Bepillantás az általános relativitáselmélet hátterébe

Matematikus BSc szakdolgozat

Kovács Jonatán Mátyás

Témavezető : Dr. Szeghy Dávid

ELTE

2022

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az általános relativitáselmélet alapvető matematikai eszköze egy többszörösen összetett struktúra. A szakdolgozat célja ennek a struktúrának felépítése, valamint a definíciók megértésén túl néhány érdekes állítás és fizikai intuíció bemutása.

Szeretném megköszönni témavezetőm, Dr. Szeghy Dávid, támogatását, továbbá Dr. Dávid Gyula értékes útmutatását a fizikai gondolatokkal kapcsolaatban. Szeretnék továbbá köszönetet mondani barátaimnak és családomnak, akik kitartó támogatása nélkül ez a szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

2. fejezet

Alapokkal kapcsolatos gondolatok

2.1. Halmazok

Matematikai vonatkozás

A legalapvetőbb matematikai struktúra a halmaz. A klasszikus matematika lényegében egésze elviekben - néhány kivétellel, például a kategóriaeléleten és a matematikai alapjaival foglalkozó területeken kívül - visszavezethető halmazok tanulmányozására. De milyen halmazelméletre? A XX. században több törekvés is volt arra, hogy ezt az elvi tényt gyakorlatba ültessék. Ennek két talán legismertebb példája a francia Burbaki csoport könyvsorozata amely az akkori matematikát kívánta összegezni, illetőleg Whithead és Russel Principia Mathematikája, amely a típuselmélet alapjaira kívánta visszavezetni a matematikát. Magyar példaként érdemes megemlíteni Kristóf János munkásságát, aki a logika alapjaitól kezdte el felépíteni analízis tankönyvsorozatát (ld. [2])
Szintén érdemes megemlíteni a halmazelmélet kapcsán Neumann János munkásságát. Ma legelterjedtebb halmazelméleti axiómarendszer a ZFC, azonban ebben a rendszerben nem beszélhetünk bizonyos matematikailag is releváns nagy struktúrákról, mint például az összes csoportról, az összes vektortérről. Mivel tetszőleges méretű végtelen halmaz ellátható test-struktúrával, ahhoz, hogy az összes vektortérről, csoportról beszélni tudjunk, tudnunk kellene beszélni az összes végtelen halmazról. Azonban a végtelen halmazok nem alkotnak halmazt. Így a sztenderd ZFC rendszerben például kategóriaelméletet általános formában nem lehet csinálni (egyes források szerint szokás ezért megszorítkozni Grothendeick univerzumokra). Egy másik kényelmes megoldást nyújt azonban Neumann János axiómarendszere, aki bevezette az osztály fogalmát. Ebben az úgynevezett NBG (Neumann-Bayers-Gödel) axiómarendszerben a halmazok azok az osztályok, amelyeket valamely nagyobb osztály tartalmaz, egyébként pedig egy osztályt valódi osztálynak nevezünk. Ez lehetőséget ad a kategóriaelmélet kiépítésére, az osztályokból halmazváltozókat tartalmazó logikai formulákkal képezhetünk halmazokat. Ezt az axiómarendszert használta fel Gödel a ZFC egy olyan modelljének konstruálására, melyben igaz a kontinuumhipotézis (az általánosabb formájában is). A rendszernek számos előnye van: legelőször is, az amúgy is elterjedt ZFC axiómarendszer konzervatív bővítése, ami azt jelenti, hogy minden az NGB rendszer minden állítása, ami megfogalmazható pusztán a ZFC fogalmaira való hivatkozással, pontosan ugyanakkor igaz mindkét rendszerben. Tehát az NGB bővíti a ZFC matematikáját, de nem nyúl bele az addigi matematikába.
Újabb előny, hogy az NGB rendszer a ZFC-vel ellentétben veges sok axiómával posztulálható. [Ez részletesen megtalható Mendelssohn - Introduction to mathematical logic 225. oldalán] (A ZFC tartalmaz axiómasémákat, ami végtelen sok axiómának felel meg.) Nem utolsó sorban alkalmas a kategóriaelmélet általános megfogalmazásárára is, ami a XXI. évszázadban egyre nagyobb népszerűségnek örvend, mint a matematika alapja.

Fizikai vonatkozás

Ha a téridőt halmazként modellezzük annak fizikai vonatkozása is van. Gyakran a különféle modellekben a téridőben tömegpont mozgását vizsgáljuk. Ez nyilvánvalóan absztrakció, de mélyebb jelentőssége van, mint ahogy az talán szembetűnik. A téridőnek ugyanis az anyag így nem része, hanem eleme lesz. Ez azonban mégsem kell, hogy problémát jelentsen, minden matematikailag definiált függvény definiálható volna a téridő, mint halmaz egyelemű részhalmazain az elemei helyett.

2.2. Topológia

Matematikai vonatkozás

A topológia fogalmára a céljaink szempontjából elsősorban a folytonosság általános fogalma miatt van szükség. Az alábbiakat ismertnek tekintjük, de a teljesség kedvéért közöljük.

Definíció. *Legyen adott egy X halmaz és X részhalmazainak egy Ω rendszere, melyet nyíltaknak nevezünk. Ω-t topologiának nevezzük, ha az üres halmaz és X nyílt, valamint nyíltak úniója, illetve véges sok nyílt metszete is nyílt. Ekkor (X, Ω) párt (vagy gyakran pongyolábban magát X halmazt) topologikus térnek, Ω-t pedig topológiának nevezzük.*

Definíció. *Nyílt halmazok egy rendszerét bázisnak nevezzük, ha a topológia bármely nyílt halmaza előáll bázisbeli nyíltak úniójaként. Egy topologikus tér M2, ha van megszámlálható bázisa.*

Az egyik legalapvetőbb topológia $\mathbb{R}^n$-en a nyílt gömbök, azaz a $B_r(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : r > |x - p|\}$ alakú halmazok, mint bázis által generált topológia. Többek között ezzel a topológiával visszakapjuk a folytonosság szokásos fogalmát $\mathbb{R}^n$ az alábbi definícióval:

Definíció. *Folytonosnak nevezünk egy $f : X \to Y$ függvényt, ha az Y-on adott topológia szerint minden nyílt halmaz ősképe nyílt az X-en adott topológia szerint.*

Belátható, hogy folytonos függvények kompozíciója is folytonos. A későbbiekhez fontos még az alábbi fogalom:

Definíció. *Homeomorfizmusnak nevezünk egy olyan bijekciót, mely folytonos és inverze is folytonos.*

A homeomorfizmusok a topologikus terek kategorielmélet értelmében vett morfizmusai: megőrzik a topológiai struktúrát, tudniillik egy halmaz pontosan akkor nyílt az egyik téren, hogyha a homeomorfizmus szerinti képe (illetve ősképe) nyílt a másik téren. A következő részhez szükségünk lesz még a következő definícióra is:

Definíció. *Egy topologikus teret Haussdorffnak, vagy T2-nek nevezünk, ha bármely két pontja elválasztható nyíltakkal, azaz bármely két pontnak van diszjunkt nyílt környezete.*

Fizikai vonatkozás

A modellünk szerint a téridőnk nemcsak halmaz, hanem topologikus tér is. De mi jelöli ki a nyílt halmazokat? A következő pontban látni fogjuk, hogy a téridőn felvett koordinátarendszerek egy bizonyos értelemben ki tudják jelölni a nyílt halmazokat. Most tűnik legalkalmasabbnak feltenni azt a kérdést is, hogy mi jelöli ki az NGB rendszerben adott Neumanni hierarchiában azt a halmazt, amely a téridő alapjául szolgál? Mivel egy halmaz önmagában lényegében struktúra nélküli, csak a pontok száma releváns modellünk szempontjából. Véges, vagy végtelen sok pontja legyen? Ha végtelen, akkor legyen megszámlálható sok pontja, mint $\mathbb{Q}^4$-nek, vagy legyen több, például kontinuum sok, mint $\mathbb{R}^4$-nek? Erre a kérdésekre a következő pont alapján válaszolni tudunk. Hasonlóképpen, az megfelelő számosságú halmazok közül a modellünk szempontjából lényegtelen, hogy az NBG melyik konkrét halmazát választjuk homeomorfizmus erejéig, hiszen ezek topológia szempontjából egyenértékűek. Éppen ezért a konkrét halmazt a matematikai modellben nem lesz releváns megnevezni. A későbbiekben is, ahogy egyre több rétegét határozzuk meg a sruktúrának, az adott kategória morfizmusai erejéig lényegtelen lesz a modellünk szempontjából a konkrét választás az előző réteg lehetséges struktúrái közül.

3. fejezet

A téridő leírásához használt struktúra

3.1. Topologikus és sima sokaságok

Matematikai vonatkozás

Definíció. *Egy topologikus teret d-dimenziós topologikus sokaságnak nevezünk, ha Haussdorff és van megszámlálható bázisa, továbbá lokálisan homeomorf* $\mathbb{R}^d$*-vel, azaz a tér minden pontjának van olyan nyílt környezete, amely homeomorf* $\mathbb{R}^d$ *egy nyílt környezetével.*

Definíció. *Ha* $\mathcal{M}$ *egy topologikus sokaság, akkor az* $x : U_p \to \mathbb{R}^d$ *alakú homeomorfizmusokat (mindkét irányban folytonos bijekciókat) térképezésnek vagy koordinátázásnak nevezzük, ahol* U_p *valamely* $p \in \mathcal{M}$ *pont egy nyílt környezete. Az* (U_p, x) *párt térképnek vagy lokális koordinátarendszernek nevezzük. Egy térképezés inverzét (mely a sokaságra képez) paraméterezésnek nevezzük.*

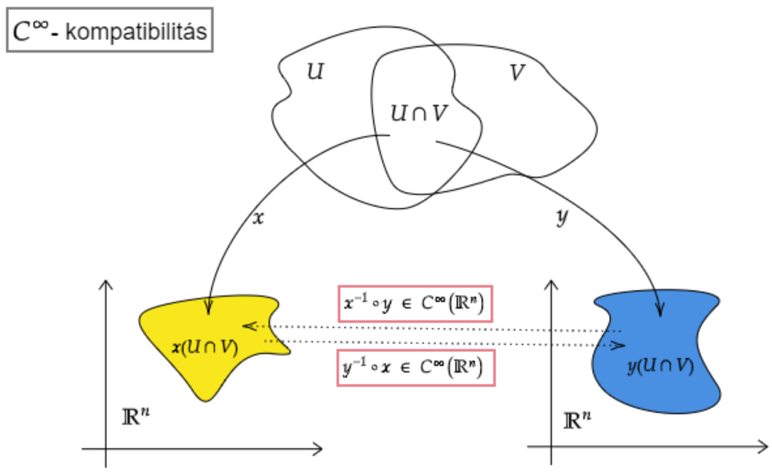
Ezt úgy lehet könnyen megjegyezni, hogy amit egy hétköznapi értelemben vett sík térképen látunk a földgömb, mint 2 dimenziós sokaság példájánál maradva, az a p város U_p környezetének fenti értelemben vett térképezés általi képe. A hétköznapi térképeken néha feltűntetnek koordinátavonalakat is, így bekordinátázzák a földgömbnek azt a részét, ahol a kedvenc városunk nyugszik.

Kepzeljük most azt, hogy egy térség környező városairól vannak térképeink, és szeretnénk őket összeragasztani, és egy teljesebb képet kapni a térségről. Ezek a térképek átfedhetnek.

Definíció. *Atlasznak nevezzük térképezéseknek olyan* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) : \alpha \in I\}$ *rendszerét az* $\mathcal{M}$ *sokaságon, melyre a térképtartományok uniója az egész sokaság, azaz* $\cup_{\alpha \in I} = \mathcal{M}$*. (I tetszőleges indexhalmaz.)*

Az alábbi technikai definíció tisztázza az átfedéseket a térképek között.

Definíció. *(Atlasz* C^∞*-kompatibilitása)* (U, x) *és* (V, y) *térképek* C^∞*-kompatibilisek egymással, ha a paramétertartományok átfedő részén létrehozott* $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ *és* $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ *függvények* C^∞ *osztályúak, vagy* U *és* V *diszjunktak. Egy atlaszt* C^∞*-kompatibilisnek mondunk, ha minden térképe* C^∞*-kompatibilis.*



Hasonlóképpen definiálhatnánk atlasz C^k-kompatibilitását tetszőleges ($k \in \mathbb{N}$)-re is. Az alábbi tételre hivatkozva a továbbiakban C^∞ sokaságokkal foglalkozunk:

Állítás. *Amennyiben egy atlasz legalább C^1 kompatibilis, kiválasztható C^∞ részatlasz.*

Ennek az állításnak bizonyítása megtalálható Hirsch's Differential Topology című könyvének 2. fejezetében (2.9-es állítás).

Definíció. *Egy topologikus sokaságot a rajta adott atlasszal C^∞ vagy sima sokaságnak nevezünk, ha az atlasz C^∞-kompatibilis..*

Fizikai vonatkozás

Visszatérhetünk az előző részben felvetett kérdésekre a téridőmodellünkkel kapcsolatban.

Először mi is határozza meg a topológiát?

Ahogyan arra Matolcsi Tamás is felhívja a figyelmet Mechanika c. könyvének bevezetőjében, fontos megkülönböztetnünk egymástól a valóságot és annak modelljét.

Nem idegen az a gondolat, hogy van egy idealizált képünk egy fizikai rendszerről, és e köré az idealizált kép köré építjük fel a matematikai modellünket. Jelen esetben az idealizált rendszer maga a téridő lesz. Ebben az idalizált rendszerben koordinátarendszereket vehetünk fel, melyeket operatíve maga az anyag jelöl ki a fizikai modellben. (Matolcsi erről is ír részletesebben Spacetime without reference frames c. könyvében). Ekkor a nyílt halmazok lehetnek azok a részhalmazok a téridőmodellünkben, melyek homeomorfizmussá teszik a fizikai koordinátarendszerek és a paraméterterek közötti leképezéseket. Ebben az esetben a koordinátarendszerek akkor vannak operatíve jól kijelölve, ha kompatibilisek egymással.

Térjünk rá a másik kérdésre: míg a téridő pontjainak számát nem tudjuk meghatározni, amennyiben egy halmazként modellezzük, sőt az sem világos, hogy a tömegpont milyen mértékben közelíti meg a valóságot, mint absztrakció. (Erről legelőször Rózsa Péter: Játék a végtelennel című könyvéből hallottam kamaszként.) Amennyiben azonban a téridőt egy sokaságként modellezzük, és erről a sokaságról összefüggőséget feltételezünk, meg tudjuk határozni a pontjainak számát a modellben. A szakdolgozat hatáskörén túlmutató eszközökkel be lehet látni a következő állítást:

Állítás. *Összefüggő topologikus sokaságnak kontinuum sok pontja van.*

3.2. Érintőterek és nyalábok

A klasszikus differenciálgeometriából jól ismert az érintőtér fogalma. Ezt némelyest felelevenítjük ebben a részben. A rész kulcs gondolata a következő: egy görbe irány menti parciális deriváltjai vektorteret alkotnak.

Definíció (Derivációk). *$p \in M$ pontbeli derivációnak nevezzük azokat a lináris $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ operátorokat, melyekre teljesül a Leibniz-szabály a p pontban:*

$$D_p(f \cdot g) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g)$$

ahol $C^\infty(M)$ a sima függvények vektorterét jelöli.

A Leibniz-szabályt teljesítő lineáris operátorok lineáris kombinációja is ilyen, ezért a derivációk vektorteret alkotnak a p pontban. Ezt a vektorteret nevezzük T_pM érintőtérnek.

Fontos példa. Ha adott egy (U, x) térkép, ahol $x(p_0) = (x^1(p_0), \ldots, x^n(p_0))$., akkor az $f \in C^\infty(M)$ függvénynek vehetjük az x^i koordináta menti parciális deriváltjait. A parciális deriváltakat a klasszikus differenciálgeometriából megszokott módon definiáljuk: $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \partial_1(f \circ x^{-1})(x(p))$, ahol $f \circ x^{-1}$ már egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény. A p pontban ekkor $\frac{\partial}{\partial x^i} : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ lineáris operátorok derivációk lesznek, hiszen a valós függvénytanbol öröklődően teljesítik a Leibniz-szabályt.

Ennél többet is állíthatunk a fenti példában szereplő $\frac{\partial}{\partial x^i}$ derivációkról:

Tétel. *Egy p pontbeli $\frac{\partial}{\partial x^i}$ koordináta menti parciális differenciáloperátorok, mint derivációk, bázist alkotnak a derivációk T_pM terén.*

Bizonyítás. Legyen (U_p, x) egy térkép a p pont környezetéről. Ha most $g \equiv c$ konstans, akkor $D_p(g) = 0$ tetszőleges D_p derivációnál, hiszen minden f sima függvényre $cD_p(f) = D_p(f \cdot g) = D_p(f)c + f(p)D_p(g)$, amiből $f(p)D_p(g) = 0$. Olyan sima függvényt választva, melyre $f(p) \neq 0$, valóban $D_p(g) = 0$. Ha tehát adott egy rögzített f sima függvény, akkor a konstanssal vett szorzása nem változtat derivációinak értékein.
Most belátjuk, hogy ha v tetszőleges deriváció, akkor v előáll

$$v = \sum v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

alakban, azaz a koordináta menti parciális differenciáloperátorok generálják a derivációkat. A fentiek miatt konstans eltolással feltehező, hogy $x(p) = 0$ a bizonyítás hátralevő részében. A térkép simasága miatt ekkor U_p szükség szerinti zsugorításával vagy nagyításával és esetleges megszorításával feltehető, hogy $x(U_p) = B_0(\varepsilon)$ valamely ε-ra. Ekkor $\{tq : t \in [0, 1], q \in x(U_p)\} = x(U_p)$. Ha most g egy sima függvény $x(U_p) = B_0(\varepsilon)$-on, akkor legyen

$$g_i(q) = \int_0^1 \partial_i g(tq)\ dt$$

Ekkor a Newton-Leibniz formula szerint $x(U_p)$-n:

$$g = g(0) + \sum g_i e^i$$

Ahol e^i az $\mathbb{R}^n$ sztenderd i. bázisa. A $g = f \circ x^{-1}$ választás mellett, $f = f(p) + \sum f_i x^i$-re jutunk. Alkalmazva $\frac{\partial}{\partial x^i}$-t, azt kapjuk, hogy ebben az összegben $f_i(p)$ éppen $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, így v-t alkalmazva az $f = f(p) + \sum f_i x^i$-re egyrészt Leibniz-szabály és $x(p) = 0$ alapján:

$$v(f) = 0 + \sum v(f_i)x^i(p) + \sum f_i(p)v(x^i) = 0 + 0 + \sum v(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

ez tetszőleges f-re teljesül, így

$$v = \sum v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Már csak azt kell belátni, hogy az $\frac{\partial}{\partial x^i}$ operátorok lineárisan függetlenek: ha most $\sum c_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ teljesülne $c_j \neq 0$ -val, akkor az operátort x^j-re alkalmazva ellentmondásra jutunk, ugyanis ekkor $0 = \sum c_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = c_j \neq 0$ lenne. $\square$

Definíció. *A $\frac{\partial}{\partial x^i}$ parciális deriváltakból álló bázist a $T_p\mathcal{M}$ érintőtér koordinátabázisának, elemeit alapvektoroknak nevezzük.*

Definíció. *Érintőnyalábnak nevezzük a sokaság érintőtereinek diszjunkt unióját, egy projekcióval, mely a T_pM érintőtér pontjaihoz a p pontot rendeli. Az érintőnyalábot TM-el jelöljük.*

Megjegyzés. Mivel egy térkép egy sima homeomorfizmus (sima diffeomorfizmus) az U_p környezet és az R^n egy kicsi golyója között, és a golyó minden pontjában a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ deriválások egy bázist alkotnak a deriválások vektorterében, ezért egy sima topológia megadható lokálisan a $\cup_{q\in U_p} T_pM$ halmazon. Továbbá az térképek kompatibilitásával ez az egész TM érintő nyalábban egy topológiát ad meg, illetőleg sima sokaság esetén differenciálstruktúrát is meghatároz.

Definíció. *Vektormezőnek nevezzük az érintőnyaláb egy sima szelését, azaz az olyan függvényeket, melyek a sokaság pontjaihoz az adott pontbeli érintőtér valamely derivációját rendelik. A sokaság vektormezőinek halmazát $\Gamma(TM)$-el jelöljük.*

Állítás. $\Gamma(TM)$ *egy modulus a kommutatív, egységelemes $C^\infty(M)$ gyűrű felett.*

Bizonyítás. $\Gamma(TM)$ minden $p \in M$ pontra megszorítva vektortér az $\mathbb{R}$ test felett, egy $C^\infty(M)$ beli függvény értéke egy pontban pedig éppen valós szám. Így a pontonkénti műveletekből öröklődnek a megfelelő tulajdonságok. A $C^\infty(M)$ gyűrű egységeleme a konstans 1 függvény, szintén a pontonkénti műveletek alapján kommutatív gyűrű. Azonban $\Gamma(TM)$ nem alkot vektorteret, hiszen a $C^\infty(M)$ gyűrű nem test, például mert egy olyan függvénynek, amely valamely pontaban 0, de nem minden pontban az, nincsen reciproka.

Definíció. *A $T_p(M)$ érintőtér duális terét $T_p^*(M)$-el jelöljük, koérintőnyalábnak nevezzük a sokaság érintőtereinek diszjunkt unióját, egy projekcióval, mely a T_p^*M érintőtér pontjaihoz a p pontot rendeli. A koérintőnyalábot T^*M-el jelöljük.*

A kotangens tér elemeit differenciálformáknak nevezzük. Mivel a tangenstéren a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bázis, a kotangenstéren bevezethetjük a dx^i bázist, melyre $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j$, ahol δ a Kronecker-deltát jelöli.

Állítás. $\Gamma(T^*M)$ *egy modulus a kommutatív, egységelemes* $C^\infty(M)$ *gyűrű felett.*

Bizonyítás. Hasonlóképpen $\Gamma(TM)$ bizonyításánál, a megfelelő tulajdonságok a pontonkénti műveletek alapján öröklődnek.

Bizonyos modulusokra definiálhatjuk a duális teret, mely szintén modulus, hasonlóképpen ahhoz, mint ahogy vektortereknél megszokhattuk. A vektorterek esetén a V vektőrtérből a $\mathbb{K}$ alaptestbe képező lineáris leképezések vektorteret alkotnak a pontonkénti műveletek alapján az alaptest felett. Hasonlóképpen, modulust alkotnak kommutatív, egységelemes gyűrű felett az alapgyűrűbe képező lineáris leképezések a pontonkénti műveletek alapján. Be lehet látni, hogy a $\Gamma(T^*M)$ és $\Gamma(TM)^*$ modulusok izomorfak.

3.3. Tenzorok

Matematikai vonatkozás

Definíció. *(r, s)-tenzormezőnek nevezzük a $\Gamma(TM)^* \times \ldots \times \Gamma(TM)^* \times \Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)$ alakú $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ - multilineáris leképezéseket, ahol a direkt szorzatban $\Gamma(TM)^*$-nak r példánya, $\Gamma(TM)$-nek s példánya fordul elő.*

Például $(1, 1)$ tenzormező a kiértékelő operátor, $Eval : \Gamma(TM)^* \times \Gamma(TM)$, melyre $Eval(\omega, X) = \omega(X)$. Ez nyilván mindkét változójában $C^\infty(M)$-lineáris. Az $(1, 0)$ tenzormezőket vektormezőknek, a $(0, 1)$ tenzormezőket pedig kovektormezőknek nevezzük. Vektormezőt adnak egy térképtartományon például a $\frac{\partial}{\partial x^k}$ koordinátabázis elemei, melyeket alapvektormezőnek is nevezünk, illetőleg kovektormezőt adnak a dx^k differenciálformák. Szeretnénk egy térképtartományon bonyolultabb tenzormezőket is kifejezni ezekkel az egyszerűbb - térképezés által adott - tenzormezőkkel. Ehhez szüségünk lesz tenzormezők szorzatának fogalmára.

Definíció. *Egy A (k, l) és egy B (r, s) tenzormező szorzatán azt a $(k + r, l + s)$ tenzormezőt értjük, mely $\omega^1, \ldots, \omega^{k+r} \in \Gamma(TM)^*$ és $X_1, \ldots, X_{l+s} \in \Gamma(TM)$ mellett a megfelelő tenzormezők szorzata: $A \otimes B(\omega^1, \ldots, \omega^{k+r}, X_1, \ldots, X_{l+s}) = = A(\omega^1, \ \ldots \ , \omega^k, X_1, \ \ldots \ , X_l)B(\omega^{k+1}, \ \ldots \ , \omega^{k+r}, X_{l+1}, \ \ldots \ , X_{l+s})$*

Ezzel a definícióval egy térképtartományon egyszerűen megadhatunk tenzormezőket a térképezés által generált koordinátabázis és a duális bázis elemeivel.

Állítás. *A tenzorszorzat nem kommutatív.*

Bizonyítás. Vegyünk egy (U, x) térképtartományt. Ezen a tartományon adott $\frac{\partial}{\partial x^k}$ vektor illetve dx^k kovektormezők felhasználásával az állítás egyszerű számolás:

$$(dx^1 \otimes dx^2)(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}) = dx^1(\frac{\partial}{\partial x^1})\ dx^2(\frac{\partial}{\partial x^2}) = 1 * 1 = 1$$

$$(dx^2 \otimes dx^1)(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}) = dx^2(\frac{\partial}{\partial x^1})\ dx^1(\frac{\partial}{\partial x^2}) = 0 * 0 = 0$$

Tehát $(dx^1 \otimes dx^2) \neq (dx^2 \otimes dx^1)$.

A tárgyhoz fontos tenzorokat gyakran kétféleképpen is be fogunk vezetni, egyrészt absztraktul, másrészt lokális koordinátákkal. Egy fontos példa (0,2)-tenzorra:

Definíció. *Metrikának nevezzük az olyan $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ leképezéseket, mely minden $X, Y \in \Gamma(TM)$ esetén:*

1. *szimmetrikus, azaz $g(X, Y) = g(Y, X)$*
2. *nem-degenerált, azaz a $\flat(X) = g(X, \cdot\,)$ függvény sima bijekció.*

A $\flat : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)^*$ függvény inverzére a zenében használt módosítójelek mintájára az alábbi jelölést vezették be: $\sharp : \Gamma(TM)^* \to \Gamma(TM)$. Ezek alapján be lehet vezetni absztrakt módon egy inverz metrikát a kotangenstéren. Ha adott a g metrika, inverz metrikának nevezzük a $g^{-1} : \Gamma(TM)^* \times \Gamma(TM)^* \to C^\infty(M)$ leképezéseket, mely minden $\omega, \beta \in \Gamma(TM)^*$ esetén: $g^{-1}(\omega, \beta) = \omega(\sharp(\beta))$.

Most nézzük meg hogyan lehet bevezetni a metrikus tenzort egy adott térképtartományon.

Definíció. *Legyen adott (U, x) térkép. Ekkor a g metrika komponensfüggvényeinek nevezzük a koordinátabázis elemeinek behelyettesítésével kapott függvényeket:*

$$g_{kl} = g(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l})$$

A g metrikus tenzor ekkor előáll $g = \sum_{kl} g_{kl} dx^k \otimes dx^l$ alakban, hiszen az összegben $dx^k \otimes dx^l$ egyedül a $\frac{\partial}{\partial x^k}$ és $\frac{\partial}{\partial x^l}$ alapvektormezők helyettesítésénél nem tűnik el, és ott 1-et ad.

Állítás. *A $G(p) = \{g_{kl}(p)\}$ komponensfüggvények mátrixa szimmetrikus, továbbá minden $p \in U$ pontban invertálható.*

Bizonyítás. A metrikához tartozó mátrix szimmetriája a metrika szimmetriájának egyenes következménye. Az invertálhatóság belátásához felhasználjuk, hogy $\flat(X) = g(X, \cdot)$ bijekció. Ekkor az alapvektormezők helyettesítésével $\flat(\frac{\partial}{\partial x^k})(p) = \sum_l \flat(\frac{\partial}{\partial x^k})(p) dx^l(p) \frac{\partial}{\partial x^l}(p) = \sum_l g(\frac{\partial}{\partial x^k}(p), \frac{\partial}{\partial x^l}(p)) dx^l(p)$. Tehát a p pontbeli $dx^l(p)$ bázisban a kotangenstéren a $\flat$ mátrixa éppen $G(p)$. Mivel $\flat$ bijekció, $G(p)$ invertálható.

A G mátrix inverzének komponensfüggvényei szintén sima függvények.

Definíció. *Inverz metrikának nevezzük és $H(p)$-vel jelöljük a G mátrix inverzének komponensfüggvényeiből álló mátrixot.*

Ha most adott az x lokális koordinátázás a p pont egy környezetében, akkor a koordinátabázisra nézve $G(p) \in T_pM \times T_pM$, valamint $H(p) \in T_pM^* \times T_pM^*$. Ezek mátrixai egymás inverzei, ebben az értelemben értendő az inverz szó az inverz metrika kifejezésben.

További fontos tenzorok kerülnek bevezetésre későbbi részekben.

3.4. Affin konnexó, metrika

Ha most adott egy $X \in \Gamma(TM)$ vektormező, és egy $f \in C^\infty(M)$ sima függvény, akkor legyen $X(f)$ az a függvény, mely a $p \in M$ pontban az f függvény $X(p)$ irány menti deriváltja. Ellenőrizhető, hogy az $X(f)$ függvény is $C^\infty(M)$-beli, valamint f és $X(f)$ egyértelműen meghatározza X-et.

Definíció. *Legyen adott az M sokaság, és $\Gamma(TM)$ jelöli a sokaság vektormezőinek halmazát, akkor a $\nabla_X Y : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ függvényt affin konnexiónak nevezzük, ha minden $X, Y \in \Gamma(TM)$-re és $f \in C^\infty(M)$-re:*

1. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, *azaz $C^\infty(M)$-homogén.*
2. $\nabla_X (fY) = (\partial_X f) Y + f \nabla_X Y$, *azaz teljesíti a Leibniz-szabályt.*

A konnexiónak fontos szerepe van az általános relativitáselméletben. Ha az alább definiált torzió-mentességet feltesszük, akkor az egyértelművé teszi a a konnexiót a sokaságon. Korábban próbáltak fizikai jelentést tulajdonítani olyan konnexióknak, melyekben a torzió nem tűnik el, azonban az általános relativitáselmélet ma elterjedt formájában torziómentes-konnexióval dolgoznak. A torzió-mentesség definiálásához szükség van az alábbi definícióra:

Definíció. *Az $X, Y \in \Gamma(TM)$ vektormezők kommutátara az az $[X, Y] \in \Gamma(TM)$ vektormező, mely egy sima függvényt az alábbi módon képez le:*

$$[X, Y] : f \mapsto X(Y(f)) - (Y(X(f))$$

Mostmár definiálhatjuk a torziót:

Definíció. *Egy ∇ affin konnexió torzió-mentes, ha minden $X, Y \in \Gamma(TM)$-re:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Ha adott egy metrika a sokaságon, akkor egyetlen torziómentes affin konnexió van, amely kompatibilis vele, az alábbiak szerint:

Definíció. *A ∇ konnexió kompatibilis a g metrikával az M sokaságon, ha minden $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ vektormezőre:*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Tétel. *Pontosan egy affin konnexió létezik, mely torzió-mentes és kompatibilis a g metrikával az M sokaságon.*

Bizonyítás. Legyen $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ tetszőleges vektormező. Először megmutatjuk, hogy $g(\nabla_Y X, Z)$ egyértelműen meghatározott, aztán innen következtetünk arra, hogy $\nabla_Y X$ egyértelműen meghatározott. A torziómentesség es a kompatibilitás definícióját felhasználva az alábbi egyenlőségeket kapjuk:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g([X, Y], Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{3.1}$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \tag{3.2}$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \tag{3.3}$$

Az (3.1) + (3.2) - (3.3) egyenlőséget felírva és továbbra is kihasználva a metrika linearitását, illetve a konnexió torziómentességét az alábbi egyenlőségre jutunk:

$$Xg(Y, Z)+Yg(Z, X)-Zg(X, Y) = 2g(\nabla_Y X, Z)+g([X, Y], Z)+g([Y, Z], X)+g([X, Z], Y)$$

Ebben az egyenlőségben az egyetlen tagban szerepel ∇, a többi tag pedig explicit X, Y, Z-től és g-től függ. Ezeket egy oldalra összegyűjtve a Koszul formulára jutunk:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z)+Yg(Z, X)-Zg(X, Y)-g([X, Y], Z)-g([Y, Z], X)-g([X, Z], Y)$$

Be lehet látni azt is, de nem bizonyítjuk, hogy a Koszul-formula egyértelműen meghatározza $\nabla_X Y$-t. □

A tétel alapján értelmes az alábbi definíció:

Definíció. *Adott g metrika mellett Levi-Civita konnexiónak nevezzük a torziómentes, g-vel kompatibilis affin konnexiót.*

Az alábbiakban bevezetjük a Christoffel-szimbólumokat, amelyek hasznosak a koordinátás írásmódban.

Definíció. *Legyen a továbbiakban* $\nabla_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$. *Ekkor* $\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j}$*-t a sztenderd koordinátabáison kibontva az együtthatókat* Γ^k_{ij}*-vel jelöljük és Christoffel szimbólumoknak nevezzük. Vagyis a Christoffel szimbólumokat az alábbi összefüggés definiálja:*

$$\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Definíció. $\nabla Y = 0$*-val jelöljük, és azt mondjuk, hogy az* $Y \in \Gamma(TM)$ *kovariáns deriváltja 0, ha* $\nabla_i Y = 0$ *minden i-re.*

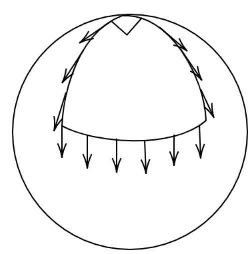
Ekkor természetesen minden $X \in \Gamma(TM)$-re teljesül, hogy $\nabla_X Y = 0$, ezért értelmes elhagyni az alsó indexet a jelölésben.

3.5. Paralell transzport

Ebben a részben a párhuzamosság fogalmának általánosítását szeretnénk bemutatni metrikus sokaságokon.

Fizikai vonatkozás

Dávid Gyula órájáról származik a következő közismert szemléltetés: egy vadász vadászatra indul, dél felé tartva a puskáját. Elindul lefelé, majd balra fordul, továbbra is délnek tartva a puskáját, majd felfelé. A puskája továbbra is dél felé néz és visszaér a kiindulási pontba. A puska mégis derékszöget zár be a kiindulási helyzethez képest. Milyen színű volt a medve? Az alábbi ábra szemlélteti a folyamatot.



A válasz: a medve fehér volt, a gömbi geometriából szerzett ismereteink alapján ugyanis ez csak az északi sarkból indulva történhet meg. Az intuitív képet finomítva a következő precízebb képet láthatjuk: vegyünk egy γ görbét a sokaságon - esetünkben a földgömbön - melynek mentén egy vektort szeretnénk párhuzamosan eltolni. Ez segít abban, hogy a szabad részecskék mozgását leírjuk az általános relativitáselméletben. A geodetikus posztulátum szerint ugyanis a szabad részecskék (ezek a kozmológiai modellekben jellemzően galaxisok) geodetikus görbék mentén mozognak.

Matematikai vonatkozás

A γ görbe érintője a p pontban legyen $v_\gamma(p) \in T_pM$. Az affin konnexió teremti meg a kapcsolatot T_pM és az ahhoz nagyon közeli T_qM tér között a γ görbe mentén. Ha ezt a két közeli vektorteret egymásra helyeznénk, akkor a párhuzamosság két vektor között azt jelentené, hogy a két vektor épp elfedi egymást. Az eltolt vektor az eltolás függvényében konstans, vagyis a differencia - mi esetünkben kovariáns derivált 0.

Definíció. *Egy* $X \in \Gamma(TM)$ *vektormezőt párhuzamosan eltoltnak nevezünk a* γ *görbe mentén, ha* $\nabla_{v_\gamma} X = 0$*, ahol* v_γ *a görbe sebességvektora.*

Megjegyzés. A párhuzamos eltolás definícióját gyengíthetjük, ha csak azt követeljük meg, hogy az eltolt vektor a közeli vektorunkkal azonos állású legyen. Ekkor az affin konnexió nyelvére fordítva ez a következőt jelenti:

Definíció. *Egy* $X \in \Gamma(TM)$ *vektormezőt párhuzamnak nevezünk a* γ *görbe mentén, ha* $\nabla_{v_\gamma} X = \mu X$*, ahol* μ *sima függvény és* v_γ *a görbe sebességvektora.*

Ebben a részben több, a párhuzamossággal kapcsolatos fogalmat is áttekintettünk. Fizikai vonatkozása a geodetikus posztulátum miatt leginkább az alábbi definíciónak van:

Definíció. *Egy* γ *görbét autoparalell eltoltnak nevezünk, ha* $\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0$*, ahol* v_γ *a görbe sebességvektora.*

3.6. Görbület

Az alábbi definíciók kiemelt szerepet játszanak az általános relativitáselméletben. Láttuk, hogy a metrika meghatározza a torziómentes konnexiót. Az alábbi mennyiségek a konnexióból származtatottak, ezeket már maga a fizikai modell fogja meghatározni.

Definíció. *Riemann tenzornak nevezzük azt az (1,3) tenzort, azaz* $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ *leképezést, mely a* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$*-re és* $\omega \in \Gamma(TM)^*$*-ra:*

$$R(W, Z, X, Y) = \flat(W)([\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z)$$

A változók sorrendje a fenti definícióban kényelmi célt szolgál.

Definíció. *Ricci-tenzornak nevezzük azt a (0,2) tenzort, azaz* $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ *leképezést, mely az* $X, Y \in \Gamma(TM)$*-re, és* x *lokális koordinátákra:*

$$Ric(X, Y) = \sum_i R(\frac{\partial}{\partial x^i}, Y, X, \frac{\partial}{\partial x^i})$$

Be lehet látni, hogy ez és az alábbi definíció független a lokális koordináták választásától.

Definíció. *Ricci-skalárnak nevezzük az alábbi mennyiséget* x *lokális koordináták mellett:*

$$R = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$$

Ezek a tenzorok nagyon fontosak. A téridő görbületét ugyanis az alábbi képlet határozza meg:

$$Ric - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

Ezt a képletet Einstein-egyenletnek nevezik. A képlet bal oldalán matematikai mennnyiségek állnak, melyek végsősoron a g metrikus tenzor függvényei - a Λ állandó kivételével, ezt fizikai méréssel lehet meghatározni. A jobb oldalon az egyetlen fizikai változó a T energia-impulzus tenzor, a többi fizikai állandó. Az energia impulzus tenzor az téridő szövetét képező anyaggal van van kapcsolatban. Így a téridő szerkezetét végsősoron az anyag határozza meg.

Zárásképpen a képlet megoldásáról. Fizikailag is értelemes, általános egzakt megoldás az Einstein egyenletre - ami a T energia impulzus tenzor ismeretében differenciáegyenlet g-re - nem ismert. Néhány esetben azonban egzakt megoldás adható, amikor speciális feltevéseket tesznek az anyagról, illetve a megoldást képező téridőről. Ezen megoldások közé tartozik a Minkowski-téridő (görbület nélküli üres tér), a Schwarzschild-téridő (gömbszimmetrikus anyag körüli téridő), és a Kerr-téridő (gömbszimmetrikus forgó anyag körüli téridő). Ezekkel kapcsolatban a kedves olvasó figyelmét a [6] szakirodalomra szeretném irányítani.

Irodalom

[1] Morris W. Hirsch. *Differential Topology.* Springer New York, New York, 1976.

[2] Kristóf János. *A matematikai analízis logikai alapjai.* Matematikai analízis sorozat. ELTE egyetemi jegyzet, 1998.

[3] Veróczky László. *A sokaságok differenciálgeometriája.* ELTE TTK Matematikai Intézet Geometriai Tanszék, egyetemi jegyzet, 2020.

[4] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical logic.* Chapman Hall, London, 1997.

[5] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry.* Academic Press, London, 1983.

[6] Hraskó Péter. *Bevezetés az Általános Relativitáselméletbe.* Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997.

[7] Rózsa Péter. *Játék a végtelennel.* Typotex Kiadó, Budapest, 2010.

[8] Matolcsi Tamás. *Models in Mechanics.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[9] Matolcsi Tamás. *Téridőmodellek.* Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, 2015.