az axióma azt mutatja, hogy az összes halmaz, amelyet az eredeti axiómákkal meg lehet kapni, szintén halmazt alkot. Így újra lehet alkalmazni az eredeti axiómákat, hogy mégtöbb halmazt gyártsunk. Míg Zermelo ezen okoskodás miatt támogatta az axióma bevezetését, Gödel a Kontinuum hipotézis eldöntésének lehetőségére számított az így kiegészített elméletben.

Megjegyzés. Amint a második fejezetből kiderült, hogy ha feltesszük ZFC konzisztenciáját és egy gyengén vagy erősen elérhetetlen számosság ($:= \alpha$) létezését, akkor L_α ZFC egy modellje. Ez viszont bizonyítaná, hogy ZFC konzisztens. Mivel az „új” Halmazelméletünk ZFC és az Erős végtelenség axiómáján alapulna, így nem erről látnánk be, hogy konzisztens, hanem egy részéről - ZFC-ről -, teját a II. Nemteljességi tétel nem okozna problémát.

[1]Ez a fejezet főként a következő forrásokon alapul: [18], [10]

[2]Angolul: „set of”

[3]Ez a leggyengébb az erős végtelenségi axiómák közül.

[4]Zermelo ellenzi a túlságos axiomatizálást, mondván, hogy az kimondottan modellspecifikussá tenné a Halmazelméletet: [11].

Ha ZFC konzisztens, akkor ZFC + Erős végtelenség axiómájának relatív konzisztenciáját ZFC-vel nem lehet belátni. Tegyük fel, hogy mégis létezik bizonyítás erre ZFC-ben, tehát ZFC + Erős végtelenség konzisztens, ha ZFC az. Tudjuk, hogy ZFC + Erős végtelenség axiómarendszer bizonyítja ZFC konzisztenciáját, amelyből pedig a feltevés alapján következik, hogy az új axiómarendszer konzisztens. Viszont ezek alapján ZFC + Erős végtelenség az önmaga konzisztenciáját is be tudja látni, tehát nem lehet konzisztens, amely ellentmondás.

Nemcsak az új elmélet relatív konzisztenciáját, de az elérhetetlen számosságok létezését sem lehet belátni ZFC-ből, ha konzisztens - a II. Nemteljességi tétel alapján. Sőt, az is belátható, hogy relatív konzisztens ZFC-vel az elérhetetlen számosságok nem létezése. Ezt a második fejezet szerint lehet bizonyítani: amint láttuk, L_α ZFC egy modellje, feltéve hogy α elérhetetlen számosság. Ha tekintjük a legkisebb elérhetetlen számosságot, legyen ez β, akkor L_β (amennyiben nem létezik gyengén elérhetetlen számosság, úgy V-t nézzük) olyan modellje ZFC-nek, amelyben nincsenek elérhetetlen számosságok, így $L_\beta \models$ (ZFC + Nem létezik elérhetetlen számosság) - a Teljességi tétel alapján relatív konzisztens ZFC-vel, hogy nincsenek elérhetetlen számosságok.

4.1. Forszolás

Annak eldöntéséhez, hogy vajon Gödelnek igaza volt-e abban, hogy az Erős végtelenségi axióma eldönti a Kontinuum hipotézist, egy új módszert kell bevezetnünk, a Forszolást[5]. A forszolás Paul Cohen nevéhez fűződik, aki ennek a segítségével látta be 1963-ban, hogy a Kontinuum hipotézis és a Kiválasztási Axióma tagadása relatív konzisztens ZFC-vel, így Gödel eredménye alapján független is tőle.

A forszolás kiindulópontja egy tranzitív modell, amely az eljárás során egy újabb halmazzal egészül ki, s így egy nagyobb tranzitív modellt eredményez. Az „új halmaz" elemei határozzák meg, hogy a kiegészített modellben milyen állítások válnak bizonyíthatóvá az eredetiek mellett. A forszolás egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy az új modell teljes egészében leírható lesz a régi modellben - az új modell állításai úgy is értelmezhetőek, mint a régi modell a forszolás nyelvét használó állításai.

Forszolás során első lépésként ZFC (vagy egy kiegészített vagy szűkebb változata) konzisztenciáját kell feltenni, hiszen pontosan ekkor létezik modellje Gödel Teljességi tétele szerint. Amennyiben ezt megtettük, úgy a Lövenheim-Skolem tétel alapján az elmélet megszámlálható modellel is leírható lesz. A forszoláshoz, a megszámlálható modell létezé-

[5]Angolul: Forcing, ez az alfejezet főként a következő forrásokon alapul: [29], [30], [7]. Az alábbiakban nem bizonyított tételek bizonyításai megtalálhatóak az említett szakirodalomban.

se mellett, még szükséges feltenni, hogy megszámlálható tranzitív (M, $\in$) modellje is van ZFC-nek. Napjainkban gyakran a korábban bevezetett V univerzumból és a hipotézisből, hogy létezik a fentebb említett „új halmaz" - amelyet generikus részhalmaznak fogunk nevezni - indulnak ki az eljárások.

A Forszolás leírásához először vezessünk be néhány definíciót.

4.1.1. Definíció (Kényszerképzet)**.** *Egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmazt kényszerképzetnek nevezünk, ha van legnagyobb eleme (ezt 1-el szokás jelölni) és nincs minimális eleme, vagyis $\forall p \in P : \exists q < p$. P elemeit forszolási feltételeknek nevezzük. Ha $p \leq q$, akkor azt mondjuk, hogy p kiterjeszti q-t. Ha $p < q$, akkor p-t erősebbnek hívjuk, mint q.*

4.1.2. Definíció (Kompatibilitás)**.** *Ha $p, q \in P$ forszolási feltételek és $\exists r \in P$, hogy $r \leq p$ és $r \leq q$, akkor p és q kompatibilisek, ellenkező esetben inkomptibilisek.*

4.1.3. Definíció (Antilánc)**.** *Egy $A \subset P$ halmazt antiláncnak nevezzük, ha az elemei páronként inkompatibilisek.*

4.1.4. Definíció (κ-antlianc feltételesség)**.** *Legyen $(P, \leq)$ kényszerképzet és κ számosság. Azt mondjuk, hogy P κ-antilánc feltételes, ha nincs benne κ hosszú antilánc. Az ω_1-antilánc feltételességet megszámlálható antilánc feltételességnek nevezzük.*

4.1.5. Definíció (Sűrűség)**.** *Egy $S \subset P$ sűrű P-ben, ha minden $p \in P$ forszolási feltételhez létezik $q \in S$, hogy $q \leq p$ - minden $p \in P$ feltételnek létezik S-beli kiterjesztése.*

4.1.6. Definíció (Filter)**.** *Egy $F \subset P$ halmaz P filtere, ha*

1) *F nemüres - tartalmazza a maximális elemet;*
2) *Ha $p \in F$ és $p \leq q$, akkor $q \in F$;*
3) *Ha $p, q \in F$, akkor létezik egy olyan $r \in F$, hogy $r \leq q$ és $r \leq p$.*

4.1.7. Definíció (Generikus részhalmaz)**.** *Legyen $(M, \in)$ ZFC egy tranzitív modellje. Legyen $(P, \leq) \in M$ kényszerképzet. Egy $G \subseteq P$ halmaz generikus részhalmaz (M-generikus vagy P-generikus M felett), ha*

1) *G filtere P-nek;*
2) *Ha S sűrű P-ben és $S \in M$, akkor $G \cap S \neq \emptyset$.*

Legyen $\mathcal{D}$ halmazok egy kollekciója. Azt mondjuk, hogy egy $G \subset P$ egy $\mathcal{D}$-generikus filter P-n, ha filter és $G \cap S \neq \emptyset$ semely $S \subset P$ sűrű részhalmazra, amely $\mathcal{D}$-ben van.

A forszoláshoz elengedhetetlen egy P-generikus részhalmaz M felett, ezért a következő állítás kiemelkedően fontos számunkra.

4.1.8. Állítás. *Ha $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz és $\mathcal{D}$ egy megszámlálható kollekciója P valamely sűrű részhalmazainak, akkor létezik $\mathcal{D}$-generikus filter P-n. Sőt, minden $p \in P$ esetén létezik olyan G $\mathcal{D}$-generikus filter, hogy $p \in G$. Speciálisan minden $(M, \in)$ megszámlálható tranzitív modellhez és $(P, \leq) \in M$ kényszerképzethez létezik generikus részhalmaz.*

Bizonyítás. Legyen $D_1, D_2, ...$ $\mathcal{D}$ halmazainak a felsorolása. Ekkor legyen $p_0 = p$ és minden n esetén p_n-t válsszuk úgy, hogy $p_n \leq p_{n-1}$ és $p_n \in D_n$. Ekkor a $G = \{q \in P : p_n \leq q$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\}$ egy $\mathcal{D}$-generikus filter P-n és $p \in G$. □

4.1.9. Definíció (P-név)**.** *$\tau \in M$ P-név (vagy név), ha $\langle p, \sigma \rangle$ alakú párok az elemei, hogy $p \in P$ és σ név.*

4.1.10. Definíció (V^P)**.** *A P-nevek osztályát V^P-nek nevezzük. Transzfinit rekurzióval az alábbiak szerint épül fel:*

$V_0^P = \emptyset$
$V_\alpha^P = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^P$, *ha α limeszrendszám*
$V_{\alpha+1}^P = \mathcal{P}(V_\alpha \times P)$
$V^P = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha^P$.

4.1.11. Definíció (M^P)**.** *A P-nevek M modellben való definiálása M^P (vagy $V^{P,M}$). Az alábbi konstrukcióból ki fog derülni, hogy az M-beli P-nevek pontosan azok a P-nevek, amelyek M-be esnek. Amint teljesül, hogy $Ord^M = Ord \cap M$, mert M tranzitív modell, így:*

$M_0 = V_0^{P,M} = \emptyset$
$M_\alpha = V_\alpha^{P,M} = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$, *ha $\alpha \in M$ limeszrendszám*
$M_{\alpha+1} = V_{\alpha+1}^{P,M} = \mathcal{P}^M(M_\alpha \times P) = M \cap \mathcal{P}(M_\alpha \times P)$, *ha $\alpha \in Ord^M$*
$M^P = V^{P,M} = \bigcup_{\alpha \in Ord^M} M_\alpha = M \cap V^P$.

4.1.12. Definíció (Interpretált)**.** *Ha $G \subseteq P$ egy filter, akkor a P-nevek G szerinti interpretáltja az alábbi rekurzióval definiálható:*

$i_G(v) = \{i_G(w) :$ *létezik olyan $p \in G$, hogy $\langle w, p \rangle \in v\}$, ahol $v, w \in V^P$.*

4.1.13. Definíció (M-generikus modell)**.** *Ha $P \in M$ kényszerképzet és $G \subseteq P$ generikus filter, akkor az M-generikus modell (vagy Generikus modell): $M[G] = \{i_G(v) : v \in M^P\}$.*

A forszolás egyik alaptétele az alábbi Generikus Modellekről szóló tétel.

4.1.14. Tétel (Generikus Modell)**.** *Legyen M egy tranzitív modellje ZFC-nek és $(P, \leq) \in M$ egy kényszerképzet. Ha $G \subseteq P$ generikus részhalmaz, akkor létezik egy olyan $M[G]$ modell, hogy:*

1) *$M[G]$ ZF egy modellje;*

2) *tranzitív, $M \subseteq M[G]$ és $G \in M[G]$;*

3) *$Ord^{M[G]} = Ord^{M}$;*

4) *Ha N ZF egy olyan tranzitív modellje, hogy $M \subseteq N$ és $G \in N$, akkor $M[G] \subseteq N$.*

Megjegyzés. Valójában a tétel 1) pontjánál egy erősebb állítás is belátható, miszerint $M[G] \models ZFC$.

Bizonyítás. 1): Az állítást az alfejezet végén látjuk be.

2): Tranzitivitás: Amint M^P halmaz, úgy $M[G]$ is az. $M[G]$ definíciója alapján az elemei azon P-nevek interpretáltjai, amelyek M-beliek. Ha telintjük az interpretáció definícióját, akkor látható, hogy $i_G(v)$ M-beli nevek interpretáltjainak egy halmaza, vagyis $M[G]$-beliek. Így a Generikus modell elemeinek az elemei is a generikus modellben vannak, tehát $M[G]$ tranzitív.

$M \subseteq M[G]$: Vegyünk egy tetszőleges $x \in M$ elemet. Meg szeretnénk x-ről mutatni, hogy $x \in M[G]$, tehát $M[G]$ definíciója miatt egy olyan nevet kell megadnunk, amelynek az interpretáltja x. Definiáljuk egy $x \in M$ halmaz kanonikus nevét:

4.1.15. Definíció (Kanonikus név)**.** *Egy $x \in M$ $\check{x}$ kanonikus neve $\{\langle \check{y}, p\rangle : y \in x, p \in P\}$.*

A definíció a 4.1.11 definícióban szereplő kumulatív hierarchia szintjeire vett rekurzióval határozza meg $\check{x} \in M^P$ nevet. Erre alkalmazva az interpretációt, a kumulatív hierarchia szintjei szerinti idukcióval azt kapjuk, hogy $i_G(\check{x}) = x$. Tehát $M \subseteq M[G]$ valóban teljesül.

$G \in M[G]$: Ennek az állításnak az igazolásához egy olyan nevet kell mutatnunk, amelynek az interpretáltja G. Definiáljuk w-t a következőképpen: $w := \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in P\}$. Ekkor $w \in M^P$, a P-név definíciója szerint és annak alapján, hogy $F : F(x) = \check{x}$ M-beli operáció. Nézzük w interpretáltját: $i_G(w) = \{i_G(\check{p}) : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$, amit be szerettünk volna látni.

3): Abból, hogy M tranzitív modell következik, hogy $V_\alpha^M \subseteq V_\alpha$, minden $\alpha \in M$ esetén - a modellbeli kumulatív hierarchia szintjei részhalmazai az univerzumbeli ugyanazon szinteknek:

$V_0^M = V_0 = \emptyset$

$V_\alpha^M = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^M \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta = V_\alpha$, az indukciós feltevés alapján.

$V_{\alpha+1}^M = \mathcal{P}^M(V_\alpha^M) = M \cap \mathcal{P}(V_\alpha^M) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, ha α-ra teljesül az állítás.

Tehát $M \subseteq V_\gamma$, ahol γ a legkisebb (limesz)rendszám, amelyet M nem tartalmaz. Válasszunk ki egy tetszőleges $d \in V_\delta^{P,M}$ P-nevet. Ekkor d elemei által tartalmazott nevek $V^{P,M}$ kisebb szintjeiről származnak. δ-ra alkalmazott transzfinit indukcióval: $i_G(d) \in$

$V_\delta \subseteq V_\gamma$. Emiatt $M[G] \subseteq V_\gamma$, valamint tudjuk, hogy V_γ csak γ-nál kisebb rendszámokat tartalmaz, ezért $M[G]$ is.

4): Ha $M \subseteq N$ egy tranzitív modell, amely tartalmazza a G generikus részhalmazt ($G \in N$), akkor $M[G]$ konstrukciója N-en belül kivitelezhető, tehát $M[G] \subseteq N$. $\square$

4.1.16. Definíció ($\dot{x}$). *Ha $x \in M[G]$, akkor $\dot{x} \in M^P$ P-név, hogy $i_G(\dot{x}) = x$. Egy $x \in M[G]$ elemnek több neve is lehet, $\dot{x}$ ezek közül az egyiket jelöli.*

4.1.17. Definíció (Forszolási reláció). *Legyen $P \in M$ kényszerképzet. Azt mondjuk, hogy a $p \in P$ forszolja, hogy az $y_1, ..., y_n$ P-nevek kielégítik a φ formulát, ha minden $p \in G \subseteq P$ P-generikus részhalmazra $M[G] \models \varphi(i_G(y_1), ..., i_G(y_n))$. Jelben a következőképpen szokás megfogalmazni a forszolási relációt: $p \Vdash \varphi(y_1, ..., y_n)$.*

Az alábbiakban a forszolás további főtételeit mondjuk ki.

4.1.18. Tétel (Forszolás). *Legyen $(P, \leq) \in M$ egy kényszerképzet, ahol M megszámlálható tranzitív modell, φ egy n-változós formula és $y_1, ..., y_n \in M^P$, ekkor minden $G \subseteq P$ generikus részhalmazra:*

$$M[G] \models \varphi(i_G(y_1), ..., i_G(y_n)) \Longleftrightarrow (\exists p \in G) p \Vdash \varphi(y_1, ..., y_n)$$

.

4.1.19. Tétel (Forszolás tulajdonságai). *Legyen $(P, \leq) \in M$ egy kényszerképzet és M^P az összes nevek M-beli osztálya.*

1) *i) Ha p forszolja φ és $q \leq p$, akkor $q \Vdash \varphi$.*
   ii) Semely p sem forszolja egyszerre φ-t és $\neg\varphi$-t.
   iii) Minden p-hez $\exists q \leq p$, hogy vagy $q \Vdash \varphi$ vagy $q \Vdash \neg\varphi$.
2) *i) $p \Vdash \neg\varphi$, akkor és csak akkor, ha semely $q \leq p$ sem forszolja φ-t.*
   ii) $p \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow p \Vdash \varphi$ és $p \Vdash \psi$.
   $p \Vdash \forall x\varphi \Leftrightarrow p \Vdash \varphi(\dot{a})$ minden $\dot{a} \in M^P$ esetén.
   iii) $p \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow$ minden $q \leq p$ esetén $\exists r \leq q$, hogy $r \Vdash \varphi$ vagy $r \Vdash \psi$.
   $p \Vdash \exists x\varphi \Leftrightarrow$ minden $q \leq p$ esetén $\exists r \leq q$, hogy $\exists \dot{a} \in M^P$, hogy $r \Vdash \varphi(\dot{a})$.
3) *Ha $p \Vdash \exists x\varphi$, akkor valamely $\dot{a} \in M^P$ esetén $p \Vdash \varphi(\dot{a})$.*

Már rendelkezünk elég alapokhoz arra, hogy a 4.1.14 tétel első állítását belássuk.

Bizonyítás. 1): Az állítás bizonyításához be kell látni, hogy ZF minden axiómáját teljesíti $M[G]$.

A meghatározottság axiómája $M[G]$ definíciójából rögtön következik.

A regularitás axiómája teljesül, mert $i_G(v) \in i_G(w)$ esetén v kisebb szinten van a kumulatív hierarchiában, mint w.

A pár axiómához vegyünk $M[G]$ két (akár azonos) elemét, $i_G(v)$-t és $i_G(w)$-t, ahol $v, w \in M^P$. Be szeretnénk látni, hogy $\{i_G(v), i_G(w)\} \in M[G]$, tehát egy olyan M-beli nevet kell mutatnunk, hogy annak az interpretáltja éppen ez a halmaz legyen. Ehhez nézzük a $P(v, w) = \{v\} \times P \cup \{w\} \times P$ halmazt. Ez egy M-beli nevet ad meg, a P-név definíciója alapján. Ennek a halmaznak az összes $\langle x, p\rangle$ alakú pár az eleme, ha $p \in P$ és vagy $x = v$ vagy $x = w$, tehát interpretáltjának $i_G(v)$ és $i_G(w)$ eleme, viszont ezeken kívül nem tartalmaz mást.

A részhalmaz axiómához nézzük a $H = \{x \in i_G(v) : M[G] \models \varphi(x, i_G(w_1), ..., i_G(w_n))\}$-t. Meg szeretnénk mutatni, hogy $M[G]$ eleme, mert ekkor belátnánk, hogy teljesül a részhalmaz axióma. Először tekinsük a következő halmazt: $\pi = \{\langle q, y\rangle : q \Vdash \varphi(y, w_1, ..., w_n)$, $\exists p \geq q, \langle p, y \in v\}$. π valóban halmaz, mert $\langle q, y\rangle$ alakú párok az elemei és $\langle p, y\rangle \in v$ valamely $p \in P$ esetén, így $y \in \bigcup\bigcup v$, tehát π név.

Meg szeretnénk mutatni, hogy H éppen $i_G(\pi)$, mert ezzel készen is volnánk. $i_G(\pi)$ elemei $i_G(y)$ alakúak, azzal a kikötéssel, hogy létezik $q \in G$, hogy $q \Vdash \varphi(y, w_1, ..., w_n)$, vagyis $M[G] \models \varphi(i_G(y), i_G(w_1), ..., i_G(w_n)$. Valamint $p \geq q \in G$ feltételből adódóan $p \in G$, tehát $i_G(y) \in i_G(v)$. Ezekből következik, hogy $i_G(\pi) \subseteq H$. A másik irányhoz tekinsünk egy $z \in i_G(v)$ elemet, a fentiek alapján $z = i_G(y)$ alakú, valamely $\langle p, y\rangle \in v$ és $p \in G$-re. Tudjuk, hogy $M[G] \models \varphi(i_G(y), i_G(w_1), ..., i_G(w_n))$, ilyednkor létezik $q \in G$, hogy $q \Vdash \varphi(y, w_1, ..., w_n)$, $q \leq p$-t a forszolás tulajdonságai miatt feltehetjük. Viszont ekkor $\langle q, y\rangle \in \pi$, tehát teljesül, hogy $i_G(y) \in i_G(\pi)$.

Az unió axiómájához nézzünk egy $H = i_G(w) \in M[G]$ és $v = \{\langle 1, y\rangle : \exists p, \exists q, \exists \pi \langle q, y\rangle \in \pi, \langle p, \pi\rangle \in w\}$ halmazokat. Ha $a \in b \in H$, akkor létezik π, hogy $b = i_G(\pi)$, létezik y, hogy $a = i_G(y)$ és $\langle q, y\rangle \in \pi, \langle p, \pi\rangle \in v$, valamint $p, q \in G$. Tehát $a = i_G(y) \in i_G(v)$, vagyis $\bigcup H \subseteq i_G(v)$. A másik iránnyal a részhalmaz axióma miatt készen vagyunk.

A végtelenség axiómája teljesül, mert a tétel 2) pontja alapján $M \subseteq M[G]$, tehát $\omega \in M \subseteq M[G]$.

A pótlás axiómájához azt szeretnénk belátni, hogy ha $M[G]$-ben $\forall x \in i_G(\sigma)$ $\exists! y \varphi(x, y, i_G(\tau_1), ..., i_G(\tau_n))$, akkor létezik olyan π név, hogy $\exists y \in i_G(\pi)$ teljesül a feltételben szereplő y-ra, mert ekkor a részhalmaz axiómát alkalmazva beláttuka kívánt axiómasémát.

Először egy olyan H halmazt konstruálunk, hogy ha $\langle p, \rho\rangle \in \sigma$ és létezik $\mu \in M^P$, hogy $p \Vdash \varphi(\rho, \mu, \tau_1, ..., \tau_n)$, akkor $\exists \mu \in H$ is, hogy ez teljesül rá. H-t ekkor úgy alkossuk meg, hogy minden $\langle p, \rho\rangle \in \sigma$ esetén vegyük a kumulatív hierarchiában a legkisebb szinten helyet foglaló μ-ket, amelyek jók, ha nem létezik ilyan, akkor az üres halmazt. Válasszuk

π-t $1 \times H$-nak. Ilyenkor ha $x \in i_G(\sigma)$ és $M[G] \models \varphi(x, y, i_G(\tau_1), ..., i_G(\tau_n))$, akkor $\exists p \in G$, hogy $\langle p, \rho \rangle \in \sigma, x = i_G(\rho)$ és $p \Vdash \varphi(\rho, \nu, \tau_1, ..., \tau_n)$, hogy $i_G(\nu) = y$. Így létezik $\mu \in H$: $p \Vdash \varphi(\rho, \mu, \tau_1, ..., \tau_n)$, tehát $M[G] \models \varphi(x, i_G(\mu), i_G(\tau_1), ..., i_G(\tau_n))$ és $i_G(\mu) \in i_G(\pi)$, vagyis éppen azt kaptuk, amit szerettünk volna.

A hatványhalmaz axiómájához tekintsünk egy $i_G(\tau) \in M[G]$-t. Legyen $H = \{\sigma : \exists p \langle p, \sigma \rangle \in \tau\}$ és $\pi = \{\langle 1, \mu \rangle : \mu \subseteq P \times H\}$. Ha $M[G] \models i_G(\rho) \subseteq i_G(\tau)$, akkor a forszolás tulajdonságai alapján létezik $p \in G : p \Vdash \rho \subseteq \tau$. Válasszuk μ-t úgy, hogy $\mu = \{\langle q, \sigma \rangle : \sigma \in H, q \leq p, q \Vdash \sigma \in \rho\}$. Ekkor $\mu \subseteq P \times H$ és $i_G(\mu) \in i_G(\pi)$. Azt szertnénk bizonyítani, hogy $M[G] \models i_G(\rho) = i_G(\mu)$. $i_G(\rho) \subseteq i_G(\mu)$, mert $i_G(\rho)$ elemei $i_G(\sigma)$ alakúak, hogy $\sigma \in H$ és $\exists q \in G : q \leq p, q \Vdash \sigma \in \rho$, tehát $q \Vdash \sigma \in \mu$. $i_G(\mu) \subseteq i_G(\rho)$, mert $i_G(\mu)$ összes eleme $i_G(\sigma)$ alakú, ahol $\sigma \in H$ és $\exists q \in G : q \leq p, q \Vdash \sigma \in \mu$, ekkor viszont $q \Vdash \sigma \in \rho$, amit be szerettünk volna látni.

□

Az alfejezet elején említettük, hogy a Generikus Modell leírható a kiinduló modellből a forszolás nyelvezetének használatával, ezt a kiemelkedően fontos állítást a következő tétel mutatja.

4.1.20. Tétel (Definiálhatósági tétel)**.** *A $p \Vdash \varphi$ reláció M-ben definiálható, azaz minden $\varphi(x_1, ..., x_n)$ formulához létezik olyan $P \in M$ kényszerképzet, $p \in P$ feltétel és $\Phi(x_1, ..., x_n, p, P)$ formula, hogy tetszőleges $y_1, ..., y_n \in M^P$ nevekre:*

$$p \Vdash \varphi(y_1, ..., y_n) \Longleftrightarrow M \models \Phi(y_1, ..., y_n, p, P)$$

.

Végül egy, a következő fejezetben lényeges tételt mondunk ki κ-antilánc feltételes kényszerképzetekkel való forszolásról.

4.1.21. Tétel. *Ha κ reguláris számosság a kiinduló M modellben és P κ-antilánc feltételes kényszerképzet, akkor minden $\lambda \geq \kappa$ M-beli számosság bármely P-generikus modellben is számosság marad.*

Bizonyítás. Válsszunk egy tetszőleges $\lambda \geq \kappa$ M-beli számosságot. Korábbi 4.1.14 tétel alapján tudjuk, hogy M és $M[G]$ rendszámai megegyeznek. Tehát azt szeretnénk megmutatni, hogy nem lehet $M[G]$-ben egy olyan forszolás során bekerült f bijekció, hogy $f : \widetilde{\mu} \to \widetilde{\lambda}$, ahol $\mu < \lambda$. Ehhez tekintsük a következő lemmát.

4.1.22. Lemma. *Ha Q κ-antilánc feltételes és $H, K \in M$ halmazok, valamint $f : H \to K$ $M[E]$ Q-generikus modellbeli leképezés, akkor létezik olyan $F : H \to \mathcal{P}(K)$ M-beli függvény, hogy $\forall h \in H : |F(h)| < \kappa$ és $f(h) \in F(h)$.*

Eszerint a lemma szerint létezik olyan kiinduló modellbeli F függvény, hogy $\forall \nu \in \widetilde{\mu}$: $f(\nu) \in F(\nu)$, hogy $|F(\nu)| < \kappa$. Ez pedig éppen azt mutatja, hogy $\widetilde{\lambda}$ M-ben lefedhető $\mu < \lambda$ darab κ-nál kisebb számosságú halmazzal, amely ellentmondás, mert κ reguláris az M modellben. □

A forszolást legtöbb esetben relatív konzisztenciák bizonyítására alkalmazzák. Elsőként azért szokás feltenni, hogy létezik megszámlálható tranzitív (M, $\in$) modellje az E kiinduló elméletnek, mert láttuk, hogy ebben az esetben mindig létezik M-generikus filter. Ahhoz, hogy a relatív konzisztenciát belássuk, kell egy olyan $G \subseteq P \in M$ kényszerképzetet és generikus részhalmazt találni, amellyel megalkotott tranzitív Generikus modell kielégíti az általunk bizonyítani kívánt állítást és a kiinduló elméletet is - egy olyan $p \in P$ feltétel létfontosságú, hogy minden $p \in G \subseteq P$ generikus részhalmazra, $M[G] \models$ állítás.[6] Ha egy ilyet fel tudunk mutatni, akkor a Teljességi és a Definiálhatósági tétel alapján beláttuk a relatív konzisztenciát.

A következő alfejezetben a forszolás alkalmazásával szeretnénk eldönteni néhány lehetséges új axiómáról, hogy azokkal kiegészítve ZFC-t, megoldhatóvá válik-e a Kontinuum hipotézis.

4.2. Nagy számosság axiómák

Egy elérhetetlen számosság létezése, amint láttuk, bizonyítja a Zermelo-Fraenkel-Kiválasztási Axiómarendszer konzisztenciáját.[7] Ha azt is feltesszük, hogy létezik két elérhetetlen számosság, akkor még erősebb elméletet kapunk, mert ekkor, ha $\lambda < \kappa$ elérhetetlen számosságok, akkor $V_\kappa \models$ (ZFC + létezik elérhetetlen számosság). Így további elérhetetlen számosságok létezésének feltevésével egyre erősebb elméleteket lehet kapni, viszont ennek az eljárásnak is létezik határa, méghozzá egy újabb számosságtípus - a Mahlo számosságok.

4.2.1. Definíció (Nemkorlátos κ-ra nézve)**.** *Azt mondjuk, hogy egy $H \subseteq \widetilde{\kappa}$ részhalmaz nemkorlátos κ-ra nézve, ha bármely $\lambda \in \widetilde{\kappa}$ esetén létezik olyan $\tau \in H$, hogy $\lambda < \tau$.*

4.2.2. Definíció (Zárt nemkorlátos κ-ra nézve)**.** *Legyen $\aleph_0 < \kappa$ reguláris számosság. Egy $H \subseteq \widetilde{\kappa}$ részhalmaz zárt nemkorlátos κ-ra nézve, ha H nemkorlátos κ-ra nézve és tartalmazza az önmaga összes torlódási pontját, amely kisebb, mint κ.*

[6] Valamely biznyítások során V-ből indulnak ki (az alfejezet elején kifejtett módon), ekkor a $V[G] \models$ állítás $\leftrightarrow (\forall p \in P) p \Vdash$ állítás.

[7] Ez az alfejezet főként az alábbi forrásokon alapul: [26], [29], [4]. Ebben az alfejezetben mi is V-ből fogunk kiindulni, így egy generikus részhalmaz létezését előre fel kell tennünk.

4.2.3. Definíció (Stacionárius κ-ra nézve). *Egy $S \subseteq \widetilde{\kappa}$ stacionárius részhalmaz κ-ra nézve, ha $S \cap H \neq \emptyset$ minden H κ-ra zárt nemkorlátos részhalmazára $\widetilde{\kappa}$-nak.*

4.2.4. Definíció (Mahlo számosság). *κ számosság Mahlo számosság, ha a κ-nál kisebb elérhetetlen számosságok halmaza stacionárius κ-ra nézve.*

Az újabb nagy végtelen számosságok kereséséhez tehát lehet alkalmazni azt a technikát, hogy egy másik típusú számosságot nagy számosságok egyfajta határaként érünk el. Ezzel szemben az általános eljárás újabb nagy számosságok definiálásához ω tulajdonságainak kiterjesztésére szokott épülni. Ehhez a módszerhez tartoznak az elérhetetlen számosságok is, mert ezek ω regularitását és erős limesz jellegzetességét általánosítják.

A következőkben ω 3 különleges ismérvét általánosítjuk, elsőként ω „kompaktságát", ehhez először kimondjuk az alábbi tételt, amelyet többek között Gödel bizonyított.

4.2.5. Tétel (Kompaktság). *Az elsőrendű logika nyelvén megfogalmazott állítások halmazának akkor és csak akkor létezik modellje, ha minden véges részhalmazának létezik modellje.*

Definiáljuk a klasszikus logika következő kiterjesztését ($:= L_{\kappa,\kappa}$), ahol κ reguláris számosság, a következő módon: egy $L_{\kappa,\kappa}$-beli nyelv legfeljebb κ darab változóval és bármennyi nem logikai szimbólummal (például függvényekkel) rendelkezhet. A konjunkciók és diszjunkciók kevesebb, mint κ hosszúak lehetnek és a kvantifikáció során kevesebb, mint κ változót használhatunk. Ezek alapján a klasszikus logikát $L_{\omega,\omega}$-ként nevezhetjük. A klasszikus logika teljesíti a kompaktságot, tehát ezért szokás ω-t kompaktnak nevezni. A fenti kiterjesztés szerint két módon szokás a „valódi" kompakt számosságokat definiálni.

4.2.6. Definíció (Gyengén kompakt számosság). *$\omega < \kappa$ számosság gyengén kompakt, ha legfeljebb κ nem logikai változóval rendelkező $L_{\kappa,\kappa}$-beli állítások bármely tetszőleges K halmaza esetén, ha minden $H \subseteq K$, ahol $|H| < \kappa$, H-nak létezik modellje, akkor K-nak is.*

4.2.7. Definíció (Erősen kompakt számosság). *$\omega < \kappa$ számosság erősen kompakt, ha K tetszőleges $L_{\kappa,\kappa}$-beli állítások halmaza esetén, ha $H \subseteq K$, ahol $|H| < \kappa$, H-nak létezik modellje, akkor K-nak is.*

A következő általánosítandó tulajdonság azon alapul, hogy $\widetilde{\omega}$-n létezik 0 és 1 értéket felvevő mérték, amely ω-teljes, ennek definíciójához először a nemprincipális ultrafilter fogalmát vizsgáljuk meg.

4.2.8. Definíció (Nemprincipális ultrafilter $\widetilde{\omega}$-n). *Egy $U \subseteq \mathcal{P}(\widetilde{\omega})$ halmaz nemprincipális ultrafilter $\widetilde{\omega}$-n, ha minden $H, K \subseteq \widetilde{\omega}$ esetén:*

1) *Ha $H \in U$ és $H \subseteq K$, akkor $K \in U$;*

2) *Ha $H, K \in U$, akkor $H \cap K \in U$;*

3) *Nem létezik olyan $n < \omega$, hogy $\{n\} \in U$;*

4) *Minden H esetén, vagy $H \in U$, vagy $\widetilde{\omega} \backslash H \in U$.*

A 2) tulajdonság alapján indukcióval látható, hogy bármely $H_0, ..., H_n \in U$ halmazok esetén a metszetük szintén U-ban van. Ezt a tulajdonságát fogjuk ω-teljességnek nevezni.

Ezek alapján bevezethetjük a mérhető számosságok definícióját.

4.2.9. Definíció (Mérhető számosság). *$\omega < \kappa$ mérhető számosság, ha létezik κ-teljes U nemprincipális ultrafilter $\widetilde{\kappa}$-n:*

1) *Ha $H \in U$ és $H \subseteq K$, akkor $K \in U$;*

2) *Ha $\widetilde{\mu} \in \widetilde{\kappa}$ és $\{H_\lambda : \lambda < \mu\}$ U-beli halmazok, akkor $\bigcap_{\lambda<\mu} H_\lambda \in U$;*

3) *Nem létezik olyan $\lambda < \omega$, hogy $\{\lambda\} \in U$;*

4) *Minden H esetén, vagy $H \in U$, vagy $\widetilde{\kappa} \backslash H \in U$.*

Ezt az ultrafiltert szokás mértéknek nevezni, mert $\widetilde{\kappa}$ részhalmazaihoz 2-értékű κ-teljes mértéket definiál: ha $H \in U$, akkor H mértéke 1, különben 0.

Az utolsó általánosítani kívánt jellemzője ω-nak, hogy a Ramsey-tulajdonság teljesül rá, ezt az alábbiak szerint lehet definiálni.

4.2.10. Definíció (Partíció). *Egy H halmaz partíciójának nevezünk egy P páronként diszjunkt halmazokból álló $\{X_i : i \in I\}$ halmazt, ha $\bigcup_{i\in I} X_i = H$.*

4.2.11. Definíció ($[H]^n$). *Legyen H egy tetszőleges halmaz és $0 < n$ Természetes szám. $[H]^n = \{X \subseteq H : |X| = n\}$, tehát H azon részhalmazainak a halmaza, amelyek pontosan n elemből állnak.*

4.2.12. Definíció (Homogenitás). *Legyen $\{X_i : i \in I\}$ egy partíciója $[H]^n$-nek. Egy $K \subseteq H$ halmaz homogén a partícióra nézve, ha létezik olyan i, hogy $[K]^n \subseteq X_i$, tehát K összes n elemű részhalmaza a partíciónak ugyanabba a részébe esik.*

4.2.13. Tétel (Ramsey). *Legyen n és k két Természetes szám. Ekkor $[\widetilde{\omega}]^n$ bármely $\{X_1, ..., X_k\}$ k részes partíciójára nézve létezik végtelen $K \subseteq \widetilde{\omega}$ homogén halmaz. Azaz, minden $f : [\widetilde{\omega}]^n \to \{1, ..., k\}$ függvényhez létezik egy végtelen $K \subseteq \widetilde{\omega}$ halmaz, hogy f konstans $[K]^n$-en.*

Ramsey-tétel általánosításához vezessük be a „nyíl” jelölést. Legyen κ és λ végtelen számosság, n egy Természetes szám és m egy számosság. $\kappa \to (\lambda)^n_m$-val jelöljük, ha $[\widetilde{\kappa}]^n$ minden m részes partíciója esetén létezik $K \subseteq \widetilde{\kappa}$, $|K| = \lambda$, homogén halmaz.[8] Így Ramsey tétele kifejezhető, mint $\omega \to (\omega)^n_k (n, k < \omega)$.

Ezek alapján két módon szokás ω ezen tulajdonságát kiterjeszteni.

4.2.14. Definíció (Gyenge Ramsey számosság). *$\omega < \kappa$ számosság gyengén Ramsey, ha $\kappa \to (\kappa)^2_2$, vagyis minden 2 részre való partícionálásakor $\widetilde{\kappa}$ kételemű részhalmazainak, létezik κ nagyságú homogén halmaz.*

4.2.15. Definíció (Ramsey számosság). *$\omega < \kappa$ számosság Ramsey, ha $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$, azaz minden 2 részre való partícionálásakor $\widetilde{\kappa}$ véges elemű részhalmazainak, létezik κ nagyságú homogén halmaz.*

4.2.16. Állítás. *A definiált számosságok erősség szempontjából lineárisan rendezhetőek. Elérhetetlen $\Leftarrow$ Mahlo $\Leftarrow$ Gyengén kompakt $\Leftrightarrow$ Gyengén Ramsey $\Leftarrow$ Ramsey $\Leftarrow$ Mérhető $\Leftarrow$ Erősen kompakt.*

A továbbiakban fontos lesz számunkra, hogy amikor azt szeretnénk forszolni, hogy $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, akkor létezik olyan P_1 kényszerképzet, amely ezt forszolja és $|P_1| = 2^{\aleph_0}$, valamint ha azt szeretnénk forszolni, hogy a Kontinuum hipotézis nem teljesül, akkor létezik olyan P_2 kényszerképzet, hogy $|P_2| = \aleph_2$, és ezzel forszolva $c = \aleph_2$ teljesül; ez utóbbival forszolva a kiinduló és generikus modell számosságai megmaradnak.[9] Nekünk ezen két kényszerképzet azon tulajdonsága lesz kiváltképp lényeges, hogy mindkettő számossága szigorúan kisebb, mint az első elérhetetlen számosság.

Ezek alapján ennek az alfejezetnek a fontosabb tételeit is ki tudjuk mondani.

4.2.17. Tétel. *Legyen P kényszerépzet, hogy $|P| < \kappa$ és legyen G egy P-generikus részhalmaz. Ha κ elérhetetlen vagy Mahlo számosság V-ben, akkor κ erős számossági típusa nem változik $V[G]$-ben sem.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda < \kappa$ tetszőleges. $\widetilde{\lambda}$ $V[G]$-beli részhalmazainak ekkor $2^{|P|\lambda}$ neve van, a név definíciója alapján. Mivel κ elérhetetlen számosság, így $2^{|P|\lambda} < \kappa$, tehát $V[G] \models 2^\lambda \leq 2^{|P|\lambda} < \kappa$, azaz κ elérhetetlen számosság marad $V[G]$-ben.

4.2.18. Lemma. *Ha Q κ-antilánc-feltételes kényszerképzet, akkor $V[E]$ minden C κ-ra nézve zárt nemkorlátos halmazának létezik κ-ra nézve zárt nemkorlátos részhalmaza V-ben. Tehát, ha $S \in V$ stacionárius κ-ra, akkor $V[E]$-ben is az.*

[8]Ezzel a jelöléssel csak akkor dolgozunk, ha $2 \leq m < \kappa$, $\lambda \leq \kappa$ és $2 \leq n$, mert más esetekben vagy nem igaz az állítása, vagy plusz feltételekhez kötötték a tagjai.

[9]Erről bővebben a [29] könyvben lehet olvasni.

Bizonyítás. Legyen $\dot{C}$ olyan név, hogy minden $q \in Q$ forszolja, hogy $\dot{C}$ zárt nemkorlátos részhalmaz κ-ra. Legyen $D = \{\mu < \kappa : \forall q \Vdash \check{\mu} \in \dot{C}\}$. Ekkor $D \subseteq C$, $D \in V$ és D zárt.

A nemkorlátossághoz válsszunk egy tetszőleges $\alpha_0 < \kappa$-t. Egy olyan $\alpha > \alpha_0$-t szeretnénk találni, hogy minden feltétel $\alpha \in \dot{C}$-t forszolja. Minden q-hoz létezik olyan $r \leq q$ és valamilyen $\beta > \alpha_0$, hogy $r \Vdash \beta \in \dot{C}$. Tehát létezik maximális W halmaza inkompatibilis feltételeknek, és minden $r \in W$ esetén van olyan $\beta = \beta_r$ rendszám, hogy $r \Vdash \beta \in \dot{C}$. Mivel $|W| < \kappa$, legyen $\alpha_1 = sup\{\beta_r : r \in W\}$, így $\alpha_1 < \kappa$ és $q \Vdash (\exists \beta \in \dot{C})\alpha_0 < \beta \leq \alpha_1$ minden $q \in Q$ esetén. Ezt folytatva kapunk $\alpha_1 < \alpha_2 < ...$ sorozatot, hogy minden n-re és q-ra $q \Vdash (\exists \beta \in \dot{C})\alpha_n < \beta \leq \alpha_{n+1}$. Legyen ekkor $\alpha = lim_n \alpha_n$. Ekkor $\alpha \in D$, tehát készen vagyunk. □

Mivel a P mérete $< \kappa$, ezért biztosan κ-antilánc feltételes, így a κ-nál kisebb reguláris számosságok halmaza ugyanúgy stacionárius κ-ra nézve $V[G]$-ben, mint V-ben. Ez pontosan azt jelenti, hogy κ Mahlo számosság $V[G]$-ben is. □

Következmény. Az elérhetetlen és Mahlo számosságok nem döntik el a Kontinuum hipotézist.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamelyik ezek közül mégis megoldja a Kontinuum hipotézist, tehát például ZFC + „Létezik elérhetetlen számosság" bebizonyítja a hipotézist. Ha feltesszük, hogy létezik elérhetetlen számosság és a fenti P_2-vel forszolunk, akkor olyan generikus modellt kapunk az előző tétel következtében, amelyben a Kontinuum hipotézis nem teljesül, de létezik elérhetetlen számosság, ez viszont ellentmondás. □

Annak belátásához, hogy a korábban megnevezett többi számosság is független a Kontinuum hipotézistől, vezessünk be egy új fogalmat, amelynek segítségével azok bizonyítása egyszerűbbé válik, mindegyik függetlenségét egy általános módszerrel be lehet látni.

4.2.19. Definíció (Elemi beágyazás). *Legyen M és N két tranzitív osztály (halmaz). Azt mondjuk, hogy a $j : M \to N$ egy elemi beágyazás, ha minden formulára és minden $m_0, ..., m_n \in M$ elemekre teljesül $\varphi^M(m_0, ..., m_n)$*[10]*, akkor $\varphi^N(j(m_0), ..., j(m_n))$ is.*

4.2.20. Definíció (Kritikus pont). *κ számosság kritikus pontja a $j : M \to N$ elemi beágyazásnak, ha minden $\lambda < \kappa$ esetén $j(\lambda) = \lambda$, de $j(\kappa) > \kappa$.*

Ezek alapján a mérhető számosságokat az lenti módon is definiálhatjuk.

4.2.21. Definíció (Mérhető számosság). *$\kappa > \omega$ mérhető számosság, ha létezik $j : V \to M$ elemi beágyazás, amelynek κ kritikus pontja és M egy tranzitív osztály.*

[10] φ^M-et rekurzívan definiáljuk, méghozzá minden nemkorlátos Qx kvantort $Qx \in M$-re cserélünk.

4.2.22. Tétel (Lévy-Solovay). *Ha κ mérhető számosság V-ben és a P kényszerképzet számossága kisebb, mint κ, akkor egy G P-generikus részhalmazra $V[G]$-ben is mérhető számosság marad κ.*

Bizonyítás. Amint κ mérhető, így létezik egy $j : V \to M$ elemi beágyazás κ kritikus ponttal. Tudjuk, hogy j az identitás κ alatt, így $V_{k+1} = (V_{k+1})^M$ és $j(x) = x(\forall x \in V_k)$. Ezek alapján $j(P) = P$, hiszen $|P| < \kappa$ és így létezik olyan $H \in V_\kappa$, hogy H és P között van bijektív izomorfizmus, tehát feltehető, hogy $P \in V_\kappa$. A bizonyítás további részéhez szükséges az alábbi lemma:

4.2.23. Lemma (Silver). *Legyen $j : M \to N$ elemi beágyazás, $P \in M$ egy kényszerképzet és G egy P-generikus filter. Tegyük fel, hogy H egy $j(P)$-generikus N felett, hogy $\{j(P) : p \in G\} \subseteq H$. Ekkor létezik egy $j^* : M[G] \to N[H]$ elemi beágyazás, hogy:*

1) $j^*|_M = j$;

2) $j^*(G) = H$.

j^*-ot j $M[G]$-re való felemelésének nevezzük.

Bizonyítás. Először j^*-ot szeretnénk definiálni. Ehhez legyen x egy tetszőleges eleme $M[G]$-nek és $\dot{x}$ pedig egy neve, vagyis $i_G(\dot{x}) = x$. Ekkor legyen $j^*(i_G(\dot{x})) = i_H(j(\dot{x}))$. j^*-ot azért definiálhatjuk ilyen módon, mert j elemi beágyazás, így $j(\dot{x})$ egy $j(P)$-név, valamint ha $i_G(\dot{y}) = i_G(\dot{x}) = x$ - $\dot{y}$ szintén x neve -, akkor a forszolás tulajdonságai miatt létezik olyan $p \in G$, hogy $p \Vdash \dot{x} = \dot{y}$; amint j elemi beágyazás, így $j(p) \Vdash j(\dot{x}) = j(\dot{y})$, ez pedig $j(p) \in H$ miatt azt jelenti, hogy $i_H(j(\dot{x})) = i_H(j(\dot{y}))$.

Az így definiált j^* elemi beágyazás, mert a forszolás tulajdonságai, tételei és $j(p) \in H$, valamint j^* denti definíciója alapján, ha $\varphi^{M[G]}(x, ...) \to \exists p \in G : p \Vdash \phi(\dot{x}, ...) \to \exists p \in G : j(p) \Vdash \varphi(j(\dot{x}), ...) \to \varphi^{N[H]}(j^*(x), ...)$.

Ezek után pedig be szeretnénk látni, hogy ez így definiált j^* teljesíti a lemmában elvárt tulajdonságokat.

1): Ha $x \in M$ tetszőleges, akkor $j^*(x) = i_H(j(\check{x})) = j(x)$, a kanonikus név tulajdonságai miatt.

2): Legyen $\breve{g}$ a kanonikus neve a G generikus filternek, tehát $i_G(\breve{G}) = G$, így $j^*(G) = i_H(j(\breve{g})) = H$. □

Ha a Silver lemmába H helyére G-t helyettesítünk, akkor abból következik, hogy létezik olyan $j^* : V[G] \to M[G]$ felemelés, ahol $j^*(G) = G$. Amint j^* definiálható $V[G]$-ben, ez a mérhető számosság új definíciója alapján éppen azt mutatja, hogy κ $V[G]$-ben is mérhető marad. □

Következmény. A mérhető számosságok nem döntik el a Kontinuum hipotézist.

A korábban bevezetett nagy végtelen számosságok is definiálhatóak az elemi beágyazások segítségével, és az előbbi tételhez hasonló módon belátható, hogy azok sem döntik el a Kontinuum hipotézist.

Az elemi beágyazások tovább bővítik az erős végtelenségi axiómák keresésének körét, ω kompaktsága, mérhetősége és Ramsey-tulajdonsága mellett ebben az irányban idultak kutatások új axiómák irányába. A két először definiált számosság, amelyek az erősen kompakt számosságokat erősség szempontjából keretezik[11], a következőképpen definiálhatjuk.

4.2.24. Definíció (Erős számosság). *κ erős számosság, ha minden $\lambda > \kappa$ esetén létezik olyan $j : V \to M$ elemi beágyazás, hogy kritikus pontja κ, $j(\kappa) > \lambda$ és $V_\lambda \subseteq M$.*

4.2.25. Definíció (Szuperkompakt számosság). *κ szuperkompakt számosság, ha minden $\lambda > \kappa$ esetén létezik olyan $j : V \to M$ elemi beágyazás, hogy κ kritikus pontja, $j(\kappa) > \lambda$ és $M^\lambda \subseteq M$ - úgy értendő, hogy minden λ hosszú, M elemeiből álló sorozat egésze M-ben van. Ha a definíciót csak egy $\lambda > \kappa$-ra követeljük meg, akkor a κ számosságot λ-szuperkompakt számosságnak nevezzük.*

4.2.26. Állítás. *Ha κ λ-szuperkompakt és $2^\alpha = \alpha^+$ minden $\alpha < \kappa$ esetén, akkor $2^\alpha = \alpha^+$ minden $\alpha \leq \lambda$-ra.*

Bizonyítás. Legyen $j : V \to M$ egy olyan elemi beágyazás, amely mutatja, hogy κ λ-szuperkompakt számosság. Ha $\alpha \leq \lambda$, akkor mivel $\lambda < j(\kappa)$ és j tulajdonsága miatt - ha egy állítás teljesül V-ben κ-ig, akkor M-ben $j(\kappa)$-ig - így $(2^\alpha)^M = (\alpha^+)^M$. Tudjuk, hogy $M^\lambda \subseteq M$, amelyből következik, hogy $\mathcal{P}^M(\alpha) = \mathcal{P}(\alpha)$, tehát $2^\alpha \leq (2^\alpha)^M = (\alpha^+)^M \leq \alpha^+$. A másik irány pedig mindig teljesül, tehát az állítást beláttuk. □

A szuperkompakt számosságokhoz kapcsolódó fontos tétel az alábbi, amely szerint annak ellenére, hogy önmagában nem tudja eldönteni a Kontinuum hipotézist egy szuperkompakt számosság létezése, mégis érdekes lehet a kérdés megválaszolásában.

4.2.27. Tétel. *Ha az Általános Kontinuum hipotézis teljesül egy κ szuperkompakt számosság alatt, akkor minden számosságra is teljesül.*

Az elemi beágyazásokkal definiálható új számosságoknak egyfajta határát jelenti az 1971-ben Kenneth Kunen által belátott tétel, miszerint több lehetséges erős számossági axióma inkonzisztens a Kiválasztási axiómával.

4.2.28. Tétel (Kunen). *ZFC-ben nem létezhet olyan κ számosság, hogy létezik hozzá egy $j : V \to V$ elemi beágyazás, hogy κ kritikus pontja.*

[11] Szuperkompakt ⇒ Erősen kompakt ⇒ Erős. Nem találtak még olyan számosságot, amely egy másik nagy számosságnak ellentmondott volna, sőt a legtöbb erősség szempontjából lineárisan rendezhető.

Annak ellenére, hogy az eddig talált erős számossági axiómák nem döntik el a Kontinuum hipotézist[12] - Gödel reménye nem teljesült -, mégis lényeges szerepet játszanak a modern Halmazelméletben.

Amint már a 2. fejezetben beláttuk, hogy az elérhetetlen számosságok létezése ZFC konzisztenciáját bizonyítaná, úgy újabb nagy végtelen számosságok létezésének axiómákba foglalása egyre erősebb és erősebb elméleteket adna. A konzisztencia-erősségek ezen lineáris sorrendeje megegyezik a fentebbi lineáris erősség sorrendjével, tehát egy mérhető számosság létezése bizonyítaná a konzisztenciáját ZFC + „végtelen sok Ramsey számosság létezik"-nek. A konzisztenciák rendezésén kívül nagy számosságokkal lehet belátni többek között, hogy SCH független ZFC-től, a Kiválasztási Axióma szükséges annak belátásához, hogy léteznek nem Lebesgue-mérhető halmazai $\mathbb{R}$-nek és létezik modellje $V \neq L$-nek is.

A Halmazelmélet egyik legfontosabb kutatási területe, hogy olyan nagy számosságokra, amelyek inkonzisztensek L-lel - például a szuperkompakt számosságok - találjanak egy L-hez hasonló belső modellt, annak egy általánosított változatát, amely főként újabb relatív- és ekvikonzisztenciákat tudna bizonyítani.

4.3. $c = \aleph_2$?

A standard forszolás mellett az iterált forszolást szokták alkalmazni, amely transzfinit sokszor elvégzett generikus modell konstrukcióból áll - ha V a kiinduló modell akkor G P-generikus részhalmazzal $V[G]$ generikus modell kapható, és hasonló eljárással $V[G]$-ből egy $V[G][H]$-t forszolhatunk -, és ezek mindegyike során létrejövő új modellek a kiinduló modellben is leírhatóak lesznek.[13]

Donald A. Martin a múlt században rájött, hogy az iterált forszolás végén kapott generikus modell legtöbb tulajdonsága egyetlen axiómából következik. Ezt az általános megfigyelést ma Martin Axiómájaként tartják számon, relatív konzisztenciája szintén az iterált forszolással bizonyítható be.

4.3.1. Axióma (Martin). *Ha $(P, \leq)$ κ-antilánc feltételes részbenrendezett halmaz és H egy olyan halmaz, amely valamely sűrű részhalmazait tartalmazza P-nek, de $2^{\aleph_0}$-nál kevesebbet, akkor létezik H-generikus filter P-n.*[14]

A 4.1.8 állítás alapján ha P tetszőleges kényszerképzet és H legfeljebb megszámlálható sűrű részhalmazát tartalmazza (és mást nem) P-nek, akkor létezik H-generikus filter P-

[12] További erős számosságokra bizonyítások például [22]-ben olvashatóak.

[13] Ez az alfejezet [29]-en alapul.

[14] Néhány esetben $2^{\aleph_0}$ helyett κ^+-t szokás írni, ekkor egy változatát kapjuk az axiómának, amelyet MA_κ-ként jelölünk.

n, ezt $\mathrm{MA}_{\aleph_0}$-lal is jelölhetjük. Ennek alapján, ha a Kontinuum hipotézis teljesül, akkor Martin Axiómája is.

Martin Axiómájának egy általánosítása a következő axióma.

4.3.2. Definíció (Proper Forszolás). *Egy $(P, \leq)$ kényszerképzet proper, ha minden $\lambda > \aleph_0$ esetén, minden $[\widetilde{\lambda}]^\omega$-ra stacionárius részhalmaz stacionárius marad a generikus modellben.*

4.3.3. Axióma (Proper Forszolás (PFA)). *Ha $(P, \leq)$ proper kényszerképzet, és H egy olyan halmaz, amely pontosan $\aleph_1$ sűrű részhalmazát tartalmazza P-nek, akkor létezik H-generikus részhalmaz P-n.*

A Proper Forszolás Axiómájának relatív konzisztenciáját a szuperkompakt számosságok feltevésével lehet bizonyítani. PFA-ból következik $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ és $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$. Emiatt különösen érdekes, hogy ebből az axiómából az alábbi tétel is belátható.

4.3.4. Tétel. *A Proper Forszolás Axiómájából következik, hogy $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$.*

4.3.5. Definíció (Stacionáris halmaz megtartó forszolás). *Egy $(P, \leq)$ kényszerképzet stacionárius halmaz megtartó, ha minden $\widetilde{\aleph_1}$-re stacionárius halmaz stacionárius marad V^P-ben.*

4.3.6. Axióma (Martin Maximuma). *Ha $(P, \leq)$ stacionárius halmaz megtartó kényszerképzet és H egy olyan halmaz, amely pontosan $\aleph_1$ sűrű részhalmazát tartalmazza P-nek, akkor létezik H-generikus filter P-n.*

Martin Maximuma pedig PFA erősítése, hiszen minden stacionárius halmaz megtartó forszolás proper forszolás is egyben. Ennek az axiómának a konzisztenciáját is egy szuperkompakt számosság létezése bizonyítja.

4.3.7. Tétel. *Martin Maxiumumából következik, hogy a Szinguláris Számosságok hipotézis teljesül.*

Martin Maximuma egyfajta határa Martin Axiómájának erősítésére, mert megmutatható, hogy ha P nem stacionárius halmaz megtartó, akkor az axiómára létezik ellenpélda:

4.3.8. Állítás. *Legyen P kényszerképzet, hogy valamely $S \subseteq \widetilde{\omega_1}$ stacionárius halmazra $\forall p \Vdash S$ nem stacionárius. Ekkor létezik $\aleph_1$ sűrű részhalmaza P-nek, hogy semely G filter sem metszi egyszerre mindet.*

Bizonyítás. Legyen $\dot{C}$ zárt nemkorlátos halmaz V^P-ben, hogy $\forall p \Vdash S \cap \dot{C} = \emptyset$. Minden $\alpha < \omega_1$-re legyen $D_\alpha = \{p : (\exists \beta \geq \alpha) p \Vdash \beta \in \dot{C}\}$ és $E_\alpha = \{p :$ vagy $p \vdash \alpha \in \dot{C}$ vagy $\exists \gamma < \alpha$, hogy $p \Vdash \xi \notin \dot{C}$ minden ξ-re, amely γ és α között van $\}$. Ha G az összes D_α és E_α halmazt, akkor legyen $C = \{\alpha : \exists p \in G p \Vdash \alpha \in \dot{C}\}$. Ekkor a 4.2.18 lemma bizonyításában szereplőek miatt $S \cap C \neq \emptyset$, amely ellentmondás. $\square$

5. fejezet

Modern megoldási kísérletek

Napjaink Halmazelméletében legfőképpen három nagy irány határozható meg a Kontinuum hipotézissel kapcsolatban.[1] Gödel Nemteljességi tételei miatt már tudjuk, hogy egy ellenmondásmentes axiómarendszer nem lehet teljes, de a matematikusok egy része még bízik abban, hogy létezhet olyan rendszer, amelyben minden „fontos és érdekes” kérdés eldönthető, ezért is foglalkoznak még mindig a Kontinuum hipotézis problémakörével. Napjainkban sokan elfogadják, hogy a Kontinuum hipotézis független ZFC-től, még a nagy számosság axiómákkal együtt is, ezzel ellentétben a matematikusok egy csoportja olyan axiómákat keres, amelyek segítségével eldönthetővé válna a kérdés. Míg az egyik oldal a hipotézis megdöntését, addig a másik a bizonyítását tűzte ki célul.

Ezen utóbbi kategóriába tartozó matematikusok közül érdemes Matthew Foreman nevét megemlíteni, aki a Generikus Nagy Számosságok kutatása során - az axiómarendszert az Általánosított Nagy Számosságok Axiómáival bővítve - belátta a hipotézist.

5.0.1. Definíció (Generikus elemi beágyazás)**.** *Olyan elemi beágyzás, amely V valamely generikus modelljében van definiálva, tehát $j : V \to M \subseteq V[G]$.*

5.0.2. Definíció (Generikus nagy számosság)**.** *Generikus elemi beágyazás által definiált nagy számosság, ugyanolyan módon, mint az elemi beágyazásokkal.*

A generikus nagy számosságok fontos tulajdonságai, hogy a nagy számosságokkal ellentétben „kis” értékket is felvehetnek, akár $\aleph_1$ is lehet generikus nagy számosság egy megfelelő forszolás során, így a kisebb végtelen számosságokról és a Kiválasztási Axiómáról is többet tudnak mondani. A generikus nagy számosságok létezésének feltevésével - axiómákba foglalásával - többek között az előző fejezetben említett egyik problémára is

[1]Ez a fejezet a következő forrásokon alapul: [53], [29], [13], [14], [45], [59], [57]. A fejezetben szereplő tételek bizonyításai megtalálhatóak a megnevezett szakirodalomban, vagy az azokban megjelölt hivatkozásokban.

megoldást találhatunk, miszerint generikus nagy számosságokkal lehet olyan belső modelleket kialakítani, amelyek konziztensek nagy számosságok létezésével. A nagy számossági axiómákhoz hasolóan ezek is lineárisan rendezhetőek konzisztencia-erősség szempontjából, sőt a nagy számossági axiómákkal is kompatibilisek, például a „létezik generikus mérhető számosság" konzisztens $\Longleftrightarrow$ „létezik mérhető számosság" konzisztens.

Az alábbi definíciók és Foreman tétele megmutatja, hogy a Zermelo-Fraenkel-Kiválasztási-Nagy számosságok-Generikus nagy számosságok axiómarendszerben igaz a Kontinuum hipotézis.

5.0.3. Definíció (Ideál H-n). *Ideálnak nevezünk egy nemüres H halmazon egy olyan I halmazát H részhalmazainak, amelyre teljesül, hogy:*

1) $\emptyset \in I$ *és* $H \notin I$*;*

2) *Ha* $X \in I$ *és* $Y \in I$*, akkor* $X \cup Y \in I$*;*

3) *Ha* $X, Y \subseteq H$*,* $x \in I$ *és* $Y \subseteq X$*, akkor* $Y \in I$*.*

5.0.4. Definíció (Végesen teljes ideál). *Végesen teljes egy I ideál H-n, ha minden $n < \omega$ esetén, ha $X_n \in I$, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in I$.*

5.0.5. Definíció (Uniform). *Egy I ideál H-n uniform, ha minden $X \in I$ esetén $|X| = |H|$.*

5.0.6. Tétel (Foreman). *Ha létezik egy $j : V \to M \subseteq V[G]$ generikus elemi beágyazás, hogy:*

1) j *kritikus értéke* ω_1*;*

2) $M^{\omega_1} \cap V[G] \subseteq M$*;*

3) $G \subseteq P$ *P-generikus részhalmaz, ahol P olyan kényszerképzet, hogy a vele való forszolás során a generikus modellben igaz lesz, hogy $\omega_1 = \omega$,*

akkor teljesül a Kontinuum hipotézis, sőt $2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

Foreman mellett az elmúlt években W. Hugh Woodin képviselte azt a nézetet, hogy a hipotézis igaz. Woodin egy másik oldalról közelítette meg a kérdést, egy olyan belső modell után kutatott, amely Gödel L-jének elvére épül, de konzisztens nagy számosságokkal. Megmutatta, hogy amennyiben az általa kidolgozott modellről, Ultimate-L-ről[2], feltesszük, hogy a halmazok osztályával egyenlő, $V = Ultimate{-}L$, akkor a Kontinuum hipotézis igazolható. Woodin Ultimate-L-jéhez hasonlóan megalkothatóak olyan modellek, amelyek egy előre kiválsztott halmazból építik fel a konstruálható univerzumot, $L[A]$-t, amelynek tulajdonságai függnek az A halmaztól, így A-t jól megválasztva újabb axiómák

[2]Összefoglaló leírása például [59]-ben található.

is modellezhetőek. A $V = L$ axiómához hasonlóan, a $V = L[A]$ axiómából is belátható a hipotézis.

Woodin eredetileg a Kontinuum hipotézis hamisságát szerette volna bizonyítani, erre egy új „logikát" hozott létre, az úgynevezett Ω-logikát[3]. Ennek egyik erőssége, hogy az elsőrendű logikához hasonlóan ebben is meg lehet fogalmazni Teljességi tételt.

5.0.7. Definíció (Σ_2 állítás). *Egy φ állítás Σ_2, ha olyan alakú, hogy „Létezik egy α rendszám, hogy $V_\alpha \models \psi$", valamely ψ állításra.*

5.0.8. Definíció ($H(\gamma)$). *Ha γ végtelen számosság, akkor $H(\gamma)$ jelöli az összes olyan H tarzitív halmaz unióját, amelyre igaz, hogy $|H| < \gamma$.*

Ekkor lehet olyan Ω-teljes elméletet alkotni - Σ_2 állításokból, amelyek $H(\aleph_2)$-beliek -, hogy azt nem lehet megváltoztatni forszolással, de bizonyítani tudjuk benne, hogy $c = \aleph_2$.

Az előző megoldásoktól eltérő szemléletet képvisel Saharon Shelah, aki szerint a Kontinuum hipotézis függetlenségének belátása éppen azt mutatja, hogy a kérdést szükséges lenne újraformálni, mert az eredeti ennél tovább nem vezet, és a számosságok aritmetikájának kérdését még mindig nem sikerült megoldani. Shelah az alábbi módon fogalmazta át az Általános Kontinuum hipotézist, s ezt az új változatot be is bizonyította.

5.0.9. Definíció ($\lambda^{[\kappa]}$). *Ha $\kappa < \lambda$ reguláris számosság, akkor $\lambda^{[\kappa]} = min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P}$ egy halmaza $\widetilde{\lambda}$ olyan részhalmazainak, amelyek számossága κ, hogy bármely κ számosságú részhalmaza $\widetilde{\lambda}$-nak benne van $\mathcal{P}$ kevesebb, mint κ elemének uniójában $\}$.*

5.0.10. Tétel (Újraformált Általános Kontinuum hipotézis). *Legyen $\mu > \aleph_0$ erős limeszszámosság ekkor minden $\lambda \geq \mu$ és valamely $\kappa < \mu$ esetén:*

1) *Ha ν reguláris számosság, amelyre $\kappa \leq \nu < \mu$ teljesül, akkor $\lambda^{[\nu]} = \lambda$;*

2) *Létezik olyan $\mathcal{P}$ halmaz, amely $\widetilde{\lambda}$-nak μ-nél kisebb számosságú részhalmazait tartalmazza úgy, hogy minden μ számosságú részhalmaza $\widetilde{\lambda}$-nak előáll $\mathcal{P}$ kevesebb, mint κ elemének uniójaként.*

A fenti módszerek mellett érdemes megjegyeznünk, hogy a másodrendű logikát használó ZFC-ben eldöntött a Kontinuum hipotézis - Zermelonak így egyfelől igaza volt abban, hogy a másodrendű logikát pártolta. Az egyedüli probléma az, hogy ennek a logikának nincs bizonyítás-elmélete, nem lehet benne Teljességi tételt megfogalmazni, tehát nem tűnik lehetségesnek ebben sem a hipotézis igazságának vagy hamisságának belátása.[4]

Ezen említett kutatások jelentik a Kontinuum hipotézis jelenét, ezek nyomán indulhat útjára a matematikusok következő nemzedéke. Egyre inkább hódít az az elképzelés,

[3]Erről hosszabban például [58]-ban lehet olvasni.

[4]Ennek tárgyalása például [32]-ben látható.

hogy a modellek világát érdemes egyfajta multiverzumként felfogni, tehát elfogadni, hogy léteznek különböző matematikai tulajdonságú modellek és egyes kérdésekkel csak a modellspecifikáció után lehet foglalkozni. Így a jövőben talán már nem fogják a Kontinuum hipotézist olyan kiemelkedő problémának tartani, mint a múlt századforduló elején a tudósok.

A végtelen számosságok hatványozásának kutatása során rengeteg új ismerettel bővült a Halmazelmélet, ezek az elmúlt évtizedekben főként a forszolással hozhatóak össze függésbe. Hiába kezdődött a végtelen értelmezésének kérdése már az ókorban, annak matematikai természetét csak a múlt században kezdték igazán megérteni. S amint a matematikusok egy csoportja kizárólag ezzel foglalkozott Cantor és Hilbert nyomán, úgy matematikailag is - és nem csak filozófiailag-pszichológiailag - értelmet nyertek Stefan Zweig szavai: „mert minél szűkebbre vonja valaki a kört, annál jobban közeledik másfelől a végtelenhez”.[5]

[5][63] (12. oldal)

Irodalomjegyzék

[1] Timothy Bays. Skolem's Paradox. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2014 edition, 2014.

[2] Andrés E. Caicedo. Equivalents of the axiom of choice. `https://andrescaicedo.files.wordpress.com/2009/11/502-equivalents.pdf`.

[3] G. Cantor. Ueber eine eigenschaft des inbegriffs aller reellen algebraischen zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77:258–262, 1874.

[4] Brent Cody. What are strong axioms of infinity and why are they useful in mathematics? `http://logic.fudan.edu.cn/doc/Event/2012/2012_Cody_1204.pdf`.

[5] Paul J Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50(6):1143, 1963.

[6] Irving M. Copi. The burali-forti paradox. *Philosophy of Science*, 25(4):281–286, 1958.

[7] László Csirmaz. Forszolás jegyzet. `https://www.renyi.hu/~csirmaz/`.

[8] Burton Dreben and Akihiro Kanamori. Hilbert and set theory. *Synthese*, 110(1):77–125, 1997.

[9] Thomas Drucker. *Perspectives on the history of mathematical logic*. Springer Science & Business Media, 2009.

[10] Heinz-Dieter Ebbinghaus. *Ernst Zermelo - an approach to his life and work*. Springer, 2007.

[11] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Ernst Zermelo, and Akihiro Kanamori. *Ernst Zermelo-Collected Works/Gesammelte Werke: Volume I/Band I-Set Theory, Miscellanea/Mengenlehre, Varia*, volume 21. Springer Science & Business Media, 2010.

[12] Fernando Ferreira. Amending frege's grundgesetze der arithmetik. *Synthese*, 147(1):3–19, 2005.

[13] Matt Foreman. Has the continuum hypothesis been settled. In *Logic Colloquium*, volume 3, pages 56–75, 2006.

[14] Matthew Foreman. Generic large cardinals: new axioms for mathematics. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume 2, pages 11–21, 1998.

[15] Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik: I.-[II.] Band*, volume 1. H. Pohle, 1893.

[16] Leonard Gillman. Two classical surprises concerning the axiom of choice and the continuum hypothesis. *The American mathematical monthly*, 109(6):544–553, 2002.

[17] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12):556, 1938.

[18] Kurt Godel. What is cantor's continuum problem? *The American Mathematical Monthly*, 54(9):515–525, 1947.

[19] Kurt Gödel and Solomon Feferman. *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III: Unpublished Essays and Lectures*, volume 3. Oxford University Press on Demand, 1986.

[20] Fernando Q Gouvêa. Was cantor surprised? *The American Mathematical Monthly*, 118(3):198–209, 2011.

[21] Gabor Halasz, Laszlo Lovasz, Miklos Simonovits, and Vera T. Sós, editors. *Paul Erdös and His Mathematics*, volume 1. Springer Berlin, Heidelberg, 2002.

[22] Joel David Hamkins. Gap forcing: generalizing the lévy-solovay theorem. *Bulletin of Symbolic Logic*, 5(2):264–272, 1999.

[23] Richard G Heck. The development of arithmetic in frege's grundgesetze der arithmetik. *The Journal of Symbolic Logic*, 58(2):579–601, 1993.

[24] Horst Herrlich. *Axiom of choice*, volume 1876. Springer, 2006.

[25] M. Randall Holmes. Alternative Axiomatic Set Theories. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2021 edition, 2021.

[26] Radek Honzik et al. Large cardinals and the continuum hypothesis. *Acta Universitatis Carolinae Philosophica et Historica*, 9(2):35–52, 2010.

[27] Karel Hrbacek and Thomas Jech. *Introduction to set theory, revised and expanded.* Crc Press, 1999.

[28] Thomas J Jech. *The axiom of choice.* Courier Corporation, 2008.

[29] Thomas J Jech, Thomas Jech, Thomas J Jech, Great Britain Mathematician, Thomas J Jech, and Grande-Bretagne Mathématicien. *Set theory*, volume 14. Springer, 2003.

[30] Péter Komjáth. Forszolás. `https://web.cs.elte.hu/~kope/oktatas/`.

[31] Péter Komjáth. Halmazelmélet. `https://web.cs.elte.hu/~kope/oktatas/21tav/ma1.pdf`.

[32] Georg Kreisel. Informal rigour and completeness proofs. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 47, pages 138–186. Elsevier, 1967.

[33] Adolf Lindenbaum and Alfred Tarski. *Communication sur les recherches de le théorie des ensembles.* 1926.

[34] William J. Mitchell. On the singular cardinal hypothesis, 1992.

[35] Gregory H Moore. *Zermelo's axiom of choice: Its origins, development, and influence.* Courier Corporation, 2012.

[36] Gregory H Moore and Alejandro Garciadiego. Burali-forti's paradox: A reappraisal of its origins. *Historia Mathematica*, 8(3):319–350, 1981.

[37] Charles Morgan. Cardinal arithmetic. `https://www.ucl.ac.uk/~ucahcjm/ast/ast_notes_4.pdf`.

[38] Jan Mycielski. On the axiom of determinateness. *Fundamenta Mathematicae*, 53(2):205–224, 1964.

[39] Gabriel Nagy. Cardinal arithmetic. `https://www.math.ksu.edu/~nagy/real-an/ap-b-card.pdf`.

[40] Volker Peckhaus. Pro and contra hilbert: Zermelo's set theories. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, pages 199–215, 2005.

[41] Panu Raatikainen. Gödel's Incompleteness Theorems. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Spring 2022 edition, 2022.

[42] Rudy Rucker. Infinity and the mind. In *Infinity and the Mind*. Princeton University Press, 2019.

[43] Urs Schreiber. Cardinal arithmetic. `https://ncatlab.org/nlab/show/cardinal+arithmetic`.

[44] Saharon Shelah. Cardinal arithmetic for skeptics. *arXiv preprint math/9201251*, 1992.

[45] Saharon Shelah. The generalized continuum hypothesis revisited. *Israel Journal of Mathematics*, 116(1):285–321, 2000.

[46] Wacław Sierpiński. Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). *Fundamenta Mathematicae*, 5:177–187, 1924.

[47] Wacław Sierpiński. L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix. *Fundamenta mathematicae*, 34(1):1–5, 1947.

[48] Th. Skolem. Einige bemerkungen zu der abhandlung von e. zermelo: "Über die definitheit in der axiomatik". *Fundamenta Mathematicae*, 15(1):337–341, 1930.

[49] E Specker. Generalized continuum hypothesis and axiom of choice. In *Ernst Specker Selecta*, pages 86–91. knight, 1990.

[50] Robert R. Stoll and Herbert Enderton. The neumann-bernays-gödel axioms. `https://www.britannica.com/science/set-theory/The-Neumann-Bernays-Godel-axioms`.

[51] Alfred Tarski. Quelques théorèmes sur les alephs. *Fundamenta Mathematicae*, 7:1–14, 1925.

[52] John Truss. Models of set theory containing many perfect sets. *Annals of Mathematical Logic*, 7(2):197–219, 1974.

[53] Toshimichi Usuba. Generic setwise large cardinals. `http://www2.kobe-u.ac.jp/~hsakai/Fuchino2021/slides/slides_Usuba_Fuchino2021.pdf`.

[54] Alena Vencovska. The arithmetic of cardinal numbers. `https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/Alena.Vencovska/STnotes3.pdf`.

[55] Jouko Väänänen. Second-order and Higher-order Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Fall 2021 edition, 2021.

[56] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica*, volume 2. Cambridge University Press, 1997.

[57] W Hugh Woodin. The continuum hypothesis, the generic multiverse of sets, and the ω conjecture. *Set theory, arithmetic, and foundations of mathematics: theorems, philosophies*, 36, 2011.

[58] W Hugh Woodin. The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal. In *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*. de Gruyter, 2013.

[59] WH Woodin. The continuum hypothesis (slides). `https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/MathematicsMuenster/woodin-opening-colloquium.pdf`, 2019.

[60] Brent A. Yorgey. Regularity, CH, and Kőnig's Theorem. `http://ozark.hendrix.edu/~yorgey/settheory/06-more-cardinals.pdf`.

[61] Jindrich Zapletal. Lecture on completeness. `https://people.clas.ufl.edu/zapletal/files/setthylecture1.pdf`.

[62] Ernest Zermelo. Über grenzzahlen und mengenbereiche. *Fundamenta Mathematicae*, 16(1):29–47, 1930.

[63] Stefan Zweig. *Novellák*. Geo Média Lap- és Könyvkiadó, 1995.