NYILATKOZAT

Név: Szendi Ágoston

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika

NEPTUN azonosító: BQU422

Szakdolgozat címe:
Matematika a zenében

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. május 29.

Szendi Ágoston

a hallgató aláírása

Matematika a zenében

Szendi Ágoston

Matematika BSc, elemző szakirány

Szakdolgozat

Témavezető:

Valkó Éva

Tanársegéd

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témája különösen kedves számomra, és már régóta foglalkoztat ez a terület, hiszen 2009 óta tanulok zenélni klasszikus gitár szakon, és ilyen irányú tanulmányaimat remélhetőleg hamarosan zeneakadémián folytathatom. A művészetek közül talán a zene a legmegfoghatatlanabb. Egy festmény például rögzített alkotás, ám egy zeneművet csakis egy zenész tud életre kelteni. Sőt újra és újra életre is kell kelteni, hiszen a hallgatóság a mű csak egy pillanatát élvezheti: az eljátszott részek mindig szertefoszlanak, a darab vége pedig még vár a feltámadásra. Érthető, hogy matematikus hallgatóként felettébb foglalkoztat, miként lehet ezt a jelenséget mégis valahogy matematikailag leírni.

Jelenleg a Müpában tart a Matematika a zenében koncertsorozat, amely előadásai nagyban inspiráltak. Természetesen sok neves tudóst is foglalkoztatott ez a kérdés, akik munkásságára ki fogok térni a későbbiekben. Szakdolgozatom alapjául Rafael Cubarsi, ma aktív csillagász kutató Journal of Mathematics and Music című folyóiratban megjelent 2019-es cikke szolgált, a Harmonic distance in intervals and chords.[3] A leírtak részletes indoklásával és a tételek levezetésével bővítettem az eredeti anyagot. Továbbá példákkal és ábrákkal igyekeztem szolgálni a könnyeb érthetőséget a zenében kevésbé jártas természettudósok számára.

Tulajdonképpen a cikk is és jómagam is a zenénél egy még tágabb és még elvontabb fogalmat próbáltunk megmagyarázni: a szépséget. Mitől találunk szépnek valamit? Az ember ősidők óta keresi a választ erre a kérdésre. Talán mindnyájan érezzük, hogy csakúgy, mint egy andalító dallam élvezetéhez, a szépség megéléséhez is elengedhetetlen a harmónia. Hankiss Elemér hasonlóan vélekedik: „Az emberfeletti lét intenzitását és önnön létünk semmiségét éljük át a szépség vakító fényében. Hasonlóképpen azt is mondhatnánk, hogy valami végső és örök harmónia lobban fel a szépségben, harmónia, amely hirtelen rádöbbent saját világunk nyomorúságára és létünk fájó mulandóságára.".[6]

Dolgozatomban a szépségnek a zenén belül is csak egy apró szeletét fogom vizsgálni, amelyet a következő helyzet nagyszerűen szemléltet. Ha csukott szemmel leütünk egyszerre két billentyűt a zongorán, akkor elképzelhető, hogy a két hang együttese kellemes érzéssel tölt el minket, ám az is, hogy feszítő, fülsértő lesz a hatás. Dolgozatom elején megmutatom, fizikailag milyen eszközzel lehet mérni ezt az érzetet, illetve bevezetek egy mérőszámot is a matematikai leíráshoz. Itt természetesen a hangoknak megfelelő frekvenciákkal számolok, hiszen a hangok és a frekvenciák között bijekció áll fenn. Bevezetek egy zenészek által ugyan nem használt, ám a matematikai értelemben vett távolság fogalmának eleget tevő mennyiséget. Ennek segítségével kapcsolatba lehet hozni ezt a bizonyos szépségérzetet hangok távolságával. Ezt egy gráfstruktúrán is szemléltetni fogom. Eleinte relatív prím frekvenciák között definiálok távolságot, de később ezt általánosítani fogom tetszőleges egész, majd tört frekvenciákra is. Utolsó lépésként kibővítem az újonnan értelmezett távolságot kettőnél több frekvencia együttesére is. Végül a különböző hangolási módszerekben elérhető szépségérzetet fogom vizsgálni a bevezetett fogalmak segítségével.

Zenei bevezető

A szimmetriát fülünk is szépnek találja, nem csak szemünk. Ennek érzékeltetésére szolgál az úgynevezett tükörfordítás, amikor azonos hangról indulva a hangközök az eredetivel ellenkező irányban mozognak, azaz mintha az egyik vonalra mint tengelyre tükröznénk a kottát; vagy a rákfordítás, amikor a hangokat hátulról visszafelé olvasva írjuk, azaz mintha az egyik ütemvonalra mint tengelyre tükröznénk a kottát; illetve ezek kombinációja, a tükör-rák.

Ezeken túlmenően is rengeteg zeneszerzői fogás matematikai alapokon nyugszik. Különböző korokban másként tekintettek a zenére, így más hangzást is találtak szépnek. Például az előbb említett rendezettséget, szimmetriát különösképp fontosnak vélték a barokkban úgy a zeneszerzésben, mint az építészetben. Johann Mattheson a következő hasonlattal élt: „Ami pedig a diszpozíciót illeti, az a zenei anyag vagy egy teljes zenemű valamennyi részének és részletének világos elrendezése, majdhogynem olyan módon, ahogyan az ember egy épületet berendez és megrajzol, készít egy tervet vagy vázlatot, egy alaprajzot, hogy bemutassa, hol legyen terem, hol szoba, hol kamra és a többi.".[10]
A korabeli zeneszerzők valóban már-már szerkesztették műveiket. Ennek kimagasló példája Johann Sebastian Bach, akinek F-dúr duettjében a zenei egységek szerinti ütemtagolódás: 37; 30; 14; 30; 37. Erről rögtön látszik, hogy szimmetrikus felépítésű a darab. Ám több is igaz. Figyeljük meg, hogy a mű eleje és vége együtt éppen ugyanolyan hosszú, mint a középrész: $2 \cdot 37 = 30 + 14 + 30$; valamint a középrészben a téma tükörfordításban hangzik el. Ugyanilyen meghökkentő, hogy a Dicsőség az úrnak című áriájában a hangszeres és énekes ütemek száma megegyezik, mindkettő éppen 60 ütem.

A bécsi klasszikusok körében is találunk matematikához köthető zeneszerzőket. Haydn G-dúr Palindrom szimfóniájának Menüett tételében a második rész azonos az elsővel, csak a hangok fordított sorrendben követik egymást. Kombinatorikához kapcsolódó példát is találunk. Wolfgang Amadeus Mozart nevén adták ki a Musikalisches Würfelspiel nevű játékot. Előre megírt ütemekhez számokat rendeltek. A játékosnak kockákkal kell dobnia, majd egy táblázatból kiolvashatja, hogy a dobott eredmény alapján melyik ütemet írja le. Így haladva szerezhet darabokat.

Magyar vonatkozásként Bartók Bélát vagy Kodály Zoltánt említhetjük meg, hozzájuk az aranymetszés kötődik. Példaként Kodály Psalmus Hungaricus című oratóriuma szolgálhat, amely 395 ütemből áll, a 245-ik, vagyis a $395 \cdot 0,618$-ik taktus kezdetével esik egybe a mű eszmei mondanivalójának kimondása: „Istenben vessed bizalmadat”.

Számunkra kettő (vagy több) hang együtthangzása fontos, és ennek milyensége. Erre bevezetjük a megfelelő zenei szakszavakat.

Definíció. Konszonancia: két vagy több hang egyidejű, folytatásra nem szoruló, kellemes hatást keltő harmonikus megszólalása. Magyarul összehangzás, összhang. Ennek ellentéte is fontos lesz számunkra.

Definíció. Disszonancia: hangoknak olyan együtthangzása, amelyet a fül a megszokott összhangzattal ellentétesnek, kellemetlennek, érdesnek érez, s amely feloldást kíván. Magyarul széthangzás.

A vizsgálódáshoz előbb nézzük meg a zenészek által használt hangköz fogalmát.

Definíció. Hangköz: két zenei hang távolsága, hangmagasságuk egymáshoz való viszonya, amelyet a két hang frekvenciaaránya fejez ki. A frekvenciaarány mellett a hangközöket szokás még az arány logaritmusából kialakított lineáris távolsági skálán értékelni.

Ezen alapul a hangköztávolságok cent mértékegysége, amelyek mérésére Alexander John Ellis centszámlálását alkalmazzák. A frekvenciaarány logaritmusának 1200-szorosa adja meg a frekvenciaviszony centértékét. Számunkra a legfontosabb hangközök az oktáv és a kvint lesznek.

Definíció. Oktáv: a latin octava - nyolcadik szóból származik; egy hanghoz tartozó frekvencia dupláját jelenti, ez tehát $1200 \log_2(2/1) = 1200$ cent hangköznek felel meg.

Definíció. Kvint: a latin quinta - ötödik szóból származik; egy hanghoz tartozó frekvencia másfélszeresét jelenti, amely $1200 \log_2(3/2) = 702$ cent hangköznek felel meg. A kvint a középkori többszólamúság legfontosabb hangköze volt.

Ám a hangközök szépségének megítélése is változott az idők során. A középkori gregorián énekekben csak a perfekt konszonáns hangközöket alkalmazták (tiszta prím, tiszta oktáv, tiszta kvint), az imperfekt hangközök (kis és nagy terc illetve szext) csak később váltak használatossá. A maradék, azaz a disszonáns hangközök közül is kitűnt egy, a tritónusz (bővített kvárt vagy szűkített kvint), amelyet annyira kerültek a középkorban és a reneszánszban, hogy az ördög hangközének tekintették. Ennek a hangköznek érdekessége, hogy az oktávot pontosan megfelezi. A modern zeneszerzők éppen ezért előszeretettel játszanak vele, például a huszadik századi Mario Castelnuovo-Tedesco gitárra írt Tarantellája ilyen hangközlépésekkel indul, és a darab közben is egyre-másra tritónuszra bukkanhatunk.

A barokk korban kicsúcsosodó úgynevezett kétszólamú ellenpontírás szabályai szerint is a zenemű csak perfekt konszonáns hangközön kezdődhet és végződhet (valójában oktávon vagy prímen, mert az alaphangról indul mindkét szólam), és a mű közben is disszonáns hangközök csak meghatározott helyeken fordulhatnak elő és színezhetik a darabot. Bizonyos hangközlépések (bővített hangközök, amilyen az előbb emlegetett tritónusz is) azonban még itt sem megengedettek, sőt a klasszikus összhangzattan szabályai szerint sem.

Fontos megkülönböztetnünk a tiszta hangközöket a tiszta hang illetve a tiszta intonáció fogalmától.

Definíció. Tiszta hang: olyan hang, amelynek nyomása az időben a szinuszfüggvénynek megfelelően változik. A mindennapi életben tiszta hang csak kivételesen fordul elő.

Definíció. Intonáció: hangszer behangolása, hangszínének megadása, a hangolás minősége (tiszta vagy hamis).
Definíció. Tiszta intonáció: az összes zenei hangköz a frekvenciák egész számarányaira (például 3:2 vagy 4:3) hangolva.
Definíció. Alaphang: a zenei hang fülünk által érzékelt hangmagassága. Az alaphang frekvenciája, az alapfrekvencia.
Definíció. Felhang: Együtt hangzó hang, amely egy zenei hang megszólaltatásakor az alaphanggal együtt szól, azt színezi. Ez a rezgő test egy-egy szakaszának (felének, harmadának, negyedének) külön-külön rezgésével keletkező magasabb hangok közül egy. A felhangok frekvenciái az alapfrekvenia egész számú többszörösei (ezért speciálisan az alaphang önmaga felhangja).
Egy zenei hang tehát az alaphangból és a felhangok együtteséből áll. A különböző hangszerek hangszínét emiatt tudjuk megkülönböztetni, ugyanis a különböző méretek, formák és anyagok más és más felhangokat erősítenek föl. Fordítva, a felhangok kioltásával is új hangszínt tudunk létrehozni, ezeket nevezzük üveghangoknak. Technikailag ez úgy kivitelezhető, hogy egy húr racionális osztópontját megérintjük, és csak ezután pendítjük meg. Értelemszerűen az adott húrarányhoz tartozó felhangokat oltjuk ki.
Definíció. Alhang: olyan hang, amely frekvenciájának egész számú többszöröse az alaphang.
Definíció. Felhangsor: egy zenei hang részhangjainak sorozata. Ha az alapfrekvencia v_0, akkor a felhangsor a $2v_0$, $3v_0$, $4v_0$ stb frekvenciák sorozata.
Definíció. Hangsor vagy skála: valamely dallam hangjainak magasságuk szerint rendezett sora. A hangsor foka mondja meg, hány hangból áll a skála.
Definíció. Hangnem: Valamely dallam, zenemű vagy zenei részlet hangjainak alapjául szolgáló hangsor, illetve a hangsor hangközeinek megszabott rendje a meghatározott magasságú alaphanghoz viszonyítva.

Vegyük észre, hogy tisztán intonált hangközként hat az alaphang és egy felhangjának távolsága, hiszen frekvenciaarányuk racionális. Éppen ezért dolgozatomban is az alaphanggal és felhangjaival fogok számolni, erre értelmezek távolságot.

Valójában azonban a hangszereket úgy hangolják, idegen szóval temperálják, hogy eltérjenek a tiszta intonációtól. Erre azért van szükség, hogy több hangnemben is lehessen játszani, hiszen más alaphangról indulva a frekvenciaarányokból számolt tiszta hangközök máshová esnek.

Elsőként vizsgálni fogom a püthagoraszi hangolást, amely egészen a barokk korszak végéig használatban volt.
Definíció. Püthagoraszi hangolás: olyan hangolás, ahol a hangokat az alaphangra épített kvintek sorozatával nyerjük.
Ezzel a kvint, a középkori többszólamúság legfontosabb hangköze tisztán intonált marad, azonban az alaphangtól távolabbi hangokra épülő hangsorok egyre hamisabbak, hiszen az oktáv nem tisztán intonált.

A zeneszerzőknek egyre nagyobb igényük volt rá, hogy több hangnemben komponálhassanak. Ez ösztönözte a mai hangolási elv kialakulását, amely a kiegyenlített hangolás.
Definíció. Kiegyenlített hangolás: az oktáv matematikailag pontosan egyenlő

nagyságú hanglépésekre való felosztásával nyert hangolás.
Ez tehát ismét nem tiszta hangolás, azonban lehetővé teszi, hogy minden hangnemben a tisztán intonálttól ugyanolyan eltéréssel kövessék egymást a hangok, mert az oktáv mindig tisztán intonált marad. Ezzel a temperálással egy n fokú hangsor hangjai egy $\sqrt[n]{2}$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak.

Az európai zenében n értéke 12, azaz manapság egy koncerten 12 fokú kiegyenlített hangolásban hallhatjuk a műveket. Tiszta intonációt is élvezhetünk énekkari vagy vonóskari előadásokon, mivel itt a megszólaltatás módja ezt lehetővé teszi. Dolgozatomban ezt is vizsgálni fogom, hogy például egy gitárkoncerten miért nem érezzük disszonánsnak a harmóniákat.

Az újfajta hangolási mód fellendítette a zenei életet, a zeneszerzők azonnal éltek a kiegyenlített hangolás nyújtotta lehetőségekkel. Itt is Bach juthat eszünkbe úttörőként. A nagyjából négy és fél órát betöltő Das wohltemperierte Klavier (A jól hangolt zongora) című műve 48 zongoradarabot tartalmaz: a 12 fokú kiegyenlített hangolás minden hangjára épülő dúr és moll hangnemben egy prelúdiumot és fúgát. Az alkotás hatalmas jelentőséggel bír a zeneirodalomban. Egészen napjainkig születnek Bach műve által inspirált darabok hasonló koncepcióval. A gitárirodalomban megemlíthetjük a huszadik századi komponista, Manuel Ponce 24 prelűd gitárra című opusát.

Akusztikus bevezető

A konszonancia és disszonancia akusztikai magyarázatával is meg kell ismerkednünk, amely a következő jelenségen alapszik.
Definíció. Lebegés: a lebegés egy interferációs minta két alig eltérő frekvenciájú hang között, amelyet a hangerő periodikus változásaként érzékelünk.
Definíció. Durvaság: a durvaság egy füllel felfogható érzetet ír le. Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz vezette be ezt a kifejezést az akusztikus és pszichoakusztikus irodalomban a XIX. század végén. A nyers, érdes hangzást illette így. Olyan hangjelek vételére utal, amelyek amplitúdója percenként legkevesebb 20-szor, legfeljebb 75-150-szer (hangmagasságmérő műszertől függően) változik. A durvaságelmélet a konszonancia- és disszonanciaérzetet csupán részben magyarázza, mivel ezeket úgy is érzékelhetjük, mint olyan hangok távolsága, amelyek csak néhány vagy semennyi felhangot sem tartalmaznak. Azaz a durvaság hangerő kérdése, a konszonancia pedig a hangmagasságé, de a hangerő és a hangmagasság egymástól függetlenül felfogható mennyiségek. A modern pszichoakusztika szerint a lebegés és a durvaság közötti kapcsolat lineáris.[5] Stumpf [18] a pszichoakusztikai konszonanciát és disszonanciát másként, az észlelési fúzió fényében magyarázza, amely néhány hangkombináció egyetlen hangképpé való összeolvadását jelenti. Azt állítja, hogy az összeolvadt hangok konszonánsak, míg a különállóak disszonánsak. A tonális fúziónak van neurofiziológiai alapja,[9] és a konszonancia fogalmának meghatározó része feltehetően ebből fakad.[4] Stolzenburg [17] bemutatja, hogy a pszichofizikában és a neuroakusztikában elért eredmények miként biztosítják a konszonancia/disszonancia felfogásának konzekvens számítási elméletét. Tenney [19] történelmi nézőpontján túl érdemes tanulmányozni Maz-

zola, Göller és Müller [11] írásait, amelyek szimbolikai, fiziológiai és pszichológiai szemszögből vitatják meg a konszonancia és disszonancia fogalmát. Ők arra a következtetésre jutnak, "aligha meglepő, hogy a pszichológiai és fiziológiai rétegek nem egybehangzóak: ami a fülnek (Helmholtz modelljében) nem tetszik, az nagyon is kellemes lehet a limbikus rendszernek vagy a hallókéregnek".
Definíció. Érzékelhető disszonancia: egy hangzat érzékelhetően disszonáns, ha lebegés történik, és konszonáns, ha nincs lebegés (azaz ezt a szót használjuk alacsony durvaságra vagy magas simaságra).
Kísérleti eredmények támasztják alá a negatív korrelációt az érzékelhető disszonancia és a tetszés között, legalábbis a nyugati résztvevők esetében. Ez az állandó kapcsolat arra sarkallt néhány szerzőt, hogy előnyben részesítse az érzékelhető irritáció kifejezést az érzékelhető disszonanciával szemben, amely a negatív konnotációt a pszichoakusztikai területre helyezi.

Matematikai bevezető

A szép hangzás keresése közben a matematika számos területéről felhasználtam ismereteket, amelyekről elsőre nem is sejtenénk, hogy kapcsolatban állnak a zenével.

Algebra

Többek között szükségem volt algebrára a frekvenciák kezeléséhez. A következő fogalmakat használtam fel. [8]
Definíció. Reláció: Az A és B halmazok Descartes-szorzatának egy R részhalmazát az A és B halmazok közötti kétoldali relációnak nevezzük. Ha $(a, b) \in R$, akkor ezt aRb-vel is szokás jelölni.
Definíció. Ekvivalencia-reláció: Egy A alaphalmazon értelmezett $\sim$ relációt, melyre igaz, hogy részhalmaza $A \times A$-nak, ekvivalencia-relációnak nevezünk, ha teljesül, hogy a reláció:

- reflexív, azaz minden $a \in A$-ra teljesül, hogy $a \sim a$;
- szimmetrikus, azaz minden $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $a \sim b$ akkor $b \sim a$;
- tranzitív, azaz minden $a, b, c \in A$-ra teljesül, hogy ha $a \sim b$ és $b \sim c$, akkor $a \sim c$.

Definíció. Ekvivalenciaosztályok: az ekvivalenciaosztályok az A alaphalmaz azon x, y elemeinek halmazai, amelyekre teljesül, hogy $x \sim y$.
Definíció. Faktorhalmaz: ha R egy ekvivalenciareláció A-n, akkor az $\{R(x)|x \in A\}$ halmazt, ahol $R(x)$ az $x \in A$ elem ekvivalenciaosztályát jelöli, A/R-rel jelöljük, és A-nak az R-szerinti faktorhalmazának nevezzük.

Funkcionálanalízis

A későbbiekben hangokon definiált távolság eltér a zenében használt hangközök fogalmától, azonban belátható, hogy kielégíti a metrika axiómáit.
Definíció. Metrika: legyen X nem üres halmaz. Ekkor a $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ nemnegatív valós értékű függvény metrika, ha tetszőleges $x, y, z \in X$ esetén eleget tesz a következő feltételeknek:

- nemnegativitás és null hossz: $d(x, y) \geq 0$ és $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- szimmetria: $d(x, y) = d(y, x)$;
- háromszög-egyenlőtlenség: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Valószínűségszámítás

A különböző hangolási módszereknél számolt közelítő becslések vizsgálatakor használtam valószínűségszámítást. Az ehhez szükséges definíciók és tételek a következők.
Definíció. Ha $\xi \geq 0$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor $\mathbb{E}[\xi] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_\xi(x)\mathrm{d}x$.
Állítás. Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke $(a + b)/2$.
Tétel. (A várható érték lineáris.) Legyen ξ és η valószínűségi változó, $c \in \mathbb{R}$ konstans. Ekkor a következő állítások igazak:

- $\mathbb{E}[c \cdot \xi] = c \cdot \mathbb{E}[\xi]$;
- ha $\exists\, \mathbb{E}[\xi], \mathbb{E}[\eta]$ és $\mathbb{E}[\xi] + \mathbb{E}[\eta]$ értelmes, akkor $\exists\, \mathbb{E}[\xi + \eta] = \mathbb{E}[\xi] + \mathbb{E}[\eta]$.

Tétel. Ha ξ és η független valószínűségi változók, $\mathbb{E}[|\xi|] < \infty$ és $\mathbb{E}[|\eta|] < \infty$, akkor $\mathbb{E}[|\xi\eta|] < \infty$ és $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}[\xi]\mathbb{E}[\eta]$.
Definíció. Szórásnégyzet: $D^2(\xi) = \mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}[\xi]]^2$ a ξ valószínűségi változó szórásnégyzete, ha $\mathbb{E}[\xi]$ létezik és véges.
Definíció. Szórás: ξ szórása a szórásnégyzetének négyzetgyöke, azaz $D(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)}$.
Tétel. Legyen ξ valószínűségi változó, $a, b \in \mathbb{R}$ konstans. Ekkor $D^2(a\xi + b) = a^2 D^2(\xi)$.
Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként független valószínűségi változók és $D^2(\xi_1) < \infty$, $\ldots$, $D^2(\xi_n) < \infty$, akkor $D^2(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + \ldots + D^2(\xi_n)$.

Alkalmazott analízis, számelmélet és gráfelmélet

Támaszkodtam még alkalmazott analízisre a különböző hangolási módszerek vizsgálatakor számolt közelítő becsléseknél regressziós egyenes illesztésekor, amelyhez a legkisebb négyzetek módszerét használtam. A számelmélet alapvető fogalmaira - legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó - is szükségem volt a felhangok és az alaphang megállapításához. Gráfelmélet segítségével szemléltettem a frekvenciákon értelmezett távolságot. Speciális irányított gráfok, az úgynevezett hanggráfok geometriai szemléltetőeszközként fognak szolgálni számításaim felgyorsításához és az egyazon alaphanghoz tartozó két felhang közötti disszonancia vizualizálásához.

Konszonancia- és disszonanciamérés

1. ábra. Helmholtz rezonátorai. Forrás: `https://physics.case.edu/about/history/antique-physics-instruments/helmholtz-resonator-2/`

Mindenek előtt el kell különítenünk egy zenei hangban az alaphangot a felhangoktól. Az így megtisztított hangoknak már tudjuk nézni az interferálását, amellyel összefüggésbe hozható a konszonancia- és disszonanciaérzet. Ebben a fejezetben a megtisztítás metódusát mutatjuk be, majd az összefüggés leírására mérőszámokat vezetünk be.

Helmholtz [7] a rezonátor nevű eszközt használta, hogy kiszűrje a felhangokat egy összetett hangból, és számszerűsítse a disszonancia mértékét a lebegésre való tekintettel. Az 1 ábrán látható műszerek paramétereinek (üreg térfogata, nyak keresztmetszete, nyak hossza és ennek megváltoztatása) függvényében lehet mérni és számolni. Helmholtz megmutatta, hogy két interferáló hullám frekvenciájában van egy kritikus sávszélesség, amely megfelel a konszonancia minimális fokának. Ez az érték nem mindig arányos az interferáló frekvenciák átlagával, de az alacsony frekvenciák esetében szinte konstans. A magasabb hangok felé haladva az interferáló hullámok frekvenciái közötti állandó különbség szembetűnőbb. Helmholtz nagyjából 30-40 Hz-re becsülte azt a krtikus sávszélességet, amelyben a disszonancia bántóbb a fülnek. 30 Hz alatt a hangok összemosódnak, ezért konszonánsabbnak érzékelhetők. 40 Hz felett pedig lassan visszatérnek a konszonanciához.

Két interferáló hullám frekvenciáját folyamatosan változtatva Helmholtz rájött, hogy azok a frekvenciák, amelyek megtartanak egy racionális arányt, azok növelik a konszonancia érzetet. Egy v_0 alaphang p-edik és q-adik felhangját tekintve a konszonancia mértéke nagyjából számszerűsíthető úgy, mint a $\frac{p}{q}$ hányados, ahol $1 \leq \frac{p}{q} < 2$. Tehát minél kisebb az arány, annál kisebb a konszonancia (leszámítva az 1 értéket).

arányszám	C_H / %	Δ_H
$1/1 = 1.000$	100	0.0
$2/1 = 2.000$	50	1.0
$3/2 = 1.500$	16.7	2.6
$4/3 = 1.333$	8.3	3.6
$5/3 = 1.667$	6.7	3.9
$5/4 = 1.250$	5	4.3
$7/4 = 1.750$	3.6	4.8
$6/5 = 1.200$	3.3	4.9
$7/5 = 1.400$	2.9	5.1
$8/5 = 1.600$	2.5	5.3
$7/6 = 1.167$	2.4	5.4
$9/5 = 1.800$	2.2	5.5
$8/7 = 1.143$	1.8	5.8
$9/7 = 1.286$	1.6	6.0
$9/8 = 1.125$	1.4	6.2

1. táblázat. Helmholtz táblázata az egy oktávon belüli fő harmóniaarányokról és a megfelelő hangközök elhangoltságából adódó lebegések relatív erősségéről (C_H %-ban). A jobb oldali Δ_H oszlop a C_H mennyiség reciprokának értékét méri logaritmikus skálán, így nincs dimenziója. A felhangsor hetedik vagy későbbi felhangjait tartalmazó arányok sorai szürkék.

Az 1 táblázatban a Helmholtz által vizsgált fontosabb harmóniák arányát láthatjuk, valamint ezek erősségét. Ez a paraméter, amelyet Helmholtz a táblázat sorbarendezéséhez használ, a megfelelő hangközök elhangoltságából eredő relatív erősség, amely úgy kapható, hogy modellezzük a Corti-szervben képződő rezonancia erősségét. Ez a mennyiség a következő értékkel írható le:

$$C_H(p, q) = \frac{100}{pq}. \tag{1}$$

Helmholtz azt állította, hogy a hetedik felhang már nagyon halk a legtöbb hangszeren, és a távolabbi felhangoknak általában elhanyagolható a jelenléte. Így a hetedik vagy ennél magasabb felhangokat figyelmen kívül hagyva (ezek szürke sorok az 1 táblázatban) fönnáll a közelítési szabály[1], miszerint a hányados közvetlen kapcsolatban áll C_H értékével. Ezalól kivételt képez az 5/3 hányados.

[1] A konszonancia problémájának történetében az egybeesés elmélet tudott először számszerű kapcsolatot adni a zenei és az akusztikai jelenség között.[2] Az elméletet Isaac Beeckman építette föl (1614-1615), majd Descartes, Mersenne és Galileo fejlesztették tovább azzal, hogy összefüggésbe hozták a konszonancia métékét a pq szorzat értékével.

A táblázat kiegészült még egy oszloppal, amely inverz kapcsolatot mutat C_H értékével logaritmikus skálán, így dimenzió nélküli mérőszám:

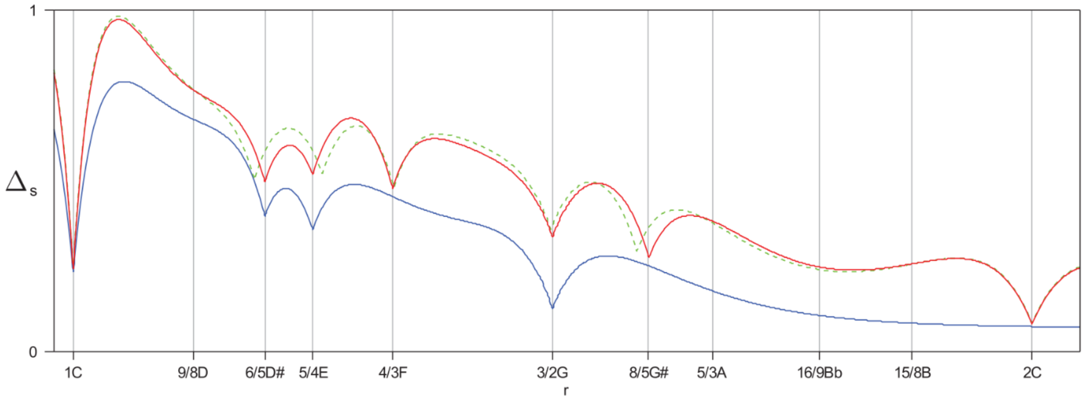
$$\Delta_H(p,q) = \log_2 \frac{100}{C_H(p,q)} = \log_2(pq) \in [0,\infty). \tag{2}$$

Ez megfelel a Tenney [20] által használt harmonikus távolságnak tiszta hangok esetében. Tenney szerint a harmonikus tér közeli hangjait hajlamosak vagyunk konszonánsnak hallani, míg a távolabbiakat disszonánsnak érezzük együtt. Sőt, ez a disszonancia a lebegés fokán túlmutat. Ebből kifolyólag a harmonikus távolság egy fontos összefüggést jelez a konszonancia és disszonancia között. Tenney megközelítésében a harmonikus távolságot hangpárokra értelmezzük. Dolgozatomban ennek a fogalmonak a kiterjesztését fogom bemutatni tetszőleges számú hangra. A későbbiekben több hang harmonikus távolságára mint harmonikus disszonanciára fogunk hivatkozni.

A durvaságelmélet Helmholtz munkásságának gyümölcse. Plomp és Levelt [14] a konszonancia rengeteg magyarázatát vizsgálták: frekvenciaarány, felhangok kapcsolata, felhangok közti lebegés, hangszínebeli különbségek és fúzió. Szerintük a tonális konszonancia[2] főként a gyors lebegések durvasága által meghatározott, habár a kritikus sávban lévő durvaságnak a leírásához módosítanunk kell Helmholtz maximális durvaságra vonatkozó feltételén, mert a kritikus sávszélesség nem ugyanolyan széles minden frekvencián. Pszichofiziológiai szemszögből nézve a durvaság egy érzet, amelyet az okoz, hogy nem tudjuk megkülönböztetni a különböző hangmagasságokat, amelyek frekvencia különbsége kisebb, mint a kritikus sávszélesség. A minimális konszonancia zónájához tartozó sávszélesség folyamatosan nő 1000Hz-nél nagyobb frekvenciák esetében, habár a minimum kritikus sávszélessége ugyanazt a relatív helyzetet foglalja el.

Ebben a kontextusban lehetséges modellt alkotni a hangok egy halmazának érzékelhető disszonanciájára. Tehát nem feltétlenül kell, hogy egy alaphang felhangjait vagy alhangjait vizsgáljuk. A leginkább kiterjesztett modell [15] a Pomp és Levelt kísérletei által nyert disszonanciafüggvényt közelíti, hogy két hang átlagos disszonanciáját mérje. Ezt a modellt tetszőleges számú, de nem kettő hangból álló hangzatokra használjuk. Neve spektrum, jele $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$, és akkordokra vagy együtt játszó hangszerekre vonatkozik. A spektrum önmagával való interferálásából áll elő az érzékelhető disszonancia, $\Delta_S(F)$, amelyet közlíthetünk a hangpárok disszonanciafüggvényeinek súlyozott összegeként az $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ amplitúdókkal súlyozva. Ezt ábrázolva az érzékelhető disszonanciára kapott görbék (lásd 2 ábra) relatív minimumokat mutatnak a frekvenciaarányokban, és ezek nagyobb konszonancia érzetet biztosítanak.

[2] A konszonancia fogalma nehezen megfogható, és minden bizonnyal mást ért alatta egy zenész, mint egy laikus. Ebben a tárgyalásban a konszonancia arra a jellegzetes érzetre utal, amely két elkülöníthető hang frekvenciaarányához társítható. A tonális konszonancia szókapcsolatot ennek a sajátos érzetnek a kifejezésére használjuk.



2. ábra. Az r tényező függvényében mért érzékelhető disszonanciája az F és rF harmóniáknak 500Hz-re vonatkozóan az $F = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\}$ (piros folyonos görbe), az $F = \{1, 2^{1/3}, 2^{7/12}, 2\}$ (zöld szaggatott görbe) és az $F = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\}$ (kék folytonos görbe) hármashangzatokkal. Forrás: Cubarsi - Harmonic distance in intervals and chords.

A következőkben a harmonikus távolságot általánosítani fogjuk akkordokra úgy, hogy tekintjük racionális arányú hangok halmaza által előállított lebegések mértékének a becsült értékét. Ezt leolvashatjuk egy geometriai ábráról is, ha a hangot megkeressük egy hanggráfon, majd leszámoljuk a melodikus távolságot a legmélyebb közös ősük - ez az alaphang szerepét tölti be - és a legmélyebb közös felhangjuk között. Ez utóbbi az a legalacsonyabb frekvencia, amely mindkét hang közös felhangja, vagy másként az a legalacsonyabb frekvencia, amelynek mindkét hang alhangja.

Melodikus távolság

A következő fejezetben bevezetünk egy zenészek által ugyan nem használt, azonban a konszonanciával és disszonanciával kapcsolatba hozható függvényt a frekvenciákon, így egyben a hangokon is. Továbbá mutatunk egy megoldást, amellyel elegendő az egy oktávon belüli hangokat figyelembe venni. Ez jelentősen megkönnyíti a hangok kezelését és a velük való számolásokat.

A hallás, csakúgy, mint a többi érzékelés, az inger relatív változását érzékeli, különös tekintettel a $v \in \Omega \equiv (0, \infty)$ frekvenciáéra. Más megközelítéssel ahhoz, hogy mérni tudjuk a frekvencia változását, bevezetünk egy I függvényt, amelyet a kövekező képlettel definiálunk:

$$I(v, v_0) \stackrel{\text{def}}{=} a \ln \frac{v}{v_0}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Az $I(v, v_0)$ dimenziómentes mennyiség a v és egy tetszőleges v_0 kezdőérték közötti frekvencia távolságát méri logaritmikus skálán. Feltéve, hogy a távolság egysége egy oktáv, azaz $I(2v_0, v_0) = 1$, adódik, hogy $a = 1/\ln 2$. Tehát a távolság két tiszta hang között a következő módon számolható:

$$I(v, v_0) = \log_2 \frac{v}{v_0}. \tag{4}$$

Ez az egyenlet leírja azt a természetes feltételezést is, hogy $I(v, v_0) = -I(v_0, v)$, tehát a távolságnak van előjele és iránya. Másrészről az így értelmezett távolság abszolút értéke az Ω halmazbeli frekvenciák melodikus távolságát definiálja:

$$d(v, v_0) \stackrel{\text{def}}{=} |I(v, v_0)| \tag{5}$$

Egy adott v_0 értékre a távolságfüggvény és a melodikus távolság a frekvenciák (általánosságban frekvenciaarányok) $(0, \infty)$ intervallumában definiáltak, és értéküket az előbbi esetben a hangmagasságok közti távolságok mérésére a $R(I) = (-\infty, \infty)$ intervallumból, az utóbbi esetben pedig az $R(d) = [0, \infty)$ intervallumból veszik föl.

Egy ekvivalenciareláció felállítható, ha a v és $2v$ frekvenciákat egyazon hangként azonosítjuk. Ez zeneileg azzal magyarázható, hogy az utóbbi éppen egy oktávval magassabb az előbbinél. Így egy adott v értékre minden $2^k v$, $k \in \mathbb{Z}$ frekvencia egy ekvivalenciaosztályt definiál. A $v \in [1, 2)$ frekvenciákra úgy tekintünk, mint a frekvenciaosztályaik reprezentánsaira. Ezért ha a megfelelő egységrendszert használjuk úgy, hogy $v_0 = 1$ az alap frekvenciahányados, akkor az alaphang összes oktávjainak a halmaza egy ciklikus alcsoportja Ω-nak a szorzásra nézve, jelölésben: $\Omega^2 = \{2^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Továbbá a frekvenciaosztályok az $\Omega_0 = \Omega/\Omega^2$ osztály elemei. A hang- vagy hangmagasság osztályok, vagyis a frekvenciaosztályok logaritmikus skálán úgy kaphatóak mint a $\{\log_2(v/v_0)\}$ törtrész, és ezt az $S_0 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ekvivalenciaosztály generálja.

Az alaphang és egy v frekvencia távolságát a következőképpen írhatjuk le:

$$I(v) \stackrel{\text{def}}{=} I(v,1). \tag{6}$$

Hasonlóan $|I(v)|$ az alaphang és a v frekvenciához tartozó hang melodikus távolsága. Mivel a távolságunknál az egységhossz egy oktáv, ezért a távolság értékének egészrésze,

$$\lfloor I(v) \rfloor = \lfloor \log_2 v \rfloor \tag{7}$$

mutatja, hogy hány oktávnyira helyezkedik el a v frekvenciához tartozó hang az alaphanghoz képest. Pélául ha adott egy $h > 0$ frekvenciaérték, akkor a $v = h^p$ frekvencia $I(v) = p \log_2 h$ távolságra helyezkedik el az alaphangtól, és $\lfloor p \log_2 h \rfloor$ az a szám, ahány oktávnyira helyezkedik el h^p az alaphangtól. Másrészt a hang, amelyet a $v \in \Omega$ frekvenciához társítunk, megegyezik a távolság értékének törtrészével:

$$\{I(v)\} = \{\log_2 v\} \in S_0 \tag{8}$$

Ha $v \in \Omega_0$, azaz v egy frekvenciaosztály reprezentánsa, akkor a kapcsos zárójel elhagyható.

A (6) egyenletben leírt jelölést és a logaritmus azonosságait két frekvencia szorzatára használva teljesül, hogy

$$I(v_1 v_2) = I(v_1) + I(v_2),$$

valamint a (4) egyenlet kifejezhető úgy, mint

$$I(v, v_0) = I(v) - I(v_0).$$

Például a 12 fokú kiegyenlített hangolású skála hangjai egy oktávon belül az $\alpha_k = 2^{k/12}; k = 0, \ldots, 11$ frekvenciaosztályokat adják. Ez egy mértani sorozat Ω_0-ban, és az $I(\alpha_k) = k/12 \in S_0$ melodikus távolságaik pedig egy számtani sorozatot alkotnak. A bevezetett távolságfogalmunknak ezen tulajdonsága is egybevág a zenei szemléletmóddal, vagyis hogy egy kiegyenlített hangolású hangsor hangjai egyenlő távolságra vannak egymástól. Sőt, általánosan egy $E_n^T = \{2^{k/n} : k \in \mathbb{Z}_n, n > 1\}$ n hangból álló kiegyenlített hangolású hangsor esetén a (8) egyenlet hangjai szimmetrikus eloszlásúak S_0-ban.

Ha az Ω_0 oktávra úgy gondolunk, mint az $[1, 2) \in \mathbb{R}$ intervallumra, akkor a két frekvenciaosztály között $I(v, v') = I(v) - I(v')$ melodikus távolságra felső korlát az $I(2, 1) = I(2) - I(1) = \log_2 2 - \log_2 1 = 1 - 0 = 1$. E feltételezés mellett a kiszámolt maximális érték csakis olyan frekvenciaosztályok esetén érhető el, amelyek tartanak az alaphanghoz azáltal, hogy az $[1, 2)$ intervallum határait közelítik. Bár voltaképpen ezek a frekvenciaosztályok tetszőlegesen közel lehetnek egymáshoz Ω_0-ban.

Ha a frekvenciaosztályokat Ω_0-ban viszgáljuk, amelyre ismét az $[1, 2)$ intervallumként tekintünk, akkor az $|I|$ függvény nem felel meg a távolság fogalmának. Például az abszolút értéke a 3/2-től az 1 alaphangig terjedő hangköznek

$|I(\frac{3}{2},1)| = |I(3/2)| = \log_2(3/2)$, ha a hangközt az $[1,\frac{3}{2})$ intervallumnak feleltetjük meg Ω_0-ban. Ám ugyanígy választhatnánk az intervallum komplementerét is hangköznek, vagyis az $\Omega_0 \backslash [1,\frac{3}{2}) = [\frac{3}{2},2)$ szakaszt, hiszen a faktorizáció miatt alaphangnak a 2 is tekinthető. Így a hangköz abszolút értéke $\log_2(2/\frac{3}{2}) = \log_2(4/3)$. Mivel az előző bekezdésben kiszámoltuk, hogy Ω_0-ban a melodikus távolságra adott felső korlát $I(2,1) = 1$, ezért a 3/2-től az 1 alaphangig terjedő hangköz abszolút értékét a komplementer kiszámítása nélkül is megkaphatjuk úgy, hogy $1 - |I(3/2)| = 1 - \log_2(3/2) = \log_2(4/3)$. A távolság az abszolút értékben kisebb hangközt kell jelentse két frekvenciaosztály között. Ezért a távolságot egy α és egy β frekvenciaosztály között az Ω_0 oktávban a következő módon kell definiálnunk:

$$d_0(\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{=} \min(|I(\alpha,\beta)|, 1 - |I(\alpha,\beta)|).$$

Felhangok távolsága

Relatív prím felhangok közti távolság

Ebben a fejezetben bevezetünk egy zenészek által ugyan nem használt, a matematikai távolság fogalmának azonban eleget tevő függvényt, amelyet először csak egymáshoz képest relatív prím frekvenciájú felhangokon értelmezünk. Továbbá konstrukciót adunk a már többször emlegetett hanggráfra, amelyet mint geometriai szemléltetőeszközt arra fogunk használni, hogy kapcsolatba hozzuk az egyazon alaphanghoz tartozó két felhang közötti disszonanciát a melodikus távolsággal.

Szeretnénk összehasonlítani egy adott v_0 frekvenciához tartozó alaphang két felhangját:

$$v_p \stackrel{\text{def}}{=} pv_0; \quad v_q \stackrel{\text{def}}{=} qv_0.$$

Először feltesszük, hogy p és q pozitív egészek, és egymáshoz képest relatív prímek. Ebből következik, hogy a $p = p_1 \dots p_m$ és $q = q_1 \dots q_n$ prímtényezős felbontásukban (ezek egyértelműek) nincs közös szorzótényező. Tehát a legnagyobb közös osztójuk $\text{lnko}(p, q) = 1$, és a legkisebb közös többszörösük $\text{lkkt}(p, q) = pq$. Ekkor a legkisebb a és b természetes számok, amelyekre teljesül, hogy v_p egy felhangja megegyezik v_q egy felhangjával, azaz

$$apv_0 = bqv_0,$$

az nyilvánvalóan az $a = q$ és $b = p$. A fenti meggondolás alapján értelmezzük v_p és v_q legmélyebb közös felhangját (lmkf) mint:

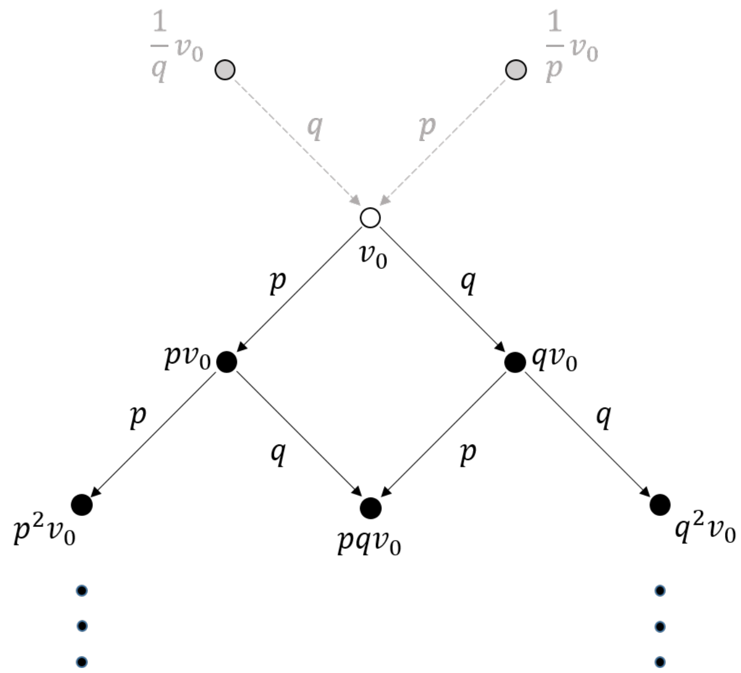
$$\text{lmkf}(v_p, v_q) \stackrel{\text{def}}{=} pqv_0 = \text{lkkt}(p, q)v_0. \tag{9}$$

A melodikus távolság tehát egy v_0 alaphang és két felhangjának a legmélyebb közös felhangja között az (5) és (6) egyenletek alapján:

$$d(pqv_0, v_0) = I(pq) = \log_2 pq.$$

Most megépítjük a 3 ábrán látható irányított hanggráfot. A csúcsokban frekvenciák állnak, amelyeket az éleken feltüntetett arányuk szerint kötünk össze. Egy csúcsból az eggyel lentebbi szintre mutat egy p-él az egyik irányba és egy q-él a másikba. Ezt a gráfot[3] távolságmérésre fogjuk használni.

[3]Ez a gráf kiegyenlített hangolás esetén hasonlít Euler Tonnetz elnevezésű hanghálózatához,



3. ábra. v_0 gyökerű hanggráf, melynek élein a p és q relatív prím frekvenciák állnak. v_0 felmenői szürkék.

A v_0 csúcsból indulunk. A p irány mentén haladva elérjük a pv_0, p^2v_0 stb. pontokat, a q irány mentén pedig a qv_0, q^2v_0 stb. pontokat. Általában tehát a $p^m q^n v_0$; $m, n \in \mathbb{N}$ frekvenciáknak megfelelő felhangok állnak a gráf csúcsaiban. A melodikus távolság két szomszédos pont között $\log_2 p$, ha egy p-éllel vannak összekötve, és $\log_2 q$, ha egy q-éllel.

A v_0 csúcsból a $p^m q^n v_0$ csúcsba bármilyen útvonalon eljuthatunk, amely m darab p-élt és n darab q-élt tartalmaz a sorrendtől eltekintve. Ezen útvonal melodikus hossza

$$\begin{aligned} d(p^m q^n v_0, v_0) &= d(p^m v_0, v_0) + d(q^n v_0, v_0) = I(p^m) + I(q^n) = \\ &= m \log_2 p + n \log_2 q, \end{aligned} \tag{10}$$

amely egyenként kiszámolható a közös v_0 kezdőcsúcsból $p^m v_0$-ba és $q^n v_0$-ba menő távolságok összegeként. Irányított körmentes gráfokban ez a közös kezdőcsúcs a gyökér, amely itt a legmagasabb közös alhangnak felel meg (lmka). Ez az első olyan csúcs a p- és q-élekkel címkézett hanggráfban, amelynek van v_p és v_q leszármazottja is. Így

$$\operatorname{lmka}(p^m v_0, q^n v_0) \stackrel{\text{def}}{=} v_0; \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Vegyük észre, hogy a 3 ábra minden csúcsának közös osztója a legmagasabb közös alhang. Ennél fogva a korábban bevezetett távolságfogalom és műveleti tulajdonságai érvényesek maradnak, ha a legmagasabb közös alhangot választjuk

ahol az élek hangközök, nem pedig frekvenciaarányok.

egységnek.

Következésképpen minden p és q relatív prímre (de ez igaz marad minden p^m és q^m prímhatvány esetén is) a harmonikus távolság a $v_p = pv_0$ és $v_q = qv_0$ frekvenciákhoz tartozó hangok között úgy definiálható, mint a hangok legmélyebb közös felhangjának a legmagasabb közös alhangjától vett melodikus távolsága:

$$d_H(v_p, v_q) \stackrel{\text{def}}{=} d(\text{lmkf}(v_p, v_q), \text{lmka}(v_p, v_q)).$$

Amint azt a (10) egyenletnél is írtuk, ez megegyezik az $\text{lmka}(v_p, v_q)$ legmagasabb közös alhangnak a v_p és v_q csúcstól mért melodikus távolságának összegével:

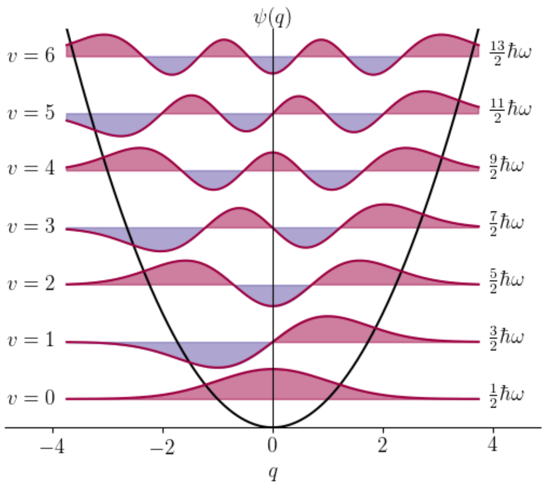
$$d_H(v_p, v_q) = d(pqv_0, v_0) = d(pv_0, v_0) + d(qv_0, v_0). \tag{11}$$

Minden $v_0 \in \mathbb{R}$ alapfrekvencia esetén a harmonikus távolság két felhangra:

$$d_H(pv_0, qv_0) = d_H(p, q).$$

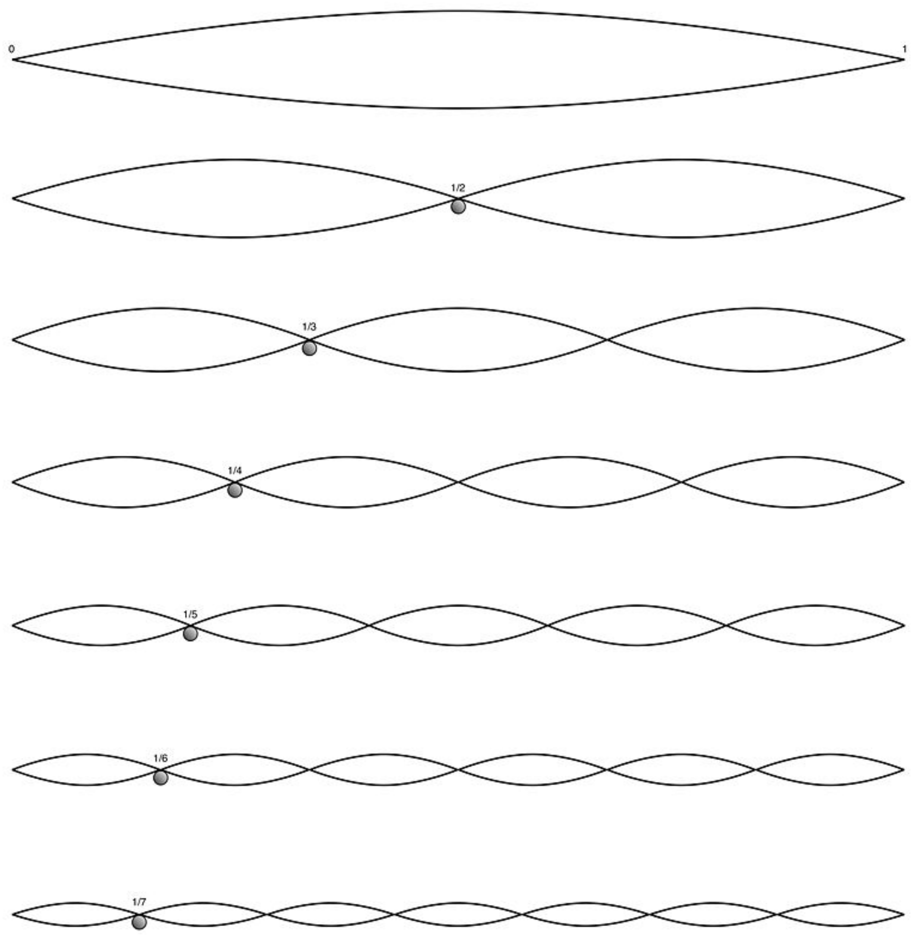
Ez az érték a hanggráfon lévő távolság a két frekvencia közös alaphangja és legmélyebb közös felhangja között.

A pv_0, qv_0 és pqv_0 felhangoknak a v_0 frekvencia hullámaival közös periódusai értelmezhetőek a kényszerített harmonikus oszcillátor modell szerint (pl.: Mickens 1981-es modellje [12]), ahol az egyszerre jelenlévő hangok egymástól való függése nyomon követhető. A v_0 frekvencia zavaró rezgései periodikus megoldásokat eredményeznek a pv_0, qv_0 és pqv_0 frekvenciák szabad oszcillációival, amelyek a v_0 frekvencia felhangjai. Hasonlóképpen a pqv_0 felhangnak van olyan periódusa, amely egybeesik a pv_0 és qv_0 alhangjainak periódusával. Például az $1; 2; 3; 6$ frekvenciák hullámainak egymás fölé illesztése a 2π periódus kényszerített felhang oszcillátorának egy periodikus megoldását adja, ahol az 1-es frekvencia a legmagasabb közös alhang és a 6-os a legmélyebb közös felhang. Ennélfogva az alapfrekvencia számos felhangjának esetében nem lehet azonosítani, hogy melyik hullámhoz tartozik. Ezért a legmélyebb közös felhanghoz egy összeolvadt hangkép társul, ahol látenssé válnak az alhangok. A legmagasabb közös alhang a közös alaphang.



4. ábra. Harmonikus oszcillátor hullámfüggvények. Forrás: `https://scipython.com/blog/the-harmonic-oscillator-wavefunctions/`

Tehát egy hang valójában sokkal összetettebb, mint ahogy mi azt gondolnánk. Tiszta hang, amelynek nyomása az időben a szinuszfüggvénynek megfelelően változik, a mindennapi életben csak kivételesen fordul elő. Egy alaphang megszólalásakor valójában megszólalnak a felhangok is. Azért kapunk periodikus megoldásokat, mert az alaphang és egy felhangjának rezgése periodikusan találkozik. A felhang periódusa rövidebb, mert magasabb frekvencián, gyorsabban rezeg. Például az első felhang, az alaphang oktávja kétszer olyan gyorsan, mert a frekvenciaarány 1 : 2. Ezt úgy lehet elképzelni, hogyha megpendítünk egy húrt, akkor az nem csak fel-le rezeg, hanem eközben a felezőponthoz képest a két fél húr is ilyen rezgést végez fel-le, ezt szemlélteti a 5 ábra. Ezért használjuk az összeolvadt hangkép fogalmát is, hiszen a legmélyebb közös felhangban valójában több hang van jelen, azaz ahogy fentebb is említettük, a felhang alhangjai látenssé válnak.



5. ábra. Különböző felhangok megszólalása húron a megfelelő osztópontoknál.

Forrás: `https://hu.wikipedia.org/wiki/Felhangsor`

Ennek matematikai megnyilvánulása, hogy a (11) egyenlet $d_H(p, q)$ értéke megegyezik a (2) egyenletben definiált $\Delta_H(p, q)$ kifejezéssel, amellyel az 1 táblázat jobb oldali oszlopának[4] értékeit számítottuk ki. Tehát Tenneyt idézve, a $d_H(p, q)$ harmonikus távolságra úgy tekinthetünk, mint a p és q hangok felhangsoraiból

[4]Helmholtz C_H-ra kapott értéke, amelyet egy tizedesjegy pontossággal ad meg az 1 táblázat, megegyezik azzal, amelyet a C_H kiszámítására felírt képlettel kapunk. Ezalól kivétel az 5/7 arány, amely 2, 8 helyett 2, 9 kellene legyen, ezt azonban Helmholtz hibásan publikálta a $C_H(5, 7) = \frac{100}{5 \cdot 7} = 2,86$ helytelen kerekítése miatt.

létrejövő összetett spektrumok relatív disszonanciájának a lehetséges függvényére.

Ezek alapján a 3 ábra irányított gráfjának szerkezete lentről fölfele is olvasható $1/p$ és $1/q$ arányokkal a szomszédos csúcsok között. Ez könnyedén általánosítható kettőnél több relatív prím felhangra, ha minden új felhangra új dimenziót vezetünk be.

Tetszőleges felhangok közti távolság

A következő fejezetben általánosítjuk az előbb bevezetett távolságfogalmat tetszőleges felhangok esetére, majd belátjuk, hogy egy alaphang immáron összes felhangján értelmezett függvény valóban metrika.

Most összehasonlítjuk egy v_0 frekvenciához tartozó alaphang két nem relatív prím felhangját. Ezek legyenek

$$v_P \stackrel{\text{def}}{=} Pv_0; \quad v_Q \stackrel{\text{def}}{=} Qv_0,$$

ahol $P, Q \in \mathbb{N}$, és

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \text{lnko}(P, Q) > 1.$$

Az előző fejezet jelöléseivel élve $v_P = pDv_0$ és $v_Q = qDv_0$, ahol $p \stackrel{\text{def}}{=} P/D$ és $q \stackrel{\text{def}}{=} Q/D$ relatív prímek, mert ha nem lennének, akkor D sem lehetne P és Q legnagyobb közös osztója. Ismeretes, hogy

$$\text{lnko}(P, Q) \cdot \text{lkkt}(P, Q) = PQ, \text{ azaz}$$

$$D \cdot \text{lkkt}(P, Q) = pqD^2.$$

Leosztva az egyenlet mindkét oldalát D-vel:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{lkkt}(P, Q) = pqD.$$

Ezek után a (9) egyenlethez hasonlóan értelmezhetjük a legmélyebb közös felhangot mint

$$\text{lmkf}(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} pqDv_0 = \text{lkkt}(P, Q)v_0 = Mv_0, \tag{12}$$

valamint a legmagasabb közös alhangot mint

$$\text{lmka}(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} \text{lnko}(P, Q)v_0 = Dv_0. \tag{13}$$

Ezzel a 3 ábrához hasonló szerkezetű gráfot kapunk, de most a közös kezdőcsúcs Dv_0. Ebből már könnyen adhatunk képletet két tetszőleges felhang harmonikus távolságának kiszámolására. Hasonlóan a (11) egyenletben felírtakhoz, v_P és v_Q harmonikus távolsága a legmagasabb közös alhangjuknak a legmélyebb közös felhangjuktól vett melodikus távolságával definiálható:

$$d_H(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} d(Mv_0, Dv_0) = d(pqDv_0, Dv_0) = |I(pq)| = |\log_2 pq| = \log_2 pq. \tag{14}$$

Következésképpen igaz az alábbi egyenlőséglánc:

$$d_H(v_P, v_Q) = d_H(P, Q) = d_H(p, q) = \log_2 pq, \tag{15}$$

vagyis tetszőleges nem relatív prím felhangok harmonikus távolsága visszavezethető relatív prímekére azáltal, hogy a legkisebb közös többszöröst leosztjuk a legnagyobb közös osztóval, és a megmaradt relatív prímek harmonikus távolságát mérjük. Tehát a harmonikus távolságra adható másik definíció:

$$d_H(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} \log_2 \frac{\mathrm{lmkf}(v_P, v_Q)}{\mathrm{lmka}(v_P, v_Q)} = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(P, Q)}{\mathrm{lnko}(P, Q)}, \tag{16}$$

amely minden $v_0 \in \mathbb{R}$ alaphang esetén fenáll. Könnyen meggondolható, hogy ez ekvivalens az előbbi definícióval.

Bizonyítás.

A (14) definíció alapján:

$$d_H(v_P, v_Q) = \log_2 pq.$$

A (16) definíció alapján szintén:

$$d_H(v_P, v_Q) = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(P, Q)}{\mathrm{lnko}(P, Q)} = \log_2 \frac{M}{D} = \log_2 \frac{pqD}{D} = \log_2 pq. \square$$

Az utolsó kifejezés megegyezik a Tenney 1979-es The Structure of Harmonic Series Aggregates című írásában tiszta hangokra használt harmonikus távolsággal. A következő fejezetben ezt általánosítani fogjuk olyan hangokra, amelyeket felhangok hányadosaként kapunk, illetve több, mint két hangból álló hangok halmazára.

A harmonikus távolság valóban egy távolságot definiál, ugyanis kielégíti a metrika axiómáit.

Nemnegativitás és null hossz: a (14) egyenlet miatt $d_H(v_P, v_Q) = |I(pq)| \geq 0$ nyilvánvalóan. Továbbá $d_H(v_P, v_Q) = 0 \iff |I(pq)| = |\log_2 pq| = \log_2 pq = = 0 \iff pq = 1 \iff p = q = 1 \iff (D =)P = Q$, ahol kihasználtuk, hogy $p, q \in \mathbb{N}$.

Szimmetria: a (16) egyenlet miatt

$$d_H(v_P, v_Q) = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(P, Q)}{\mathrm{lnko}(P, Q)} = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(Q, P)}{\mathrm{lnko}(Q, P)} = d_H(v_Q, v_P).$$

Háromszög-egyenlőtlenség: Legyen $v_R = Rv_0$, ahol $R \in \mathbb{N}$ és $\mathrm{lnko}(P, R) = = D_P$, $\mathrm{lnko}(Q, R) = D_Q$. Ekkor R felírható úgy, mint $R = D_P r_P = D_Q r_Q$. Majd ismét a (14) egyenletet használjuk: $d_H(v_P, v_Q) = \log_2 pq \leq \log_2(pr_P \cdot \cdot r_Q q) = \log_2(pr_P) + \log_2(r_Q q) = d_H(v_P, v_R) + d_H(v_R, v_Q)$.

A harmonikus távolságot v_P és v_Q között úgy értelmeztük, mint az $\mathrm{lmka}(v_P, v_Q)$ és $\mathrm{lmkf}(v_P, v_Q)$ közötti melodikus távolság. Most vizsgáljuk meg a (15) egyenletben szereplő hangok legmagasabb közös alhangját. A bal oldalon $\mathrm{lmka}(v_P, v_Q) = \mathrm{lmka}(pDv_0, qDv_0) = Dv_0$; középen $\mathrm{lmka}(P, Q) = D$; és végül a jobb oldalon

$\mathrm{lmka}(p, q) = 1$. Vegyük észre, hogy bár a (15) egyenlet szerint a vizsgált hangpárok harmonikus távolsága megegyezett, a legmagasabb közös alhangja azonban nem.

Azt mondjuk, hogy a megfelelő hanggráfok ekvivalensek, mivel ezek csupán az alaphangjukra vonatkozólag térnek el egymástól, amelyek rendre Dv_0, D és 1.

Tehát a harmonikus távolság nem változik, ha mindkét hang frekvenciáját megszorozzuk egy $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ számmal:

$$\mathrm{lnko}(p, q) = 1 \Longrightarrow d_H(px, qx) = d_H(p, q); \quad \mathrm{lmka}(px, qx) = x. \tag{17}$$

Általánosan:

$$\mathrm{lmka}(v_P x, v_Q x) = \mathrm{lmka}(v_P, v_Q)x = \mathrm{lnko}(P, Q)v_0 x. \tag{18}$$

A (17) egyenletben leírt tulajdonság miatt a v_P és v_Q hangok közötti harmonikus távolságot számolhatjuk úgy, mint az arányuk és az egység közötti harmonikus távolság:

$$d_H(v_P, v_Q) = d_H\left(\frac{v_P}{v_Q}, 1\right) = d_H(p, q) = d_H\left(\frac{p}{q}, 1\right).$$

Távolság felhangok hányadosai között

Az előző fejezetben bemutatott harmonikus távolság fogalmát szeretnénk általánosítani olyan hangok távolságának meghatározására, amelyeket felhangok irreducibilis, azaz tovább nem egyszerűsíthető törtjeként írunk föl p/q és r/s alakban. Erre azért van szükség, hogy egy oktávon belüli hangok távolságát is értelmezni tudjuk. Egy példán keresztül megérthetjük ennek fontosságát: a 2. felhang az alaphang oktávja, a 3. az erre épülő tiszta kvint, ezért $3/2$ a tiszta kvint frekvenciaaránya. Ha az alapfrekvenciát 1-nek választjuk, akkor az alaphangra épülő tiszta kvint $1 \cdot 3/2 = 3/2$, amely tehát felhangok hányadosaként áll elő.

A tört frekveniák harmonikus disszonanciáját visszavezethetjük egészekére, mivel a (17) egyenletben megfogalmazott szabály szerint a harmonikus távolság nem változik, ha mindkét hang frekvenciáját megszorozzuk egy nemnulla valós számmal; ezek után a harmonikus távolság (16) definíciója alapján ki is számolhatjuk a távolságot:

$$d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = d_H\left(\frac{ps}{qr}, 1\right) = d_H(ps, qr) = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(ps, qr)}{\mathrm{lnko}(ps, qr)}. \tag{19}$$

Az előzőekben ismertetett (18) egyenlet segítségével meghatározhatjuk a megfelelő legmagasabb közös alhangokat:

$$\mathrm{lmka}\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = \frac{1}{qs}\mathrm{lnko}(ps, qr);$$
$$\mathrm{lmka}\left(\frac{ps}{qr}, 1\right) = \frac{1}{qr}\mathrm{lnko}(ps, qr);$$

$$\mathrm{lmka}(ps, qr) = \mathrm{lnko}(ps, qr).$$

Nem szeretnénk külön kezelni azt az esetet, amikor felhangok hányadosait vizsgáljuk, ezért a permanenciaelv szerint kiterjesztjük a harmonikus távolság fogalmát. Továbbá a valóságban gyakran nem csupán két hangot akarunk vizsgálni, de ezzel az esettel a következő fejezetben foglalkozunk részletesen. Ezeknek a természetes elvárásoknak eleget tehetünk, mert a fenti számítások leegyszerűsíthetőek, majd általánosíthatóak több, mint két hangra, ha kihasználjuk a legkisebb közös többszörösnek és a legnagyobb közös osztónak irreducibilis törtekre kibővített fogalmát:

$$\mathrm{lkkt}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{lkkt}(p,r)}{\mathrm{lnko}(q,s)}; \quad \mathrm{lnko}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{lnko}(p,r)}{\mathrm{lkkt}(q,s)}. \tag{20}$$

Ezzel a (19) egyenlet csupán a (16) definíció egy speciális esete, hiszen

$$d_H\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)}{\mathrm{lnko}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)}\right),$$

amely továbbalakítva a (20) egyenlet szerint:

$$d_H\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right) = \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}(p,r)}{\mathrm{lnko}(p,r)}\frac{\mathrm{lkkt}(q,s)}{\mathrm{lnko}(q,s)}\right). \tag{21}$$

Ez az új definícióból adódó képlet a $d_H\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)$ harmonikus távolságra valóban megegyezik a (19) egyenletben ugyanezen értékre kapott formulával.

Bizonyítás.

Két szám legnagyobb közös osztóját úgy számolhatjuk, hogy mindkettőnek vesszük a prímtényezős felbontását, az ebben szereplő összes prímtényezőt a kisebb hatványra emelve választjuk (a 0 hatványkitevőt is beleértve), majd ezeket a prímhatványokat összeszorozzuk. Hasonlóan két szám legkisebb közös többszörösét úgy számolhatjuk, hogy mindkettőnek vesszük a prímtényezős felbontását, az ebben szereplő összes prímtényezőt a nagyobb hatványra emelve választjuk, majd ezeket a prímhatványokat összeszorozzuk. Ne feledjük, hogy a p/q és az r/s irreducibilis törtekből indultunk ki, vagyis $\mathrm{lnko}(p,q) = \mathrm{lnko}(r,s) = 1$. Mivel a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért elegendő volna belátni, hogy a (19) és a (21) egyenletben a $d_H(p/q, r/s)$ harmonikus távolságra kapott logaritmusok argumentumaiban a törtek egyenlőek. Ezt úgy tesszük, hogy megmutatjuk, hogy a törtek számlálói és nevezői egyenlőek. Két eset lehetséges.

1. p prímtényezős felbontásában szerepel egy b prím a β_p kitevőn, s prímtényezős felbontásában pedig a β_s kitevőn. Ekkor sem q, sem r prímtényezős felbontásában nem szerepelhet b. Így $\mathrm{lnko}(ps, qr)$, $\mathrm{lnko}(p,r)$ és $\mathrm{lnko}(q,s)$ prímtényezős felbontásában b a 0 kitevőn szerepel, $\mathrm{lnko}(p,r)\mathrm{lnko}(q,s)$ felbontásában pedig szintén a $0+0=0$ kitevőn.
   $\mathrm{lkkt}(ps, qr)$ prímtényezős felbontásában b a $\beta_p + \beta_s$ kitevőn szerepel, és $\mathrm{lkkt}(p,r)$ felbontásában a β_p, $\mathrm{lkkt}(q,s)$ felbontásában a β_s kitevőn, ezért $\mathrm{lkkt}(p,r)\mathrm{lkkt}(q,s)$ prímtényezős felbontásában a b prím szintén a $\beta_p + \beta_s$ kitevőn van.

2. Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy például p prímtényezős felbontásában szerepel egy b prím a β_p kitevőn, s prímtényezős felbontásában pedig nem szerepel b. Ekkor q prímtényezős felbontásában nem szerepelhet b, r prímtényezős felbontásában azonban igen, a β_r kitevőn, amely esetleg 0 is lehet. Így $\mathrm{lnko}(ps, qr)$ és $\mathrm{lnko}(p, r)$ prímtényezős felbontásában szerepelni fog b a $\min\{\beta_p, \beta_r\}$ hatványon, $\mathrm{lnko}(q, s)$ felbontásában pedig nem fog szerepelni, ezért $\mathrm{lnko}(p, r)\mathrm{lnko}(q, s)$ felbontásában is a $\min\{\beta_p, \beta_s\} + 0 = \min\{\beta_p, \beta_s\}$ kitevőn lesz b.
   $\mathrm{lkkt}(ps, qr)$ és $\mathrm{lkkt}(p, r)$ prímtényezős felbontásában szerepelni fog b a $\max\{\beta_p, \beta_r\}$ hatványon, $\mathrm{lkkt}(q, s)$ felbontásában pedig nem fog szerepelni, ezért $\mathrm{lkkt}(p, r)\mathrm{lkkt}(q, s)$ felbontásában is a $\max\{\beta_p, \beta_s\} + 0 = \max\{\beta_p, \beta_s\}$ kitevőn lesz b.

Ezt a ps prímtényezős felbontásában szereplő minden prímre elmondhatjuk, és persze ugyanígy a qr prímtényezős felbontásában szereplőkre is. Tehát a (19) és a (21) egyenletben a harmonikus távolságra adott két kifejezés értéke megegyezik, ahogy vártuk. □

A (21) egyenletben a logaritmust összegre bontva, majd a harmonikus távolság (16) definícióját alkalmazva a következő azonossághoz jutunk:

$$\begin{aligned} d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) &= \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}(p,r)}{\mathrm{lnko}(p,r)}\frac{\mathrm{lkkt}(q,s)}{\mathrm{lnko}(q,s)}\right) = \\ &= \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}(p,r)}{\mathrm{lnko}(p,r)}\right) + \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}(q,s)}{\mathrm{lnko}(q,s)}\right) \overset{(16)}{=} \\ &= d_H(p, r) + d_H(q, s). \end{aligned}$$

Eszerint a harmonikus távolság tágabb értelmezésében sem veszti el távolság jellegét. Ezt ellenőrizzük is.

Nemnegativitás és null hossz: $d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ két, tagonként nemnegatív harmonikus távolság összegeként áll elő, így maga is nemnegatív. Továbbá: $d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = 0 \iff d_H(p, r) + d_H(q, s) = 0 \iff d_H(p, r) = d_H(q, s) = 0 \iff (p = r \wedge q = s) \iff \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.

Szimmetria: $d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = d_H(p, r) + d_H(q, s) = d_H(r, p) + d_H(s, q) = d_H\left(\frac{r}{s}, \frac{p}{q}\right)$.

Háromszög-egyenlőtlenség: $d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = d_H(p, r) + d_H(q, s) \leq (d_H(p, t) + d_H(t, r)) + (d_H(q, u) + d_H(u, s)) = (d_H(p, t) + d_H(q, u)) + (d_H(t, r) + d_H(u, s)) = d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{t}{u}\right) + d_H\left(\frac{t}{u}, \frac{r}{s}\right)$.

Foglaljuk össze a fentebbi eredményeink következményeit.

1. A legmagasabb közös alhang és a legmélyebb közös felhang meghatározása a (12) és (13) egyenlet egy speciális esetévé válik:

$$\mathrm{lmka}\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{lnko}\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{lnko}(p, r)}{\mathrm{lkkt}(q, s)}; \tag{22}$$

$$\text{lmkf}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \text{lkkt}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{lkkt}(p,r)}{\text{lnko}(q,s)}. \tag{23}$$

2. A 6 ábra bal oldali gráfjának éleire relatív prím természetes számok kerülnek, mivel kifejezhetőek a következő hányadosokkal:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{p}{q}\frac{1}{\text{lmka}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)} = \frac{p}{\text{lnko}(p,r)}\frac{\text{lkkt}(q,s)}{q};\\
\beta &= \frac{r}{s}\frac{1}{\text{lmka}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)} = \frac{r}{\text{lnko}(p,r)}\frac{\text{lkkt}(q,s)}{s};\\
\alpha' &= \frac{\text{lmkf}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)}{\frac{r}{s}} = \frac{\text{lkkt}(p,r)}{r}\frac{s}{\text{lnko}(q,s)};\\
\beta' &= \frac{\text{lmkf}\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)}{\frac{p}{q}} = \frac{\text{lkkt}(p,r)}{p}\frac{q}{\text{lnko}(q,s)}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Bizonyítás.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$p = p_0 \cdot \text{lnko}(p,r)$$

$$r = r_0 \cdot \text{lnko}(p,r)$$

$$q = q_0 \cdot \text{lnko}(q,s)$$

$$s = s_0 \cdot \text{lnko}(q,s),$$

ahol p_0 és r_0 valamint q_0 és s_0 relatív prím természetes számok. Ezzel a legkisebb közös többszöröst is kifejezhetjük:

$$\text{lkkt}(p,r) = p_0 r_0 \text{lnko}(p,r); \quad \text{lkkt}(q,s) = q_0 s_0 \text{lnko}(q,s).$$

Ekkor $\alpha = p_0 s_0$; $\beta = r_0 q_0$. Tehát az világos, hogy $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Kellene még, hogy α és β relatív prímek, vagyis hogy $\text{lnko}(\alpha,\beta) = \text{lnko}(p_0 s_0, r_0 q_0) = 1$. p_0-t és r_0-t úgy választottuk, hogy $\text{lnko}(p_0, r_0) = 1$. Továbbá ne feledjük, hogy a p/q és r/s irreducibilis törtekből indultunk ki, ezért nyilvánvalóan $\text{lnko}(p_0, q_0) = 1$ szintén fenáll. Mivel p_0-nak az 1-en kívül nincs más közös osztója r_0-lal és q_0-lal sem, ezért az $r_0 q_0$-lal sem lehet, vagyis $\text{lnko}(p_0, r_0 q_0) = 1$. Ugyanezen gondolatmenet mentén haladva belátható, hogy $\mathrm{lnko}(s_0, r_0q_0) = 1$ is teljesül. Mivel r_0q_0-nak az 1-en kívül nincs más közös osztója p_0-lal és s_0-lal sem, ezért a p_0s_0-lal sem lehet, vagyis $\mathrm{lnko}(p_0s_0, r_0q_0) = 1$, és ezt akartuk. $\square$

3. A következő azonosságnak köszönhetően igaz, hogy $\alpha = \alpha'$ és $\beta = \beta'$:

$$\frac{\mathrm{lkkt}(q,s)\mathrm{lnko}(q,s)}{qs} = \frac{\mathrm{lkkt}(p,r)\mathrm{lnko}(p,r)}{pr} = 1.$$

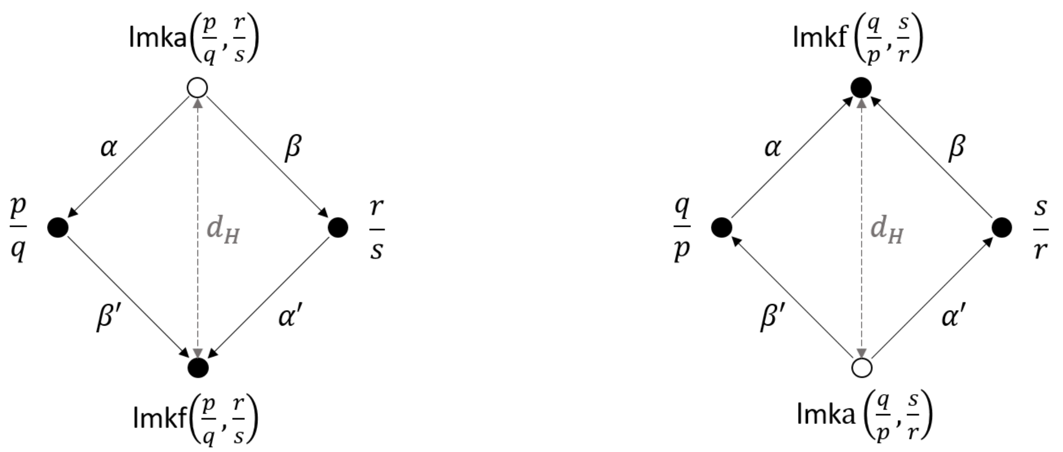
Tehát a két hangba mutató élek hosszainak összege megegyezik a legmagasabb közös alhangból a legmélyebb közös felhangba vezető út hosszával. Ezt el is vártuk, hiszen a hanggráfról szeretnénk leolvasni a két hang harmonikus távolságát, amely meg kell egyezzen a legmagasabb közös alhangnak és a legmélyebb közös felhangnak a melodikus távolságával.

Relatív prím felhangok esetén már felrajzoltuk a hanggráfot. Láttuk, hogy a harmonikus távolság az adott hangokba mutató élek hosszainak logaritmikus összegeként is megkapható. Ez továbbra is igaz marad, ugyanis a (21) egyenletet felhasználva a $d_H\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}(p,r)}{\mathrm{lnko}(p,r)}\frac{\mathrm{lkkt}(q,s)}{\mathrm{lnko}(q,s)}\right)$ harmonikus távolság egyenlő a $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = \log_2(\alpha \cdot \beta) = \log_2(\alpha \cdot \beta') = \log_2\left(\frac{p}{\mathrm{lnko}(p,r)}\frac{\mathrm{lkkt}(q,s)}{q} \cdot \frac{\mathrm{lkkt}(p,r)}{p}\frac{q}{\mathrm{lnko}(q,s)}\right)$ értékkel.

Vegyük a törtek reciprokait. Ekkor a legmagasabb közös alhang és a legmélyebb közös felhang alakulása a következő:

$$\mathrm{lmka}\left(\frac{q}{p}, \frac{s}{r}\right) = \frac{1}{\mathrm{lmkf}(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})}; \quad \mathrm{lmkf}\left(\frac{q}{p}, \frac{s}{r}\right) = \frac{1}{\mathrm{lmka}(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})}.$$

Tehát a törtek reciprokaival való számolás éppen a hanggráf éleinek ellentétes irányítását eredményezi.



6. ábra. Bal: $\mathrm{lmka}(p/q, r/s)$ gyökerű hanggráf, melynek élein az $\alpha = \alpha'$ és $\beta = \beta'$ relatív prím frekvenciák állnak. Jobb: a bal oldali gráf inverz frekvenciáira felrajzolt hanggráf, melyet az élek megfordításával nyerünk.

A felsorolt kifejezések érvényesek irreducibilis törtek véges halmazának esetére is.

Harmonikus disszonancia

Eddigi tudásunkkal a kettőnél több szólamú művekben vagy a zenekari előadások közben felcsendülő harmóniák konszonanciáját illetve disszonanciáját egyáltalán nem tudnánk elemezni. Így a permanencia elvét továbbra is szem előtt tartva szeretnénk bővíteni a harmonikus távolság fogalmát kettőnél több hangból álló akkordok esetére. Az alábbi fejezetben ezt fogjuk megtenni.

A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös tágabb értelmezésének köszönhetően tovább általánosíthatjuk a harmonikus távolság fogalmát olyan hangok véges halmazára, amelyek frekvenciái kifejezhetőek irreducibilis törtekként. Most is ezen hangok frekvenciáinak legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse közötti melodikus távolságot fogjuk tekinteni. Jelölje a hangok frekvenciáit

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda_i = \frac{p_i}{q_i} : i \in I \right\},$$

ahol $p_i, q_i \in \mathbb{N}^+$, $\forall i : \mathrm{lnko}(p_i, q_i) = 1$ és I a véges indexhalmaz. Definiáljuk külön a számlálók és a nevezők halmazát is:

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{p_i : i \in I\}; \quad \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{q_i : i \in I\}.$$

Ezután a (22) és (23) definíciók szerint:

$$\mathrm{lmka}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{lnko}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{lnko}(\Pi)}{\mathrm{lkkt}(\Theta)};$$

$$\mathrm{lmkf}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{lkkt}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{lkkt}(\Pi)}{\mathrm{lnko}(\Theta)}.$$

Innen a fentebbi hangok közötti melodikus távolságra adódó képlet:

$$d(\mathrm{lmkf}(\Lambda), \mathrm{lmka}(\Lambda)) = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(\Lambda)}{\mathrm{lnko}(\Lambda)} = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(\Pi)}{\mathrm{lnko}(\Pi)} + \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(\Theta)}{\mathrm{lnko}(\Theta)}. \tag{25}$$

Tehát a melodikus távolság számolható külön a Λ halmazban lévő törtek számlálóinak és nevezőinek melodikus távolságából képzett összegként:

$$d(\mathrm{lmkf}(\Lambda), \mathrm{lmka}(\Lambda)) = d(\mathrm{lmkf}(\Pi), \mathrm{lmka}(\Pi)) + d(\mathrm{lmkf}(\Theta), \mathrm{lmka}(\Theta)). \tag{26}$$

Véges sok hangból álló halmazok esetén a

$$\Delta_H(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} d(\mathrm{lmkf}(\Lambda), \mathrm{lmka}(\Lambda)) = \log_2 \frac{\mathrm{lkkt}(\Lambda)}{\mathrm{lnko}(\Lambda)}. \tag{27}$$

mennyiségre a Λ halmazban lévő hangok harmonikus disszonanciájaként fogunk hivatkozni. Tehát a Δ_H harmonikus disszonancia általánosítja a d_H harmonikus távolságot több, mint két hang esetére. Hasonlóan a (17) egyenletben írtakhoz teljesül, hogy

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \Delta_H(\Lambda) = \Delta_H(x\Lambda). \tag{28}$$

Ha visszatekintünk a (26) egyenletre, akkor észrevehetjük, hogy a harmonikus disszonancia kifejezhető a következő additív képlettel:

$$\Delta_H(\Lambda) = \Delta_H(\Pi) + \Delta_H(\Theta). \tag{29}$$

Ennek segíségével valamint az (1) és (2) egyenletek alapján általánosíthatjuk a konszonanciát, ahogy Helmholtz is tette. Azaz a Λ halmazban lévő hangok harmonikus konszonanciája definiálható úgy, mint

$$C_H(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 100\frac{\text{lnko}(\Lambda)}{\text{lkkt}(\Lambda)} = 100\frac{\text{lnko}(\Pi)}{\text{lkkt}(\Pi)}\frac{\text{lnko}(\Theta)}{\text{lkkt}(\Theta)}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a harmonikus disszonancia nem additív, azaz nem a hangpárok közötti disszonanciák összege. Például legyen $p = 2$, $q = 3$ és $r = 5$; ekkor azonban $\text{lkkt}(p, q, r) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \neq \text{lkkt}(2, 3) + \text{lkkt}(2, 5) + \text{lkkt}(3, 5) = 6+10+15 = 31$. Ehelyett additív a frekvenciahányadosok számlálóira és nevezőire nézve, amint azt fentebb levezettük.

Hangolási rendszerek

Püthagoraszi hangolás

Ebben a fejezetben a püthagoraszi skála frekvenciaosztályai között fogunk harmonikus távolságot számolni. Ezt a hangsort úgy kapjuk, hogy vesszük az 1 egység mint alaphang második és harmadik felhangját, amelyek az alaphang oktávjának és az oktáv kvintjének felelnek meg, majd ezekből generáljuk a további hangokat.

Tehát a frekvenciaosztályokat a következőképpen írhatjuk fel:

$$v_p = \frac{3^p}{2^q}; \quad p, q \in \mathbb{N},$$

ahol a faktorizáció miatt továbbra is teljesülnie kell a hangokra, hogy $1 \leq v_p < 2$. A (7) egyenlet miatt minden egyes p (kvint hatványkitevője) esetén a q (oktáv hatványkitevője) egyértelműen meghatározott:

$$\begin{gathered}
1 \leq v_p < 2 \\
0 = \log_2 1 \leq \log_2 v_p < \log_2 2 = 1 \\
0 = \lfloor \log_2 v_p \rfloor \\
0 = \lfloor \log_2 \frac{3^p}{2^q} \rfloor \\
0 = \lfloor p \log_2(3) - q \rfloor \\
q = \lfloor p \log_2 3 \rfloor .
\end{gathered} \tag{30}$$

Számoljuk ki két hang harmonikus távolságát, legyenek ezek $v_p \stackrel{\text{def}}{=} 3^p/2^p$ és $v_{p'} \stackrel{\text{def}}{=} 3^{p'}/2^{p'}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $p > p'$, hiszen ez nem korlátozza v_p és $v_{p'}$ relatív hangmagasságát. Erről könnyedén megbizonyosodhatunk egy példán keresztül. Válasszuk p-t 2-nek, p'-t pedig 1-nek. Ekkor $q = \lfloor 2 \log_2 3 \rfloor = 3$ és $q' = \lfloor 1 \log_2 3 \rfloor = 1$, így $v_p = 9/8 < v_{p'} = 3/2$, azaz a v_p hang mélyebb, mint $v_{p'}$ annak ellenére, hogy $p > p'$. Vizsgáljuk meg, hogy ez milyen hatással van q és q' kapcsolatára:

$$p\log_2 3 > p'\log_2 3 \Longrightarrow \lfloor p\log_2 3\rfloor \geq \lfloor p'\log_2 3\rfloor.$$

Ezt összevetve a (30) levezetés végeredményével láthatjuk az összefüggést:

$$p > p' \Longrightarrow q \geq q'.$$

Ezután kiszámolhatjuk a hanggráf további két csúcsát:

$$\begin{aligned}\mathrm{lmka}(v_p, v_{p'}) &= \mathrm{lnko}\left(\frac{3^p}{2^q}, \frac{3^{p'}}{2^{q'}}\right) = \frac{\mathrm{lnko}(3^p, 3^{p'})}{\mathrm{lkkt}(2^q, 2^{q'})} = \frac{3^{p'}}{2^q};\\ \mathrm{lmkf}(v_p, v_{p'}) &= \mathrm{lkkt}\left(\frac{3^p}{2^q}, \frac{3^{p'}}{2^{q'}}\right) = \frac{\mathrm{lkkt}(3^p, 3^{p'})}{\mathrm{lnko}(2^q, 2^{q'})} = \frac{3^p}{2^{q'}}.\end{aligned} \tag{31}$$

A (24) egyenletekkel analóg módon megkaphatjuk a hanggráf éleire írt pozitív egész értékeket:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{v_p}{\mathrm{lmka}(v_p, v_{p'})} = 3^{p-p'};\\ \beta &= \frac{v_{p'}}{\mathrm{lmka}(v_p, v_{p'})} = 2^{q-q'}.\end{aligned}$$

Végül a harmonikus disszonancia a két hang között:

$$\Delta_H(v_p, v_{p'}) = \log_2 \frac{\mathrm{lmkf}(v_p, v_{p'})}{\mathrm{lmka}(v_p, v_{p'})} = \log_2(3^{p-p'}2^{q-q'}) = (p-p')\log_2 3 + (q-q'). \tag{32}$$

Itt érdemes megjegyezni, hogy mivel q és q' kifejezhető p és p' monoton növő függvényeként, ezért minél nagyobb a $p-p'$ különbség, annál nagyobb a harmonikus disszonancia. Más szavakkal rögzített p' és $v_{p'}$ esetén a harmonikus disszonancia p szigorúan monoton növő függvénye. Továbbá püthagoraszi hangolás esetén is egyszerűen a hanggráfról leolvashatjuk a harmonikus disszonanciát, ugyanis $\log_2\alpha + \log_2\beta = \log_2(\alpha\beta) = \log_2(3^{p-p'}2^{q-q'})$ a v_p és $v_{p'}$ csúcsokba mutató élek hosszainak logaritmikus összege, amely éppen a (32) egyenletben a $\Delta_H(v_p, v_{p'})$ harmonikus disszonanciával megegyező érték.

A (3) egyenletben definiált I függvénnyel kifejezhető volt egy v frekvenciának az 1 egységtől vett $|I(v)| = d(v, 1)$ melodikus távolsága. Ennek analógiájára bevezetjük a

$$H_3(p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} p\log_2 3 + \lfloor p\log_2 3\rfloor \tag{33}$$

függvényt. Ez püthagoraszi hangolás esetén méri egy v_p frekvenciának az 1 egységtől vett harmonikus távolságát.

Bizonyítás. A H_3 függvény ezen tulajdonsága egyszerűen igazolható azáltal, hogy $v_{p'} = 3^{p'}/2^{q'} = 1$ akkor és csak akkor teljesülhet, ha $p' = q' = 0$, hiszen így valóban

$$\begin{aligned}\Delta_H(v_p, v_{p'}) = \Delta_H(v_p, 1) &\stackrel{(32)}{=} (p-p')\log_2 3 + (q-q') = p\log_2 3 + q \stackrel{(30)}{=}\\ &\stackrel{(30)}{=} p\log_2 3 + \lfloor p\log_2 3\rfloor \stackrel{(33)}{=} H_3(p). \quad \square\end{aligned}$$

Az alaphangtól mért harmonikus távolság az alaphangtól távolodva egyre nő. A következőkben megmutatjuk, hogy püthagoraszi hangolás esetén közel lineáris tempóban távolodunk. Ezzel a v_p püthagoraszi hangot nem csupán meghatározza a p kvint indexe, de még a hangok közötti harmonikus távolságot is lineárisan közelíthetjük a kvintek p hatványkitevőinek függvényében.

Az újonnan bevezetett H_3 függvény közelíthető a vizsgált hangsor n hangjának megfeleltetett $x = 0; 1; \ldots; (n-1)$ pontok körüli $y = kx$ alakú regressziós egyenessel. Az azonosítás úgy történik, hogy az x értékek jelölik a kvint p hatványkitevőjét. Például az $x = 0$ pontban az alaphang áll mindig, mivel ekkor $p = 0$ szintén, $q = \lfloor 0 \log_2 3 \rfloor = 0$, így $v_0 = 3^0/2^0 = 1$. Ugyanebben az $x = 0$ pontban a függvényérték, azaz az alaphang önmagával vett harmonikus disszonanciája $H_3(0) = 0 \log_2 3 + \lfloor 0 \log_2 3 \rfloor = 0$, tehát helyénvaló egy $y = kx$ alakú, origón átmenő regressziós egyenessel való közelítés. Általánosan azt mondhatjuk, hogy $H_3(p) = 2p \log_2 3 - \varepsilon$, ahol ε a $\{p \log_2 3\}$ törtrész. Feltételezhetjük, hogy ε egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0; 1)$ intervallumon $\bar{\varepsilon} = 1/2$ várható értékkel. Ezután a legkisebb négyzetek módszerével adhatunk becslést a k meredekségre. Legyen $\alpha = 2 \log_2 3$. Ekkor az $y = kx$ lineáris egyenessel közelítendő értékpárjaink halmaza $\{(p_i; \alpha p_i - \varepsilon)\}_{i=1;\ldots;n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p_i = i - 1$, $1 < n$-ekre. Innen már számolható, hogy várhatóan mennyi lesz a négyzetes eltérés minimuma, azaz

$$\mathbb{E}\left[\min_k \left\{\sum_{i=1}^n (kp_i - (\alpha p_i - \varepsilon_i))^2\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\min_k \left\{\sum_{i=1}^n (kp_i - \alpha p_i + \varepsilon_i)^2\right\}\right].$$

A minimalizálandó kifejezés k másodfokú polinomja, így minimumát kereshetjük differenciálással. Szélsőérték ott lehetséges, ahol a k szerinti első derivált nullával egyenlő:

$$\left(\sum_{i=1}^n (kp_i - \alpha p_i + \varepsilon_i)^2\right)' = 0$$

$$\sum_{i=1}^n 2(kp_i - \alpha p_i + \varepsilon_i)p_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n kp_i^2 - \alpha p_i^2 + \varepsilon_i p_i = 0$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha p_i^2 + \varepsilon_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i^2}$$

$$k = \alpha - \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i^2}.$$

Ez valóban szélsőérték, méghozzá lokális minimum, hiszen a k szerinti második derivált itt pozitív:

$$\left(\sum_{i=1}^n (kp_i - \alpha p_i + \varepsilon_i)^2\right)'' = \left(2\sum_{i=1}^n kp_i^2 - \alpha p_i^2 + \varepsilon_i p_i\right)' = 2\sum_{i=1}^n p_i^2 > 0.$$

Mivel a minimalizálandó kifejezés k pozitív főegyütthatós másodfokú polinomja, ezért nemcsak lokális, hanem egyben globális minimumhoz jutottunk. A várható meredekség kiszámításánál feltesszük, hogy minden i-re p_i és ε_i független valószínűségi változók, valamint kihasználjuk a várható érték linearitását:

$$\mathbb{E}[k] = \mathbb{E}\left[\alpha - \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}\right] = \alpha - \bar{\varepsilon}\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}.$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban 0-tól $(n-1)$-ig a számok összege, a nevezőben a négyzetösssszege szerepel. Ismeretes, hogy az első n szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$, a négyzetösszege pedig $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ezeket felhasználva a képlet tovább egyszerűsödik:

$$\mathbb{E}[k] = \alpha - \bar{\varepsilon}\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}} = \alpha - \bar{\varepsilon}\frac{3}{2n-1}.$$

Végül helyettesítsük be α-t és $\bar{\varepsilon}$-t:

$$\mathbb{E}[k] = 2\log_2(3) - \frac{3}{4n-2},$$

amely nagy n-ek esetén tart a $2\log_2(3)$ értékhez.
Ezek után a k meredekségre adott becslésünk standard hibáját is kiszámolhatjuk:

$$D^2(k) = D^2\left(\alpha - \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}\right) = 0 + \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} p_i^2)^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(\varepsilon_i p_i) =$$

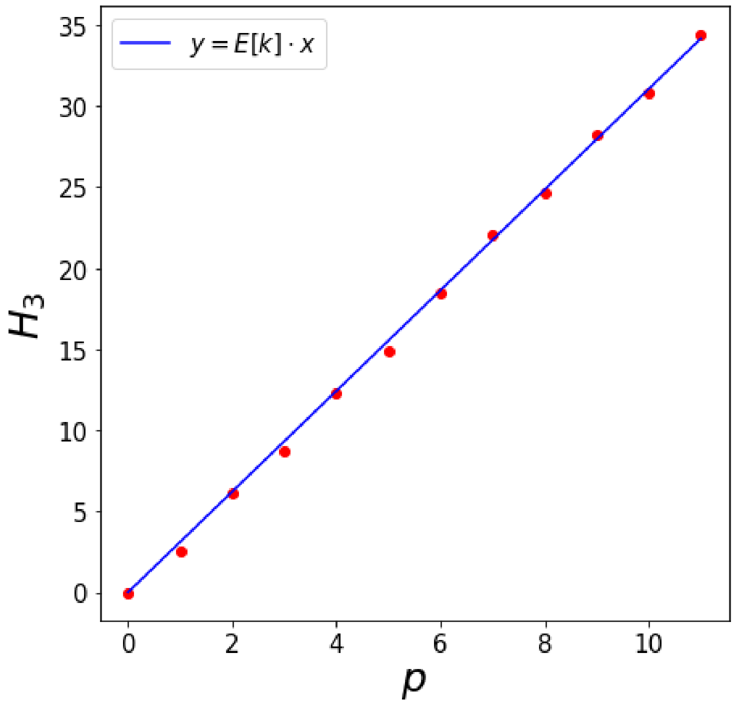
$$= \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} p_i^2)^2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 D^2(\varepsilon_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}{(\sum_{i=1}^{n} p_i^2)^2} D^2(\varepsilon_i) = \frac{D^2(\varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}.$$

Egy $[0;1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete $1/12$. Ezt felhasználva:

$$D^2(k) = \frac{1}{12\sum_{i=1}^{n} p_i^2}$$

$$D(k) = \sqrt{\frac{1}{12\sum_{i=1}^{n} p_i^2}}.$$

Mindezek alapján a komolyzenében használatos $n = 12$ fokú hangsor esetében az egyenes meredekségére adott becslésünk várhatóan $\mathbb{E}[k] \pm D(k) = 3,10 \pm 0,01$, amellyel a 7 ábrán látható illesztést kapjuk.



7. ábra. A 12 fokú püthagoraszi hangsor hangjainak az 1 alaphangtól vett $\Delta_H(v_p, 1)$ harmonikus távolságai (piros pontok) és az ezeket közelítő regressziós egyenes.

Mivel a $H_3(p)$ függvényértéket tehát várhatóan az $\mathbb{E}[k]p = (2\log_2(3) - \frac{3}{4n-2})p$ érték közelíti, ezért a két hang közötti harmonikus disszonancia közlíthető a következő különbséggel:

$$\Delta_H(v_p, v_{p'}) = H_3(p) - H_3(p') \approx \mathbb{E}[k](p - p').$$

Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a kvintek indexeinek $p-p'$ különbsége jó mérőszámként szolgál a hangpárok harmonikus disszonanciájának mérésére püthagoraszi hangolás esetén.

Érdemes megvizsgálni, hogy mi történik, ha az eddigi két hangunkhoz hozzáveszünk egy $v_{p''}$ hangot, amely kielégíti a $p > p'' > p'$ relációt. Ez csakúgy, mint két hang esetén, most sem határozza meg a hangok relatív hangmagasságát, így az új hang nem biztos, hogy a két eddigi között fog szólni. A három hang legmagasabb közös alhangjának és legmélyebb közös felhangjának meghatározása a (31) egyenletben kiszámolt érékekhez vezet, mert a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös nem változik. Tehát három hangból álló halmaz harmonikus disszonanciája csak a kvintek p indexeinek szélső értékeitől függ:

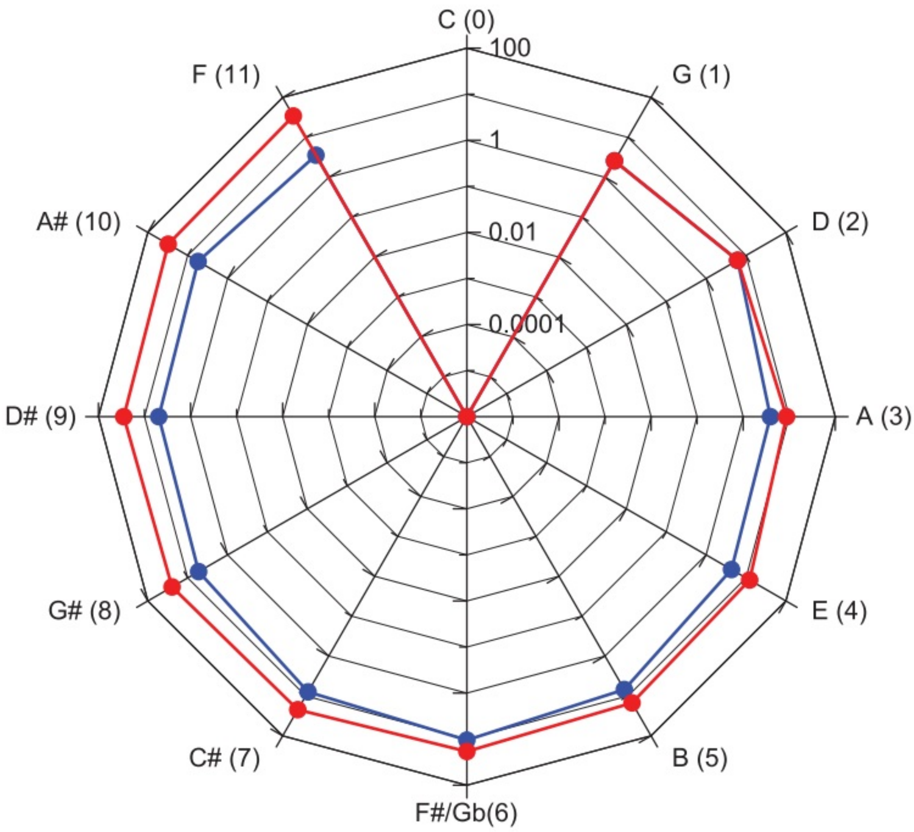
$$\Delta_H(v_p, v_{p'}, v_{p''}) = \Delta_H(v_p, v_{p'}) \iff p > p'' > p'.$$

Ekkor a hanggráfnak lesz egy új éle a harmadik dimenzióban, amelyre a

$$\gamma = \frac{v_{p''}}{\text{lmka}(v_p, v_{p'}, v_{p''})} = \frac{v_{p''}}{\text{lmka}(v_p, v_{p'})} = 3^{p''-p'}2^{q-q'}$$

arányszámot írjuk. Az ilyen élek az eddigi két hang csúcsaiból induló élekkel a legmagasabb közös alhangban és a legmélyebb közös felhangban találkoznak.

A 8 ábra a C alaphang és a 12 fokú hangsor hangjai között lévő harmonikus távolságot ábrázolja attól függően, hogy a tiszta (kék vonal) vagy a pütagoraszi (piros vonal) intonációt használjuk. A következő fejezetben kiegyenlített hangolás esetén fogunk közelítést adni a temperált hangokra tisztán intonált hangok segítségével.

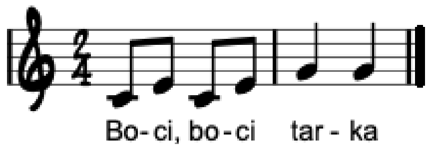


8. ábra. Logaritmikus skálán mért harmonikus távolság a C alaphang és két 12 fokú hangsor hangjai között: tisztán intonált (kék vonal) és püthagoraszi hangolású (piros vonal). Zárójelben p értéke (a kvint indexe) szerepel. Forrás: Cubarsi - Harmonic distance in intervals and chords.

Kiegyenlített hangolás

A következő fejezetben a ma használt kiegyenlített hangolást elemezzük. Ebben a hangolásban a szomszédos hangok hangközei ugyanakkorák, vagyis a hozzájuk tartozó frekvenciák aránya állandó, ezért a szomszédos hangok frekvenciái mértani sort alkotnak. Eszerint azonban rögtön problémába ütközünk a harmonikus disszonancia számításánál, hiszen azt racionális számok véges halmazán értelmeztük, emiatt csak közelített értékekkel számolhatunk. A fejezet első részében a felhangokat fogjuk a kiegyenlített hangolás hangjaival közelíteni, a második részében pedig fordítva, a kiegyenlített hangolást felhangok hányadosával. Ez utóbbi jelentőségét ismét egy példán keresztül érzékeltetjük.

Tegyük fel, hogy C az alaphangunk, amely az 1 egységnyi alapfrekvencián szól, és énekeljünk!



Remélem, mindenki fülében ott van most a jól ismert dallam. A Boci boci tarka kezdetű népdal egy dúr hármashangzatra épül, amely két szélső hangja tiszta kvintre helyezkedik el egymástól. Ha most gitáron játszanánk el ugyanezt, akkor a tar-ka részre várnánk a C alaphang G tiszta kvintjét, azaz a $3/2 = 1,5$ frekvenciaarányt, azonban a 2 tábázatból kiolvashatjuk, hogy ehelyett a $2^{7/12} = 1,498$ frekvenciát kapjuk. Mégsem hallanánk hamisnak a gitárjátékot, mert a jól ismert dallam temperált hangjait fülünk a tisztán intonált hangokkal, azaz felhangok hányadosával korrigálja. Ezek a tisztán intonált racionális frekvenciák nem jelennek meg a kiegyenlített hangolású hangsorban, ezért keletkezik hiba.

Egy n fokú kiegyenlített hangolású hangsor esetén nem beszélhetünk harmonikus disszonanciáról, mivel a hangok frekvenciái $2^{i/n}$, $0 \le i < n$ alakú irracionális számok, csakúgy mint az egymáshoz viszonyított arányuk. Ha az elemi távolságokat (12 fokú hangsor esetén a félhangokat) racionális számokkal közelítjük $2^{1/n} \approx p/q$ alakban, akkor a harmonikus távolság két hang között

$$\begin{aligned}\Delta_H(2^{i/n}, 2^{j/n}) \approx \Delta_H\left(\frac{p^i}{q^i}, \frac{p^j}{q^j}\right) &\overset{(29)}{=} \Delta_H(p^i, p^j) + \Delta_H(q^i, q^j) = \\ &= \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}(p^i, p^j)}{\mathrm{lnko}(p^i, p^j)}\right) + \log_2\left(\frac{\mathrm{lkkt}(q^i, q^j)}{\mathrm{lnko}(q^i, q^j)}\right) = \\ &= \log_2 p^{|i-j|} + \log_2 q^{|i-j|} = |i-j| \log_2 pq\end{aligned}$$

lenne, amely egy egydimenziós melodikus távolság.

Tenney azonban azt állítja az 1938-as John Cage and the Theory of Harmony című művében, hogy egy közel tisztán intonált hangsor esetében, amilyen a kiegyenlített hangolású hangsor is, a fül hajlamos a legkisebb tisztán intonált harmonikus távolság felé félrehallani. Ezt igazolhatják a kategorikus észlelés jelenségének alapjai, miszerint egy fizikai értelemben folytonos fogalom (jelen esetben a hangközök) által létrejött ingerek különböző kategóriákba sorolhatóak [16], [1]; habár hangközök keltette ingerek természetes kategóriáinak észlelése kizárólag zeneileg képzett fül számára lehetséges. Ha egy kiegyenlített hangolású hangsorban megpróbáljuk megbecsülni hangok egy halmazának a harmonikus disszonanciáját, ahol tehát a hangközök frekvenciaaránya kissé eltér a tisztán intonáltétól, akkor kézenfekvőnek tűnik a tisztán hangolt hangsorban tekinteni a melodikus távolságot a hangok legmélyebb közös felhangja és legmagasabb közös alhangja között mint egy közelítést a kiegyenlítetten hangolt hangsor harmonikus disszonanciájára. Dolgozatomban később részletesen kifejtem, hogy kezdetben egy ilyen helyettesítés megengedhetősége a hallgató kulturális hátterétől és a megadott hangoktól egyaránt függ, valamint ha a megfelelő frekvenciák elég közel vannak egymáshoz, akkor természetes. Moore, Peters és Glasberg [13] szerint a mély felhangok ($n < 5$) félrehangolhatóak nagyjából $1 - 3\%$-kal a pontos hangmagasságukhoz képest, és még így is ugyanahhoz a felhangsorhoz tartozónak fogjuk érezni őket. Ez a hibahatár azonban csökken magasabb felhangok esetén, valamint függ a részhangok intenzitásától, illetve attól, hogy a hang csengésének ideje lehetővé teszi-e lebegések észlelését. Például a 2 ábrán látható, hogy a 12 hangból álló egyenletesen hangolt hangsorbeli négy hang érzékelhető disszonanciájának görbéje (zöld szaggatott görbe) közel van a tiszta hangolásbeliéhez (piros folytonos görbe). A relatív minimumok a négy hang és a megfelelő frekvenciaarányok hangjainál helyezkednek el. Ugyanez érvényes püthagoraszi hangolásra is (ez nincs feltüntetve).

Tegyük fel, hogy egy n hangból álló kiegyenlített hangolású hangsorban az egymáshoz képest relatív prím p és q felhangokat a $2^{P/n}$ és a $2^{Q/n}$ hangokkal közelítjük.

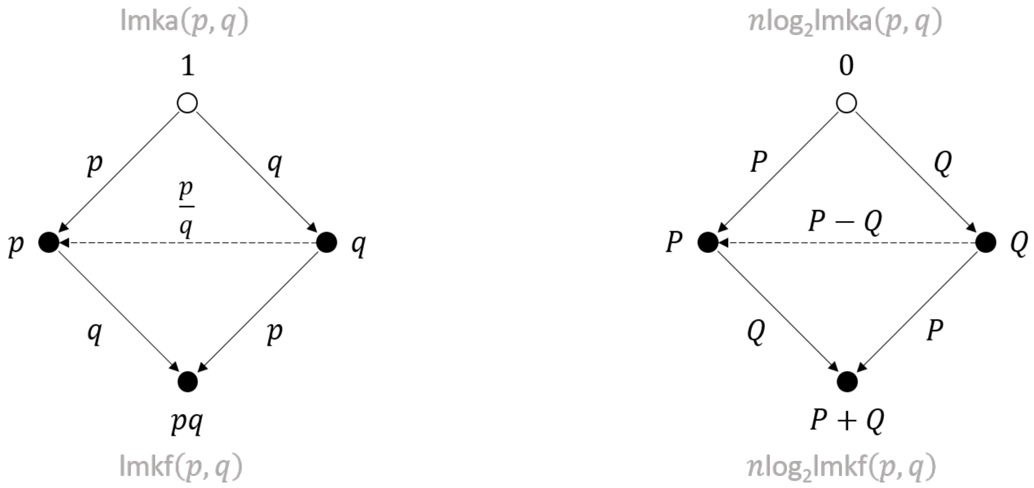
Állítás. A P és Q értékeket becsülhetjük a legközelebbi egésszel a $k : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ kerekítőfüggvényt használva:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} k(n \log_2 p); \quad Q \stackrel{\text{def}}{=} k(n \log_2 q). \tag{34}$$

Bizonyítás.

Legyen $a/b \approx \log_2 p$ és $a'/b' \approx \log_2 q$ jól közelítő irreducibilis tört. Mivel a kiegyenlített hangolású hangsor n darab hangja $2^{i/n}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ alakú, így logaritmusuk i/n alakú kell legyen, tehát az a hangsor, amelynek hangjaival becsülni tudjuk a p és q felhangokat, legalább $n = \mathrm{lkkt}(b, b')$ darab hangból kell álljon. Ha β és β' olyan pozitív egész számok, amelyekre $\beta b = \beta' b' = n$, akkor a P és Q értékeket úgy nyerhetjük, hogy $P = k(n \log_2 p) = n(a/b) = \beta a$ és $Q = k(n \log_2 q) = n(a'/b') = \beta' a$. Így ha valóban a p és q felhangok kettes alapú logaritmusait jól közelítő a/b és a'/b' irreducibilis törtekből indultunk ki, akkor a $2^{P/n}$ és $2^{Q/n}$ hangok közelítik a p és q felhangokat. $\square$

Alkosssuk meg a 9 ábrán látható két gráfot. A bal oldali az 1 alaphangból mint gyökérből induló hanggráf a p és q élekkel valamint a $p^i q^j$; $i, j \in \mathbb{Z}$ csúcsokkal. A jobb oldali gráf elnevezése Tonnetz. Ez a kiegyenlített hangolású hangsorhoz tartozó tonális hálózat (ahol a hangok esetlegesen több oktávhoz tartozhatnak). Itt a frekvenciák helyett elég a 2 hatványok kitevőiben szereplő számokat használnunk csúcsok gyanánt, vagyis a P és Q értékeket, amelyeket a p és q frekvenciákból rendre a $k(n \log_2 p)$ és $k(n \log_2 q)$ képletekkel nyerhetünk. A két gráf izomorf, azaz létezik a két gráf között bijektív struktúratartó leképezés. Továbbá ha a (34) egyenlet által biztosított becsléseink elég pontosak, akkor a bal oldali gráf tulajdonságai igazak a jobb oldalira is, ám a Tonnetz esetében a harmonikus távolságokat a csúcsokra és élekre írt számok n-nel való osztása után kaphatjuk meg.



9. ábra. Két izomorf hanggráf: a bal oldali a p és q felhangokhoz tartozik, a jobb oldali egy n fokú hangsor előbbi felhangoknak megfelelő $2^{P/n}$ és $2^{Q/n}$ hangjaihoz tartozik. A jobb oldali nevezetes gráf a Tonnetz.

Tegyük fel, hogy a p felhangot az n hangból álló egyenletes hangolású hangsor egy hangjával közelítjük. Ekkor a (34) egyenletben adott közelítésünknek van egy ϵ hibája:

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} 2^{P/n} - p.$$

A bal oldali gráfon a két felhangból induló egy-egy él a $(p+\epsilon)q$ csúcsban metszik egymást ahelyett, hogy a pq legmélyebb közös felhangban találkoznának. A Tonnetz-en ez a hang a $\log_2(p+\epsilon) + \log_2 q$ hangnak felel meg (tekintet nélkül minden csúcs n-nel való osztására). Innen levezethetjük a Tonnetz legmélyebb közös felhangjának a tiszta intonációval kapotthoz viszonyított relatív hibáját, amely egyben a gráf relatív hibáját mutatja:

$$\begin{aligned} e &\stackrel{\text{def}}{=} (\log_2(p+\epsilon) + \log_2 q) - (\log_2 p + \log_2 q) = \\ &= \log_2\left(\frac{pq+\epsilon q}{pq}\right) = \log_2\left(1 + \frac{\epsilon}{p}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Ha észleljük ezt a mennyiséget hangok megszólalásakor, akkor nem használhatjuk föl a harmonikus disszonancia tulajdonságait, ám ha nem észleljük, akkor a bal oldali gráf szerint számolhatunk. e értékét 1200-zal szorozva megkapjuk a hibát centben kifejezve.

Ha például a $p = 3$ felhangot a 12 fokú egyenletes hangolású hangsor $2^{19/12} = 2{,}997$ hangjával közelítjük, akkor a hiba centben $1200e = 1200\log_2(1+\epsilon/3) = 1200\log_2(1+(2^{19/12}-3)/3) = -2{,}0$, azaz egy alig érzékelhető mennyiség. A $p = 5$ felhangot a 12 fokú egyenletes hangolású hangsor $2^{28/12} = 5{,}040$ hangjával közelítve a hiba $1200e = 1200\log_2(1+\epsilon/5) = 1200\log_2(1+(2^{28/12}-5)/5) = +13{,}7$ cent, amely nagyjából a névleges hangmagasság $13{,}7/1200 \approx 1\%$-a. Moore, Peters és Glasberg [13] szerint a hang viszonylagos hangerejétől függően ezt még mindig hallhatjuk az ötödik felhangnak. Ebben az esetben a 9 ábra bal oldali gráfján mért

$\Delta_H(p, 1) = \log_2 p$ harmonikus távolság és a Tonnetz-en mért P/n harmonikus távolság nagyon közel van egymáshoz.

A fordított irányú közelítés vizsgálata is nagy jelentőségű, tehát most egy n fokú kiegyenlített hangolású hangsor tetszőleges hangját közelítjük relatív prím felhangok hányadosával. Ezt azonban többféleképpen is megtehetjük. Például a $2^{10/12} = 1,782$ frekvencia számos módon közelíthető. Egy keleti zenén nevelkedett zenész javíthatja a $7/4 = 1,750$ frekvenciaarányra; egy hegedűjátékos, aki a püthagoraszi hangoláshoz szokott, gondolhatja a $16/9 = 1,778$ hányadosnak; és egy gyakran régi zenét hallgató fül érezheti a $9/5 = 1,800$ hangnak. A felsorolt frekvenciaarányokban szereplő felhangokra a 12 fokú kiegyenlített hangolású hangsor hangjaival adható közelítések a következők:

$$7 \approx 2^{(1/12)\cdot k(12\log_2 7)} = 2^{34/12}; \quad 4 = 2^{24/12}; \quad 16 = 2^{48/12}$$

$$9 \approx 2^{(1/12)\cdot k(12\log_2 9)} = 2^{38/12}; \quad 5 \approx 2^{(1/12)\cdot k(12\log_2 5)} = 2^{28/12}.$$

Ezekkel jó közelítést nyerhetünk a megfelelő frekvenciaarányok 1 alaphangtól vett harmonikus távolságára, ha a kiegyenlített hangolású hangsor esetében a fentebb leírt módon, a Tonnetz segítségével értelmezzük és számoljuk a harmonikus távolságokat:

$$\begin{cases} \Delta_H\left(\dfrac{7}{4}, 1\right) \overset{(28)}{=} \Delta_H(7, 2^2) \overset{(11);(10)}{=} \log_2 7 + 2\log_2 2 = 4,81 \\ \Delta_H(2^{34/12}, 2^{24/12}) \overset{\text{Tonnetz}}{=} \dfrac{1}{12}(34 + 24) = 4,83; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Delta_H\left(\dfrac{16}{9}, 1\right) \overset{(28)}{=} \Delta_H(2^4, 3^2) \overset{(11);(10)}{=} 4\log_2 2 + 2\log_2 3 = 7,170 \\ \Delta_H(2^{48/12}, 2^{38/12}) \overset{\text{Tonnetz}}{=} \dfrac{1}{12}(48 + 38) = 7,167; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Delta_H\left(\dfrac{9}{5}, 1\right) \overset{(28)}{=} \Delta_H(3^2, 5) \overset{(11);(10)}{=} 2\log_2 3 + \log_2 5 = 5,49 \\ \Delta_H(2^{38/12}, 2^{28/12}) \overset{\text{Tonnetz}}{=} \dfrac{1}{12}(38 + 28) = 5,50. \end{cases}$$

Egy matematikai modell sem képes megjósolni, melyik hangmagasságbeli korrekcióra kerül sor, ha egyáltalán történik korrekció. Ám ha mégis helyettesítjük a hangokat, akkor meg szeretnénk határozni azokat a feltételeket, amelyek mellett a két gráfon a megfelelő harmonikus távolságok eltérése kicsi. Ehhez bevezetjük a következő fogalmat.

Definíció. Azt mondjuk, hogy két hanggráf hasonló, ha a két gráfon a megfelelő harmonikus távolságok eltérése egy küszöbérték alatt van.

Legyen v egy n fokú kiegyenlített hangolású hangsor egyik frekvenciaosztálya, amelyet a p^i/q^j hányadosként hallunk, ahol p és q egymáshoz képest relatív prím felhangok. Ekkor a fentebb leírt becslési módszerrel mondhatjuk, hogy

$$v = 2^{(1/n)(A-B)} \approx \frac{p^i}{q^j}, \text{ ahol } A \overset{\text{def}}{=} k(n\log_2 p^i),\ B \overset{\text{def}}{=} k(n\log_2 q^j). \tag{36}$$

Tegyük fel, hogy ugyanebben az n fokú kiegyenlített hangolású hangsorban ezeket a felhangokat a $p \approx 2^{P/n}$ és $q \approx 2^{Q/n}$ értékekkel közelítjük, ahol $P = k(n \log_2 p)$ és $Q = k(n \log_2 q)$. Annak érdekében, hogy a két gráf hasonló maradjon akkor is, ha a tisztán hangolt hangsor hanggráfjában i csúcsot lépünk p irányba és j csúcsot q irányba, A és B P-ből és Q-ból arányosan származó mennyiség kell legyen, azaz $A = iP$ és $B = jQ$. Tehát bármely p felhang esetén (és hasonlóan bármely q esetén is) teljesülnie kell a következő egyenletnek:

$$k(n \log_2 p^i) = i \cdot k(n \log_2 p). \tag{37}$$

Ez $i = 1$-re magától értetődően teljesül. Mindezt felhasználva a harmonikus távolságot becsülhetjük az alábbi módon:

$$\begin{cases} \Delta_H\left(\dfrac{p^i}{q^j}, 1\right) \overset{(28)}{=} \Delta_H(p^i, q^j) \overset{(11);(10)}{=} i \log_2 p + j \log_2 q \\ \Delta_H(2^{iP/n}, 2^{jQ/n}) \overset{\text{Tonnetz}}{=} \dfrac{1}{n}(iP + jQ) = \dfrac{1}{n}(A + B). \end{cases} \tag{38}$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk, mely i értékekre teljesül a (37) egyenlőség, bevezetjük az r maradékfüggvényt:

$$r(p) \overset{\text{def}}{=} n \log_2 p - k(n \log_2 p), \quad |r(p)| < \frac{1}{2}. \tag{39}$$

Az $1/2$ azért felső korlát a maradék abszolút értékére, mert az egészre kerekített értéktől vett eltéréssel definiáljuk. Innen a Tonnetz p^i hanghoz tartozó csúcsát a (39) egyenlet alakításával kapjuk:

$$\begin{aligned} r(p) &= n \log_2 p - k(n \log_2 p) \\ n \log_2 p &= k(n \log_2 p) + r(p) \\ n \cdot i \log_2 p &= i(k(n \log_2 p) + r(p)) \\ n \log_2 p^i &= i \cdot k(n \log_2 p) + i \cdot r(p) \\ k(n \log_2 p^i) &= k(i \cdot k(n \log_2 p) + i \cdot r(p)) \end{aligned} \tag{40}$$

Vegyük észre, hogy $i \cdot k(n \log_2 p)$ egész, azaz $k(i \cdot k(n \log_2 p)) = i \cdot k(n \log_2 p)$, ezért a Tonnetz p^i hanghoz tartozó csúcsának meghatározásánál csakis az $i \cdot r(p)$ tag törtrésze dönt a kerekítésnél, vagyis:

$$k(n \log_2 p^i) = i \cdot k(n \log_2 p) + k(i \cdot r(p)).$$

Innen már látszik, hogy a (37) egyenletbeli $k(n \log_2 p^i) = i \cdot k(n \log_2 p)$ feltételezésünk akkor és csak akkor igaz, ha $k(i \cdot r(p)) = 0$. Kerekítésről lévén szó, ez pontosan akkor teljesül, ha $|i \cdot r(p)| < 1/2$. Az ekvivalencia tranzitivitásának köszönhetően tehát azt mondhatjuk, hogy

$$k(n \log_2 p^i) = i \cdot k(n \log_2 p) \iff |i \cdot r(p)| < \frac{1}{2}.$$

Az $|i \cdot r(p)| < 1/2$ feltétel biztosítja i maximális értékét, valamint meghatározza a (35) egyenletben definiált relatív hibáját annak a kiegyenlített hangolásbéli hangnak, amelyet fülünk a p^i felhangra korrigál, azaz amelyet a p^i felhanggal közelítünk:

$$
\begin{aligned}
|e_p| &= \left|\frac{iP}{n} - \log_2 p^i\right| \overset{(40)}{=} \left|\frac{iP}{n} - \frac{i \cdot k(n \log_2 p) + i \cdot r(p)}{n}\right| \\
&= \left|\frac{iP}{n} - \frac{iP + i \cdot r(p)}{n}\right| = \left|\log_2 2^{iP/n} - \log_2 2^{(1/n)(iP + i \cdot r(p))}\right| \\
&= \left|\log_2 \frac{2^{iP/n}}{2^{(1/n)(iP+i \cdot r(p))}}\right| = \left|\log_2 2^{-(1/n)(i \cdot r(p))}\right| = \left|-\frac{1}{n} \cdot i \cdot r(p)\right| \\
&= \left|-\frac{1}{n}\right| |i \cdot r(p)| = \frac{1}{n}|i \cdot r(p)| < \frac{1}{2n}.
\end{aligned}
$$

Ekkor egy 12 fokú kiegyenlített hangolású hangsorban a névleges hangmagasságtól vett eltérés abszolút hibakorlátja $(1/(2 \cdot 12)) \cdot 1200 = 50$ cent, azaz egy $50/2 = 25$ cent sugarú környezet. Innen a névleges hangmagasságtól vett eltérés relatív hibája $25/1200 = 2,1\%$ lehet hasonlóan a maximális érzékelhető relatív hibához, amelyet Moore, Peters és Glasberg [13] határoztak meg. Végül ha egy v kiegyenlített hangolásbeli hangot a $v \approx p^i/q^j$ hányadosra korrigál fülünk, akkor a $\log_2(p^i/q^j) = \log_2 p^i - \log_2 q^j$ logaritmusazonosság és a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával a relatív hiba az előzőekhez hasonlóan számolható:

$$|e_v| = \frac{1}{n}|i \cdot r(p) - j \cdot r(q)| < \frac{1}{n}.$$

Ez ugyanaz a hiba, amelyet a (38) egyenletben számoltunk. A közelítés addig érvényes, amíg az érzékelhető relatív hibák kisebbek, mint a matematikai relatív hibák.

Adhatunk korlátot a $2^{x/n}$ kiegyenlített hangolásbeli hang kétféle korrekciójából adódó harmonikus távolságok eltérésére. A két korrekció legyen $x = A - B = A' - B'$. Ezt úgy is tekinthetjük, hogy a kiegyenlített hangolásbeli hangmagasságot valaki az $a/b \approx 2^{x/n}$ tisztán intonált hangnak hallja, más pedig az $a'/b' \approx 2^{x/n}$ hangnak, így ezek a közelítéseink. A (38) egyenletben már kiszámoltuk a harmonikus disszonanciák ily módon kapott becslését: $\Delta_H(2^{x/n}, 1) = (1/n)(A + B) = (1/n)(x + 2B)$ és $\Delta'_H(2^{x/n}, 1) = (1/n)(A' + B') = (1/n)(x + 2B')$. Végig a $2^{x/n}$ kiegyenlített hangolásbeli hang és az 1 alaphang harmonikus távolságát becsüljük, ezért a Δ_H függvény argumentumát elhagyjuk. Tehát $\Delta_H - \Delta'_H = (2/n)(B - B')$. A (36) egyenletnek köszönhetően tudjuk, hogy $B = k(n \log_2 b)$. Ez továbbalakítható a (39) egyenletben definiált maradékfüggvénnyel; ha a maradék $r(b) = \rho$ és $|\rho| < 1/2$, akkor $B = k(n \log_2 b) = n \log_2 b - \rho$. Ugyanígy $B' = n \log_2 b' - \rho'$, ahol $|\rho'| < 1/2$. Helyettesítsük vissza az így kapott értékeket B-re és B'-re, majd alkalmazzuk a logaritmus azonosságait és a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
|\Delta_H - \Delta'_H| &= \left|\frac{2}{n}(B - B')\right| = \left|\frac{2}{n}([n\log_2 b - \rho] - [n\log_2 b' - \rho'])\right| \\
&= \left|2\left((\log_2 b - \log_2 b') - \frac{\rho - \rho'}{n}\right)\right| = 2\left|\log_2\left(\frac{b}{b'}\right) - \frac{\rho-\rho'}{n}\right| \\
&\le 2\left(\left|\log_2\frac{b}{b'}\right| + \left|\frac{\rho-\rho'}{n}\right|\right) \le 2\left(\left|\log_2\frac{b}{b'}\right| + \frac{|\rho| + |\rho'|}{n}\right) \\
&< 2\left|\log_2\frac{b}{b'}\right| + \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Ez az eltérés a közelítésekhez használt irreducibilis frekvenciaarányok nevezőitől függ: minél közelebb vannak egymáshoz, azaz minél jobban megközelíti b/b' arány az 1-et, annál kisebb a harmonikus disszonanciák eltérése. Például ha egy 12 fokú kiegyenlített hangolásbeli hangot valaki a 16/9 hangnak hall, más füle pedig ugyanezt a hangot a 7/4 hangra korrigálja, akkor a harmonikus disszonanciák pontos eltérése $|\Delta_H(2^4/3^2) - \Delta_H(7/2^2)| \overset{(11);(10)}{=} |(4\log_2 2 + 2\log_2 3) - (\log_2 7 + + 2\log_2 2)| = 2,36$. Ehhez az előbbi levezetésünk alapján valóban megfelelő felső korlátot adhatunk: $2|\log_2(9/4)| + (2/12) = 2,51$.

A fentebbi eljárás közvetlenül általánosítható több, mint két hang esetére. Tekintsük egy n fokú kiegyenlített hangolású hangsor frekvenciaosztályainak egy $V \overset{\text{def}}{=} \{v_i\}_{i\in I}$ halmazát, valamint definiáljuk az alábbi halmazokat és értékeket:

$$\Lambda \overset{\text{def}}{=} \left\{\lambda_i = \frac{p_i^{\alpha_i}}{q_i^{\beta_i}} \approx v_i\right\}, \quad \Pi \overset{\text{def}}{=} \{p_i^{\alpha_i}\}, \quad \Theta \overset{\text{def}}{=} \{q_i^{\beta_i}\};$$

$$P_i \overset{\text{def}}{=} k(n\log_2 p_i), \quad Q_i \overset{\text{def}}{=} k(n\log_2 q_i),$$

amelyekre teljesül, hogy $v_i = 2^{(1/n)(\alpha_i P_i - \beta_i Q_i)}$, továbbá hogy $|\alpha_i r(p_i)|$ illetve $|\beta_i r(q_i)|$ nem érzékelhető, nem hallható relatív hibák. Ekkor a v_i frekvenciaosztályok harmonikus disszonanciája közelíthető a Λ halmaz harmonikus disszonanciájával a következő módon:

$$\begin{cases}
\Delta_H(\Lambda) \overset{(27);(25)}{=} \log_2\dfrac{\text{lkkt}(\Pi)}{\text{lnko}(\Pi)} + \log_2\dfrac{\text{lkkt}(\Theta)}{\text{lnko}(\Theta)} = \displaystyle\sum_{i\in I}\log_2 p_i^{x_i} + \log_2 q_i^{y_i} \\
\Delta_H(V) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i\in I} x_i P_i + y_i Q_i,
\end{cases}$$

ahol $\forall i : x_i \le \alpha_i$ és $y_i \le \beta_i$ nemnegatív egészek.

A harmonikus disszonancia (27) definíciója és a (25) azonosság segítségével hasonlóan meggondolható az az eset, amikor minden egyes v hangmagasságot egy $\lambda = (p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k})/(q_1^{\beta_1}\dots q_l^{\beta_l})$ hányadossal közelítünk.

Az összehasonlított hangokat a 2 táblázatban láthatjuk összefoglalva, hangolási módszer szerinti bontásban.

Kiegyenlített				Püthagoraszi				Tiszta			
C	Cisz	D	Disz	C	Cisz	D	Disz	C	Cisz	D	Disz
1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^8}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$
E	F	Fisz	G	E	F	Fisz	G	E	F	Fisz	G
$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$
Gisz	A	Aisz	H	Gisz	A	Aisz	H	Gisz	A	Aisz	H
$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$

2. táblázat. 12 fokú kromatikus skálák ábécés hangokkal és frekvenciaarányokkal hangolási módszer szerinti bontásban: kiegyenlített hangolás, püthagoraszi hangolás és tiszta hangolás.

Függelék

A Püthagoraszi hangolás című fejezethez tartozó Python kódok

A 7 ábrához tartozó számolások Python kódjai

```python

import math
import numpy as np

n = 12
p = list(range(n))
e = list( ( np.array(p) * math.log2(3) ) % 1)

print('A k meredekseg becslese n =', n,'eseten:', 2*math.log2(3)-3/(4*12-2))
print('A k meredekseg pontos erteke n =', n, 'eseten:', 2*math.log2(3) - np.sum(list( np.multiply(p,e))) / np.sum(list(np.multiply(p,p))))
print('A k meredekseg szorasa, vagyis k becslesere kapott standard hiba:', math.sqrt(1/12 * 1/np.sum(np.multiply(p,p))))
```

Kimenet:

A k meredekség becslése $n = 12$ esetén: 3.1047076101379645
A k meredekség pontos értéke $n = 12$ esetén: 3.1027490619859783
A k meredekség szórása, vagyis k becslésére kapott standard hiba: 0.012833175058483633

A 7 ábrát kirajzoló Python kódok

```

q = np.floor( np.array(p) * math.log2(3) )
H_3 = np.array(p) * math.log2(3) + q
E_k = 2*math.log2(3)-3/(4*12-2)
y = E_k * np.array(p)

from matplotlib import pyplot as plt

plt.figure(figsize = (7, 7))
plt.scatter(p, H_3, c = 'r', marker = 'o')
plt.plot(p, y, '-b', label='$y = E[k] \cdot x$')
plt.rc('axes', labelsize = 25)
plt.rc('xtick', labelsize = 15)
plt.rc('ytick', labelsize = 15)
plt.rc('legend', fontsize = 15)
plt.ylabel('$H_3$')
plt.xlabel('$p$')
plt.legend()
plt.show()
```

Irodalomjegyzék

[1] Burns, E. M., W. D. Ward: *Categorical Perception - Phenomenon or Epiphenomenon: Evidence from Experiments in the Perception of Melodic Musical Intervals*, The Journal of the Acoustical Society of America, 63. kötet, 456 - 468. oldal, 1978.

[2] Cohen, Hendrik Floris: *Music As a Test-case*, Studies in History and Philosophy of Science Part A, 16 (4) kötet, 351 - 378. oldal, 1985.

[3] Cubarsi, Rafael: *Harmonic distance in intervals and chords*, Journal of Mathematics and Music, 13 (1) kötet, 85 - 106. oldal, 2019.

[4] Ebeling, Martin: *Neuronal Periodicity Detection As a Basis for the Perception of Consonance: A Mathematical Model of Tonal Fusion*, The Journal of the Acoustical Society of America, 124. kötet, 2320 - 2329. oldal, 2008.

[5] Fastl, H., E. Zwicker: *Psychoacoustics: Facts and Models*, 3. kiadás, Springer, Berlin, 2007.

[6] Hankiss Elemér: *Az emberi kaland*, 195. oldal, Helikon Kiadó, Budapest, 1998.

[7] Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von: *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*, Longman's, Green, and Company, London, 1863, angol fordítás: Andrew James Ellis, 1875.

[8] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Budapest, 2007.

[9] Langner, Gerald: *The Neural Code of Pitch and Harmony*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[10] Mattheson, Johann: *Der vollkommene Capellmeister*, Christian Herold, Hamburg, 1739.

[11] Mazzola, G., S. Göller, S. Müller: *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, SpringerLink, Bücher, 2012.

[12] Mickens, Ronald Elbert: *An Introduction to Nonlinear Oscillations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[13] Moore, B. C. J., R. W. Peters, B. C. Glasberg. *Thresholds for the Detection of Inharmonicity in Complex Tones*, Journal of the Acoustical Society of America 77. kötet, 1861 - 1867. oldal, 1985.

[14] Plomp, R., W. J. M. Levelt: *Tonal Consonance and Critical Bandwidth*, Journal of the Acoustical Society of America, 38. kötet, 548 - 560. oldal, 1965.

[15] Sethares, William Arthur: *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, Springer-Verlag, London, 1998.

[16] Siegel, J. A., W. Siegel: *Categorical Perception of Tonal Intervals: Musicians Can't Tell Sharp From Flat*, Perception & Psychophysics, 21. kötet, 399 - 407. oldal, 1977.

[17] Stolzenburg, Frieder: *Harmony Perception by Periodicity Detection*, Journal of Mathematics and Music, 9 (3) kötet, 215 - 238. oldal, 2015.

[18] Stumpf, Carl: *Tonpsychologie*, Knuf, Hilversum, 1890, új kiadás: 1965.

[19] Tenney, James: *A History of Consonance and Dissonance*, Excelsior Music Publishing Co., New York, 1988.

[20] Tenney, James: *From Scratch*, University of Illinois Press, Urbana, Illinois, 2015.