

NYILATKOZAT

Név: Heiszer Magdolna

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: A5TOIO

Szakedolgozat címe:

Szféra fedése gömbsapkákkal

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.25.

Heiszer Magdolna

a hallgató aláírása

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZFÉRA FEDÉSE GÖMBSAPKÁKKAL

Szakdolgozat

Készítette: *Heiszer Magdolna*
Matematika BSc

Témavezető: *Dr. Naszódi Márton*
Geometria Tanszék



BUDAPEST, 2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
2. Alapfogalmak	7
3. Szféra fedési sűrűségére alsó és felső korlátok	8
3.1. Alsó korlát fedési sűrűségre	8
3.2. Felső korlát legkisebb fedési sűrűségre	8
3.3. A fő eredmény	9
4. A bizonyítás vázlata	9
5. Fedési algoritmusok	11
5.1. Segédlemmák	12
5.2. Rogers-algoritmus	14
5.3. Dumer algoritmus	17
6. Bizonyítás	19
6.1. További segédlemmák	19
6.2. A tétel bizonyítása	26
7. Mértékkoncentráció a gömbön	28
7.1. A kód	30
7.2. Az eredmény	31
Hivatkozások	34

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Naszódi Mártonnak, a szakdolgozatomhoz nyújtott minden segítségét. Nem volt oktatóm a félévek alatt, így külön megtisztelő, hogy elvállalta, hogy a konzulensem legyen. A témaajánlásért, a konzultációkért és a türelméért hálával tartozom neki. Mindig fordulhattam hozzá, ha kérdésem volt, de ha csak \LaTeX formázásban akadtam el, akkor is készségesen segített.

Köszönöm, hogy rámutattál, hogy én erre is képes vagyok és motiváltál a gondolkozásra!

Köszönöm a két Borimnak, akikre bármikor számíthattam az elmúlt három évben. Köszönöm a családomnak és barátaimnak is a sok támogatást, amit kaptam. Természetesen Bazsinak is köszönöm, hogy lelki támaszom a mindennapokban és mindig meghallgatott, amikor a matekról és a szakdolgozatomról áradoztam neki.

1. Bevezetés

Szakedolgozatom fő témája Ilya Dumer *Covering spheres with spheres* (2007) című cikke és az ehhez kapcsolódó lemmák, tételek értelmezése.

A publikáció egy adott n -dimenziós és r sugarú szférának (Euklideszi-térben) való gömbsapkákkal vett fedését vizsgálja. Célja a lehető legkisebb sűrűségű fedés létrehozása. Ehhez azonos sugarú gömbi körlapokat, azaz gömbi sapkákat használ. Nem a pontos elemszámot becsüli, hanem a fedési sűrűségre vett korábban ismert legerősebb felső korlátot csökkenti.

A tételt a 3.3. fejezetben ismertetem. Kimondja, hogy növekvő n -dimenzióban létrehozható egy olyan egység sugarú sapkákkal vett fedés az egyenél nagyobb sugarú szférán, amelynek fedési sűrűsége nagyságrendileg $(n \ln n)/2$. Ez az eredmény közel fele akkora csökkenti a fedési sűrűséget, mint a korábbi legjobb becslés, a Rogers-korlát. A tétel következménye, hogy $(n \ln n)/2$ nagyságrendű sűrűségű fedés létrehozható egység sugarú gömbökkel a teljes Euklideszi térre.

A szakdolgozatomban található számítások saját számításaim. Egyrészt azért, mert Dumer nem vezeti le részletesen a számításait, viszont fontosnak tartottam ezeket végignézni, hogy teljesen érthessem a bizonyítás lépéseit. Másrészt a feldolgozott cikkben több számítási hibát találtam, amelyeket javítottam. Azt is észrevettem, hogy habár egyes lépések hibásak a cikkben, a későbbiek folyamán mégis a helyes értéket, előjelet használja. Erre példa a 6.1.2. lemma, amelynek számolását a 22-dik oldalon találhatjuk.

Elsőként ismertetem a jelenleg ismert legjobb alsó korlátot \mathbb{R}^n egység gömbökkel történő fedésének sűrűségére, amely a Coxeter-Few-Rogers cikkben található [4]. Ehhez hasonló eredményeket ért el szintén az alsó korlátra ifj. Böröczky Károly és Wintsche Gergely. Ez az alsó határ $c_0 n$, ahol c_0 egy konstansot jelöl. Ezt a témát nem fogom bővebben kifejteni, de érdekes lehet megfigyelni, hogy az alsó és felső korlát –Dumer új felső határával– mennyiben közelítenek egymáshoz.

Ezután a Rogers-korlátot ismertetem –erről az [5] és [6] cikkekben olvashatunk–, illetve az azal nagyságrendileg majdnem azonos Böröczky-Wintsche felső korlátot, amelyről a [3] cikkben olvashatunk részletesebben. Dumer eredményét a Rogers-korláthoz érdemes mérni, hiszen ezt az 1957-es eredményt Dumer előtt másnak nem sikerült javítania. Ezeket a korlátokat részletesen a 3.1. és a 3.2. fejezetekben ismertetem.

A bizonyítás lépéseit először felvázolom a 4. fejezetben, majd a teljes bizonyítás előtt ismertetem a bizonyításhoz szükséges lemmákat az 5.1. és 6.1. fejezetekben, illetve a fedés kialakításához használt algoritmust is bemutatom az 5.3. fejezetben. Az 5.2. fejezetben bemutatom a Rogers-algoritmust, amelyet az 5.3. fejezetben megváltoztatunk a hatékonyabb fedés elérése érdekében. Mivel a Rogers-korlátot csökkentette Dumer, így fontos ismernünk, hogy milyen al-

goritmussal alakította ki fedését Rogers, hogy utána érthetővé váljon, Dumer miben változtatott ezen a módszeren.

Vázlatosan a Rogers-algoritmus két fő lépésből áll; elsőként vesz egy teljes fedést S_r^n -re ε -sugarú sapkákkal. Erre azért van szükség, hogy végesíteni tudjuk a feladatot, hogy ne a szféra végtelen sok pontját fedjük le, hanem először csak az ε -fedés véges számú középpontjait. Ha ezeket a véges számú középpontokat le tudtuk fedni $(1 - \varepsilon)$ -sugarú sapkákkal, akkor azokat egység nagyságúra növelve már a teljes szférát tudjuk fedni. Rogers ehhez a fedéshez vesz véletlenszerűen N darab pontot a szférán, és ezekből képez egy fedést (nem feltétlen lesz teljes) $C(\rho, y)$ sapkákkal, amelyek középpontjai ezek a véletlen választott pontok. Nagyságrendileg ε nagyon kicsi, megközelítőleg $(1/n \ln^2 n)$, ρ pedig $(1 - \varepsilon)$ -nal egyenlő. Második lépésként veszi azokat az ε -hálóbeli középpontokat, amelyeket nem fednek a $C(\rho)$ sapkák és ezeket, meg az y középpontokat veszi az egység sugarú sapkákkal való teljes fedéséhez az S_r^n szférának.

Ezzel szemben Dumer algoritmus három lépésből áll. Ugyanúgy vesz N darab pontot, megtalálható így a $C(\rho, y)$ gömbi sapkákkal való részleges fedés, illetve az ε -hálót is használja. Bevezet egy μ -fedést, amelyben a gömbsapkák sugara ugyan nagyobb ε -nál, de nagyságrendileg közelebb áll hozzá, mint ρ -hoz, körülbelül $(1/\sqrt{n} \ln n)$. Erre a fedésre azért van szükség, mert így tudja csökkenteni azoknak a pontoknak a számát, amelyeket hozzávesz az egységfedést alkotó véletlenszerűen alkotott középpontokhoz. Az egység sugarú sapkák középpontjának az y középpontokat veszi, viszont nem az ε -hálóbeli $C(\rho)$ sapkákkal nem fedett pontokat veszi hozzá, hanem azokat a μ -hálóbeliakat, amelyeknek a gömbi sapkájában van ilyen nem fedett ε -hálóból származó középpont. Ezeknek a pontoknak az úniója alkot majd egységfedést.

Emellett egy érdekes kitekintést teszek az 5.1.2. lemmához kapcsolódóan, amelyben a gömbi sapkák térfogatát vizsgáljuk. A kitekintés alapja az n -dimenziós gömb térfogatának vizsgálata. Ezt a 7. fejezetben olvashatjuk, amiben végigveszem, hogy miért koncentrálódik a gömb térfogata növekvő dimenzió esetén az egyenlítő köré egyre erősebben. Az elméleti összefoglaló után szimulálom a gömb térfogatának koncentrálódását az egyenlítője köré. Látni fogjuk, hogy a kirajzolt ábrák tartanak kompakt halmazon a normális eloszlás haranggörbéjéhez. Ezt a megfigyelésemet alátámasztják a Böröczky-Wintsche cikkben részletezett képletek.

Összefoglalva szakdolgozatomat; a 2. fejezetben ismertetem a felhasznált definíciókat. A 3. fejezetben bemutatom a Dumer cikke előtt ismert alsó és felső korlátokat a fedés sűrűségére. A tételt a 3.3. fejezetben mondom ki, majd vázoló a bizonyítást a 4. fejezetben. Ezután ismertetem a Rogers-algoritmust és az abból Dumer által alakított új algoritmust. Erről részletesen az 5. fejezetben olvashatunk. A teljes bizonyítása előtt végigveszem az ahhoz szükséges lemmákat az 5.1. és 6.1. alfejezetekben, majd ismertetem a tétel bizonyítását a 6.2. alfejezetben.

2. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben bevezetem a továbbiakban felhasznált fogalmakat.

1. Definíció. Legyen n pozitív egész és $r > 0$. Ekkor legyen $B_r^n(x)$ egy r -sugarú *golyó*, amelynek középpontja $x = (x_1, \dots, x_n)$ az n -dimenziós Euklideszi térben \mathbb{R}^n :

$$B_r^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (z_i - x_i)^2 \leq r^2 \right\}$$

Legyen S_r^n egy r -sugarú *szféra* az n -dimenziós Euklideszi térben \mathbb{R}^n :

$$S_r^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = r^2 \right\}$$

2. Definíció. Az egységgömb $B_1^{n+1}(x)$ metszi az S_r^n szférát egy *gömsapkában*,

$$C^n(\rho, y) = S_r^n \cap B_1^{n+1}(x),$$

amelynek szférikus középpontja $y \in S_r^n$, ahol $y = r \cdot \frac{x}{|x|}$, fél-húrja $\rho \leq 1$, valamint a szférikus középpontba és egy kerületi pontba mutató vektorok szöge $\alpha = \arcsin \rho/r$.

A fedés létrehozásához optimálisabb, ha a $B_1^n(x)$ golyók helyett vesszük az azoknak megfelelő gömsapkákat, így a továbbiakban gyolyók helyett gömsapkákkal való fedést veszek.

Mivel a szakdolgozatomban a szférák fedését vizsgálom, így a továbbiakban –pár kivétellel– már csak a szférák fedését tekintem, célunk pedig az egységsugarú gömsapkákkal vett legkisebb sűrűségű fedés kialakítása. A megadott cikkekben és a szakdolgozatomban is a felhasznált gömbi sapkák sugara maximum egység méretű, így a legnagyobb sugarú gömbi sapka $C^n(1, y)$ lesz. Ezt úgy érjük el, ha a szférát metsző $B_1^{n+1}(x)$ golyó középpontjának távolsága az origótól:

$$\|x\| = \sqrt{r^2 - 1}.$$

3. Definíció. Az $X \subset S_r^n$ ponthalmaz az S_r^n szférának egy ε -fedése (ε -hálója), ha S_r^n benne van az $\varepsilon > 0$ sugarú és $x \in X$, $X \subseteq C(\varepsilon, x)$ gömbi sapkák uniójának halmazában.

Az ε -hálók családja:

$$\text{Cov}_r^n(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ X \subset S_r^n : \bigcup_{x \in X} C^n(\varepsilon, x) \supseteq S_r^n \right\}.$$

4. Definíció. Legyen S_r^n szféra \mathbb{R}^n -en. Az egységfedés minimum *fedési sűrűsége* leírható:

$$\vartheta_r^n(1) = \frac{\text{vol}_n(C_1^n(x))}{\text{vol}_n(S_r^n)} \cdot \min_{X \in \text{Cov}_r^n(1)} |X|.$$

5. Definíció. Legyen $C(\mu, z)$ gömbi sapka $\mu > 0$ sugarú, z középpontú. Ekkor a $C(\rho, y)$, $\rho > 0$ sugarú és y középpontú gömbi sapka d -közeli ($d < \rho$) $C(\mu, z)$ sapkához, ha az y és z középpontok távolsága kisebb d -nél.

3. Szféra fedési sűrűségére alsó és felső korlátok

3.1. Alsó korlát fedési sűrűségre

Az eddig ismert legnagyobb alsó korlát a Coxeter-Few-Rogers cikkben [4] található, ami kimondja, hogy megfelelően nagy sugarú szférának egység sugarú gömbsapkákkal vett minimális fedési sűrűsége:

$$\vartheta_r^n(1) \geq c_0 n. \quad (1)$$

Itt és a továbbiakban c_i egy univerzális konstans jelöl.

Ehhez hasonló eredményt találhatunk bármely $r \geq n$ tulajdonságú S_r^n szféra fedésére ifj. K. Böröczky és G. Wintsche cikkében [3]. Amennyiben $r' \leq \arcsin \sqrt{\frac{1}{n+1}}$ a fedéshez használt golyók sugara, akkor az S_r^n szféra fedési sűrűsége r' sugarú golyókkal szintén:

$$\vartheta_r^n(r') \geq c_0 n,$$

ahol c_0 egy pozitív konstans.

3.2. Felső korlát legkisebb fedési sűrűségre

C.A. Rogers több felső korlátot is talált a legkisebb fedési sűrűségre S_r^n -re. Ezeknek bizonyítását az [5] és [6] cikkekben találhatjuk. Kimondja, hogy elég nagy r sugár esetén az S_r^n szférának létezik olyan egység sugarú gömbsapkákkal vett fedése, melynek sűrűsége:

$$\vartheta_r^n(1) \leq \left(1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + \frac{5}{\ln n}\right) n \ln n = n \ln n + \text{alacsonyabb rendű tagok.} \quad (2)$$

Dumer cikke előtt ez a Rogers-korlát volt a legjobb eredmény a relatív kicsi ρ -sugarú golyóval való fedési sűrűségére az S_r^n szférának, valamint szintén a ρ -sugarú golyókkal való fedési sűrűségére az n -dimenziós Euklideszi térnek, \mathbb{R}^n , növekvő n dimenzió esetén.

A Rogers-korláthoz nagyon hasonló és nagyságrendileg majdnem azonos sűrűségű fedést alko-

tott ifj. K. Böröczky és G. Wintsche, ami a [3] cikkben olvasható.

Kimondja, hogy egy szféra S_r^n , mely $n \geq 3$ dimenziójú és tetszőleges $r > 1$ sugarú, fedési sűrűségére a legerősebb felső korlát:

$$\begin{aligned} \vartheta_r^n(1) &\leq \left(1 + \frac{2}{\ln n}\right) \left(1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + \frac{\sqrt{e}}{n \ln n}\right) n \ln n = \\ &= \left(1 + \frac{2}{\ln n}\right) (n \ln n + n \ln \ln n + \sqrt{e}) \end{aligned} \quad (3)$$

3.3. A fő eredmény

Dumer cikkének eredménye a következő tétel, amely csökkenti a fentebbi két felső korlátot (2) és (3). Megközelítőleg a felére csökkenti a Rogers által bizonyított felső korlátot, így ez az érték az elérhető legkisebb fedési sűrűséget adja.

Tétel. *Az egynél szigorúan nagyobb sugarú és legalább száz dimenziójú szférára létezik olyan fedés egység sugarú gömbi sapkákkal, aminek fedési sűrűsége fele a Rogers-korlátnak, nagyságrendileg $(n \ln n)/2$.*

Azaz $r > 1$ és $n \geq 100$ esetén, S_r^n fedési sűrűségének minimuma:

$$\vartheta_r^n(1) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{3}{\ln n}\right) n \ln n. \quad (4)$$

A tétel alábbi következményét a szakdolgozatomban nem bizonyítom. Belátásához használni kell a $\vartheta^{\mathbb{R}^{n-1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \vartheta_r^n$ egyenletet. A bizonyítás megtalálható az [1] és [7] cikkekben.

Következmény. *Az egész Euklideszi teret, \mathbb{R}^n -t, le lehet fedni egységgömbökkel úgy, hogy fedési sűrűsége $n \rightarrow \infty$ esetén*

$$\vartheta^{\mathbb{R}^n}(1) \leq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) n \ln n = \frac{1}{2} n \ln n + o(1) n \ln n, \quad (5)$$

ahol $o(1)$ olyan hibatag, amelyre igaz, hogy $o(1) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

4. A bizonyítás vázlata

Ebben a fejezetben ismertetem a tétel bizonyításának lépéseit nagy vonalakban.

Elsőként az 5.1.2. lemmában becsüljük a $C(\varepsilon, x)$ és $C(\rho, x)$ gömbi sapkák valószínűségét, ahol ismertek a paraméterek és $\rho = 1 - \varepsilon$, amik a gömbi sapkák sugarát jelölik. Ezt majd a 6.1.2. lemma bizonyításában alkalmazzuk.

Ismertetem következőként a Rogers algoritmust, amit azért fontos átlátnunk, mert ezzel a metódussal találkozhatunk az [5] és [6] cikkekben. Ezekben a cikkekben olvashatunk arról a C.A. Rogers által elért fedési sűrűségről, amit Dumernek sikerült csökkenteni. Mivel nem teljesen új fedési metódust alkalmaz Dumer, hanem bizonyos részeiben átalakítja a Rogers által használt algoritmust, hasznos először azt megismernünk.

Összefoglalva a Rogers algoritmust, elsőként veszünk N darab véletlenszerűen választott pontot a szférán, ezek lesznek a –nem feltétlen teljes fedést adó– fedéshez használt $C(\rho, y)$ gömbi sapkák középpontjai. Majd veszünk egy $\varepsilon < \rho$ sugarú sapkákkal való teljes fedést is a szférán, itt is teljesül, hogy $\rho = 1 - \varepsilon$. Nagyságrendileg az ε paraméter nagyon kicsi, körülbelül $(1/(n \ln n))$, tehát ρ nagyon közeli egyhez. Valójában a következő lépésben az ε -háló középpontjait akarjuk lefedni ρ -sugarú gömbi sapkákkal. Erre azért van szükség, mert ha ez sikerül, az ad egy egységfedést a teljes szférára is. De önmagában a ρ -sugarú sapkák nem fedik az összes ε -hálóbéli középpontot, így ki kell bővíteni a középpontok halmazát, amit a következőképpen teszünk. Megvizsgáljuk, hogy mely $Cov(\varepsilon)$ fedésbeli pontok nincsenek fedve a ρ -sugarú sapkákkal, ezek a pontok alkotják U' ponthalmazt, ahol $u' \in U'$ egy ilyen ε -hálóbéli középpont. Vesszük ezeknek az u' pontoknak és a kezdeti $C(\rho, y)$ sapkák Y középpontjainak únióját. Utolsó lépésként pedig ezeket az únióbéli $X = Y \cup U'$ pontokat tesszük az 1-sugarú gömbi sapkák középpontjává, akkor ez már teljesen fedni fogja a szférát. Ezt részletesebben –például hány darab ilyen N pontot válasszunk, vagy az ε paraméter választása– az 5.2. fejezetben tárgyalom.

Ebből az algoritmusból vonhatjuk le következményként az 5.2.1. lemmát, amely kimondja, hogy $n \geq 20$ -ra milyen fedési sűrűséget tudunk elérni –a Rogers-algoritmusban tárgyalt középpontokat felhasználva– egységsapkákkal az S_r^n szférán. Ez a sűrűség erősebb korlát $n \leq 100$ -ra, mint a tételben bemutatott (4) korlát, így a tétel bizonyításához szükséges lemmákat és számításokat csak $n \geq 100$ dimenzióra vizsgáljuk a továbbiakban.

A Rogers-algoritmus átalakításának lépései fontos része Dumer bizonyításának. Választunk véletlenszerűen N darab pontot, ezek lesznek a későbbiekben felhasznált $C(\rho, y)$ gömbi sapkák középpontjai, hasonlóan a fentebbi algoritmushoz. Ezután létrehozunk két újabb fedést S_r^n -re, rögzítjük $U \in Cov_r^n(\varepsilon)$ fedést és $Z \in Cov_r^n(\mu)$ fedést. Ehhez felhasználjuk az előbbi ε -hálót és egy másik, μ -hálót, ahol $\mu > \varepsilon$, de nagyságrendje $(1/\sqrt{n} \ln n)$, így ε -hoz vannak közel. Ekkor vegyük azokat a μ -sugarú sapkákat, amelyek tartalmaznak legalább egy olyan $u \in U$ pontot, amely nincs fedve a ρ -sugarú sapkákból kilakított részleges fedéssel. Legyenek ezek a $C(\mu, \bar{z})$ gömbi sapkák, $\bar{z} \in \bar{Z}$ középpontokkal. Vegyük ezeknek a \bar{z} és y középpontoknak az únióját a Rogers-algoritmushoz hasonlóan és ha ezeket az únióbéli $X = Y \cup \bar{Z}$ pontokat tesszük az 1-sugarú gömbi sapkák középpontjaivá, akkor megkapjuk a kívánt fedést. Ezt a metódust az 5.3. fejezetben fejtem ki bővebben.

Fontos eredmény olvasható a 6.1.1. lemmában, amely kimondja, hogy egy μ -sapka majdnem

teljesen fedve lesz egy $C(\rho, y)$ sapkával, amennyiben ez utóbbi d -közeli a μ -sapkához. A paraméterválasztásnál (18) találhatjuk d meghatározását. Azaz valójában, a dimenzió növelésével csak egyre jobban eltűnően kicsi része marad fedetlenül a μ -sapkáknak. Ugyanakkor nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy egy átlagos μ -sapka egyszerre több olyan sapkával is fedve van, ami hozzá d -közeli. A (19) egyenlet alapján ezeknek a d -közeli sapkák számának az átlaga $(\lambda n \ln n)$ nagyságrendű:

$$\lambda n \ln n - \Omega_d < \Omega_d N \leq \lambda n \ln n . \quad (6)$$

A teljes bizonyítás előtt belátjuk, hogy a nem-telített sapkák csak kis részét teszik ki a teljes $C(\mu)$ sapkák halmazának, ezt a 6.1.2. lemmában találjuk. A következő lemmában tekintjük a hiányos sapkákat, amelyek azok a $C(\mu)$ sapkák, amelyek tartalmaznak legalább egy olyan ε -hálóbeli pontot, amelyet nem fed az N darab véletlenszerűen választott $C(\rho, y)$ gömbi sapkák halmaza. A 6.1.3. lemmában az ilyen ε -hálóbeli pontoknak a számát vizsgáljuk, és bebizonyítjuk, hogy ez a ponthalmaz az $U \in \text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ fedésnek csak kis részét alkotja.

Felhasználva az előbbi két lemmát tudjuk becsülni a \bar{Z} ponthalmaznak a várható nagyságát:

$$\bar{N} < e^{-n/4} N .$$

Ebből következtetve mondhatjuk, hogy létezik N véletlen választott y pont, ami maximum $e^{-n/4} N$ darab μ -hálóbeli pontot hagy fedetlenül. Ekkor kibővítve a középpontok halmazát ezekkel a pontokkal már egy olyan $X = Y \cup \bar{Z}$ halmazt kapunk, ami egységfedést formál S_r^n szférán. Ennek a fedésnek sűrűségét a 6.2. alfejezetben ismertetem részletesebben, amiből pedig már látni fogjuk, hogy a tételben tárgyalt (4) egyenlőtlenség teljesül, így a tételt bebizonyítottuk.

5. Fedési algoritmusok

A következő lemmákkal és algoritmussal a ϑ_r^n fedési sűrűséget becsüljük a (3) felső korláthoz használt Rogers-algoritmushoz hasonlóan, azonban egy picit eltérő technikával. Az itteni számolások felhasználásával fogjuk a 3.2. fejezetben vizsgált (2) és (3) korlátot csökkenteni.

Vegyünk egy $n \geq 3$ dimenziójú és $r > 1$ sugarú szférát, S_r^n . A $C(\rho, y)$ jelölést használjuk a $C^n(\rho, y)$ sapkára, amennyiben n fix paraméter.

Amennyiben egy konkrét y középpont nem jelentős, a $C(\rho)$ rövidítést használhatjuk.

Ebben az esetben $\text{Cov}_r^n(\rho)$ jelöli az S_r^n szférának a ρ -sugarú, $C(\rho)$ gömbi sapkák halmazával való fedéseinek családját. A $\text{Cov}(\rho)$ rövidített jelölést használhatjuk $\text{Cov}_r^n(\rho)$ helyett, amennyi-

ben n és r fix paraméterei a szférának. Definíció szerint $\text{Cov}_r^n(\rho)$ fedésnek a fedési sűrűsége:

$$\vartheta(\rho) = \Omega_\rho |\text{Cov}(\rho)|, \text{ ahol}$$

$$\Omega_\rho = \frac{|C(\rho)|}{|S_r^n|}.$$

5.1. Segédlemmák

6. Definíció. Legyenek $f_1(x)$ és $f_2(x)$ pozitív differenciálható függvények. Ekkor $f_1(x)$ moderálja $f_2(x)$ -et $x \geq a$ -ra, ha minden $x \geq a$ -ra igaz, hogy

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \geq \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}.$$

5.1.1. Lemma. Legyen $f_i(x)$ olyan m darab függvény, hogy $f_1(x)$ moderálja minden más $f_i(x)$ -et $x \geq a$ -ra, ha $i \geq 2$. Ekkor az $f_1(x) \geq \sum_{i=2}^m f_i(x)$ egyenlőtlenség igaz minden $x \geq a$ -ra, ha teljesül $x = a$ -ra.

Bizonyítás. Newton-Leibnitz formulát alkalmazva kapjuk, hogy

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt$$

$$\ln f(x) = \ln f(a) + \int_a^x (\ln(f(t)))' dt$$

$$f_i(x) = f_i(a) \cdot e^{s_i(x)}$$

$$f_i(x) = f_i(a) \exp\{s_i(x)\}, \text{ ahol } s_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x \frac{f_i'(t)}{f_i(t)} dt.$$

Ezt felhasználva:

$$f_1(x) \geq \sum_{i=2}^m f_i(a) \exp\{s_1(x)\} \geq \sum_{i=2}^m f_i(a) \exp\{s_i(x)\} = \sum_{i=2}^m f_i(x).$$

□

Elsőként becsüljük meg a $C(\varepsilon, x)$ és $C(\rho, x)$ gömbi sapkák térfogatát, annak ismeretében, hogy a $C(1)$ félgömbnek a valószínűségi mértéke: $\Omega_1 = 1/2$. Legyen k_n az egység-Euklideszi n -golyó (B^n) térfogata.

5.1.2. Lemma. Legyenek $\varepsilon, \rho < 1$, ahol $\rho = 1 - \varepsilon$ a felhasznált gömbsapkák sugarai. A $C(\varepsilon, x)$ és $C(\rho, x)$ sapkáknak az 1 sugarú szférán (S_1^n) való valószínűségi mértékük:

$$\Omega_\varepsilon \geq \frac{\varepsilon^n}{3\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{(n+1)2\pi}} \quad (7)$$

$$\Omega_\rho \geq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n\varepsilon}{\pi}}, \text{ ha } \varepsilon < \frac{\pi}{4n} \quad (8)$$

Bizonyítás. Az első, Ω_ε egyenlőtlenség számítását a [3] cikkben találhatjuk.

Így most nézzük a második, Ω_ρ valószínűséget. Legyen $\alpha = \arcsin(\rho)$. Ekkor a $C(\rho, x)$ gömbi sapka valószínűségi mértéke:

$$\Omega_\rho = n k_n \int_0^\alpha \sin^n \beta d\beta \geq \Omega_1 - n k_n \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Figyelembe véve, hogy $\pi/2 - \alpha \leq \sqrt{2\varepsilon}$:

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} \leq \sqrt{2\varepsilon}(1 - \varepsilon/4).$$

Másrészt, bármely $\varepsilon < 3/4$ -re:

$$\sin(\sqrt{2\varepsilon}) \geq \sqrt{2\varepsilon}(1 - \varepsilon^2/3) \geq \sqrt{2\varepsilon}(1 - \varepsilon/4).$$

Alkalmazzuk a $\sin x \geq x(1 - x^2/6)$ egyenlőtlenséget bármely $x \in (0, \pi/2)$ -re. Ekkor vegyük

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\geq k_n \sqrt{n\pi/2} \\ \Omega_1 - \Omega_\rho &\leq n k_n \sqrt{2\varepsilon} \leq \Omega_1 \sqrt{4n\varepsilon/\pi} \\ \Omega_\rho &\geq \Omega_1 (1 - \sqrt{4n\varepsilon/\pi}). \end{aligned}$$

Tekintve, hogy tudjuk, hogy $\Omega_1 = 1/2$, ha a $C(1)$ félgömről beszélünk, és a ρ értéke nem fogja 1-et meghaladni, így a megfelelő gömbi sapka valószínűsége sem lesz nagyobb Ω_1 -nél. Ezt felhasználva,

$$\Omega_\rho \geq \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n\varepsilon}{\pi}} \right)$$

egyenlőtlenségre jutunk. □

5.2. Rogers-algoritmus

Ebben a fejezetben ismertetem a Rogers algoritmust, amivel a (2) felső korlátot alkotta meg. Ezzel az algoritmussal alakította ki azt a fedését, amit sokáig nem sikerült javítani. Alkalmazzuk a következő paramétereket:

$$\varepsilon = \frac{1}{2n \ln^2 n}, \quad \rho = 1 - \varepsilon, \quad \lambda = 1 + \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}. \quad (9)$$

Ezekkel a paraméterekkel a (7) és (8) csökkenthető, azaz a gömbi sapkák valószínűségi mértékeinek becslése $n \geq 20$ esetén:

$$\Omega_\varepsilon \geq \frac{\varepsilon^n}{8\sqrt{n}} \quad (10)$$

$$\Omega_\rho \geq \theta_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln n} \sqrt{\frac{1}{2\pi}}. \quad (11)$$

Célunk minél gazdaságosabban lefedni az S_r^n szférát, azaz minél kisebb sűrűségű fedést alkotni. A szféra $\text{Cov}_r^n(1)$ fedésének létrehozásához először választunk véletlenszerűen N darab pontot, hogy $y \in S_r^n$ és

$$\frac{\lambda n \ln n}{\Omega_\rho} - 1 < N \leq \frac{\lambda n \ln n}{\Omega_\rho}. \quad (12)$$

Ekkor vesszük a $C(\rho, y)$ gömbi sapkák N halmazát, középpontjainak halmaza pedig Y . Vegyünk egy kisebb ($\rho > \varepsilon$) gömbi sapkákkal $C(\varepsilon, u)$ való $\text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ teljes fedést, ahol $U \in \text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ véges ponthalmaz, hogy:

$$\text{Cov}_r^n(\varepsilon) = \left\{ U \subset S_r^n : \bigcup_{u \in U} C^n(\varepsilon, u) \supseteq S_r^n \right\}.$$

Rögzítsünk egy ilyen U fedést. Vizsgálva a fentebbi U ponthalmazt mondhatjuk, hogy ha valamely $X \subset S_r^n$ halmazra teljesül, hogy $\rho = 1 - \varepsilon$ esetén $\bigcup_{x \in X} C(\rho, x) \supseteq U$, akkor $X \in \text{Cov}_r^n(1)$ is teljesül. Ehhez tekintsük azokat az $u' \in U'$ pontokat, amelyek a $C(\rho, y)$ gömbi sapkákkal nincsenek lefedve és hozzájuk létre a $X = Y \cup U'$ ponthalmazt, mely a ρ sugarú sapkák középpontjai és az ε -háló azon pontjai, amelyeket a $C(\rho, y)$ sapkák nem fednek. Ekkor ez a X halmazunk már fedi a teljes $U \in \text{Cov}(\varepsilon)$ fedést ρ -sugarú sapkákkal.

A $C(\rho, x)$ sapkáknak sugarát megnöveljük 1-re, azaz ε -nal növeljük, $C(1, x)$ sapkákat kapunk és ezzel a egységsugarú sapkákkal való teljes fedést:

$$\text{Cov}_r^n(1) = \left\{ X \subset S_r^n : \bigcup_{x \in X} C^n(1, x) \supseteq S_r^n \right\}.$$

A következő lemmában vizsgáljuk az így kialakult fedési sűrűséget.

5.2.1. Lemma. $n \geq 20$ dimenzióra, S_r^n szféra $C(1, x)$ egységsapkákkal való fedésének sűrűsége:

$$\vartheta_r^n(1) \leq \left(1 + \frac{2 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{2}{\ln n}\right) n \ln n. \quad (13)$$

Bizonyítás. Legyen N' azoknak az $U' \in \text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ -beli u' pontoknak a várható száma, amelyeket a véletlenszerűen választott N darab y középpontok körüli ρ -sugarú sapkák nem fednek. Bármely u pont fedve van $C(\rho, y)$ gömbi sapkával, Ω_ρ valószínűséggel, tehát annak a valószínűsége, hogy nincs fedve $(1 - \Omega_\rho)$. Vizsgáljuk, vajon hány ε -hálóbeli pont marad ki? A (12) alsó korlátját felhasználva kapjuk:

$$N' = (1 - \Omega_\rho)^N \cdot |\text{Cov}_r^n(\varepsilon)|, \text{ ahol}$$

$$(1 - \Omega_\rho)^N \leq (1 - \Omega_\rho)^{(\lambda n \ln n)/\Omega_\rho - 1} = \frac{(1 - \Omega_\rho)^{(\lambda n \ln n)/\Omega_\rho}}{1 - \Omega_\rho}.$$

Vegyük (11) legkisebb értékét, azaz amikor Ω_ρ nagyon közeli a félgömbhöz, de nem tud $\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln n} \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ alá menni. Ekkor a nevező a következőképp alakul:

$$\frac{(1 - \Omega_\rho)^{(\lambda n \ln n)/\Omega_\rho}}{1 - \Omega_\rho} \leq \frac{(1 - \Omega_\rho)^{(\lambda n \ln n)/\Omega_\rho}}{1/2} = 2 \cdot (1 - \Omega_\rho)^{(\lambda n \ln n)/\Omega_\rho}.$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy:

$$N' \leq 2 (1 - \Omega_\rho)^{(\lambda n \ln n)/\Omega_\rho} \cdot |U|.$$

5.2.1. Megjegyzés. $(1 - x)^{1/x}$ sorozat csökkenő $x \in (0, 1)$ -re.

Vegyük $\Omega_\rho = \theta_n$ (11) értékét. Ezzel megkapjuk a felső korlátot:

$$(1 - \Omega_\rho)^N \leq 2 (1 - \theta_n)^{(\lambda n \ln n)/\theta_n} \leq 2 e^{t_n}, \text{ ahol}$$

$$t_n = (\ln n + 2 \ln \ln n) \frac{\ln(1 - \theta_n)}{\theta_n}.$$

Ezután szintén (11) alapján mondhatjuk, hogy

$$|U| = \frac{\vartheta(\varepsilon)}{\Omega_\varepsilon} \leq \left(\frac{\vartheta_\varepsilon}{\Omega_1}\right) \cdot [2n \ln^2 n]^n \cdot 8 \cdot \sqrt{n}. \quad (14)$$

Előző számolásokat felhasználva kapjuk, hogy

$$N' \leq 2 e^{nt_n} |U| \leq 2 e^{nd_n} \frac{\vartheta(\varepsilon)}{\Omega_1}, \text{ ahol} \quad (15)$$

$$d_n = t_n + \frac{\ln 8}{n} + \frac{\ln n}{2n} + \ln 2 + \ln(n \ln^2 n).$$

5.2.2. Megjegyzés. t_n moderálja d_n -t.

Ekkor a következő számolással egyszerűen bebizonyítható, hogy $d_n \leq d_{20} < -0,4$

$$\begin{aligned} \theta_{20} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 20} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ t_{20} &= (\ln 20 + 2 \ln \ln 20) \cdot \frac{\ln(1 - \theta_{20})}{\theta_{20}} \\ d_{20} &= t_{20} + \frac{\ln 8}{20} + \frac{\ln 20}{2 \cdot 20} + \ln 2 + \ln(20 \ln^2 20) \end{aligned}$$

Ezeket végigszámolva kapjuk, hogy $d_{20} \approx -0.40399$, tehát kisebb -0.4 -nél.

$$\begin{aligned} d_{20} &= t_{20} + \frac{\ln 8}{20} + \frac{\ln 20}{2 \cdot 20} + \ln 2 + \ln(20 \ln^2 20) = \\ &= (\ln 20 + 2 \ln \ln 20) \cdot \frac{\ln(1 - \theta_{20})}{\theta_{20}} + \frac{\ln 8}{20} + \frac{\ln 20}{40} + \ln 2 + \ln(20 \ln^2 20) = \\ &= (\ln 20 + 2 \ln \ln 20) \cdot \frac{\ln\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 20} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right)\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 20} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}} + \frac{\ln 8}{20} + \frac{\ln 20}{40} + \ln 2 + \ln(20 \ln^2 20) \approx \\ &\approx -6.46611 + 6.06212 = -0.40399 < -0.4 \end{aligned}$$

Vegyünk az X ponthalmazon, ahol $X = Y \cup U'$, egy fedést $C(1, x)$ gömbi sapkákkal, hogy a sapkák száma ne haladja meg $N + N'$ nagyságát. Ekkor (8) egyenlőtlenség és (12) alapján megkapjuk az X fedési sűrűségét:

$$\begin{aligned} \vartheta(1) &= \Omega_1 (N + N') \leq (\lambda n \ln n) \frac{\Omega_1}{\Omega_\rho} + \vartheta(\varepsilon) e^{-n/3} \leq \\ &\leq \frac{\lambda n \ln n}{1 - \sqrt{2/\pi} \ln^{-1} n} + \vartheta(\varepsilon) e^{-n/3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Bármely n -re ez a korlát, (16), kizárólag $\vartheta_r^n(\varepsilon)$ fedési sűrűségtől függ. Ezután \mathbb{R}^{n+1} -ben újraskálázzuk és lecseréljük $S_{r/\varepsilon}^n$ szféra $\text{Cov}_{r/\varepsilon}^n(1)$ fedését, S_r^n szféra $\text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ fedésére. Ezzel a skálázással megmutattuk, hogy (16)-ban lecserélhetjük $\vartheta_r^n(\varepsilon)$ -t bármely, már ismert $\vartheta_{r/\varepsilon}^n(1)$

fedésre. Itt meggondolható, hogy $\vartheta(\varepsilon)$ felüldről becsülhető $\vartheta(1)$ -gyel. Ekkor:

$$\vartheta(1) \leq \frac{\lambda n \ln n}{1 - \sqrt{2/\pi} \ln^{-1} n} + \vartheta(1) e^{-n/3}.$$

Ekkor pedig mondhatjuk, hogy

$$\vartheta_r^n(1) \cdot (1 - e^{-n/3}) \leq \frac{\lambda n \ln n}{1 - \sqrt{2/\pi} \ln^{-1} n},$$

amiből pedig

$$\vartheta_r^n(1) \leq \frac{\lambda n \ln n}{\left(1 - \sqrt{2/\pi} \ln^{-1} n\right) \cdot (1 - e^{-n/3})}, \quad (17)$$

amelyet lecserélünk (13)-ra, ami ennél gyengébb korlát. Felhasználva az 5.1.1. lemmát $n = 20$ -ra igazolható, hogy (13) felülbecsüli (17)-et, és moderálja nagyobb n -ekre.

$$13: \quad \left(1 + \frac{2 \ln \ln 20}{\ln 20} + \frac{2}{\ln 20}\right) 20 \ln 20 \approx 143,8$$

$$17: \quad \frac{\lambda 20 \ln 20}{\left(1 - \sqrt{2/\pi} \ln^{-1} 20\right) \cdot (1 - \varepsilon^{-20/3})} = \frac{\left(1 + \frac{2 \ln \ln 20}{\ln 20}\right) \cdot 20 \ln 20}{\left(1 - \sqrt{2/\pi} \ln^{-1} 20\right) \cdot (1 - \varepsilon^{-20/3})} \approx 141,7$$

□

5.3. Dumer algoritmus

Ebben és a következő fejezetben olyan fedést adunk S_r^n -re, aminek az aszimptotikus fedési sűrűsége $(n \ln n)/2$. Ehhez felhasználjuk a bemutatott Rogers-algoritmusból is alkalmazott $\text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ fedést és egy másik, $\text{Cov}_r^n(\mu)$ fedést, amihez felhasznált gömbi sapkák sugara (μ) nagyobb, nagyságrendje körülbelül $(1/\sqrt{n} \ln n)$.

A felhasznált paraméterek:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2n \ln^2 n}, & \rho &= 1 - \varepsilon \\ \beta &= \frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n}, & \lambda &= \beta + \frac{1}{2 \ln n} \\ \mu &= \frac{n^{-\beta}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{n} \ln^3 n} \\ d &= 1 - 2\varepsilon - \mu^2 = 1 - \frac{1}{n \ln^2 n} - \frac{1}{16n \ln^6 n}. \end{aligned} \quad (18)$$

A fedés létrehozásának lépései:

Első lépés: tekintsük az S_r^n szférát lefedő ε -hálót;

$$\text{Cov}_r^n(\varepsilon) = \{U \subset S_r^n : \bigcup_{u \in U} C^n(\varepsilon, u) \supseteq S_r^n\}$$

Rögzítsünk egy $U \in \text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ fedést, amelyet az algoritmus további lépésiben használunk. Majd válasszunk véletlenszerűen N pontot a szférán, $y \in S_r^n$, hogy:

$$N = \left\lfloor \frac{(\lambda n \ln n)}{\Omega_d} \right\rfloor. \quad (19)$$

Ez a lépés megtalálható a Rogers-algoritmusban is. Ebből az N darab középpontból alkossunk ρ -sugarú sapkákat és tekintsük az így kialakult $Y \in \text{Cov}_r^n(\rho)$ részleges fedést.

Második lépés: hogy ne az összes $C(\rho)$ sapkával nem fedett $u \in U$ pontot válasszuk a végleges fedéshez, létrehozunk egy másik teljes fedést a szférán, μ -sugarú gömbsapkákkal;

$$\text{Cov}_r^n(\mu) = \{Z \subset S_r^n : \bigcup_{z \in Z} C^n(\mu, z) \supseteq S_r^n\}.$$

Hasonlóan az U fedéshez, itt is rögzítsünk egy $Z \in \text{Cov}_r^n(\mu)$ fedést. Feltehetjük, hogy a két fedésnek a fedési sűrűsége azonos $\vartheta_r^n(\varepsilon) = \vartheta_r^n(\rho)$, nagysága pedig a (13) egyenlőtlenség jobb oldalával egyezik vagy annál kevesebb.

Ezzel a köztes lépéssel tudjuk csökkenteni a fedetlen $u \in U$ középpontok számát, mert a $C^n(\mu)$ sapkák egyszerre több ilyen pontot tartalmazhatnak.

Harmadik lépés: legyen $C(\mu, \bar{z})$ egy sapka a rögzített $Z \in \text{Cov}_r^n(\mu)$ fedésből úgy, hogy tartalmaz legalább egy $u \in U$ középpontot, ami nincs fedve a $C(\rho, y)$ sapkákkal. Tekintsük az összes ilyen \bar{Z} középpontokat és vegyük a következő ponthalmazt: $X = Y \cup \bar{Z}$. Ez a halmaz lefedi a $\text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ -t ρ -sugarú sapkákkal. Ha megtartjuk ezeket a középpontokat és a gömbi sapkák sugarát növeljük 1-re, akkor megkapjuk a kívánt fedést $C(1, x)$ sapkákkal:

$$\text{Cov}_r^n(1) = \{X \subset S_r^n : \bigcup_{x \in X} C^n(1, x) \supseteq S_r^n\}.$$

Az új, átalakított fedési algoritmusban a $C(\rho, y)$ sapkák helyett ha csak a d -közeli sapkákat vennénk figyelembe a (18)-ban meghatározott távolság, d , olyan közeli ρ -hoz, hogy

$$\frac{\Omega_\rho}{\Omega_d} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Mondhatjuk, hogy csak a d -közeli sapkák választása a ρ -közeliek helyett nem fog jelentős mértékben javítani a (19) egyenleten, azaz a véletlenszerűen választott N pont számán.

6. Bizonyítás

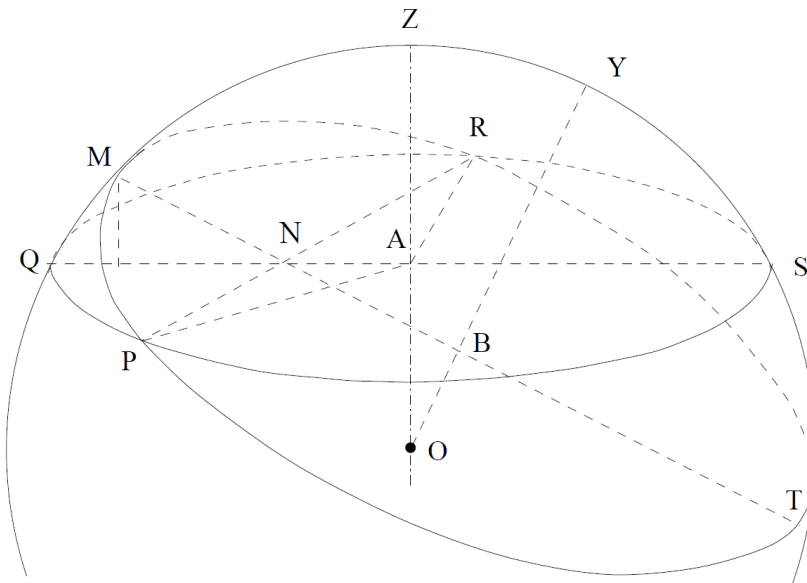
Ebben a fejezetben vegyük végig a maradék segédlemmakat, hogy a bizonyításunk teljes legyen és meg tudjuk határozni a fentebbi egységfedés sűrűségét.

6.1. További segédlemmák

Látható, hogy (13) erősebb korlát $n \leq 100$ -ra, mint a tételben megfogalmazott (4) korlát. Legyen $n = 100$, ekkor

$$\begin{aligned}
 (13): \quad \vartheta_r^n &\leq \left(1 + \frac{2 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{2}{\ln n}\right) n \ln n = \left(1 + \frac{2 \ln \ln(100)}{\ln(100)} + \frac{2}{\ln(100)}\right) 100 \ln(100) = \\
 &= 200 \ln(10) \left(\frac{2 \ln(2 \ln(10)) + 2}{2 \ln(10)} + 1\right) = 200 \ln(10) + 100(2 \ln(2 \ln(10)) + 2) = \\
 &= 200 \ln(10) + 200 \ln(2 \ln(10)) + 200 = \ln(10^{200}) + \ln((2 \ln(10))^{200}) + 200 = \\
 &= \ln(100^{200} \cdot (2 \ln(10))^{200}) + 200 = \ln(2^{400} \cdot 5^{200} \ln^{200}(10)) + 200 \approx 965.953 \\
 (4): \quad \vartheta_r^n &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{3}{\ln n}\right) n \ln n = \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln(100)}{\ln(100)} + \frac{3}{\ln(100)}\right) 100 \ln(100) = \\
 &= 100 \cdot 2 \ln(10) \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln(2 \ln(10)) + 3}{2 \ln(10)}\right) = 100 \ln(10) + 100(3 \ln(2 \ln(10)) + 3) = \\
 &= 100 \ln(10) + 300 \ln(2 \ln(10)) + 300 \approx 988.412
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 965.953 < 988.412$, ezért kizárólag $n \geq 100$ dimenziót vesszük figyelembe a többi számolás során.



metsző gömbi sapkák $C(\mu, Z)$, $PQRS$ alappal és $C(\rho, Y)$, $PMRT$ alappal

A teljes bizonyítás megértéséhez három további lemma ismerete szükséges. Vegyünk két gömbi sapkát $C(\mu, Z)$ és $C(\rho, Y)$, Z és Y középpontokkal. Ezek a sapkák legyenek d -közelieliek egymáshoz, azaz a Z körüli maximum d távolságra lévő pontok közül egyenletes eloszlással választunk egy pontot, ez lesz Y középpont. A d távolság meghatározása a (18) praméterezésnél található. Az ábrán láthatók ezek a gömbi sapkák, illetve az origó középpontú (O) , S_r^n szféra.

6.1.1. Lemma. Bármely $C(\mu, Z)$ gömbapján lévő x pontot egy d -közeli $C(\rho, Y)$ gömbi sapka nem fog fedni $p(x) < \omega$ valószínűséggel, ahol

$$\omega \leq \frac{1}{4 \ln n} e^{(n-1)v_n/2}, \text{ ahol} \quad (20)$$

$$v_n = \ln \left(1 - \frac{4 \ln^2 n}{n} \right) < -\frac{4 \ln^2 n}{n}.$$

Bizonyítás. A lemmában említett gömbsapkák $C(\mu, Z)$ alapja a szférán megtalálható $PQRSA$ pontokra illeszkedő gömbi szféra, illetve a másik gömbi sapka, $C(\rho, Y)$ alapja a $PMRTB$ pontokra illeszkedő gömbi szféra. Ezek a $PQRSA$ és $PMRTB$ pontok határozzák meg az Y és Z középpontokkal együtt a használt két gömbi sapkát. Ezek alkotnak két golyót; az első a $B_\mu^n(A)$, azaz egy A középpontú, μ sugarú, n -dimenziós golyót és hasonlóan a második pedig a $B_\rho^n(B)$ golyót. Ugyanakkor vegyük a $PQRS$ pontok által kijelölt határát a $C(\mu, Z)$ -nek és az ebből alkotott $S_\mu^{n-1}(A)$ szférát. A $C(\rho, Y)$ sapka fedti ezt a határvonalat, kivéve a PQR felületet Q középponttal.

Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor x pont a határvonalon található, része $PQRS$ -nek. Ekkor a valószínűség Ω , az a rész, ami a teljes határvonalból a nem fedett gömbi sapkát, PQR -t, tartalmazza. Ehhez először meg kell becsülni a PQR által adott fél-szögét, $\alpha = \angle PAQ$.

Legyen $d(H, G)$ a H és G pontok közötti távolság jele, és $\sigma(H)$ pedig a távolsága H pontnak az OB szakasztól, ami összeköti az origót (O) , a nagyobb alap $B_\rho^n(B)$, B középpontját és a $C(\rho, Y)$ gömbi sapka Y középpontját. Felhasználjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\sigma(A) \leq \sigma(Z) \leq d(Z, Y) \leq d.$$

Mindezek után vegyük figyelembe a PNR alapját a fedetlenül hagyott PQR gömbi sapkának. Ebben az esetben N a középpontja ennek a szakasznak. Ekkor mind az AN szakasz, és a BN szakasz is ortogonális erre az alapra. Illetve $d(B, P) = \rho$ és $d(N, P) \leq d(A, P) = \mu$ teljesülnek. Így

$$d(B, N) = \sqrt{d^2(B, P) - d^2(N, P)} \geq \sqrt{\rho^2 - \mu^2} \geq \rho - \mu^2/(2\rho) \geq \rho - \mu^2. \quad (21)$$

Az ábrán látható OB szakasz ortogonális a teljes $PMRTB$ alapra és így a BN szakaszra is.

Ekkor $d(B, N) = \sigma(N)$ és

$$d(A, N) \geq \sigma(N) - \sigma(A) \geq \rho - \mu^2 - d = \varepsilon. \quad (22)$$

Vegyük az *ANP* háromszöget, így mondhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{d(A, N)}{d(A, P)} \geq \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}} \\ \sin^2 \alpha &\leq \ln \left(1 - \frac{4 \ln^2 n}{n} \right) = \exp[-v_n]. \end{aligned} \quad (23)$$

Most már tudjuk becsülni az Ω -t, a teljes $S_\mu^{n-1}(A)$ határnak azt a részét, ami a nem fedett gömbi sapkát, *PQR*-t, tartalmazza. Ehhez felhasználjuk a [3] cikkben található 3.2 számú következményt, amiből kapjuk

$$\Omega < (\sin^{n-1} \alpha) / \left(\sqrt{2\pi(n-1)} \cos \alpha \right).$$

Ahhoz, hogy bizonyíthassuk a tételt és a (20) egyenlőtlenséget, a nevezőt ki kell cserélni egy kisebb mennyiségre, $4 \ln n$ -re, felhasználva (23)-t.

Végül pedig vizsgáljuk meg a másik esetet is, amikor x pont nem a *PQRS* határvonalon helyezkedik el. Ekkor x pont egy kisebb gömbsapkából lett választva; $C(\mu', Z) \subset C(\mu, Z)$, ugyanazzal a Z középponttal, és félhúrja $\mu' < \mu$. Hasonlóan az előző esethez definiáljuk $S_{\mu'}^{n-1}(A')$ határát $C(\mu', Z)$ -nek, ahol A' az *AZ* szakaszon található. Szintén hasonlóan $p(x)$ az az Ω' része a határnak, ami fedetlenül maradt a nagyobb gömbsapka $C(\rho, Y)$ -től. Ω' felső határának becsléséhez a (23) egyenlőtlenségben kicserélem μ -t a tőle kisebb μ' -re. Ezzel kisebb szöveget kapunk: $\alpha' \leq \arcsin(\varepsilon/\mu')$, ami 0-ra csökken, ha $\varepsilon \geq \mu'$. Pontosabban a Z középpont mindig fedve van bármely d -közeli gömbsapkával.

Láthatjuk, hogy bármely belső $S_{\mu'}^{n-1}$ rétege a $C(\mu, Z)$ sapkának egy tőle kisebb része fedetlen $\Omega' \leq \Omega$. Ez adja a várt valószínűséget és így $p(x) \leq \Omega' \leq \Omega \leq \omega$ bármely x pontra. \square

Fontos megjegyezni, hogy (23) csak $n \geq 75$ dimenzióban teljesül. Ennél kisebb dimenzióban a (23) egyenlőtlenségben az jönne ki, hogy $\cos \alpha \geq 1$, amiből kizárólag arra következtethetünk, hogy $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &\geq \frac{2 \ln 74}{\sqrt{74}} \approx 1.00067 \\ \cos \alpha_2 &\geq \frac{2 \ln 75}{\sqrt{75}} \approx 0.997 \end{aligned}$$

Ebben az esetben egy d -közeli gömbsapka teljesen fedi a μ -sapkát.

Emellett érdemes megemlíteni, hogy d -nek minimális növelésével teljesen megváltozhat a fenti

bizonyítás. Belátható, hogy a $C(\mu)$ sapka határának körülbelül a fele marad fedetlenül, ha a $C(\rho)$ gömbi sapka nem $d-$, hanem $(d + \varepsilon)$ -közeli.

7. Definíció. Egy $C(\mu, z)$ gömbi sapka *nem-telített*, ha s darab vagy kevesebb d -közeli Y pont (és a köré írható ρ -sugarú gömbsapka) tartozik hozzá, ahol

$$s = \lfloor n/q \rfloor \quad \text{és} \quad q = 6 \ln \ln n.$$

A következő lemmával azoknak a $C(\mu, z')$ nem-telített sapkáknak az N' várható számát becsüljük, amelyek N véletlenszerűen választott pont után maradnak, ahol a (6) egyenlőtlenség szerint $N = \lfloor (\lambda n \ln n) / \Omega_d \rfloor$.

6.1.2. Lemma. Azoknak a nem-telített $C(\mu, z')$ gömbi sapkáknak a száma, amik N véletlenszerűen választott pont után maradnak, várhatóan $N' < e^{-n/4-1} N$, $n \geq 100$ dimenzióban.

Bizonyítás. Bármely z középponthoz egy véletlenszerűen választott y középpont d -közeli Ω_d valószínűséggel. Legfeljebb s darab ilyen sapka van (lásd.: 7. definíció), így a vizsgált valószínűség $C(d, y)$ ilyen sapkákra:

$$P = \sum_{i=0}^s \binom{N}{i} \Omega_d^i (1 - \Omega_d)^{N-i} \quad . \quad (24)$$

Elsőként alkalmazom a (8) egyenlőtlenséget Ω_d -re és veszem a $d = 1 - 2\varepsilon - \mu^2$ paramétert (18)-ből. Így kapjuk:

$$\Omega_d \geq \theta_n = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{\pi \ln^2 n} + \frac{1}{16\pi \ln^6 n}} \quad .$$

Egyszerű belátni, hogy $\theta_n \geq \theta_{100} > \theta$, ha $\theta = 0.377$.

$$\theta_{100} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{\pi \ln^2 100} + \frac{1}{16\pi \ln^6 100}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4\pi \ln^2 10} + \frac{1}{1024\pi \ln^6 10}} \approx 0.37747 > 0.377$$

Legyen ezentúl $\Omega_d = x$, ekkor $(1 - x)^{N-i} \leq (1 - x)^{N-s}$.

Megjegyzés. Felhasználva (6)-t kapjuk: $Nx = L \geq \lambda n \ln n - \frac{1}{2}$.

Ezután vegyük $\ln(1 - x) = -x - x^2/2 - x^3/3 \dots$ Taylor-sort, majd emeljük $(N - s)$ hatványra:

$$\begin{aligned} \ln(1 - x)^{N-s} &= -L - x \left(\frac{L}{2} - s \right) - x^2 \left(\frac{L}{3} - \frac{s}{2} \right) - \dots = \\ &= L [\ln(1 - x)] / x - s \ln(1 - x) \quad . \end{aligned}$$

Ha megfigyeljük, látható, hogy mindegyik x^i kifejezésnek negatív együtthatója van, pontosabban $L/(i+1) - s/i$, $s = n/q$ (7) alapján.

Ekkor vehetjük x legkisebb értékét; $x = \theta$, ami a következő felső korlátot adja:

$$\begin{aligned} \ln(1-x)^{N-s} &\leq L[\ln(1-\theta)]/\theta - s \ln(1-\theta) \leq \\ &\leq -n[\tau_1 \lambda \ln n - \tau_2/(6 \ln \ln n)] + 1, \end{aligned} \quad (25)$$

ahol az együtthatók: $\tau_1 = -[\ln(1-\theta)]/\theta = 1.255$ és $\tau_2 = -\ln(1-\theta) = 0.4379$.

Dumer az eredeti cikkben az együtthatók értékét rosszul határozta meg, majd a továbbiakban az –általam is számolt– helyes értékekkel folytatja. Így a fentebbi τ_1 meghatározása saját számolásom eredménye.

Folytassuk tovább a (24) egyenlet megmaradt részeivel, azaz a $\sum_{i=0}^s \binom{N}{i} \Omega_a^i$ -vel. Mondhatjuk, hogy $\binom{N}{i} x^i < (Nx)^i/i! \leq (\lambda n \ln n)^i \cdot i!$, ebből pedig:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s \binom{N}{i} x^i &\leq \frac{(\lambda n \ln n)^s}{s!} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda q \ln n)^{-i} \leq 3 \frac{(\lambda n \ln n)^s}{s!} \leq \\ &\leq \frac{(\lambda n \ln n)^s}{(s/e)^s} = (e \lambda q \ln n)^{n/q} = \exp[nh_n], \text{ ahol} \\ &h_n = \frac{\ln(e \lambda q \ln n)}{q}. \end{aligned}$$

Közvetlen számításokkal megmutatható, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda q \ln n)^{-i} < 3$ teljesül $n \geq 100$ dimenzióra. Az eredeti publikációban a lemma bizonyításában találtam számolási hibát, így innen a következő egyenlőtlenségeket a már általam számolt, helyes P értékkel folytatom. Használjuk a Sterling-formulát: $s! > \sqrt{2\pi s} \cdot (s/e)^s$, így kapjuk összesítve:

$$P \leq \exp[n(h_n - \tau_1 \lambda \ln n + \tau_2/(6 \ln \ln n))] + 1.$$

Azaz

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{N}{i} x^i (1-x)^{N-i} \leq e^{nh_n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^{N-i} \leq e^{nh_n} \cdot e^{n(-\tau_1 \lambda \ln n + \tau_2/(6 \ln \ln n)) + 1}.$$

Következő lépésként kiszámoljuk $|Z|$ fedés nagyságát, ami szükséges S_r^n fedéséhez. Összehasonlítva a paramétereket: λ -t a (18)-ból és (3)-ból $\vartheta_r^n(1)$ -ot.

$$\begin{aligned}
\vartheta_r^n(1) &\leq \left(1 + \frac{2}{\ln n}\right) \left(1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + \frac{\sqrt{e}}{n \ln n}\right) n \ln n = \left(1 + \frac{2}{\ln n}\right) (n \ln n + n \ln \ln n + \sqrt{e}) = \\
&= n \ln n + n \ln \ln n + 2n + \sqrt{e} + \frac{2n \ln \ln n}{\ln n} + \frac{2\sqrt{e}}{\ln n} \\
\lambda &= \beta + \frac{1}{2 \ln n} = \frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{1}{2 \ln n}
\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy $n \geq 100$ -ra teljesül, hogy $\vartheta_r^n(1) \leq 2\lambda n \ln n - 1 \leq 2\Omega_d N$.

$$2\lambda n \ln n - 1 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{1}{2 \ln n} \right) n \ln n - 1 = n \ln n + 6n \ln \ln n + n - 1,$$

ami valóban nagyobb $\vartheta_r^n(1)$ -nál.

Felhasználva a (6) egyenlőtlenséget, egyszerűen belátható, hogy

$$\vartheta_r^n(1) \leq 2\lambda n \ln n - 1 \leq 2\Omega_d N$$

valóban teljesül.

Így mondhatjuk, hogy S_r^n szférát le lehet fedni $\vartheta_r^n(1)$ fedési sűrűséggel, ami adja a

$$|Z| \leq \frac{\vartheta_r^n(1)}{\Omega_\mu} \leq \frac{2\Omega_d N}{\Omega_\mu} \quad (26)$$

fedést. Felhasználva az 5.1.2. lemmából a (7) egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $\Omega_\mu \geq \Omega_1 \mu^n / (8\sqrt{n})$ $n \geq 100$ -ra, és

$$|Z| \leq 16\sqrt{n} N \mu^{-n} \leq 16\sqrt{n} N \exp[\beta n \ln n + n \ln 4].$$

Így a várható száma a nem-telített sapkákknak:

$$\begin{aligned}
N' &\leq |Z| \cdot P \leq 16\sqrt{n} N \exp[n\Psi_n], \text{ ahol} \\
\Psi_n &= \frac{\ln(e\lambda q \ln n)}{q} - \ln n (\tau_1 \lambda - \beta) + \frac{\tau_2}{q} + \frac{1}{n} + \ln 4.
\end{aligned} \quad (27)$$

Megjegyzés. Ψ_n kifejezést $-(\tau_1 \lambda - \beta) \ln n$ moderálja és n -ben csökkenő.

Kiszámítható, hogy $\Psi_{100} < -0.36$.

$$\begin{aligned}\Psi_{100} &= \frac{\ln(e\lambda q \ln 100)}{q} - (\tau_1 \lambda - \beta) \ln 100 + \frac{\tau_2}{q} + \frac{1}{100} + \ln 4 = \\ &= \frac{\ln \left[e \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{1}{2 \ln n} \right) \cdot 6 \ln \ln 100 \cdot \ln 100 \right]}{6 \ln \ln 100} + \frac{1}{100} + \ln 4 - \\ &- \left[1.255 \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{1}{2 \ln n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} \right) \right] \ln 100 + \frac{0.4739}{6 \ln \ln 100} < 0.36\end{aligned}$$

Végül pedig lecseréljük $16\sqrt{n} \exp[n\Psi_n]$ -t egy nagyobb mennyiségre: $\exp[-n/4 - 1]$. \square

A következő lemmához vegyük a telített $C(\mu, z)$ gömbsapkákat és az $u \in U$ pontokat, amelyek a telített sapkákban is megtalálhatók.

6.1.3. Lemma. Azoknak az $u'' \in U''$ pontoknak a száma, ($U'' \in U$) amelyek fedetlenül maradtak a telített gömbsapkákon, $C(\mu, z)$, várhatóan $N'' < e^{-2n}N$, $n \geq 100$ dimeznióban.

Bizonyítás. Elsőként becsüljük az u pontok számát $|U|$ fedésben hasonlóan (26)-hoz. Majd átírjuk:

$$|U| \leq \frac{2\Omega_d N}{\Omega_\varepsilon} \leq 16\sqrt{n}N(2n \ln^2 n)^n. \quad (28)$$

Bármely $C(\mu, z)$ gömbi sapka metsz legalább $s + 1$ darab véletlenszerűen választott $C(\rho, y)$ gömbsapkát. A 6.1.1. lemma alapján bármely egy ρ -sapka nem fog fedni egy adott $x \in C(\mu, z)$ pontot ω vagy annál kisebb valószínűséggel. Tehát bármely u'' pont a $C(\mu, z)$ sapkán nincs fedve legfeljebb $\omega^{s+1} < \omega^{n/q} \leq \exp[nC_n]$ valószínűséggel. Használjuk (20) egyenlőtlenséget és így megkapjuk

$$C_n = \frac{n-1}{12 \ln \ln n} \ln \left(1 - \frac{4 \ln^2 n}{n} \right) - \frac{\ln(4 \ln n)}{6 \ln \ln n}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}N'' &\leq |U| \cdot \omega^{n/q} \leq 16\sqrt{n}N \exp[n\Phi_n], \text{ ahol} \\ \Phi_n &= C_n + \ln n + 2 \ln \ln n + \ln 2\end{aligned} \quad (29)$$

Megjegyzés. C_n első részének nagyságrendje $-\frac{\ln^2 n}{3 \ln \ln n}$ és moderálja bármely más részét.

Kiszámítható, hogy:

$$\begin{aligned}\Phi_{100} &= C_{100} + \ln 100 + 2 \ln \ln 100 + \ln 2 = \\ &= \frac{99}{12 \ln \ln 100} \ln \left(1 - \frac{4 \ln^2 100}{100} \right) - \frac{\ln(4 \ln 100)}{6 \ln \ln 100} + \ln 100 + 2 \ln \ln 100 + \ln 2 \approx -2.153 < -2.\end{aligned}$$

Így mondhatjuk, hogy $\Phi_n < \Phi_{100} < -2$, ami bizonyítja a lemmát. □

6.2. A tétel bizonyítása

A bizonyításhoz vegyünk egy $C(\mu, \bar{z})$ gömbi sapkát, amely legalább egy $U \in \text{Cov}_r^n(\varepsilon)$ -beli fedetlen u pontot tartalmaz, ekkor ez a sapka vagy nem-telített, vagy hiányos.

Vegyük $\bar{Z} = Z' \cup U''$ középponthalmazt. A 6.1.2. és a 6.1.3. lemmákat felhasználva tudjuk, hogy \bar{Z} várható nagysága:

$$\bar{N} < N' + N'' < e^{-n/4-1}N + e^{-2n}N < e^{-n/4}N.$$

Ezért mondhatjuk, hogy létezik N véletlen választott y pont, ami maximum $e^{-n/4}N$ darab \bar{z} pontot hagy fedetlenül. Az így kibővített $X = Y \cup \bar{Z}$ ponthalmaz egy egységfedést formál S_r^n szférán. Ennek a fedésnek a fedési sűrűsége:

$$\vartheta_r^n(1) \leq \Omega_1(N + \bar{N}) \leq \Omega_1N \left(1 + e^{-n/4}\right) \leq \lambda n \ln n \left(1 + e^{-n/4}\right) \frac{\Omega_1}{\Omega_d}.$$

Hasonlóan a (8) egyenlőtlenséghez, kiszámítható, hogy $\Omega_1/\Omega_d \leq 1 + 3/(2 \ln n)$ teljesül $n \geq 100$ dimenzióra.

$$\begin{aligned} \Omega_1/\Omega_d &\geq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{\pi \ln^2 n} + \frac{1}{16 \pi \ln^6 n}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{\pi \ln^2(100)} + \frac{1}{16 \pi \ln^6(100)}}} \approx 1.3246 \\ 1 + \frac{3}{2 \ln n} &= 1 + \frac{3}{2 \ln(100)} \approx 1.3257 \\ \Rightarrow \Omega_1/\Omega_d &\leq 1 + \frac{3}{2 \ln n} \text{ valóban teljesül } n = 100\text{-tól.} \end{aligned}$$

Végül pedig vegyünk λ paramétert a (18)-ból, illetve az előzőleg számolt Ω_1/Ω_d egyenlőtlenséget és így megkapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\vartheta_r^n(1)}{n \ln n} &\leq \lambda \left(1 + e^{-n/4}\right) \frac{\Omega_1}{\Omega_d} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{1}{2 \ln n}\right) \left(1 + e^{-n/4}\right) \left(1 + \frac{3}{2 \ln n}\right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \ln n} + \frac{1}{2} e^{-n/4} + \frac{3}{4 \ln n} e^{-n/4} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{9 \ln \ln n}{2 \ln^2 n} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} e^{-n/4} + \\
&\quad + \frac{9 \ln \ln n}{2 \ln^2 n} e^{-n/4} + \frac{1}{2 \ln n} + \frac{3}{4 \ln^2 n} + \frac{1}{2 \ln n} e^{-n/4} + \frac{3}{4 \ln^2 n} e^{-n/4} = \\
&= e^{-n/4} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4 \ln n} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{9 \ln \ln n}{2 \ln^2 n} + \frac{1}{2 \ln n} + \frac{3}{4 \ln^2 n}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \ln n} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{9 \ln \ln n}{2 \ln^2 n} + \frac{1}{2 \ln n} + \frac{3}{4 \ln^2 n} = \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4 \ln n} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{9 \ln \ln n}{2 \ln^2 n} + \frac{1}{2 \ln n} + \frac{3}{4 \ln^2 n}\right) \left(e^{-n/4} + 1\right) < \\
&\quad < \frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{3}{\ln n}.
\end{aligned}$$

Azt is egyszerűen be lehet látni, hogy ez az egyenlőtlenség teljesül $n = 100$ -ra;

$$\begin{aligned}
\text{bal oldal:} \quad &\left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{1}{2 \ln n}\right) \left(1 + e^{-n/4}\right) \left(1 + \frac{3}{2 \ln n}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln(100)}{\ln(100)} + \frac{1}{2 \ln(100)}\right) \left(1 + e^{-100/4}\right) \left(1 + \frac{3}{2 \ln(100)}\right) \approx 2.126
\end{aligned}$$

$$\text{jobb oldal:} \quad \frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln n}{\ln n} + \frac{3}{\ln n} = \frac{1}{2} + \frac{3 \ln \ln(100)}{\ln(100)} + \frac{3}{\ln(100)} \approx 2.146,$$

$2.126 < 2.146$ valóban igazolja a feltevést, hogy $n = 100$ dimenzióban teljesül. Használva az 5.1.1. lemmát mondhatjuk, hogy az egyenlőtlenség jobb oldala moderálja a bal oldalát és ezért mondhatjuk, hogy nagyobb n -ekre is igaz az egyenlőtlenség, így pedig a tétel is igaz. \square

7. Mértékkoncentráció a gömbön

Ebben a fejezetben az eddiektől eltérően tömör gömb térfogatát és annak szeleteit vizsgálom. Nagyon érdekes megfigyelni, hogy adott golyó térfogata valójában az egyenlítő körüli vékony sávba koncentrálódik, annál erősebben, minél magasabb dimenzióban vagyunk. Fontos megemlíteni, hogy mit értek az alatt, hogy „majdnem az egész térfogat” és az „egyenlítő körüli vékony sáv” pontosan mire vonatkozik. Ennek eldöntése szabad választás, vegyük standard esetnek, amikor „majdnem az egész térfogat”-ról van szó a teljes térfogat 95%-át értem, és az „egyenlítőhöz közel” pedig dimenziófüggetlen, erről a következő bekezdésekben olvashatunk. Minél szigorúbb határokat szabunk, annál magasabb dimenzióra van szükségünk, hogy a feltételek teljesüljenek, de mindig lehet választani elég magas dimenziót.

Vegyünk egy n -dimenziós egység-golyót és tekintsük fixnek az Északi Sarkot az x_1 tengelyen, azaz azt az $x_1 = 1$ -ben lévő pontot, ahol minden más koordináta nullával egyenlő. Ekkor elfelezzük a szférát az $x_1 = 0$ hipersíkkal, $\{x \mid |x| \leq 1, x_1 = 0\}$, amit egyenlítőnek nevezünk. Legyen $V(n)$ az n -dimenziós egység-golyó térfogata. A metszete a golyónak és az előbbi felületnek $(n-1)$ dimenziós, térfogata pedig $V(n-1)$.

Például egyértelműen az egyenlítő egy körlemez, ha az eredeti golyó 3-dimenziós stb. Általánosabban fogalmazva a metsző felület mindig egy $(n-1)$ dimenziós szféra.

A felső félgömb térfogatának 95%-a valójában koncentrálódik az $x_1 = 0$ hipersík és a vele párhuzamos $x_1 = \varepsilon$ hipersík közé megfelelően nagy dimenzióban. Az, hogy mekkora az ε nagysága, dimenziótól függ, n -dimenzióra ez $O\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$.

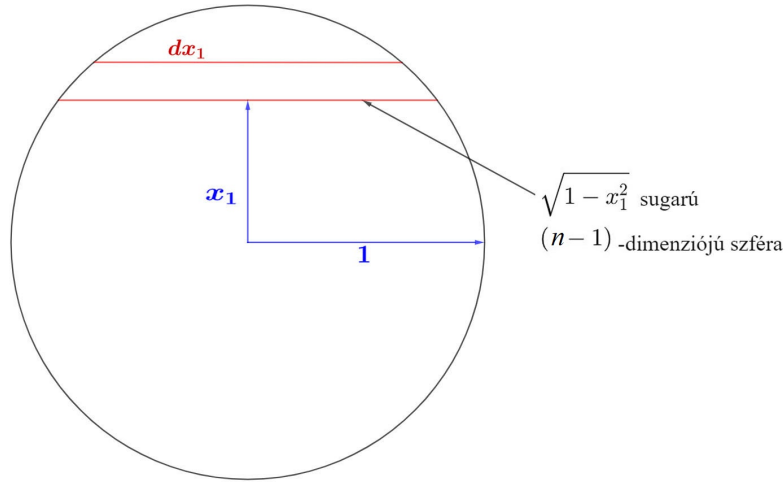
Ennek belátásához számítsuk ki a felső félgömb azon részének térfogatát, amelyik nem esik bele az $x_1 = 0$ és $x_1 = \varepsilon$ közötti szeletbe, ez a rész $T = \{x \mid |x| \leq 1, x_1 \geq \varepsilon\}$ legyen. T térfogatának kiszámításához integráljunk x_1 -ben ε és 1 közt. A dx_1 szélességű lemeznek a felülete egy olyan $(n-1)$ -dimenziós szféra, melynek sugara $\sqrt{1-x_1^2}$, lásd a 8.2.1. ábrát, ezért a lemez felülete:

$$(1-x_1^2)^{(n-1)/2} V(n-1).$$

Így T térfogata:

$$\text{Volume}(T) = \int_{\varepsilon}^1 (1-x_1^2)^{(n-1)/2} V(n-1) dx_1 = V(n-1) \int_{\varepsilon}^1 (1-x_1^2)^{(n-1)/2} dx_1.$$

A továbbiakban a $\text{Volume}(T)$ jelöli a T -hez hasonló halmazok térfogatát.



8.2.1. ábra: n -dimenziós szféra metszeti lemezének térfogata

A fenti integrált nehéz becsülni, ezért közelítjük. Elsőként felhasználjuk azt az egyenlőtlenséget, hogy $1 + x \leq e^x$ teljesül minden valós x -re, illetve az integrál felső határát végtelenre bővítjük. Mivel x_1 mindig nagyobb ε -nál az integrál határain belül, ezért beilleszthetjük az integrálba x_1/ε -t. Ezekkel a változtatásokkal a térfogat:

$$Volume(T) = V(n-1) \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-((n-1)/2)x_1^2} dx_1 \leq V(n-1) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x_1}{\varepsilon} e^{-((n-1)/2)x_1^2} dx_1.$$

Vegyük $\int x_1 e^{-((n-1)/2)x_1^2} dx_1 = -\frac{1}{n-1} e^{-((n-1)/2)x_1^2}$ és így:

$$Volume(T) \leq \frac{1}{\varepsilon(n-1)} e^{-((n-1)/2)\varepsilon^2} V(n-1).$$

A felső félgömb térfogata legalább annyi, mint az $x_1 = 0$ és az $x_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ közti térfogat, ami pedig legalább akkora, mint a $\sqrt{1 - \frac{1}{n-1}}$ sugarú, $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ magasságú hengernek a térfogata. A henger térfogata pedig $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ -szer a $(n-1)$ -dimenziós $R = \{x \mid |x| \leq 1, x_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\}$ lemez térfogata. Ekkor R egy $(n-1)$ -dimenziós szféra $\sqrt{1 - \frac{1}{n-1}}$ sugárral, tehát a térfogata:

$$Volume(R) = V(n-1) \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)/2}.$$

Felhasználva, hogy $(1-x)^a \geq 1-ax$:

$$Volume(R) \geq V(n-1) \left(1 - \frac{1}{n-1} \frac{n-1}{2}\right) = \frac{1}{2} V(n-1)$$

Tehát a felső félgömb térfogata minimum $\frac{1}{2\sqrt{n-1}} V(n-1)$. Az $x_1 = \varepsilon$ hipersík feletti rész térfoga-

gata felülről korlátos az $x_1 = \varepsilon$ feletti félgömb térfogatának és a teljes térfogat alsó korlátjának arányában. Ez az arány $\frac{2}{\varepsilon\sqrt{(n-1)}} e^{-((n-1)/2)\cdot\varepsilon^2}$.

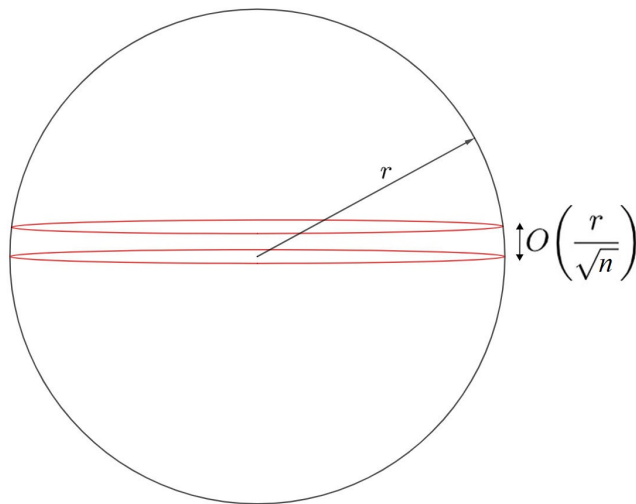
Lemma. Bármely $c > 0$ -ra, az $x_1 = \frac{c}{\sqrt{n-1}}$ felület feletti rész térfogata kisebb, mint $\frac{2}{c}e^{-(c^2/2)}$.

Bizonyítás. Be kell helyettesíteni ε helyére $\frac{c}{\sqrt{n-1}}$ -et a fenti arányba.

$$\frac{2}{\varepsilon\sqrt{(n-1)}} e^{-((n-1)/2)\cdot\varepsilon^2} = \frac{2}{\frac{c}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{n-1}} \cdot e^{-((n-1)/2)\cdot(c/(\sqrt{n-1}))^2} = \frac{2}{c} \cdot e^{-(c^2)/2}$$

□

Elég nagy c konsansra, $\frac{2}{c}e^{-c^2/2}$ elég kicsi. Tehát a n -dimenziós, r -szféra térfogatának jelentős része $O\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ távolságra található az egyenlítőtől, lásd a 8.2.2. ábrát.



8.2.2. ábra: r sugarú szféra térfogata n -dimenzióban $O\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ távolságra az egyenlítőtől

Az $x_1 = \frac{c}{\sqrt{n-1}}$ felület feletti térfogat $c \geq 2$ -re kisebb, mint $\varepsilon^{-2} \approx 0,135$, $c \geq 4$ -re pedig ez a térfogat már $\frac{1}{2}e^{-8} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ -re csökken. Végeredményben kimondhatjuk, hogy a teljes szféra térfogata az egyenlítő körüli vékony sávba koncentrálódik, és minél magasabb dimenzióban nézzük, annál erősebben észlelhető ez a tulajdonsága a szférának.

Ennek szemléltetéséhez szimuláltam a térfogat koncentrálódását különböző dimenziókban.

7.1. A kód

Elsőként definiálok egy random pontot az egységyszférán \mathbb{R}^n -ben. Majd generálok n darab független standard normális valószínűségi változót és normálok az x vektorok hosszát. Azért van

szükség a vektor normálására, mert az egyenletes mérték a szférán az egyetlen olyan valószínűségi mérték, ami origó körül forgatásinvariáns, azaz ha veszek egy halmazt, ami mérhető, akkor annak elforgatottjának mértéke megegyezik az eredeti halmazéval.

Tétel. *Gauss-mérték is $SO(n)$ -invariáns.*

A tétel következményeként mondhatjuk, hogy egy Gauss-mérték szerint véletlenszerűen választott pont lenormáltja megegyezik egy szférán vett egyenletes mérték szerint vett ponttal.

Ezután kiszámolom az x pont Északi-sarkkal bezárt szögét, illetve a szélességi fokát, azaz a választott egyenlítővel bezárt szögét.

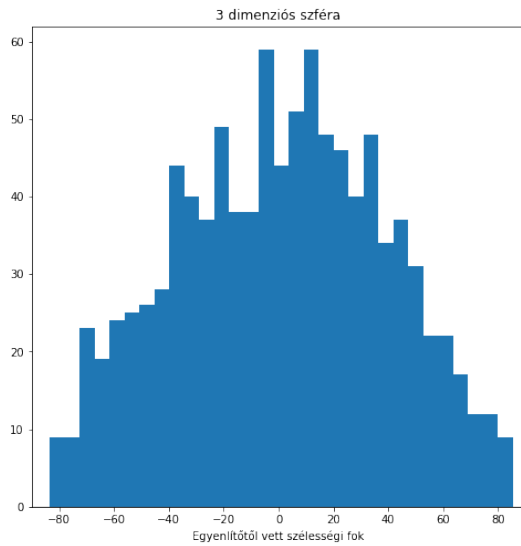
N -nek megadom, hogy hány elemből álljon a mintánk, majd a dimenziószámot is meghatározom. Végül pedig plotolom a választott N darab random pont elhelyezkedését az egyenlítőől vett szélességi fok alapján.

```
1 from scipy.stats import norm
2 from math import sqrt, pi, acos, degrees
3 from matplotlib import pyplot as plt
4
5 def pt_on_sphere(n):
6     x = norm.rvs(0, 1, n)
7     length = sqrt(sum(x**2))
8     return x/length
9
10 def latitude(x):
11     angle_to_pole = acos(x[0])
12     latitude_from_equator = 0.5*pi - angle_to_pole
13     return degrees( latitude_from_equator )
14
15 N = 1000
16
17 for n in [3, 30, 100, 3000]:
18
19     latitudes = [latitude(pt_on_sphere(n)) for _ in range(N)]
20     x_axis = plt.hist(latitudes, bins=int(sqrt(N)))
21     plt.xlabel("Egyenlítőtől vett szélességi fok")
22     plt.title("{} dimenziós szféra".format(n))
23     plt.xlim((-90, 90))
24
25     plt.show()
```

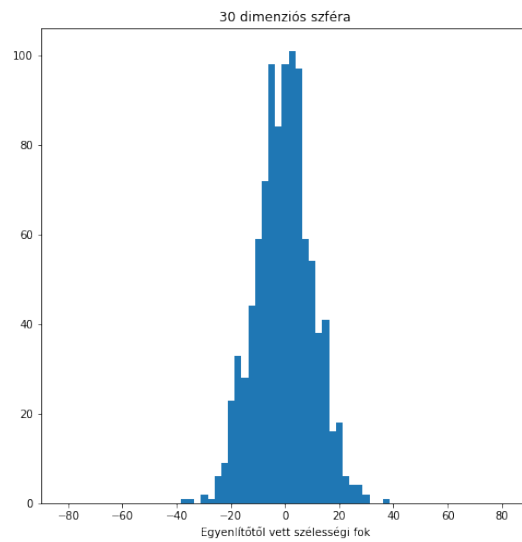
kód ábra

7.2. Az eredmény

Láthatjuk, hogy 3 dimenzióban még nem mondható el a fent említett tulajdonság, de 30 dimenzióban már erősebben a nulla szélességi fok, azaz az egyenlítő köré mozdul az ábra mindkét oldala. Természetesen mindkét oldal szimmetrikusan működik, ha nem is szimmetrikus az ábra, hisz véletlenszerűen generált pontokkal dolgozunk az adott szférán.

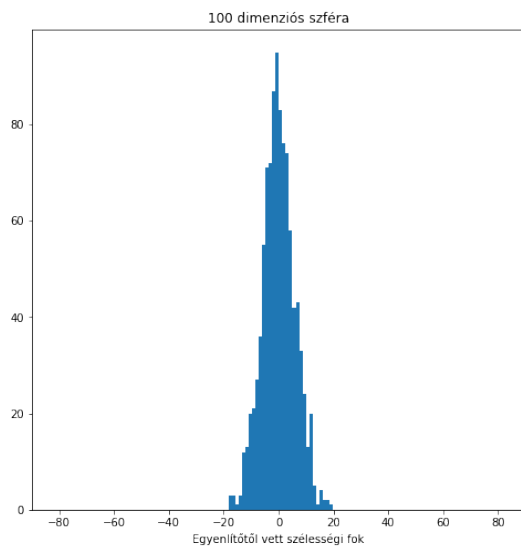


1.ábra

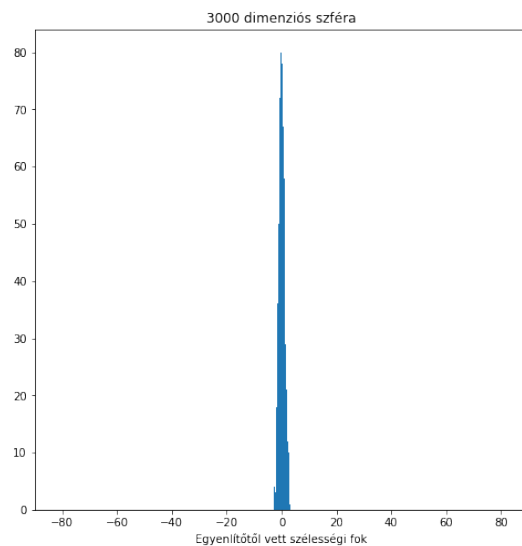


2.ábra

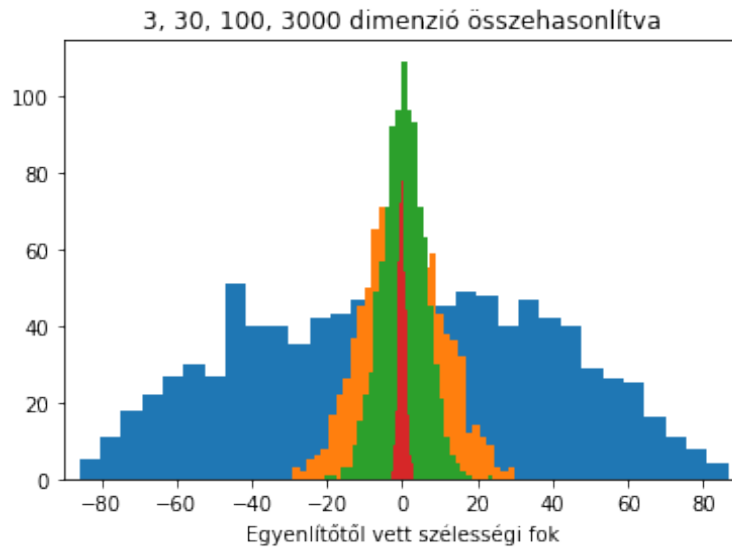
A 3. ábrán már 100 dimenziós szféra térfogatának elhelyezkedését láthatjuk, itt már majdnem a teljes térfogat az egyenlítő körüli 20° -os sávban található. Ekkor már igaz lenne a fejezet bevezetésében tárgyalt 95%-os koncentrálódás, ha például az egyenlítő körüli sávot 10° -nak választjuk. Az utolsó, 4. ábrán pedig már 3000 dimenziós szféra térfogatának elhelyezkedése látszik. Itt már vehetnénk szigorúbb határokat, például 99%-os térfogat található az egyenlítőtől vett 5° -os sávban.



3.ábra



4.ábra



Észrevétel: ahogy növelem a dimenziószámot, egyre erősebben koncentrálnak a szimulált pontok az egyenlítő köré.

Ha megfigyeljük a szimulált ábrákat, könnyen észrevehető, hogy nagyon hasonlítanak a normális eloszlás haranggörbéjéhez. Különböző dimenziókban más halmazon kompakt tartóúak a normális eloszláshoz a kirajzolt térfogat-eloszlások. Minél magasabb dimenzióban vizsgáljuk a térfogatot, annál inkább szűkül le ez a halmaz, amin az ábra közelíti a normális eloszlást. Például, ha megfigyeljük, hogy 3 dimenzióra szimulált ábrára jobban illeszkedik a standard normális eloszlás, míg ha vesszük a 100 dimenzióból alkotott diagrammot, akkor jobban illeszkedik rá az a normális eloszlás, aminek szórásnégyzete nem 0-val egyenlő, hanem σ^2 legyen 0.2, így az illeszthető eloszlás: $N(0, 0.2)$ lesz.

Ezt a megfigyelésemet alátámasztják a [3] cikkben található képletek, amelyek egy gömbi sapka térfogatának eloszlását vizsgálják és limeszben tartanak a normális eloszláshoz.

Hivatkozások

- [1] Ilya Dumer, „Covering spheres with spheres”, *Discrete Comput. Geometry*, vol. 38, pp. 665-679, 2007.
- [2] Ilya Dumer, „Covering a sphere with caps: Rogers bound revisited”, *Mathematika*, 2011.
- [3] K. Böröczky, Jr. és G. Wintsche, „Covering the sphere with equal spherical balls”, *Discrete Comput. Geometry – The Goldman-Pollack Festschrift*, pp. 237-253, 2003.
- [4] H.S.M. Coxeter, L. Few, C.A. Rogers, „Covering space with equal spheres”, *Mathematica*, v. 6, pp. 147-157, 1959.
- [5] C.A. Rogers, „A note on coverings”, *Mathematika*, v. 4, pp. 1-6, 1957.
- [6] C.A. Rogers, „Covering a sphere with spheres”, *Mathematika*, v. 10, pp. 157-164, 1963.
- [7] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, „Sphere packings, lattices and groups”, *New York: Springer-Verlag*, 1988.