Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Portfólió optimalizálás lineáris és egészértékű programozással

Szakdolgozat

Homolya Ivett

Matematika BSc - Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Dobrovoczki Péter

PhD hallgató

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2022

NYILATKOZAT

Név: Homolya Ivett

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: BEEC55

Szakdolgozat címe:
Portfólió optimalizálás lineáris és egészértékű programozással

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.29.

Homolya Ivett

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

1. Portfólió optimalizálás alapjai **4**
1.1. Alapfogalmak és jelölések 4
1.2. Markowitz-féle modell 6

2. Lineáris modellek portfólió optimalizáláshoz **8**
2.1. Bevezető 8
2.2. Linearizálható kockázati mértékek 8
2.2.1. Átlagos abszolút eltérés (MAD) 8
2.2.2. Semi-MAD 10
2.2.3. Gini féle átlagos differencia (GMD) 13
2.3. Linearizálható biztonsági mértékek 14
2.3.1. Minimax 14
2.3.2. Value at Risk (VaR) 16
2.3.3. Conditional Value at Risk (CVaR) 19

3. Portfólió optimalizálás tranzakciós költséggel **22**
3.1. Bevezető 22
3.2. A tranzakciós költség szerkezete 22
3.2.1. Fix tranzakciós költség 23
3.2.2. Részarányos tranzakciós költség 23
3.2.3. Szakaszonként lineáris költség 24
3.2.4. Részarányos költség rögzített minimális tranzakciós díjjal . 27
3.3. Tranzakciós költség bevezetése a portfólió optimalizálásba 29
3.4. Teljes modell a tranzakciós költséggel 29

A. Forráskódok **34**

Irodalomjegyzék **39**

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dobrovoczki Péternek, aki tanácsaival, ötleteivel és türelmével nélkülözhetetlen segítséget nyújtott ahhoz, hogy ez a dolgozat létrejöhessen.

Továbbá végtelen hálával tartozom családomnak a támogatásukért és az évek folyamán belém fektetett hitükért.

Bevezetés

Szakdolgozatom tematikája a lineáris és egészértékű portfólió optimalizálási modelleken alapszik. Azért esett erre a témakörre a választásom, mert mindig is érdekelt a pénzügyi és a matematikai világ közötti kapcsolat. A szakdolgozat írása közben betekintést nyerhettem a pénzügyi szféra alapjaiba, és megtapasztalhattam, hogyan tudom az egyetemi éveim alatt szerzett tudást alkalmazni.

Kezdetnek a modern portfólióelmélet atyjától, Harry Markowitz-tól idéznék: "A good portfolio is more than a long list of good stocks and bonds. It is a balanced whole, providing the investor with protections and opportunities with respect to a wide range of contingencies." [1] A jó portfólióhoz az egyensúly a kulcs. Ezzel a tulajdonsággal akkor rendelkezik a portfólió, ha védelmet és lehetőségeket egyaránt nyújt, vagyis, ha a kockázatot minimalizálni tudjuk, és a hozamot maximalizálni. A szakdolgozat erre a két optimalizálási problémára épül.

Az első fejezetben definiáljuk a fejezetekben szereplő jelöléseket, és néhány alap definíciót, amelyek a portfólió optimalizálási modelleink szerkezetére vonatkoznak. Ebben a részben mutatjuk meg a Markowitz-féle modellt, amelynek úttörő szerepe volt a potfólió optimalizálásban.

A második fejezetben lineáris programozási modellekkel foglalkozunk, és példákat látunk kockázati és biztonsági mértékekre. Néhányukhoz Pythonban készített program is tartozik, amellyekel példa feladatokat oldottunk meg, és ábrákkal reprezentáltuk az adott biztonsági mértéket.

A harmadik fejezetben az egészértékű portfólió optimalizálási modell jelenik meg, melyre különböző szerkezetű tranzakciós költséget vezettünk be. Ennek a modellnek az egyik változatával részletesebben foglakoztunk. Egy példát Python program segítségével megoldottunk, és a kapott eredményt kielemeztük.

Végül összefoglaltuk a látottakat, és az eredményeket összehasonlítottuk.

1. fejezet

Portfólió optimalizálás alapjai

Ebben a részben a [12] és a [7] források voltak a segítségemre.

Egy optimalizálási feladat során egy adott célfüggvényt szeretnénk minimalizálni vagy maximalizálni. Esetünkben az optimalizálási feladathoz portfóliókat veszünk alapul, és célunk a portfólió várható hozamának a maximalizálása egy adott kockázati szinttel, vagy a kockázat minimalizálása egy elvárt hozam mellett. Vagyis a portfóliók kockázatminimalizálása vagy a profitmaximalizálása a cél.

1.1. Alapfogalmak és jelölések

A fejezethez szükséges adatokat, illetve deiníciókat a [12], [13], [14], és [5] források felhasználásával gyűjtöttem össze.

A befektetési időszakban a tőkét szétosztják. A vagyon szétosztását százalékban fejezhetjük ki. Így nincs szükség a tőke értétének a megadására a portfólió optimalizálási modellben. Ezt a százalékot az eszköz súlyának nevezzük.

A befektetési időszak alatt, minden eszköz hozamot generál. Az eszközök súlyait figyelembe véve a portfólió hozama az eszköz hozamainak súlyozott átlaga, amely bármilyen valós értéket felvehet. Így a befektetési időszak alatt a tőke értéke megváltozik a hozamtól függően. Jelölje x_j döntési változó a j eszköz súlyát. Legyen $(x_1, \dots, x_n)$ a döntési változók vektora. Ekkor x egy portfólió. A portfólió ábrázolásához kellenek feltételek. Alapvető feltétel, hogy a súlyok összegének egynek kell lennie:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{1.1}$$

Továbbá minden j eszköz nem negatív súllyal szerepel a portfólióban:

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Jelölje Q a megvalósítható portfóliók halmazát, vagyis azokat a portfóliókat, amelyek eleget tesznek a (1.1) és az (1.2) feltételeknek. Minden x portfólióhoz tartozik egy $R_x = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$ valószínűségi változó, amely a portfólió hozamát jelenti, és százalékban fejezzük ki. Az x portfólió várható hozamát úgyszintén százalékban adjuk meg, és a következő lineáris függvényként számítható ki:

$$\mu(x) = \mathbb{E}(R_x) = \sum_{t=1}^{T} p_t y_t = \sum_{t=1}^{T} p_t \left(\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{t=1}^{T} p_t r_{jt} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j,$$

ahol a μ_j a j eszköz várható hozama, $\mu_j = \sum_{t=1}^{T} p_t r_{jt}$.

A szcenáriók alatt az eszközök megtérülési rátáinak lehetséges megvalósításait értjük a célidőben. Minden $t = 1, \ldots, T$ szcenárió egy adott p_t valószínűséggel fordulhat elő, és $\sum_{t=1}^{T} p_t = 1$. Legyen r_{jt} a $j = 1, \ldots, n$ eszköznek a hozama az adott $t = 1, \ldots, T$ szcenárióban. Jelölje y_t a t szcenárió hozamát, amely függ x_j-től, vagyis a j eszközbe fektetett tőkétől:

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j. \tag{1.3}$$

A portfólió optimalizálás modelljei lineáris és egészértékű programok, ezért fontos definiálni az abálli fogalmakat.

1. Definíció (Lineáris programozási feladat)**.** *A legegyszerűbb feltételes optimalizálási feladatban a célfüggvény és a feltételi függvények a döntési változónak lineáris függvényei, ezt az optimalizálási problémát lineáris programozási feladatnak nevezzük. A lineáris programozási feladat standard formája a következő:*

$$\begin{aligned} \min \quad & cx & & \\ \text{s.t.} \quad & Ax & = & \; b \\ & x & \geq & \; 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ ismert konstans mátrix illetve vekorok, $x \in \mathbb{R}^n$ pedih a döntési változó vektor. A cx a c és az x vektorok skaláris szorzatát jelöli.

Egyes mértékek duális formában adhatók meg.

2. Definíció (Duális feladat)**.**

$$\begin{aligned} \max \quad & cx & & \\ \text{s.t.} \quad & Ax & = & \; b \\ & x & \geq & \; 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

kanonikus alakú LP feladat duálisát a következő

$$\begin{aligned} \min \quad & yb \\ \text{s.t.} \quad & yA \; \geq c \end{aligned} \tag{1.6}$$

feladat formájában, ahol $y \in \mathbb{R}^m$ döntési (változó) vektor. Az első feladatot primál feladatnak, a második feladatot duál vagy duális feladatnak nevezzük, y komponenseit duális változóknak.

3. Definíció (Egészértékű programozási feladat). *Ha a döntési változó értéke csak egész szám lehet, ezeket a feladatokat egészértékű programozási feladatoknak nevezzűk, vagyis:*

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z}^n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Először a Markowitz-féle modellel foglalkozunk, amely a portfólióelmélet alapja, majd lineáris- és az egészértékű programozási feladatokkal, amelyek a Markowitz-féle modellhez képest figyelembe vesznek olyan tényezőket, amelyekkel az optimalizálási feladatunkat javítani tudjuk.

1.2. Markowitz-féle modell

Ehhez a részhez a [9], a [8],és a [12] forrásból szereztem az adatokat.

Harry Markowitz nevéhez fűződő modern portfólió elméletet széles körben használják az opzimalizálási modellek terén, melynek célja az eszközbe fektetett tőke optimalizálása oly módon, hogy maximalizáljuk a portfólió várható hozamát egy adott kockázati szint mellett, vagy minimalizáljuk a kockázatot egy adott elvárt hozamszint mellett.

Ő volt az első, aki matematikailag megfogalmazta a várható hozamot és a kockázatot. Ezek segítségével definiálta az optimalizálási modellt.

Úttörő munkájában a szórás használatát javasolta, mint kockázati mérték, így a modell a portfólió várható hozamának növelésére és a hozamok szórásának csökkentésére törekszik. A modell célja a hatékony portfólió megtalálása.

4. Definíció (Hatékony portfólió). *Azokat a portfóliókat, amelyek egy adott szórás mellett a legmagasabb várható hozamot ígérik, hatékony portfóliónak nevezzük.*

Ahhoz, hogy eldöntsük, vajon a portfólió hatékony-e, meg kell határozni minden eszköz várható hozamát és szórását, valamint az eszközök közötti korreláció mértékét. A szórást a következőképpen definiálhatjuk:

$$\delta^2(R) = \mathbb{E}((R - \mathbb{E}(R))^2)$$

A portfólió hozamának a szórása kifejezhető a j eszköz x_j súlyának kvadratikus függvényeként. A j eszköz R_j hozama egy valószínűségi változó μ_j várható értékkel. Továbbá jelölje δj^2 az R_j szórásnégyzetét, δij pedig az i és a j eszköz hozamai közötti kovarianciát:

$$\delta_{ij} = \mathbb{E}((R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)).$$

Az x portfólió R_x hozamának a szórásnégyzete a következőképpen írható fel:

$$\delta^2(R_x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \delta_{ij} x_i x_j.$$

Ekvivalens kifejezést kaphatunk, ha az i eszköz szórását δ_{ii}-vel jelöljük, ekkor:

$$\delta^2(R_x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_ix_j.$$

A Markowitz modell:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_ix_j \tag{1.8a}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}\mu_jx_j \geq \mu_0 \tag{1.8b}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j = 1 \tag{1.8c}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,n, \tag{1.8d}$$

ahol μ_0 a portfólió várható hozamának az alsó korlátja. Ez a feladat egy kvadratikus programozási probléma, kvadratikus célfüggvénnyel, két lineáris feltétellel és n nem negatív folytonos változóval.

A Markowitz-féle modell hátránya, hogy a modell feltételezi az eszközök közötti korrelációk rögzítettek és állandóak, nincs adó illetve tranzakciós költség, az eszközök kockázata előre ismert és állandó.

A következő fejezetekben olyan modellekkel foglalkozunk, amelyek a Markowitz-féle modell hibáin javítanak. Először lineáris programozási modellekkel foglalkozunk, amelyek gyorsabbak, mint a Markowitz-féle modell, majd egészértékű programozási modellekkel, amelyeknél bevezetjük a tranzakciós költséget.

2. fejezet

Lineáris modellek portfólió optimalizáláshoz

Az alábbi fejezetben a [12], a [8], és a [10] forrást használtam.

2.1. Bevezető

A kvadratikus programozási (QP) modellekkel szemben, így például a Markowitz-féle modell, a lineáris programozási modellek néhány szempontból praktikusabbak. Például az LP-szolverek megbízhatóbbnak minősültek a QP-szolverekhez képest. Továbbá az LP-szolverek átlagosan rövidebb idő alatt képesek sokkal nagyobb méretű problémát megoldani.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, milyen lineáris programozási modellek állnak a rendelkezésünkre a portfólió kockázatának vagy biztonságának mérésére és optimalizálására.

2.2. Linearizálható kockázati mértékek

2.2.1. Átlagos abszolút eltérés (MAD)

A MAD modellben a kockázatot a várható értéktől való várható abszolút eltéréssel mérjük, és a következőképpen definiáljuk:

$$MAD(x) = \mathbb{E}(|R_x - \mathbb{E}(R_x)|) = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right)\right|\right). \tag{2.1}$$

vagyis:

$$MAD(x) = \sum_{t=1}^{T} p_t \left(\left|\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j\right|\right), \tag{2.2}$$

Igaz, hogy van abszolút érték a feladatban:

$$\min_x MAD(x) = \min \sum_{t=1}^{T} p_t |y_t - \mu|,$$

de ennek kiküszöbölése érdekében bevezetjük a d_t változót, amely minden optimális megoldásban a következő értéket veszi fel:

$$d_t = |y_t - \mu|, \quad t = 1, \dots, T$$

Ekkor a MAD portfólió optimalizálási modell:

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} p_t d_t \tag{2.3a}$$

$$\text{s.t.} \quad d_t \geq y_t - \mu \qquad \forall t = 1, \dots, T \tag{2.3b}$$

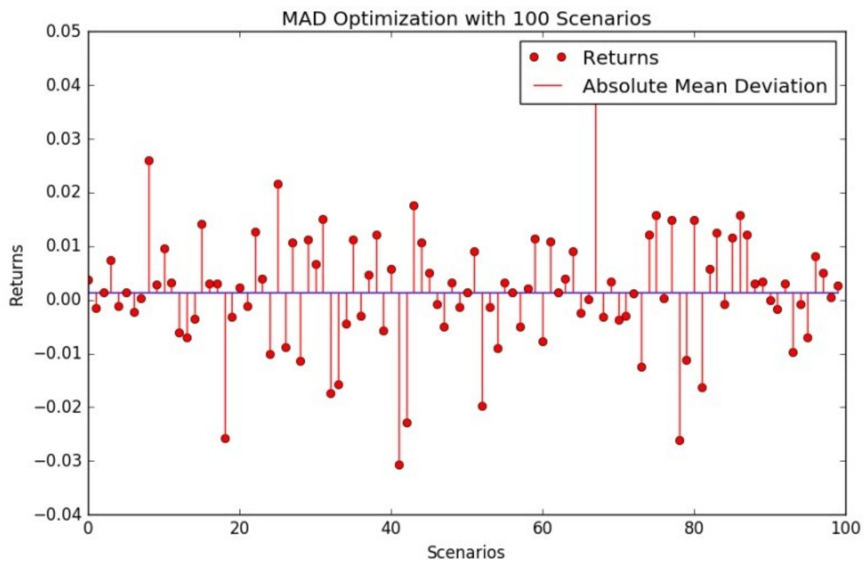
$$d_t \geq -(y_t - \mu) \qquad \forall t = 1, \dots, T \tag{2.3c}$$

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \qquad \forall t = 1, \dots, T \tag{2.3d}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \tag{2.3e}$$

$$\mu \geq \mu_0 \tag{2.3f}$$

$$x \in Q. \tag{2.3g}$$



2.1.ábra: MAD mérték, forrás :[8]

A 2.1. ábra példa a MAD optimalizálásra. A CAC40 adatait használták fel hozzá, amely egy benchmark francia tőzsdeindex és a 40 legjelentősebb részvény tőkésítéssel súlyozott mutatója. Ezekre az adatokra 100 szcenárió generálásával a fenti ábrát kapták. Az y-tengely a portfóliók hozamát, az x-tengely a 100 szcenáriót mutatja. A piros pontok egy adott szcenárió hozamát jelölik, a piros vonalak pedig az átlagos abszolút eltérést.

Példa

2.1.táblázat				
eszköz	szcenárió1	szcenárió2	szcenárió3	várható hozam
	$p_1 = 60\%$	$p_2 = 20\%$	$p_3 = 20\%$	
1	$r_{11} = 3.1\%$	$r_{12} = -2.7\%$	$r_{13} = 1.60\%$	$\mu_1 = 1.64\%$
2	$r_{21} = 2.3\%$	$r_{22} = -2.3\%$	$r_{23} = 1.30\%$	$\mu_2 = 1.18\%$
3	$r_{31} = 4.2\%$	$r_{32} = -3.1\%$	$r_{33} = -0.2\%$	$\mu_3 = 1.86\%$
4	$r_{41} = 1.5\%$	$r_{42} = -2.0\%$	$r_{43} = -0.1\%$	$\mu_4 = 0.48\%$

A 2.1. táblázat adataival vizsgáltuk a MAD modellt, 3 szcenárióra és 4 eszközre. A tábázatban adott a szcenárió eszközeinek a r_{jt} hozama százalékban és a szcenárióhoz tartozó p_t valószínűség. A várható hozamot $\mu_j = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} p_t$ képlettel számítottuk ki minden $t = 1, \ldots, T$-re. A következő optimális x portfóliót kaptuk a modellel:

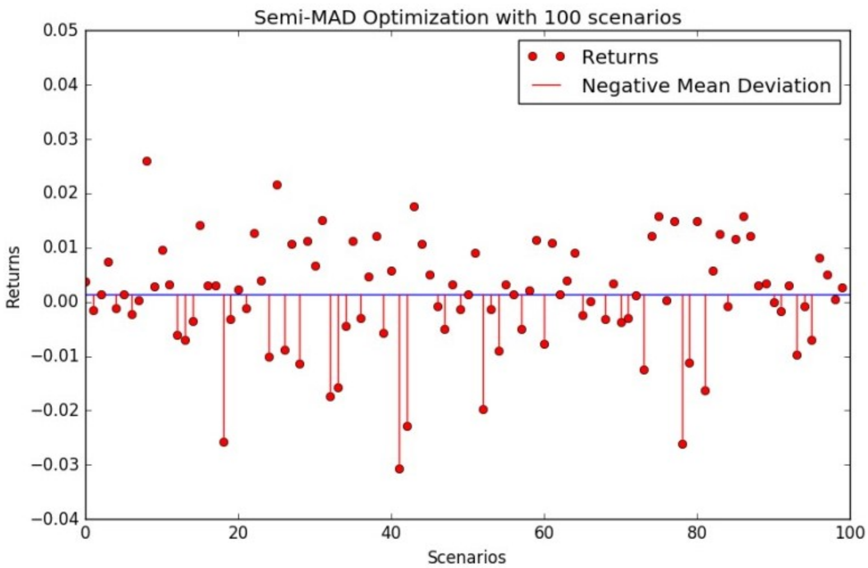
Assets	x
asset1	0.0
asset2	0.0
asset3	0.0
asset4	1.0
Exp.return	0.48

A megoldásból az látszik, hogy a modell a 4.eszközt 1 súllyal választja az x portfólióba, és így a portfólió várható hozama $0,48\%$.

2.2.2. Semi-MAD

A MAD modellt módosíthatjuk úgy, hogy csak az átlagos hozam alá eső részt vesszük figyelembe. Vagyis a Semi-MAD mérték a várható értéktől való negatív irányba történő várható abszolút eltérést minimalizálja. Így a következőképp definiálhatjuk a Semi-MAD modellt:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^{T} p_t d_t & & \text{(2.4a)}\\
\text{s.t.} \quad & d_t \geq \mu - y_t & \forall t = 1, \ldots, T \quad & \text{(2.4b)}\\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & \forall t = 1, \ldots, T \quad & \text{(2.4c)}\\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & & \text{(2.4d)}\\
& \mu \geq \mu_0 & & \text{(2.4e)}\\
& d_t \geq 0 & \forall t = 1, \ldots, T \quad & \text{(2.4f)}\\
& x \in Q. & & \text{(2.4g)}
\end{aligned}
$$



2.2.ábra: Semi-MAD mérték, forrás :[8]

A 2.2.ábra ugyanazok az adatok felhasználásával készült, mint a 2.1.ábra. Az ábrán látható, hogy a Semi-MAD mérték csak a 0 alá eső részt nézi, és azt minimalizálja. Ezen az ábrán is az x-tengely a 100 generált szcenáriót ábrázolja, az y-tengely pedig a hozamot.

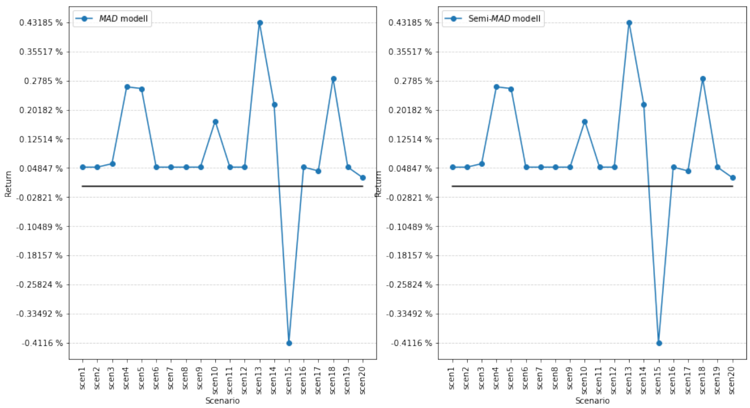
1.példa

A 2.1.táblázat adataira lefutattuk a Semi-MAD modellt. A modell ugyanazt az eszközt választja ki az x portfólióba, mint a MAD modell, és a portfólió várható hozama is megegyezik. A kapott optimális eredményt a következő táblázat mutatja:

Assets	x
asset1	0.0
asset2	0.0
asset3	0.0
asset4	1.0
Exp.return	0.48

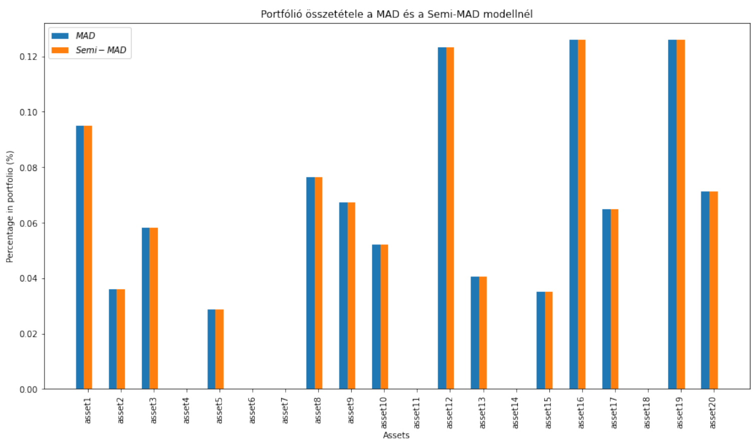
2.példa

20 generált szcenáriók és eszközök, továbbá az eszközökhöz véletlenszerűen generált hozamok és a szcenáriókhoz generált valószínűségek segítségével összehasonlítottuk a MAD és a Semi-MAD hozamát, várható hozamát és portfólió összetételét.



2.3.ábra: MAD és Semi-MAD modell hozamának összehasonlítása

A 2.3.ábra a MAD és a Semi-MAD modell 20 generált szcenáriójának a hozamát mutatja. Jobb oldalt a MAD, bal oldalt a Semi-MAD modell található. Az ábrán az látszik, hogy a két modell szcenárióinak hozama megegyezik.



2.4.ábra: MAD és Semi-MAD portfóliója

A 2.4.ábra a MAD és a Semi-MAD modell potfóliójának százalékos összetételét mutatja. A két modell ugyanazokat az eszközöket, ugyanakkora súllyal választotta a portfólióba. Innen is látszik, hogy a két mérték között csak annyi a különbség, hogy a Semi-MAD modell kevesebb feltételt tartalmaz. Továbbá ezt az alábbi táblázat is igazolja, ami a két modell portfóliójának várható értékét mutatja:

modell	várható hozam
MAD	$\mu = 0.011579\%$
Semi-MAD	$\mu = 0.011579\%$

2.2.3. Gini féle átlagos differencia (GMD)

A GMD két szcenárió hozama közötti eltérés abszolút értéke:

$$|y_{t_1} - y_{t_2}| = \left| \sum_{j=1}^{n} r_{j,t_1} x_j - \sum_{j=1}^{n} r_{j,t_2} x_j \right|$$

Az eltéréseket súlyozzuk a szcenáriók előfordulásának valószínűsége szerint, és ezáltal a következő $\Gamma(x)$ minimalizálandó célfüggvényt kapjuk, amely linearizálható:

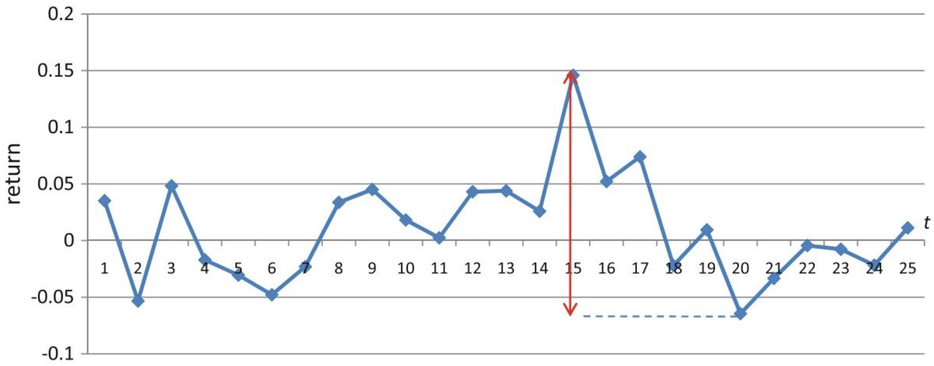
$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} \sum_{t_1=1}^{T} \sum_{t_2=1}^{T} |y_{t_1} - y_{t_2}| p_{t_1} p_{t_2}, \tag{2.5}$$

ahol a $\frac{1}{2}$ tényező abból jön, hogy páronkénti eltérést kétszer számolunk a dupla összegben.

A GMD kockázati mértéken alapuló portfólió optimalizálási modell:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t_1=1}^{T} \sum_{t_2 \neq t_1} p_{t_1} p_{t_2} d_{t_1 t_2} & & \text{(2.6a)} \\
\text{s.t.} \quad & d_{t_1 t_2} \geq y_{t_1} - y_{t_2} & \forall t_1, t_2 = 1, \ldots, T; t_2 \neq t_1 & \quad \text{(2.6b)} \\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j & \forall t = 1, \ldots, T & \quad \text{(2.6c)} \\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j & & \quad \text{(2.6d)} \\
& \mu \geq \mu_0 & & \quad \text{(2.6e)} \\
& d_{t_1 t_2} \geq 0 & \forall t_1, t_2 = 1, \ldots, T; t_2 \neq t_1 & \quad \text{(2.6f)} \\
& x \in Q. & & \quad \text{(2.6g)}
\end{aligned}$$

A $d_{t_1 t_2} = d_{t_2 t_1}$ szimmetria tulajdonságot figyelmen kívül hagyja a modell.



2.5.ábra: GMD mérték, forrás: [12]

A 2.5. ábra egy adott portfólió megtérülési rátájának értékeit reprezentálja a $T = 25$ szcenárió esetén. Az x-tengely a 25 szcenáriót ábrázolja, míg az y-tengely a hozamot. A függőleges piros egyenes hossza a 15. és a 20. szcenárió szerinti portfólióhozamok különbségének abszolút értéke, azaz $d_{15,20} = |y_{15} - y_{20}|$. Ezen az ábrán is látható, hogy a GMD úgy optimalizál, hogy a két kiválasztott szcenárió hozama közötti eltérést minimalizálja.

2.3. Linearizálható biztonsági mértékek

Ehhez a fejezthez a [12] és a [8] forrásokból gyűjtöttem a információkat?.

Ebben a fejezetben a portfólió minőségének a mérését elemezzük különböző módon és meghatározunk bizonyos biztonsági mértékekkel, amelyek maximalizálhatóak. A cél, hogy a lehető legstabilabb hozamot kapjuk. Itt figyelmen kívül hagyjuk a várható megtérülési rátát, és ehelyett megpróbáljuk elkerülni a legrosszabb szcenáriót. Elsősorban ezek a biztonsági mértékek a pénzügyi szervezeteknek fontosak, amelyek egyre megbízhatóbb modelleket keresnek a szélsőséges szcenáriókkal szemben, főleg mióta a 2008-as gazdasági válság megtörtént. A továbbiakban három biztosítási mértékkel foglalkozunk.

2.3.1. Minimax

A portfólió hozamának a legrosszabb megvalósítása egy lehetséges biztosítási mérték. A cél, hogy a minimálisan elérhető hozamot maximalizáljuk.

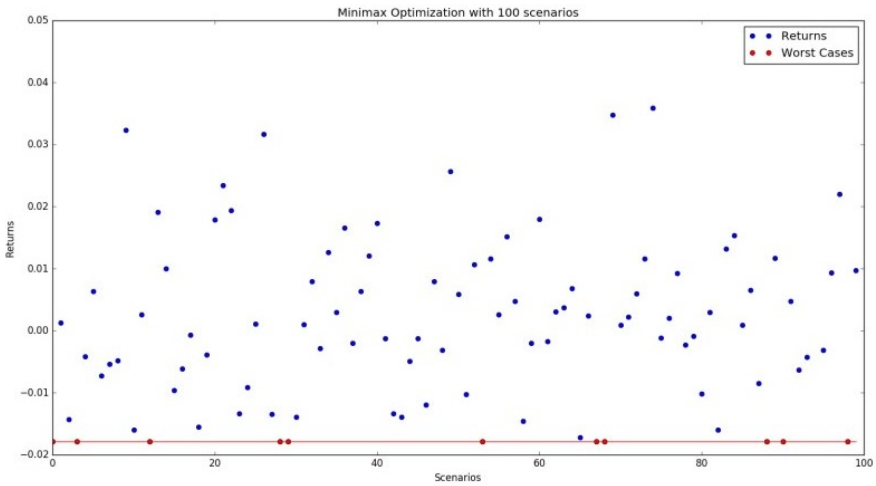
A legrosszabb megvalósítás, vagyis a lehetséges hozam minimuma a következő:

$$M(x) = \min_{t=1,\ldots,T} y_t = \min_{t=1,\ldots,T} \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j. \tag{2.7}$$

Ez a függvény nem lineáris. Viszont bevezethetünk egy y mesterséges változót, melynek kisebbnek kell lennie a szcenárió összhozamánál, vagyis annál az értéknél, amit maximalizálni szeretnénk.

A Minimax modell a következő:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & y && && (2.8a)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j \geq y && \forall t = 1,\dots,T && (2.8b)\\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j && && (2.8c)\\
& \mu \geq \mu_0 && && (2.8d)\\
& x \in Q. && && (2.8e)\\
& && && (2.8f)
\end{aligned}
$$



2.6.ábra: Minimax modell, forrás :[8]

A 2.6.ábrát a CAC40 adataival készítették 100 generált szcenárióval. Kék pontok a szcenáriók hozamát jelöli, míg a piros pontok a legrosszabb hozamok, amelyeket a Minimax modell maximalizálni szeretne.

Példa

2.2.táblázat			
szcenárió	valószínűség	eszköz 1	eszköz 2
1	$p_1 = 20\%$	$r_{11} = 4.9\%$	$r_{11} = 2.0\%$
2	$p_2 = 50\%$	$r_{12} = 4.0\%$	$r_{22} = 3.0\%$
3	$p_3 = 20\%$	$r_{13} = 2.2\%$	$r_{23} = 2.0\%$
4	$p_4 = 10\%$	$r_{14} = 1.8\%$	$r_{24} = 2.0\%$
		$\mu_1 = 5.4\%$	$\mu_2 = 4.3\%$

A 2.2 táblázat azokat az értékeket tartalmazza, amelyekre lefuttattuk a Mimimax modellt. Adott 2 eszköz, és azok μ_j várható hozama. Továbbá adott 4 szcenárió, azok p_t valószínűsége és r_{jt} hozama mindkét eszközre. Mindkét eszköz esetén elvárjuk, hogy a várható hozamuk legalább 2% legyen , vagyis $\mu_0 = 0.02$. Az y változó minimalizálásával a következő eredményt kapjuk:

Assets	x
asset1	0.0
asset2	1.0
Exp.return	2.5

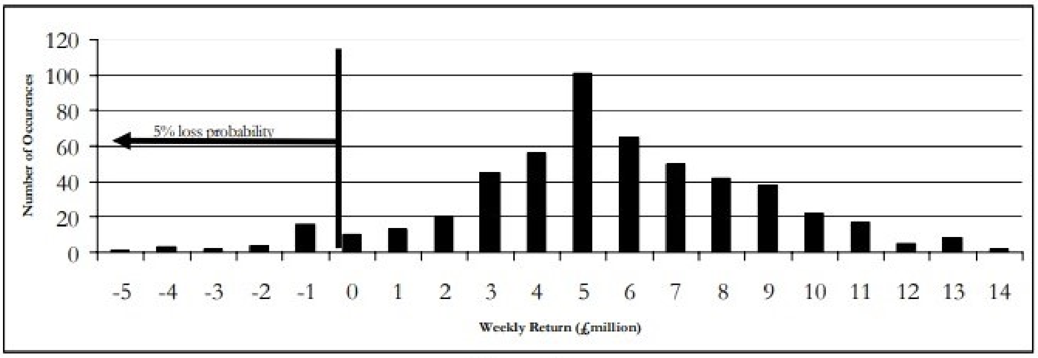
A kapott optimális eredmény szerint, ha az x portfólióba a 2.eszközt választjuk 1 súllyal, akkor a várható hozamunk 2.5%.

2.3.2. Value at Risk (VaR)

Az alábbi rész megírásához a következő források voltak segítségemre: [12], [8], [10], [2].

A VaR olyan kockázati mérték, amely a legnagyobb veszteséget méri egy adott β konfidencia szinten (biztonsági szinten) a célidőben.

Például, ha azt mondjuk, hogy a portfólió VaR-ja £0, 5 millió 95%-os konfidencia intervallumon egy hetes célidőben, ez azt jelenti, hogy a kimenetelek legrosszabb 5%-ában a portfólió hozama kevesebb lesz, mint $-0,5$ millió. A 2.7.ábra ezt a példát ábrázolja egy portfólió hozamának 520 lehetséges kimenetelével az egy hetes célidőben. A portfólió VaR-ja az a veszteség, amely az esetek 95%-ában nem következik be, de a megmaradt 5% esetben, ebben a példában ez 26 legnagyobb veszteség, a veszteség nem haladja meg az £0, 5 milliót.



2.7.ábra: VaR mérték, Forrás :[10]

Jelölje X a nyereség és a veszteség eloszlását (nyereségnél pozitív, veszteségnél negatív). A VaR $\beta \in [0, 1]$ konfidencia szinten a legkisebb olyan q_β valós szám, amely legalább $(1 - \beta)$, és $Y = -X$ valószínűsége nem haladja meg az értékét:

$$VaR_\beta = -\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X > \beta\} = F_Y^{-1}(1 - \beta)$$

Az VaR(x) mérték esetén vett β konfidencia szint szorosan összekapcsolódik a kvantilis fogalmával, mivel a legrosszabb hozam érdekel minket egy adott β százalék alatt. A VaR(x) általánosítása pont a kvantilis statisztikai fogalma.

Ha maximalizálni akarjuk a legrosszabb hozamot egy adott (β százalék) konfidencia intervallumon, akkor maximalizálnunk kell a β-kvantilist. Ezt nevezzük VaR mértéknek. Ahhoz, hogy a potfólió optimalizálási feladatunk lineáris legyen, bevezetjük z_t bináris változót, minden $t = 1, \ldots, T$ szcenárióra. Így felírható a következő lineáris feltétel:

$$y_t \geq y - Mz_t \quad \forall t = 1, \ldots, T,$$

ahol M tetszőleges nagy konstans, amely nagyobb, mint bármely lehetséges hozam, vagyis $M > r_{jt}$. Ezután használhatjuk a z_t bináris változót a VaR feltétel definiálására:

$$\sum_{t=1}^{T} p_t z_t \leq \beta - \pi, \quad z_t \in \{0,1\}, \quad \forall t = 1, \ldots, T,$$

ahol π tetszőleges kis pozitív állandó, és $\pi < p_t$ minden $t = 1, \ldots, T$ esetén.

Ekkor a Var modell a következő:

$$\begin{aligned}
\max \quad & y && && (2.9a)\\
\text{s.t.} \quad & y_t \geq y - Mz_t && \forall t = 1, \ldots, T && (2.9b)\\
& y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j && && (2.9c)\\
& \sum_{t=1}^{T} p_t z_t \leq \beta - \pi, \quad z_t \in \{0,1\} && \forall t = 1, \ldots, T && (2.9d)\\
& \mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j && && (2.9e)\\
& \mu \geq \mu_0 && && (2.9f)\\
& x \in Q. && && (2.9g)\\
& && && (2.9h)
\end{aligned}$$

A (2.9b) egyenlőtlenség miatt a z_t bináris változó 1 értéket vesz fel, ha az y változó nagyobb, mint a portfólió t szcenárió szerinti hozama, vagyis $y > y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j$. A (2.9d) egyenlőtlenségnek köszönhetően, minden olyan t szcenárió valószínűsége, amelyben $y > y_t$, kisebb, mint β. Ezért a maximalizált y változó értéke egyenlő az optimális β-kvantilis $q_\beta(x)$ értékével.

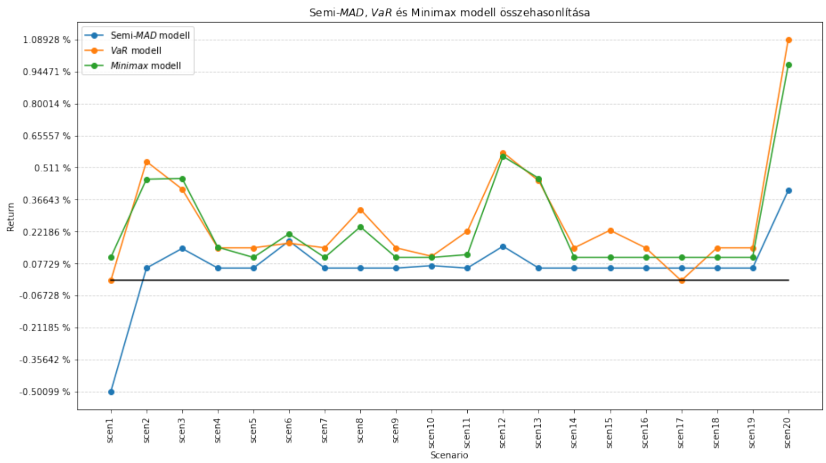
1.példa

A 2.2.táblázat adataira lefuttattuk a VaR modellt. A konfidencia szintet, vagyis β-t 5%-nak vettük. Továbbá M értékét 10%-nak, mivel ennek az értéknek nagyobbnak kell lennie, mint bármely lehetséges hozam, és π, pozitív konstans, ami kisebb p_t-nél, legyen 1%. Az alábbi optimumot kaptuk, amelyen az látható, hogy a VaR modell az x portfólióba az 1.eszközt választotta 1 súllyal, és így a portfólió várható hozama 3.6%. Továbbá a maximalizált y értékére 4-et kaptunk, ami megegyeztik az optimális β-kvantilis értékével. A kapott optimális megoldás:

Assets	x
asset1	1
asset2	0
Exp.return	3.6

2.példa

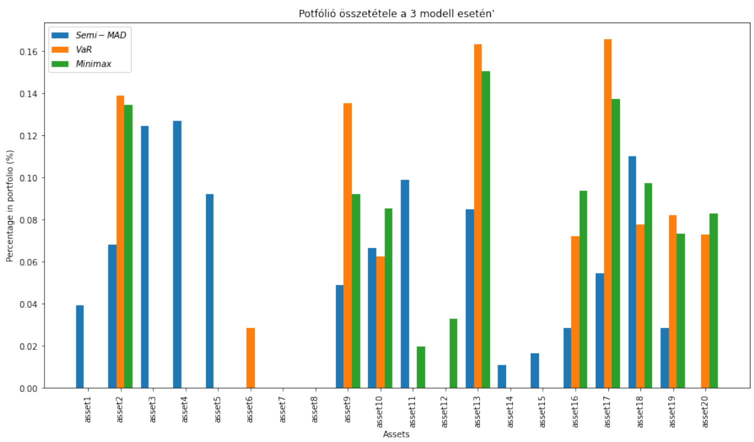
Összehasonlítottuk a Semi-MAD kockázati mértéket a Minimax és VaR bizonsági mértékkel. 20 generált szcenáriót és eszközt, továbbá azok véletlenszerűen generált r_{jt} hozamát és p_t valószínűségének vettük alapul. Az alábbi ábrát kaptuk:



2.8.ábra: A 3 mérték összehasonlítása

Az x-tengely a 20 szcenáriót mutatja, míg az y-tengely a hozzájuk tartozó y_t hozamot. A Semi-MAD modell eredményét a kék szín, a VaR modellét a sárga és a Minimax modell eredményét a zöld szín jelöli.

A 2.9.ábra a Semi-MAD, a VaR és a Minimax modell portfólióinak százalékos összetételét ábrázolja. Az ábrán látható, hogy az eszközök mekkora súllyal szerepelnek a portfólióban a 3 modell esetén.



2.9.ábra: A 3 mérték portfóliója

A három mérték várható hozama a fenti adatokkal:

modell	várható hozam
Semi-MAD	$\mu = 0.056857\%$
VaR	$\mu = 0.2238\%$
Minimax	$\mu = 0.18545\%$

2.3.3. Conditional Value at Risk (CVaR)

Az alábbi részhez a [12], [8], [10], [3] és a [4] forrásokból származnak a szükséges adatok.

A CVaR, más néven feltételes VaR egy kiterjesztett biztonsági mérték, amely számszerűsíti az adott konfidencia szintet meghaladó szcenáriók átlagos veszteségét. Vagyis a CVaR meghatározza a várható veszteséget β százalékos szinten, ami megegyezik a portfólió várható hozamával a $\beta\%$ legrosszabb esetben. Például, ha 12 millió dolláros egy napos CVaR azt jelenti, hogy a legrosszabb 1%-os szcenáriók várható vesztesége egy nap alatt 12 millió dollár.

A legegyszerűbb eset, amikor a szcenáriók valószínűsége egyenlő, vagyis $p_t = \frac{1}{T}$ és a β-kvantilis értéke a k legrosszabb szcenárió és T összes szcenárió hányadosa, vagyis $\beta = \frac{k}{T}$. Ekkor a CVaR a k legrosszabb megvalósítás átlagaként definiálható:

$$CVaR_{\frac{k}{T}}(x) = \frac{1}{k/T} \sum_{s=1}^{k} p_{t_s} y_{t_s} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^{k} y_{t_s},$$

ahol $y_{t_1}, \ldots, y_{t_k}$ a k legrosszabb hozamú szcenárió (kisebb, mint y_t).

A CVaR esetében az a nehézség, hogy lineárisan megfogalmazzuk, hogy egy szcenárió a β százalék legrosszabb eset között van. Emiatt bevezetünk egy u_t bináris változót minden $t = 1, \ldots, T$ szcenárióhoz. Az u_t optimális esetben a t-edik legrosszabb hozam százaléka $CVaR_\beta(x)$-ben.

Az u_t bináris változó segítségével a CVaR a következőképp határozható meg:

$$CVaR_\beta(x) = \min_{u_t} \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^{T} y_t u_t \tag{2.10a}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=1}^{T} u_t = \beta \tag{2.10b}$$

$$0 \leq u_t \leq p_t \qquad \forall t = 1, \ldots, T \tag{2.10c}$$

Továbbá, az u_t értéke :

- $u_t = 0$ minden y_t szcenárió esetén, ha nincsennek benne a β százalék legrosszabb esetben

- $u_t = p_t$ minden y_t szcenárió esetén, ha benne vannak a β százalék legrosszabb esetben

- $0 < u_t < p_t$ legfeljebb egy szcenárióra, vagyis a legjobbra a β százalék legrosszabb közül.

A (2.10) probléma nem lineárissá válik, ha az y_t változóként szerepel a portfólió optimalizálási feladatban. Viszont, ha duális feladatként vizsgáljuk a CVaR-t, akkor az előbb említett probléma eltűnik. Legyen η és $\bar{d}_t$ a (2.9b)-nek és az u_t-ra vonatkozó alsó korlátnak megfelelő duális változó. Így a következő duális feladatot kapjuk CVaR-ra:

$$CVaR_\beta(x) = \max_{\eta,\bar{d}_t} \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t \bar{d}_t \tag{2.11a}$$

$$s.t. \quad \bar{d}_t \geq \mu - y_t, \qquad \forall t = 1, \ldots, T \tag{2.11b}$$

$$\bar{d}_t \geq 0, \qquad \forall t = 1, \ldots, T. \tag{2.11c}$$

A végleges CVaR modell:

$$\max \quad (\eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} p_t \bar{d}_t) \tag{2.12a}$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{d}_t \geq \eta - y_t \qquad \forall t = 1, \ldots, T \tag{2.12b}$$

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \qquad \forall t = 1, \ldots, T \tag{2.12c}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \tag{2.12d}$$

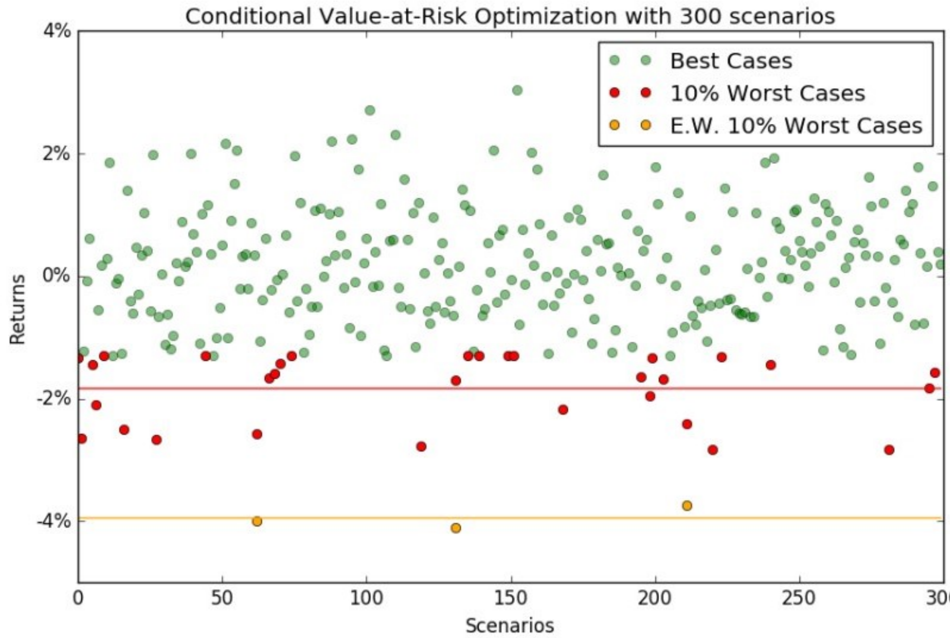
$$\mu \geq \mu_0 \tag{2.12e}$$

$$\bar{d}_t \geq 0 \qquad \forall t = 1, \ldots, T \tag{2.12f}$$

$$x \in Q. \tag{2.12g}$$

$$\tag{2.12h}$$

ahol az η változó az optimális megoldásban a β- kvantilis értékét veszi fel.



2.10.ábra: CVaR mérték, forrás :[8]

A 2.10.ábrához a CAC40 adatait használták 300 szcenárióval. Az ábrán az x-tengely a szcenáriókat, az y-tengely a hozzájuk tartozó hozamot jelöli százalékokban. Zöld pontok a legjobb eseteket mutatják. A piros és a sárga pontok a 10% legrosszabb esetet. A különbség a kettő között, hogy a piros pontok az optimalizálás előtti legrosszabb esetet jelölik, míg a sárga pontok a CVaR alkalmazása utáni legrosszabb eseteket. Így az ábrán látható, hogy a CVaR mérték $\beta = 0.1$ esetén mekkora mértékben tudja maximalizálni a legrosszabb esetekben a hozamot.

3. fejezet

Portfólió optimalizálás tranzakciós költséggel

A következő fejezethez az adatok a [12], [13], [11] és a [6] forrásokból származnak.

3.1. Bevezető

Tranzakciós költségek alatt azokat a pénzügyi kiadásokat értjük, amelyek egy adott ügylet lebonyolításakor felmerülnek. Ezek lehetnek banki átutalás költségei, valamilyen ügynök jutalékjai, de a döntést segítő információk beszerzésének költségei is ide sorolhatóak. A tranzakciós költségek eltérő szerkezetűek lehetnek. Ahhoz, hogy lineáris formában ki tudjuk fejezni őket, szükségünk lesz a változók és a korlátok speciális használatára. A továbbiakban különböző típusú tranzakciós költségek modellezésére fogunk példákat mutatni. Először a tranzakciós költség leggyakoribb szerkezeteit definiáljuk, majd megnézzük, hogyan modellezhetjük őket. Ezután a portfólió optimalizálási modellbe bevezetjük a tranzakciós költségek különböző fajtáit. Végül a teljes portfólió optimalizálási modellt definiáljuk a Semi-MAD célfüggvény segítségével.

Ebben a fejezetben X_j jelöli j eszköz súlyt a portfólióban, amely most tőkében lesz kifejezve, nem százalékban. A rendelkezésre álló tőkét, vagyis az össztőkét jelölje $\bar{C}$.

3.2. A tranzakciós költség szerkezete

Jelölje $K(X_1, \ldots, X_n)$ a portfólió tranzakciós költségfüggvényét, ahol X_j a j eszközbe fektetett tőke, minden $j = 1, \ldots, n$ eszközre. Amikor egy eszközt tranzakciós költséggel terhelnek, akkor jelölje $K_j(X_j)$ a j eszköz X_j tranzakciós költségét. A leggyakoribb eset, amikor az eszközökre a tranzakciós költség független egymástól, vagyis ebben az esetben a portfólió költségfüggvénye szétválasztható:

$$K(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} K_j(X_j) \tag{3.1}$$

A tranzakciós költségeknek három nagy csoportjával foglalkozunk: fix-, részarányos- és szakaszonként lineáris tranzakciós költség.

3.2.1. Fix tranzakciós költség

A fix tranzakciós költséget egy eszköz kezeléséért fizetik, és ez az összeg független az eszközbe fektetett pénz mennyiségétől. A j eszköz tranzakciós költsége:

$$K_j(X_j) = \begin{cases} f_j, & \text{ha } X_j > 0, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \tag{3.2}$$

ahol f_j a kifizetett tranzakciós költség, ha a j eszköz pozitív súllyal szerepel a portfólióban. A fenti költségstruktúra minden kiválasztott j eszközre fix f_j költséget ír elő, ezt tiszta fix költségnek nevezzük.

A fix tranzakciós költség modellezéséhez szükség lesz egy z_j bináris változóra, minden $j = 1, \dots, n$ eszközre. A z_j bináris változó értéke legyen 1, ha a j eszköz pozitív súllyal szerepel a portfólióban, vagyis $X_j > 0$, ellenkező esetben z_j értéke legyen 0. Így a modellhez a következő lineáris feltételeket kell hozzáadni:

$$L_j z_j \le X_j \le U_j z_j, \quad \forall j = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

ahol L_j, U_j a j eszköz súlyának pozitív alsó és felső korlátja, továbbá U_j megfelelő felső korlát lehet $\bar{C}$-re, amely a teljes tőkének felel meg. A (3.3) feltétel jobb oldali része az írja elő, hogy ha $X_j > 0$, akkor $z_j = 1$. A bal oldali rész z_j értékét 0-ra kényszeríti, ha $X_j = 0$. Helyes modellezés esetén az L_j alsó korlát nem lehet egyenlő 0-val, mert ebben az esetben az X_j változó (3.3) szerinti alsó korlátja mindig 0 lesz. Ha nincs gyakorlati alacsonyabb korlát definiálva, akkor az L_j nagyon kicsi valós számként válaszható. A fentiek szerint meghatározott z_j változó esetén a j eszköz tranzakciós költségének a lineáris alakja:

$$K_j(X_j) = f_j z_j, \tag{3.4}$$

és a tranzakciós költségfüggvény:

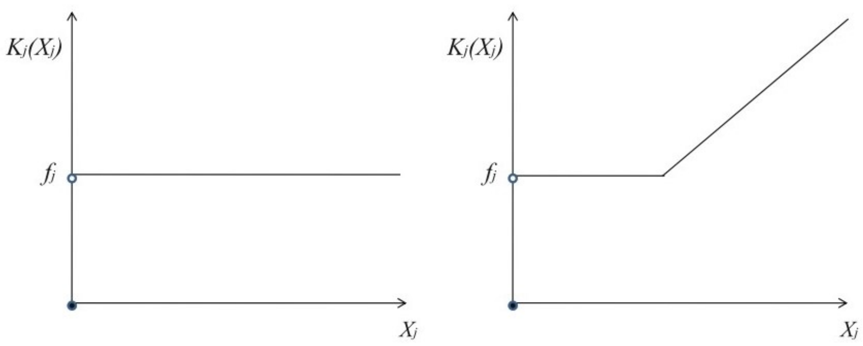
$$K(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j z_j. \tag{3.5}$$

3.2.2. Részarányos tranzakciós költség

Azt nevezzük részarányos tranzakciós költségnek, amikor a tranzakciós költség a befektetett összegtől lineárisan függ. A c_j rátát meghatározzuk minden $j = 1, \dots, n$ eszközre, majd a tranzakciós költséget a j eszközbe befektetett összeg arányában határozzuk meg, vagyis:

$$K_j(X_j) = c_j X_j. \tag{3.6}$$

Ezt nevezzük részarányos tranzakciós költségnek.



3.1.ábra: Fix tranzakciós költség szerkezet és részarányos költség rögzített minimális tranzakcióval

3.2.3. Szakaszonként lineáris költség

A szakaszonként lineáris költségnél azt az esetet tekintjük, ahol minden $K_j(X_j)$ tranzakciós költségfüggvény, $j = 1, \ldots, n$ esetén, szakaszonként lineáris függvény.

Úgy tudunk szakaszonként lineáris költséget előállítani, hogy minden $j = 1, \ldots, n$ eszközre különböző c_{ji} rátát használunk, amelyek az $i \in I$ intervallumon a $j = 1, \ldots, n$ eszközbe fektetett tőkét mutatják. A c_{ji} ráta a j és a $j+1$ határok között érvényes. Attól függően, hogy egy eszközből mennyit veszünk, a tranzakciós költség értéke az X_j-re a következőképpen alakul:

1. ha j eszköz súlya, X_j M_0^j és M_1^j határok között van, akkor a tranzakciós költség értéke az adott, első intervallumban érvényes c_{j1} ráta szorozva az X_j értékével, vagyis $K_j(X_j) = c_{j1}X_j$,

2. ha X_j M_{i-1}^j és M_i^j határok közé esik, akkor $K_j(X_j)$-t úgy kapjuk meg, hogy az előző intevallumokon kapott értékek összegéhez, amelyeket az adott c_{ji} és az intervallumhossz szorzatai, hozzáadjuk azt a c_{ji} ráta és intervallum hosszának a szorzatát, ahova az X_j esik, vagyis $K_j(X_j) = c_{ji}(X_j - M_{i-1}^j) + c_{j1}M_1^j + \cdots + c_{j,i-1}(M_{i-1}^j - M_{i-2}^j)$, $i = 2, \ldots, |I|$, vagyis:

$$K_j(X_j) = \begin{cases} c_{j1}X_j, & \text{ha } M_0^j \leq X_j < M_1^j \\ c_{j2}(X_j - M_1^j) + c_{j1}M_1^j, & \text{ha } M_1^j \leq X_j < M_2^j \\ c_{j3}(X_j - M_2^j) + c_{j1}M_1^j + c_{j2}(M_2^j - M_1^j), & \text{ha } M_2^j \leq X_j < M_3^j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k-1} c_i(M_i^j - M_{i-1}^j) + c_k(X_j - M_{k-1}^j), & x \in [M_{k-1}^j, M_k^j], \end{cases} \tag{3.7}$$

ahol $M_1^j, \ldots, M_{|I|-1}^j$ a határok, amelyek meghatározzák a $[0, \bar{C}]$ intervallum felosztását. Emiatt mindig feltételezhetjük, hogy az utolsó intervallum $M_{|I|}^j$ határának értéke megfeleltethető azzal a maximális összeggel, amelyet az eszközbe belefektethetünk, vagyis a $\bar{C}$ teljes tőkével.

Két modellezési megközelítést használhatunk az ilyen fajta tranzakciós költségekre a változókkal és a lineáris feltételekkel.

Első megközelítés

Az első modellezési megközelítés esetén minden $j = 1, \ldots, n$ eszközhöz bevezetünk egy X_{ji} folytonos változót, amellyel az X_j változót felbontjuk. Az X_{ji} változó minden $i \in I$ intervallumon a befektetett tőkét mutatja. Vagyis a j eszközbe X_j befektetett tőke kifejezhető az összes X_{ji} segédváltozó összegeként:

$$X_j = \sum_{i \in I} X_{ji}. \tag{3.8}$$

Ebben az esetben lineáris formában kifejezhető a kapcsolat az X_{ji} változó és a tranzakciós költség között:

$$K_j(X_j) = \sum_{i \in I} c_{ji} X_{ji}. \tag{3.9}$$

Minden $j = 1, \ldots, n$ eszközre és az összes $i = 2, \ldots, |I|$ intervallumra be kell vezetnünk egy z_{ji} bináris változót, amely értéke 1, ha az X_{ji} pozitív, különben 0. Továbbá a z_{ji} segítségével a következő lineáris feltételeket kapjuk:

$$M_1 z_{j2} \leq X_{j1} \leq M_1 \tag{3.10a}$$

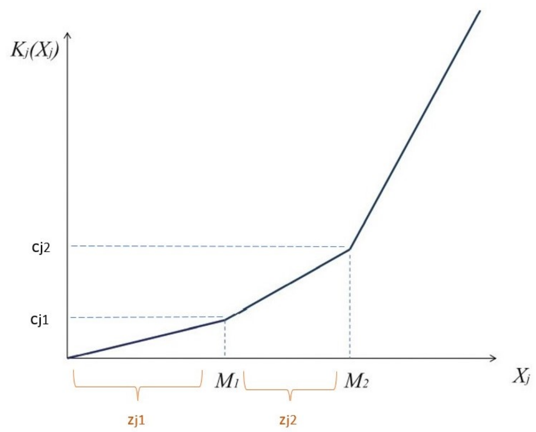
$$(M_2 - M_1) z_{j3} \leq X_{j2} \leq (M_2 - M_1) z_{j2} \tag{3.10b}$$

$$\vdots$$

$$(M_{|I|-1} - M_{|I|-2}) z_{j,|I|} \leq X_{j,|I|-1} \leq (M_{|I|-1} - M_{|I|-2}) z_{j,|I|-1} \tag{3.10c}$$

$$0 \leq X_{j,|I|} \leq (M_{|I|} - M_{|I|-1}) z_{j,|I|} \tag{3.10d}$$

Ezek a feltételek miatt $X_{j1} \leq M_1, X_{ji} \leq (M_i - M_{i-1})$ lesz minden $2 \leq i \leq |I|-1$-re és $X_{j,|I|} \leq \left(\bar{C} - M_{|I|-1}\right)$. Ráadásul, ha $X_{ji} > 0$, akkor minden $k \leq i$-re $z_{jk} = 1$, és X_{jk} változó, $k = 1, \ldots, i-1$ esetén, a felső határaival lesz egyenlő.



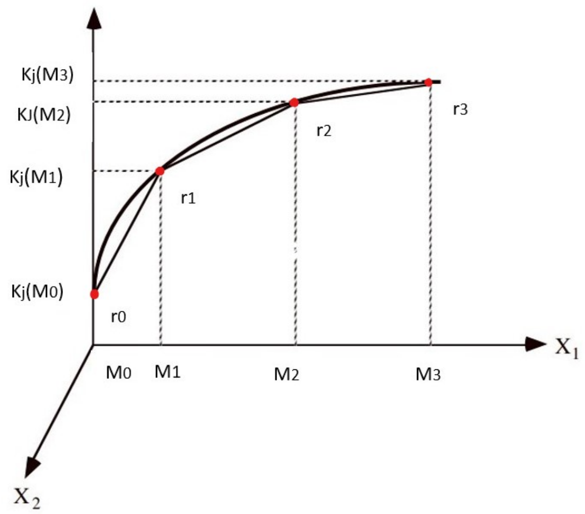
3.2.ábra: konvex szakaszonként lineáris költségfüggvény

A 3.2.ábra példa egy konvex szakaszonként lineáris költségfüggvényre, amin az első modellezési struktúra van alkalmazva.

Második megközelítés

A másik modell a költségfüggvény r törési pontjai segítségével építhető. Az r $(M_1, K_j(M_1)), \ldots, (M_r, K_j(M_r))$ törési pontokat és a $(M_0, K_j(M_0))$ kiindulási pontot használjuk fel, ami a $(0, 0)$ origónak felel meg. Továbbá feltehető, hogy az utolsó törési pont az $M_r = \bar{C}$. Bevezetjük a λ_{ji} változót minden $j = 1, \ldots, n$ eszközre és minden $(M_i, K_j(M_i))$ törési pontra egyet, $i = 0, \ldots, r$. Ennek a változónak köszönhetően a tranzakciós költség lineáris alakban felírható. Mivel minden vonalszakasz kifejezhető a határok konvex kombinációjaként, ezért az X_j, j eszköz súlya felírható a hozzá tartozó M_i, M_{i+1} határponttal és azok λ_{ji}, $\lambda_{j,i+1}$ változóival, vagyis, ha $M_i \leq X_j \leq M_{(i+1)}$, akkor X_j felírható úgy, hogy $X_j = \lambda_{ji}$ $M_i + \lambda_{j,i+1} M_{i+1}$, ahol $\lambda_{ji} + \lambda_{j,i+1} = 1$, és λ_{ji},$\lambda_{j,i+1} \geq 0$. Majd megkapjuk a tranzakciós költséget, amely

$$K_j(X_j) = \lambda_{ji} K_j(M_i) + \lambda_{j,i+1} K_j(M_{i+1}).$$



3.3.ábra: konkáv szakaszonként lineáris költségfüggvény

A 3.3.ábra példa egy konkáv szakaszonként lineáris költségfüggvényre 3 intervallumon, ahol 4 törési pont látható és $M_3 = \bar{C}$.

Legyen z_{ji} bináris változó, $i = 0, \ldots, r-1$ esetén. A z_{ji} értéke 1, ha X_j, j eszköz súlya a M_i és M_{i+1} intervallumba esik, vagyis $M_i \leq X_j \leq M_{i+1}$, különben $z_{ji} = 0$. A λ és a z változók jelentését összefoglaló lineáris feltételek:

$$0 \leq \lambda_{j0} \leq z_{j0} \tag{3.11a}$$

$$0 \leq \lambda_{ji} \leq z_{j,i-1} + z_{ji}, \qquad \forall i = 0, ..., r-1 \tag{3.11b}$$

$$\lambda_{jr} \leq z_{j,r-1} \tag{3.11c}$$

$$\sum_{i=0}^{r-1} z_{j,i} = 1. \tag{3.11d}$$

Ezeknek a feltételeknek köszönhetően csak egy $z_{j,i}$ bináris változó veheti fel az 1 értéket, mivel X_j pontosan egy szakaszba eshet bele. Továbbá, minden j esetén csak a szomszédos λ_{ji} együttható párok lehetnek pozitív értékűek. Ezután az X_j változó definiálható úgy, hogy:

$$X_j = \sum_{i=0}^{r} \lambda_{j,i} M_i, \tag{3.12}$$

és a tranzakciós költség lineáris alakban:

$$K_j(X_j) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_{ji} K_j(M_i). \tag{3.13}$$

A szakaszonként lineáris költségnek két típusát említjük:

1. Konvex szakaszonként lineáris költség

   A konvex szakaszonként lineáris költségnél azt az esetet tekintjük, ahol $j = 1, \ldots, n$ esetén minden $K_j(X_j)$ tranzakciós költség, szakaszonként lineáris konvex függvény. Minden j eszközre bevezetett c_{ji} ráták értékei növekednek, vagyis $c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < ... < c_{j|I|}$.

2. Konkáv szakaszonként lineáris költség

   Ebben az esetben minden $K_j(X_j)$, $j = 1, \ldots, n$, egy konkáv szakaszonként lineáris költségfüggvény. Itt azonban a c_{ji} ráták értékei csökkennek, $c_{j1} > c_{j2} > c_{j3} > \cdots > c_{j|I|}$.

3.2.4. Részarányos költség rögzített minimális tranzakciós díjjal

Ez a struktúra azt az esetet modellezi, amikor minden befektetett összegért fix f_j költséget számolnak fel, ha egy adott M küszöbértéket nem halad meg a befektetett összeg. Ha a befektetés meghaladja az M-et, akkor egy arányosan kiszámolt c_j összeg kerül felszámolásra (feltehető, hogy $M = \frac{f_j}{c_j}$), így a tranzakciós költség a következőképpen alakul:

$$K_j(X_j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X_j = 0, \\ f_j, & \text{ha } 0 < X_j < M, \\ c_j X_j, & \text{ha } X_j > M. \end{cases} \tag{3.14}$$

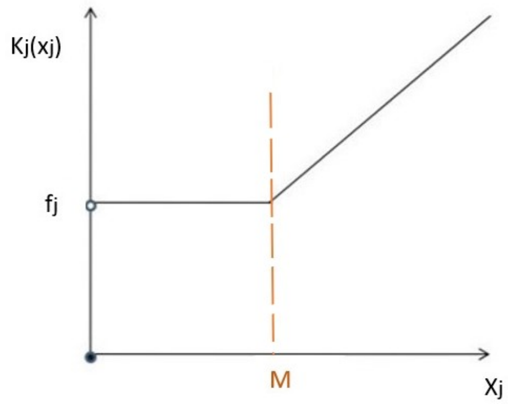
Ezt a költségstruktúra az részarányos költség rögzített minimális tranzakcióval. Ez megfelel egy konvex szakaszonként lineáris költségfüggvénynek.Az említett költségszerkezetnek a modellezéséhez a befektetett összeg L_j alsó korlátját használjuk j eszközön. Bevezetünk két folytonos X_{j1} és X_{j2} változót, melyeknek azonos a szerepe a korábban bemutatott X_{ji} szakaszonként lineáris függvényen, vagyis ez a két változó az eredeti X_j-t két részre osztja. Továbbá még két bináris z_{j1} és z_{j2} változót is bevezetünk, melyeknek a szerepe, hogy megmutassák, hogy az X_j melyik intervallumba esik. Ezután a tranzakciós költség lineáris formában modellezhető a következő feltételek segítségével:

$$X_j = X_{j1} + X_{j2} \tag{3.15a}$$
$$L_j z_{j1} \leq X_{j1} \tag{3.15b}$$
$$M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1} \tag{3.15c}$$
$$0 \leq X_{j2} \leq (\bar{C} - M) z_{j2}. \tag{3.15d}$$

- ha $z_{j1} = z_{j2} = 0$, akkor $X_{j1} = X_{j2} = 0$ és $K_j(X_j) = 0$, mivel az X_j egyik intervallumban sem található meg, így a tranzakciós költsége is nulla
- ha $z_{j1} = 1$ és $z_{j2} = 0$, akkor $L_j \leq X_{j1} \leq M$, $X_{j2} = 0$ és $K_j(X_j) = f_j$, ekkor az X_j az első intervallumba esik és f_j fix tranzakciós költséget számolunk fel
- ha pedig $z_{j1} = z_{j2} = 1$, akkor $X_{j1} = M$, $X_{j2} \leq \bar{C} - M$ és $K_j(X_j) = f_j + c_j(X_j - M) = f_j + c_j X_j - f_j = c_j X_j$, ebben az esetben X_j a második intervallumba esik, ezért a f_j fix tranzakciós költség mellett, c_j ráta is felszámolásra kerül, ami összességében $c_j X_j$
- a $z_{j1} = 0$ és $z_{j2} = 1$, ez az eset nem lehetséges, mert ha a X_j a második intervallumba esik, akkor az elsőben is szerepelnie kell

A részarányos költség rögzített minimális tranzakció esetén a tranzakciós költség képlete:

$$K_j(X_j) = f_j z_{j1} + c_j X_{j2} \tag{3.16}$$



3.4.ábra: részarányos költség rögzített minimális tranzakcióval

3.3. Tranzakciós költség bevezetése a portfólió optimalizálásba

A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogy hogyan lehet a lineáris formában kifejezett tranzakciós költségszerkezeteket beépíteni a portfólió optimalizálási modellbe. Jelölje μ_j a $j = 1, \ldots, n$ eszköz várható hozamát. Független attól, hogy a portfólió teljesítmények mérésére milyen kockázati vagy biztonsági mértéket választunk, a portfólióoptimalizálási modell korlátozza a portfólió várható hozamát:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j \geq \mu_0 \bar{C}, \tag{3.17}$$

és a befektetett tőke korlátozása a következő:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \bar{C}. \tag{3.18}$$

Több lehetőség van a tranzakciós költség kiszámítására:

1. Külön kezelt költségek: külön vesszük a tranzakciós költséget és a rendelkezésre álló tőkét. Ebben az esetben a teljes költség felső határa külön korlátozásra kerül, vagy a célfüggvényben minimalizáljuk.

2. A bevételből levont költség: a tranzakciós költséget közvetlenül a várható portfólióhozamból vonjuk le.

3. A tőkéből levont költség: a tranzakciós költséget levonjuk a rendelkezésre álló tőkéből, így a befektetett tőke eltér a kezdeti tőkétől.

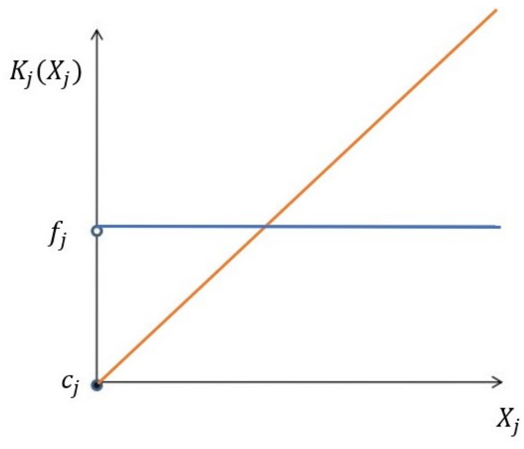
3.4. Teljes modell a tranzakciós költséggel

Ebben a részben egy teljes megfogalmazást adunk az optimalizálási modellre tranzakciós költséggel, a Semi-MAD biztonsági mértéket használva. A Semi-MAD a (2.4)-es feltételek alapján definiálható. Ebben a modellben minden $j = 1, \ldots, n$ eszközre arányos és fix költségeket egyaránt bevezetjük. Tehát a tranzakciós költségfüggvény minden j eszközre a $K_j(x_j) = c_j x_j + f_j z_j$.

A teljes modell tranzakciós költséggel:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^{T} p_t d_t && && (3.19a)\\
\text{s.t.} \quad & d_t \geq \mu - y_t && && (3.19b)\\
& \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - c_j) X_j - \sum_{j=1}^{n} f_j z_j = y_t && \forall t = 1, \ldots, T && (3.19c)\\
& \sum_{j=1}^{n} (\mu_j - c_j) X_j - \sum_{j=1}^{n} f_j z_j = \mu && && (3.19d)\\
& \sum_{j=1}^{n} X_j = \bar{C} && && (3.19e)\\
& \mu \geq \mu_0 \bar{C} && && (3.19f)\\
& x_j \geq 0, && \forall j = 1, \ldots, n && (3.19g)\\
& d_t \geq 0, && \forall t = 1, \ldots, T && (3.19h)\\
& z_j \in \{0, 1\}, && \forall j = 1, \ldots, n, && (3.19i)
\end{aligned}$$

ahol a z_j bináris változó értéke 1, ha a megfelelő eszközt választjuk ki a portfólióból, egyébként 0. A (3.19c) és a (3.19d) feltételekből látszik, hogy a c_j arányos és az f_j fix tranzakciós költség levonásra kerül a szcenárió hozamából és a várható hozamból egyaránt. A (3.19e) feltétel az alaptőkét definiálja, a (3.19f) pedig a portfólió várható hozamra ad alsó korlátot. Végül a (3.19g)-(3.19i) sorok a nem negatív és a bináris feltételeknek felelnek meg.



3.5.ábra: Fix tranzakciós költség szerkezet és arányos költség a modellben

1.példa

2.3.táblázat			
eszköz	szcenárió1	szcenárió2	várható hozam
1	$r_{11} = 4\$$	$r_{12} = 2\$$	$\mu_1 = 3.6\$$
2	$r_{21} = 3\$$	$r_{22} = 1\$$	$\mu_2 = 2.6\$$
3	$r_{31} = 2\$$	$r_{32} = 2\$$	$\mu_3 = 2.0\$$
4	$r_{41} = 3\$$	$r_{42} = 3\$$	$\mu_4 = 3.0\$$

A 2.3.táblázat adataival vizsgáltuk a tranzakciós költséget tartalmazó Semi-MAD modellt. A példában az alap tőke értéke $\bar{C} = 10000\$$, a $\mu_0 = 0.01$, továbbá az f_j fix és a c_j arányos tranzakciós költséget a 2.4.táblázat értékei szerint vettük:

2.4.táblázat		
eszköz	fix tranzakciós költség	arányos tranzakciós költség
1	$f_1 = 0.1\$$	$c_1 = 0.15\$$
2	$f_2 = 0.1\$$	$c_2 = 0.12\$$
3	$f_3 = 0.1\$$	$c_3 = 0.13\$$
4	$f_4 = 0.1\$$	$c_4 = 0.21\$$

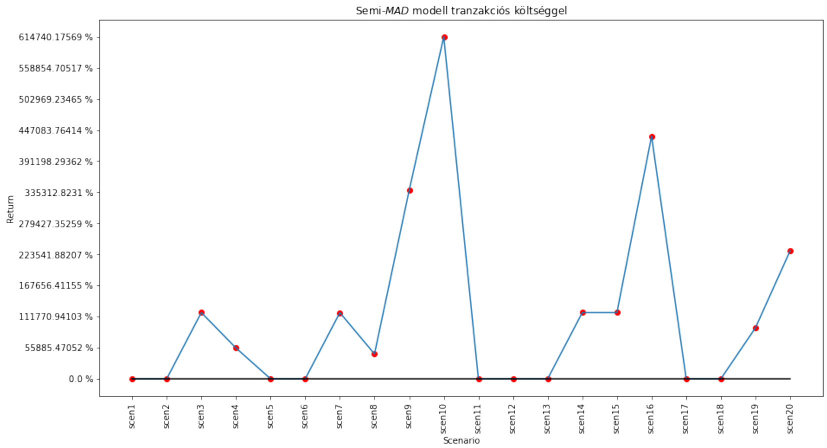
Az egészértékű programozási modell a következő eredményt adta:

Assets	x
asset1	0
asset2	0
asset3	0
asset4	10000
Exp.return	27900

Az eredmény alapján a modell a 4.eszközbe fekteti a teljes alaptőkét, és így az x portfólió várható hozama 27900\$.

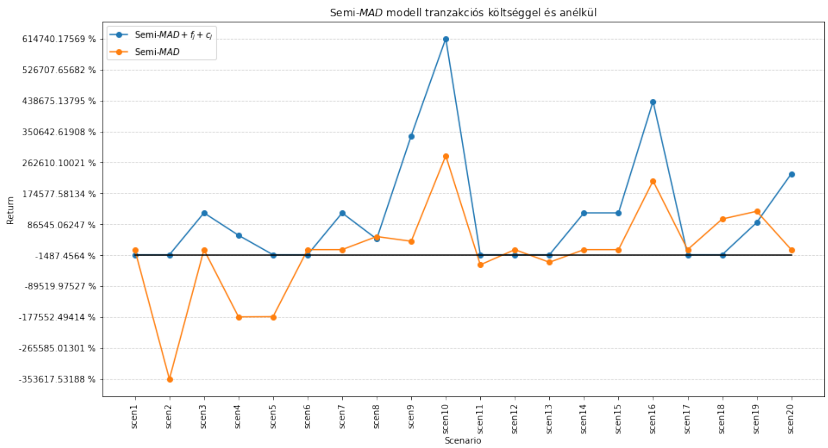
2.példa

A 2.példában 20 generált szcenáriót és 20 eszközt néztünk, melyekhez generáltunk r_{jt} hozamot és p_t valószínűséget a szcenáriókhoz. Továbbá generáltunk f_j fix és c_j arányos tranzakciós költségelet mind a 20 eszközre. Ezek értéke nem minden eszközre azonos. Ezekkel az adatokkal ábrázoltuk a tranzakciós költséget tartalmazó Semi-MAD modellt:



3.6.ábra: Semi-MAD modell tranzakciós költséggel

Majd ugyanezekre az adatokra összehasonlítottuk a Semi-MAD modellt tranzakciós költséggel és anélkül:



3.7.ábra: Semi-MAD modell tranzakciós költséggel és anélkül

Az ábrán az x-tengely a 20 szcenáriót, az y-tengely pedig a szcenáriók y_t hozamát ábrázolja. Kék színnel a tranzakciós költséget tartalmazó Semi-MAD modell látható, sárgával pedig a tranzakciós költség nélküli.

modell	várható hozam
Semi-MAD+TK	$\mu = 119079.93\$$
Semi-MAD	$\mu = 145989.65\$$

A táblázatból azt láthatjuk, hogy a tranzakciós költséget tartalmazó Semi-MAD modell esetén az x portfólió várható értéke 119079.93$, míg a Semi-MAD modellnek, amely nem tartalmaz tranzakciós költséget 145989.65$. Vagyis a tranzakciós költséget tartalmazó Semi-MAD-ben az x portfólió várható hozama kisebb.

Összefoglalás

Dolgozatomban először a Markowitz-féle modellt mutattam be, majd a lineáris programozási modellek közül 3 kockázati és 3 biztonsági modellt. Ezek a kockázati modellek a MAD, a Semi-MAD és a GMD voltak. A biztonsági modellek közül pedig a Minimax, VaR és a CVaR került bemutatásra. A modellek példáit Python kód segítségével oldottam meg, amihez Gurobipy-t használtam. Majd a végén összehasonlítottam a Semi-MAD kockázati mérték hozamát a VaR és a Minimax modellével. Továbbá grafikonnal ábrázoltam a potfólióban szereplő eszközöket mind a három modellnél, és megnéztem a várható hozamukat. Az eredményekből az látszott, hogy a VaR várható hozama a legnagyobb, és a Semi-MAD modellé pedig a legkisebb.

Majd áttértem az egészértékű programozási modellekre, amelyekre bevezettem különböző szerkezetű tranzakciós költségeket. A teljes modellt a Semi-MAD mérték segítségével definiáltam, és bevezettem rá fix és arányos tranzakciós költséget. Majd Pythonban készített modellel megoldottam egy példát, amely eredményeit kielemeztem. Végül a tranzakciós költséget tartalmazó Semi-MAD és a tranzakciós költség nélüli Semi-MAD modell szcenárió hozamát ábrázoltam, majd összehasonlítottam őket a várható hozam szerint is. Itt azt lehetett látni, hogy a tranzakciós költség nélüli Semi-MAD portfóliójának a várható hozama a nagyobb.

A. függelék

Forráskódok

MAD modell Python kódja:

```
mu = model.addVar()
y = {t : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb = -10e+100) for t in T}
d = {t : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb = 0) for t in T}
x = {j : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, ub = 1, lb = 0) for j in n}

for t in T :
    model.addConstr( sum( r[t][j] * x[j] for j in n) == y[t])

for t in T:
    model.addConstr(d[t] >= y[t] - mu)
    model.addConstr(d[t] >= -y[t] + mu)

model.addConstr( sum(m[j] * x[j] for j in n) == mu)
model.addConstr(sum(x[j] for j in n) == 1)
model.addConstr(mu >= m0)

model.setObjective(sum(p[t] * d[t] for t in T), GRB.MINIMIZE)
model.optimize()
```

Semi-MAD modell Python kódja:

```
mu = model.addVar()
y = {t : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb = -10e+100) for t in T}
d = {t : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb = 0) for t in T}
x = {j : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, ub = 1, lb = 0) for j in n}
```

```
for t in T :
    model.addConstr( sum( r[t][j] * x[j] for j in n) == y[t])

for t in T:
    model.addConstr(d[t] >= -y[t] + mu)

model.addConstr(sum( m[j] * x[j] for j in n) == mu)
model.addConstr(sum(x[j] for j in n) == 1)
model.addConstr(mu >= m0)

model.setObjective(sum(p[t] * d[t] for t in T), GRB.MINIMIZE)
model.optimize()
```

Minimax modell Python kódja:

```
mu = model.addVar()
y = model.addVar()
d = {t: model.addVar() for t in n}
x = {j : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, ub = 1, lb = 0) for j in T}

for t in n :
    model.addConstr( sum( r[j][t] * x[j] for j in T) >= y)
model.addConstr( sum( m[j] * x[j] for j in T) == mu)
model.addConstr(sum(x[j] for j in T) == 1)
model.addConstr(mu >= m0)

model.setObjective(y, GRB.MAXIMIZE)
model.optimize()
```

VaR modell Python kódja:

```
mu = model.addVar()
y = model.addVar()
d = {t: model.addVar() for t in n}
x = {j : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, ub = 1, lb = 0) for j in T}
z = {t : model.addVar(vtype= GRB.BINARY, ub=1, lb=0) for t in n}

for t in n :
    model.addConstr( sum( r[j][t] * x[j] for j in T) >= y - M * z[t])
```

```
model.addConstr( sum( p[t] * z[t] for t in n) <= beta - pi)
model.addConstr( sum( m[j] * x[j] for j in T) == mu)
model.addConstr(sum(x[j] for j in T) == 1)
model.addConstr(mu >= m0)
model.setObjective(y, GRB.MAXIMIZE)
model.optimize()
```

Portfólió optimalizálási modell tranzakciós költséggel, Python kód:

```
mu = model.addVar()
y = {t : model.addVar() for t in T}
d = {t: model.addVar() for t in T}
x = {j : model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, ub = C, lb = 0) for j in n}
z = {j : model.addVar(vtype= GRB.BINARY) for j in n}

for t in T:
    model.addConstr(sum((((r[t][j]- c[j]) * x[j]) - f[j] * z[j]) for j
        in n) == y[t])
    model.addConstr(mu-y[t] <= d[t])
model.addConstr(sum(((m[j]- c[j]) * x[j]) - (f[j] * z[j]) for j in n)
    == mu)

model.addConstr(sum(x[j] for j in n) == C)
model.addConstr(mu >= m0 * C)
for t in T :
    model.addConstr(d[t] >= 0)

model.setObjective((sum(p[t] * d[t] for t in T)), GRB.MINIMIZE)
model.optimize()
```

Lineáris programozási modellekhez használt generátor függvényéhez? tartozó Python kód:

```
def generate_scenarios(nT, nn, exp=0, std=1):
    n = ['asset' + str(i+1) for i in range(nn)]
    T = ["scen" + str(i+1) for i in range(nT)]

    p0 = numpy.random.uniform(size=(len(T)))
    p = p0 / p0.sum()
```

```
    P = {t : p[i] for i,t in enumerate(T)}


    res = {"returns" : {t : {i : numpy.random.normal(exp, std) for i in
        n} for t in T},
           "probabilities" : P}
    return res

H = generate_scenarios(30, 30)

r = H["returns"]
p = H["probabilities"]
```

Tranzakciós költséggel rendelkező egészértékű programozási modellhez használt függvény Python kódja:

```
def generate_scenarios(nT, nn, exp=0, std=1):
    n = ['asset' + str(i+1) for i in range(nn)]
    T = ["scen" + str(i+1) for i in range(nT)]

    p0 = numpy.random.uniform(size=(len(T)))
    p = p0 / p0.sum()
    P = {t : p[i] for i,t in enumerate(T)}

    Rf = np.arange(0,2.2,0.2)
    Rc = np.arange(0.01, 0.11, 0.01)
    f = {i : numpy.random.choice(Rf) for i in n}
    c = {i : numpy.random.choice(Rc) for i in n}

    res = {"returns" : {t : {i : numpy.random.normal(exp, std) for i in
        n} for t in T},
           "probabilities" : P,
           "fix" : f,
           "rate" : c}
    return res

H = generate_scenarios(30, 30)

r = H["returns"]
```

```
p = H["probabilities"]
f = H["fix"]
c = H["rate"]
```

Irodalomjegyzék

[1] https://tirthajyoti.github.io/Notebooks/Portfolio_optimization.html.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Value_at_risk#cite_note-15.

[3] https://es.mathworks.com/discovery/conditional-value-at-risk.html.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Expected_shortfall.

[5] Menedzsment és vállalkozásgazdaságtan . https://vik.wiki/images/c/cd/Vallgazd_dia_2015-16-2_2.pdf.

[6] PIECEWISE LINEARIZATION . http://civil.colorado.edu/~balajir/CVEN5393/lectures/chapter-08.pdf, 2006.

[7] Rajesh Kumar Arora. Optimization : Algorithms and Applications , 2015.

[8] Edouard Berthe. Scenario-Based Portfolio Optimization , 2016.

[9] Gera Imre. A Markowitz Portfólió Optimalizálás Modell Tesztelése Szűrt Kovarianciamátrixokon .

[10] Vinay Kaura. Portfolio Optimisation Using Value at Risk . https://web.actuaries.ie/sites/default/files/erm-resources/183_portfolio_optimisation_using_var.pdf.

[11] S. Ketabi. Network optimization with piecewise linear convex costs. https://ijsts.shirazu.ac.ir/article_2771_6002b5bb53510cdb0aa0a5aae56fab6f.pdf, 2006.

[12] Renata Mansini, Wlodzimierz Ogryczak, and M. Grazia Speranza. Linear and Mixed Integer Linear Programming Models for Portfolio Optimization, 2012.

[13] Dr. Nagy Tamás. Egészértékű programozás.

[14] Komáromi Éva. Operációkutatás No.2., Lineáris programozás , 2002.