

# Differenciálegyenletek és alkalmazásaik

Szabó Ágnes

Matematika BSc, elemző szakirány

Szakedolgozat

Témavezető:

Valkó Éva

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar



Budapest, 2022.

## NYILATKOZAT

**Név:** Szabó Ágnes

**ELTE Természettudományi Kar, szak:** Matematika BSC

**NEPTUN azonosító:** EIQ9H1

**Szakedolgozat címe:**

Differenciálegyenletek és alkalmazásaik

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.31.

*Szabó Ágnes*

---

*a hallgató aláírása*

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Matematikai bevezetés</b>	<b>2</b>
2.1. Differenciálegyenletek . . . . .	2
2.2. Differenciálegyenletek analitikus megoldó módszerei . . . . .	5
2.2.1. Közvetlenül integrálható differenciálegyenletek . . . . .	5
2.2.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek . . . . .	6
2.2.3. Elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletek . . . . .	6
2.2.4. Néhány szétválasztható változójú vagy lineáris differenciál- egyenletre vezető differenciálegyenlet-típus . . . . .	8
2.3. Differenciálegyenletek numerikus megoldó módszerei . . . . .	9
2.3.1. Egylépéses módszerek . . . . .	10
2.3.2. Többlépcsős módszer . . . . .	11
<b>3. Populációdinamikai modellek</b>	<b>13</b>
3.1. A Malthus modell . . . . .	13
3.2. A logisztikus modell . . . . .	16
3.3. A logisztikus modell bővítése vadászattal . . . . .	20
<b>4. Közgazdasági modell - profit optimalizálás</b>	<b>26</b>
<b>5. Járványterjedési modellek</b>	<b>30</b>
5.1. Az SI-modell . . . . .	30
5.2. Az SIR-modell . . . . .	32
<b>6. Fizikai modell - teljesítmény</b>	<b>36</b>
<b>7. Szerelmi modellek</b>	<b>40</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>48</b>

# Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Valkó Évának, a szakdolgozatom elkészítése során tanúsított odaadó, lelkiismeretes munkájáért. Külön hálás vagyok a rengeteg belém fektetett idejéért, energiájáért és szakértelméért, mellyel végigkísérte dolgozatom elkészülését.

Továbbá köszönettel tartozom a családomnak és barátaimnak, hogy a tanulmányaim során mindig mellettem álltak, feltétel nélkül támogattak és folyamatosan ösztönözték munkámat.

Végül pedig szeretném megköszönni az ELTE valamennyi oktatójának, akik szakértelmükkel és tudásukkal hozzájárultak az egyetemi tanulmányaimhoz.

# 1. fejezet

## Bevezetés

Az egyetemi tanulmányaim során sokszor utaltak az oktatóim a differenciálegyenletek érdekes, sokszínű alkalmazására a különböző tudományterületek, valamint a való élet valóság-hű modellezésében. A szakdolgozatomban ezen alkalmazások széles skáláját szeretném bemutatni, valamint konkrét példákon keresztül szemléltetni is azokat. A dolgozatomban bemutatott modellek alapjául T.P. Dreyer *Modelling with Ordinary Differential Equations* [1] könyve, valamint Valkó Éva 2021-es Folytonos modellezés előadása [9] szolgált, amiket konkrét példákkal, függvény ábrákkal, MATLAB kódokkal, valamint fázisképekkel színesítettem.

A második fejezetben a későbbiekben bemutatott modellek megértéséhez szükséges matematikai háttértudást alapozom meg. Külön bemutatom a differenciálegyenletek tulajdonságait, típusait, valamint analitikus és numerikus megoldó módszereit is.

A harmadik fejezetben különböző populációdinamikai modelleket fogok bemutatni, amik segítségével egy adott populáció jövőbeli méretét szeretném előrejelezni. Első körben a Malthus által kidolgozott modellt fogom bemutatni, ezt követően a logisztikus modell segítségével fogom szemléltetni az Amerikai Egyesült Államok népességének változását, végül pedig a logisztikus modellt egészítem ki a vadászattal, aminek a segítségével bemutatom a kanadai daru populáció változását különböző vadászati intenzitások mellett.

A populáció változásának témakörétől a közgazdaság felé fordulok a negyedik fejezetben, ahol egy cég által megtermelt profit újrabefektetési, valamint osztalék fizetési folyamatát optimalizálom.

Az ötödik fejezetben a járványmatematika érdekes témakörét fogom érinteni két egyszerű modell segítségével, az SI és az SIR modellekkel, amik segítségével egy járvány matematikai viselkedését próbálom minél pontosabban leírni.

A hatodik fejezetben a differenciálegyenletek egy fizikai alkalmazását fogom a teljesítmény segítségével bemutatni, amin keresztül egy hajó által megtett utat, valamint az ehhez szükséges időt tudjuk előrejelezni.

Az utolsó fejezetben, azaz a hetedikben pedig a szerelmi modellek témakörébe nyújtok betekintést, ami véleményem szerint egy nagyon érdekes, nem mindennapi alkalmazása a differenciálegyenleteknek. Ezen fejezetben látni fogunk pár konkrét példát is két ember szerelmének jövőbeli alakulására.

## 2. fejezet

# Matematikai bevezetés

A matematikai áttekintésemet Pfeil Tamás 2021-es Differenciálegyenletek előadása [2], Csomós Petra 2021-es Alkalmazott analízis 2 előadása [3], valamint további differenciálegyenlet tankönyvek, illetve jegyzetek alapján készítettem [1] [4] [5] [6] [7].

Ebben a fejezetben szeretnék egy alapos áttekintést nyújtani a differenciálegyenletek témaköréről, ugyanis ezen ismeretek a későbbiekben bemutatott modellek megértéséhez lesznek szükségesek. Külön ki fogok térni a differenciálegyenletek különböző tulajdonságaira, típusaira, valamint megoldó módszereikre. A bemutatott tételek, illetve állítások bizonyításait ebben a fejezetben nem közlöm, de a fentiekben feltüntetett forrásokban elérhetőek.

### 2.1. Differenciálegyenletek

**2.1.1. Definíció.** Differenciálegyenleteknek nevezzük azokat az egyenleteket, amelyek kapcsolatot teremtenek az ismeretlen függvény és annak deriváltja között.

**2.1.2. Definíció.** Közönséges differenciálegyenletről beszélünk, ha egyváltozós az ismeretlen függvény.

**2.1.3. Definíció.** Parciális differenciálegyenletnek nevezzük azokat a differenciálegyenleteket, amelyekben többváltozós az ismeretlen függvény.

A differenciálegyenleteket többféle szempont szerint lehet osztályozni és ezáltal többféle jelzővel is elláthatjuk őket.

**2.1.4. Definíció.** A differenciálegyenletek rendje az egyenletekben szereplő legmagasabb rendű derivált rendszámával egyezik meg.

**2.1.5. Megjegyzés.** Ha az egyenletben az ismeretlen függvénynek csak az első deriváltfüggvénye jelenik meg, akkor elsőrendű differenciálegyenletről beszélünk, ha

a másodrendű deriváltfüggvénye szerepel és az elsőrendű deriváltfüggvénye is szerepelhet, akkor másodrendű differenciálegyenletről van szó.

**2.1.6. Definíció.** Közönséges differenciálegyenletek közül azokat, amelyekben az ismeretlen függvény és ennek deriváltjai legfeljebb csak az első hatványon fordulnak elő és szorzatuk nem szerepel, lineáris differenciálegyenleteknek nevezik. Minden más differenciálegyenlet nemlineáris.

**2.1.7. Definíció.** Homogénnek nevezünk egy közönséges differenciálegyenletet, ha nem tartalmaz olyan tagokat, melyekben konstans vagy a független változó szerepel. Egyébként az egyenlet inhomogén.

**2.1.8. Definíció.** Ha a közönséges differenciálegyenletben a függvényt és a deriváltjait tartalmazó tagok együtthatói állandók, akkor az egyenletet állandó együtthatós differenciálegyenletnek nevezzük.

**2.1.9. Definíció.** A nem állandó együtthatós differenciálegyenleteket függvényegyütthatós differenciálegyenleteknek nevezzük.

**2.1.10. Definíció.** Olyan  $y' = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  alakú differenciálegyenleteket, melyeknek jobb oldala nem tartalmaz explicit időfüggést, autonóm differenciálegyenleteknek nevezzük.

**2.1.11. Definíció.** Mindazokat a függvényeket, amelyek a deriváltjaikkal együtt azonosan kielégítik az adott differenciálegyenletet, a differenciálegyenlet megoldásainak (integráljainak) nevezzük.

**2.1.12. Definíció.** Az  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlet általános megoldása az a függvény, amely pontosan  $n$  számú, tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és a deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet.

**2.1.13. Definíció.** Az  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlet partikuláris megoldása az a függvény, amely legfeljebb  $(n - 1)$  számú, tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és a deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet. Speciális esetben egyetlen paramétert sem tartalmaz.

**2.1.14. Definíció.** Az  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldását kiválaszthatjuk úgy is, hogy megadunk legfeljebb  $n$  számú, összetartozó  $x$  és  $y$  értéket (pontot), amit a partikuláris megoldásnak ki kell elégítenie. Ezek a kerületi vagy határfeltételek.

**2.1.15. Definíció.** Egy  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlet esetében meg lehet adni a független változó egy adott értékéhez tartozó függvényértéket, az első, második,  $\dots$ ,  $(n-1)$ -edik derivált értékét. Ezek a kezdeti feltételek.

**2.1.16. Definíció.** Vegyük az  $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$   $n$ -ed rendű, közönséges differenciálegyenletet, valamint vesszük az  $\underline{y}(x_0)$ ,  $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  vektorokat, melyek

$$\underline{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ y''(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ y''_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ekkor kezdeti érték problémának nevezzük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Az  $\underline{y}(x_0) = \underline{y}_0$  a kezdeti érték feltétel.

A differenciálegyenletek esetén nagyon fontos, hogy mit tudunk mondani a kezdeti érték probléma megoldásáról. Azaz, hogy mit tudunk állítani a megoldás egyértelműségéről és létezéséről. Erre ad választ a következő tétel.

**2.1.17. Tétel** (Egzisztencia és unicitás tétel). *Tegyük fel, hogy mind az  $F$  mind a  $\frac{\partial F}{\partial y}$  függvények folytonosak egy olyan  $\alpha < x < \beta$ ,  $\gamma < y < \delta$  téglalapon, amely tartalmazza az  $(x_0, y_0)$  pontot. Ekkor van olyan  $(x_0 - h, x_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ , amelyben a következő kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű:*

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

**2.1.18. Definíció.** Az egzisztencia és unicitás tétel kimondja, hogy a kezdeti érték problémának létezik megoldása és az egyértelmű. Ezt a megoldást nevezzük a differenciálegyenlet reguláris megoldásának.

**2.1.19. Definíció.** A differenciálegyenlet olyan megoldását, amely egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás feltételének, szinguláris megoldásnak nevezzük.



## 2.2. Differenciálegyenletek analitikus megoldó módszerei

Néhány speciális esetben a közönséges differenciálegyenletek megoldásai megadhatóak egy zárt képlet segítségével. Ezekre mutatok példát a következő alfejezetben.

### 2.2.1. Közvetlenül integrálható differenciálegyenletek

**2.2.1. Definíció.** Egy differenciálegyenletnek megoldása az  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ha intervallumon van értelmezve és differenciálható, továbbá kielégíti a differenciálegyenletet minden  $x \in D(y)$  esetén.

**2.2.2. Definíció.** Egy megoldást maximális megoldásnak nevezünk, ha megoldás és nem valódi leszűkítése más megoldásnak.

**2.2.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy differenciálegyenlet  $y$  megoldása teljesíti az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltételt, ha a differenciálegyenlet teljesül minden  $x \in D(y)$  esetén és  $y(x_0) = y_0$ .

**2.2.4. Definíció.** Az  $\dot{y}(x) = f(x)$  differenciálegyenletet közvetlenül integrálható differenciálegyenletnek nevezzük, ha  $f$  nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény.

Megoldása

$$\begin{aligned}\dot{y}(x) &= f(x) \quad / \int \dots dx \\ y(x) &= \int f(x) dx \\ \left( \int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R} \right) \\ y(x) &= F(x) + C\end{aligned}$$

ahol  $F$  az  $f$  függvény egyik primitív függvénye. Minden maximális megoldás értelmezési tartománya  $D(f)$ .

Az egyváltozós ismeretlen függvényre vonatkozó differenciálegyenlet általános alakja abban az esetben, amikor az egyenletben a keresett függvénynek magasabb rendű deriváltja nem szerepel, csupán  $\dot{y}(x)$ , és arra meg van oldva az egyenlet:

$$\dot{y}(x) = f(x, y(x)),$$

ahol  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  összefüggő nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény.

Az  $f$  függvényre tett erősebb feltétel mellett a  $D(f)$  értelmezési tartomány bármely pontján pontosan egy megoldás grafikonja halad át, amint azt a következő tétel mutatja.

**2.2.5. Tétel** (Picard–Lindelöf-tétel parciális deriválttal). *Legyen  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan összefüggő nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény, melynek a második változó szerinti parciális deriváltfüggvénye létezik és folytonos a teljes  $D(f)$  értelmezési tartományon. Ekkor az  $\dot{y}(x) = f(x, y(x))$  differenciálegyenletnek minden  $(x_0, p_0) \in D(f)$  esetén pontosan egy olyan megoldása van, amelyikre  $y(x_0) = y_0$ , vagyis  $D(f)$  minden pontjára pontosan egy megoldás grafikonja illeszkedik.*

## 2.2.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

**2.2.6. Definíció.** A szétválasztható változójú differenciálegyenlet  $\dot{y}(x) = g(x)h(y(x))$  alakú, ahol  $g$  és  $h$  egy-egy nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény.

Megoldási módszer:

Induljunk ki az eredeti egyenletből, mindkét oldalt osszuk le  $h(y(x))$ -vel és jelöljük az  $\frac{1}{h(y(x))}$  hányadost  $f(y(x))$ -vel.

$$f(y(x))\dot{y}(x) = g(x)$$

Ezt követően vegyük mindkét oldal  $x$  szerinti integrálját:

$$\int f(y(x))\dot{y}(x)dx = \int g(x)dx$$

Ebben az egyenletben jelölje  $r$  az  $y(x)$  függvényt, valamint a  $dr$  az  $\dot{y}(x)dx$  mennyiséget.

$$\int f(r)dr = \int g(x)dx$$

$F$  jelölje az  $f$ , míg  $G$  jelölje  $g$  primitív függvényét.

$$F(r) = G(x) + c$$

A  $y(x) = r$  visszahelyettesítéssel pedig megkapjuk a szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldását.

$$F(y(x)) = G(x) + c$$

## 2.2.3. Elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletek

**2.2.7. Definíció.** Az  $\dot{y}(x) = a(x)y(x) + b(x)$  elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet, ha  $a$  és  $b$  ugyanazon a nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, ahol  $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**2.2.8. Definíció.** Ha  $b(x) = 0$  konstansfüggvény, akkor homogén egyenletről beszélünk, ha nem, akkor inhomogénről.

Megoldási módszer homogén esetben:

$$\dot{y}(x) = a(x)y(x)$$

Szorozzuk meg az egyenlet minden tagját  $e^{-A(x)}$ -nel, ahol az  $A$  függvény az  $a$  függvény egyik primitív függvénye.

$$\dot{y}(x)e^{-A(x)} = a(x)y(x)e^{-A(x)}$$

Rendezzük úgy az egyenletet, hogy a jobb oldalon 0-t kapjunk.

$$\dot{y}(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)e^{-A(x)} = 0$$

Itt észrevehetjük, hogy a bal oldal pontosan az  $y(x)e^{-A(x)}$  szorzat deriváltja.

$$(y(x)e^{-A(x)})' = 0$$

Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát  $x$  szerint.

$$y(x)e^{-A(x)} = C$$

A kapott egyenletet átrendezve megkapjuk az elsőrendű lineáris homogén közönséges differenciálegyenlet megoldását.

$$y(x) = Ce^{A(x)}, C \in \mathbb{R}$$

Megoldási módszer inhomogén esetben:

$$\dot{y}(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

Szorozzuk meg az egyenlet minden tagját  $e^{-A(x)}$ -nel. Itt az  $A$  függvény az  $a$  függvény egyik primitív függvénye.

$$\dot{y}(x)e^{-A(x)} = a(x)y(x)e^{-A(x)} + b(x)e^{-A(x)}$$

Rendezzük úgy az egyenletet, hogy a jobb oldalon csak a  $b(x)$  tag maradjon.

$$\dot{y}(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)e^{-A(x)} = b(x)e^{-A(x)}$$

Ahogy ezt korábban is láttuk az egyenlet bal oldalán az  $y(x)e^{-A(x)}$  függvény deriváltja szerepel.

$$(y(x)e^{-A(x)})' = b(x)e^{-A(x)}$$

Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát  $x$  szerint.

$$y(x)e^{-A(x)} = \int b(x)e^{-A(x)} dx$$

A kapott egyenletet átrendezve megkapjuk az elsőrendű lineáris inhomogén közönséges differenciálegyenlet megoldását.

$$y(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)} dx$$

## 2.2.4. Néhány szétválasztható változójú vagy lineáris differenciálegyenletre vezető differenciálegyenlet-típus

**2.2.9. Példa.** Tekintsük az  $\dot{y}(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right)$  homogén differenciálegyenletet, ahol  $g$  nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény.

Megoldási módszer:

Ha helyettesítjük az  $\frac{y(x)}{x}$  kifejezést az  $r(x)$  függvénnyel, akkor egy szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapunk.

$$\frac{y(x)}{x} = r(x)$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát  $x$ -szel.

$$y(x) = xr(x)$$

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát.

$$\dot{y}(x) = r(x) + x\dot{r}(x)$$

Ezt a kifejezést helyettesítsük be az eredeti homogén differenciálegyenletbe.

$$r(x) + x\dot{r}(x) = g(r(x))$$

Rendezzük az egyenletet.

$$\dot{r}(x) = \frac{1}{x}(g(r(x)) - r(x))$$

Ahogy a fentiekből látható, valóban egy szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk.

**2.2.10. Példa.** Az  $\dot{y}(x) = g(ay(x) + bx + c)$  lineáris helyettesítéssel szétválasztható változójúra vezető differenciálegyenlet, ahol  $g$  nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény és  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Megoldási módszer:

Helyettesítsük az  $ay(x) + bx + c$  kifejezést  $r(x)$  függvénnyel, azaz

$$ay(x) + bx + c = r(x)$$

Fejezzük ki az adott egyenletből az  $y(x)$  függvényt.

$$y(x) = \frac{1}{a}(r(x) - bx - c)$$

Deriváljuk a fenti egyenletet  $x$  szerint.

$$\dot{y}(x) = \frac{1}{a}(\dot{r}(x) - b)$$

Ezt az egyenletet helyettesítsük be az eredeti egyenletbe.

$$\frac{1}{a}(\dot{r}(x) - b) = g(r(x))$$

Rendezzük az egyenletet.

$$\dot{r}(x) = a g(r(x)) + b$$

**2.2.11. Definíció.** A  $\dot{y}(x) = a(x)y(x) + b(x)y^\alpha(x)$  egyenletet Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük, ahol  $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  közös nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, valamint  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Megoldási módszer:

Ha  $\alpha = 1$ , akkor a Bernoulli-féle differenciálegyenlet egyben homogén lineáris differenciálegyenlet is.

Ha  $\alpha \neq 1$ , akkor az  $r(x) = y^{(1-\alpha)}(x)$  új függvényre lineáris differenciálegyenletet kapunk.

$$r(x) = y^{(1-\alpha)}(x)$$

Ebből az egyenletből fejezzük ki az  $y(x)$  függvényt.

$$y(x) = r^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)$$

Deriváljuk a fenti egyenletet  $x$  szerint.

$$\dot{y}(x) = \frac{1}{1-\alpha} r^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)-1}(x) \dot{r}(x) = \frac{1}{1-\alpha} r^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x) \dot{r}(x)$$

Az eredeti Bernoulli-féle egyenletbe helyettesítsük be  $y(x)$  és  $\dot{y}(x)$  helyére az előbb kiszámolt kifejezéseket.

$$\frac{1}{1-\alpha} r^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x) \dot{r}(x) = a(x) r^{\frac{1}{1-\alpha}}(x) + b(x) r^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x)$$

Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát  $r^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x) \neq 0$ -val.

$$\frac{1}{1-\alpha} \dot{r}(x) = a(x) r(x) + b(x)$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát  $(1-\alpha)$ -val.

$$\dot{r}(x) = a(x) r(x) (1-\alpha) + b(x) (1-\alpha)$$

## 2.3. Differenciálegyenletek numerikus megoldó módszerei

Sok esetben a közönséges differenciálegyenletek megoldásai nem adhatóak meg képlet segítségével, így ezekben az esetekben használjuk ki a numerikus megoldó módszereket, ugyanis ezek az értelmezési tartomány bizonyos pontjaiban az ismeretlen megoldásfüggvény értékeit közelítik véges számú algoritmikus lépéssel. Ezen megoldó módszerekhez elengedhetetlen szükségünk van továbbra is a kezdeti érték feladatokra, amit a következő definíció elevenít fel.

**2.3.1. Definíció.** Legyen  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  egy tartomány (nyílt, összefüggő halmaz),  $(x_0, y_0) \in G$  egy adott pont ( $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^d$ ),  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^d$  egy folytonos leképezés.

A

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y(x)), & x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

feladatot Cauchy vagy kezdetiérték feladatnak nevezzük.

**2.3.2. Definíció.** Az  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $I$  nyílt intervallum) folytonosan differenciálható függvényt, melyre teljesülnek az alábbi feltételek

- $(x, y(x))$ :  $x \in I \subset G$  és  $x_0 \in I$
- $\dot{y}(x) = f(x, y(x))$ , minden  $x \in I$
- $y(x_0) = y_0$

a Cauchy feladat megoldásának nevezzük.

### 2.3.1. Egylépéses módszerek

**2.3.3. Definíció.** Egylépéses módszereknek nevezzük azokat a módszereket, amelyekben egy új időpontbeli közelítő érték kiszámításához csak egy, a közvetlen azt megelőző diszkrét időpontbeli közelítő értékeket használjuk fel.

#### Explicit Euler-módszer

**2.3.4. Definíció.** Egylépéses explicit Euler-módszernek nevezzük a következő formulával értelmezett numerikus módszert:

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$y_0 = y(0)$$

Itt  $y_i$  az ismeretlen  $y(x)$  függvény  $x_i$  pontbeli közelítése, valamint  $i = 0$ -hoz tartozó  $y_0$  érték. A  $h$  pedig a módszer során felhasznált lépésközt jelöli.

#### Implicit Euler-módszer

**2.3.5. Definíció.** Egylépéses implicit Euler-módszernek nevezzük a következő formulával értelmezett numerikus módszert:

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_{i+1}, y_{i+1}) \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$y_0 = y(0)$$

2.3.6. *Megjegyzés.* Implicit Euler-módszert azért nevezzük implicitnek, mert az időben való előrehaladáshoz  $y_i$  ismeretében  $y_{i+1}$  értékét minden egyes időlépésben egy tipikusan nemlineáris egyenlet megoldásával tudjuk csak meghatározni.

### Trapéz módszer

**2.3.7. Definíció.** Egylépéses trapéz módszernek nevezzük a következő formulával értelmezett numerikus módszert:

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$y_0 = y(0)$$

### 2.3.2. Többlépcsős módszer

Ebben az alfejezetben egy többlépcsős módszert szeretnék bemutatni, ami igaz, hogy továbbra is egylépéses, viszont ebben az esetben a végeredményhez több, előzetesen kiszámolt értéket, más néven lépcsőt, is figyelembe kell vennünk.

**2.3.8. Definíció.** Legyen  $s \geq 1$  egy adott egész szám. A rögzített  $a_{i,j}, c_i, b_i$  ( $i, j = 1, 2, \dots, s$ ) számok mellett

$$Y_i = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} f(x_{n-1} + c_j h, Y_j), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$y_i = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s b_j f(x_{n-1} + c_j h, Y_j), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

numerikus módszert  $s$ -lépcsős Runge-Kutta módszernek nevezzük.

Pár fontos észrevétel a módszerhez:

- A Runge-Kutta módszer továbbra is egylépéses hiszen  $y_{n-1}$  értékéből származtatja  $y_n$  értékét, továbbá az  $s$  paraméter a lépcsők számát jelöli, vagyis hogy hány köztes értéket számolunk ki az  $y_n$  meghatározásához.
- Adott  $s$  esetén a Runge-Kutta módszert a paraméterei határozzák meg, melynek száma  $s^2 + 2s$ . Jelölje  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^s \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $c = (c_i)_{i=1}^s$ ,  $b = (b_i)_{i=1}^s \in \mathbb{R}^s$ . Ebből könnyedén felírhatjuk az általános Butcher-táblázatot, mely a Runge-Kutta módszert egyértelműen definiálja.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & B^T \end{array}$$

A Butcher-táblázat közepén lévő  $a_{ij}$  együtthatók éppen a Runge-Kutta módszer együtthatói, a  $c_i$  számok a módszer módusai, míg a  $b_i$  értékek a módszer súlyai.

$$\begin{array}{c|cccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
 \end{array}$$

- Néhány példa konkrét Butcher-táblázatokra:

1. Explicit Euler-módszer

$$\begin{array}{c|c}
 0 & 0 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

2. Explicit trapéz-módszer

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

3. Negyed-rendű Runge-Kutta módszer

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$



## 3. fejezet

# Populációdinamikai modellek

A következő fejezet Valkó Éva 2021-es Folytonos modellezés előadásjegyzete [9], valamint T.P. Dreyer Modelling with Ordinary Differential Equations [1] könyve alapján készült.

Jelen fejezetben egy adott populáció jövőbeli méretét szeretnénk előrejelezni. Ezt a populációt sokféleképpen elképzelhetjük, például állhat emberekből, egy adott állatfajból, sejtekből, de akár még fizikai részecskékből is. Viszont, mivel egy adott populáció méretének megváltozására számos paraméter van egyidejűleg hatással, így könnyen igen bonyolult egyenletekhez juthatunk. Ezt elkerülendő, kezdésnek csupán egy egyszerű modelltől indulunk ki, melyet a későbbiekben bonyolítani fogunk.

### 3.1. A Malthus modell

Jelen esetben az ismert adataink alapján szeretnénk előrejelezni a jövő egy adott időpillanatára. Jelölje  $N(t)$  a vizsgált populáció méretét a  $t$ . időpillanatban. Ezen kívül még tudjuk, hogy  $N(t)$  egy nemnegatív egész számot jelöl minden  $t$  időpontban, így  $N(t)$  grafikonjának lépésfüggvénynek kell lennie  $t$  függvényében.

Ha  $N(t)$  egy falu népességét jelöli, akkor az reálisabb képet mutat nekünk a népesség napi megváltozásáról, mintha  $N(t)$  egy fejlődő ország népességét jelölné, hiszen abban az esetben akár egy napon belül is komoly változásokon eshetne át. Ebből levonva a következtetést: az  $N(t)$  függvényt érdemes a továbbiakban folytonos függvénynek definiálni.

**3.1.1. Feltétel.**  $N(t)$  deriváltja folytonos függvénye  $t$ -nek minden  $t > 0$  esetén.

Az  $N(t)$  függvény deriváltja pontosan meghatározza a populáció változásának mértékét. Feltehető, hogy ha egy országnak nagyobb a lakossága, akkor ott egy napon belül több gyermek születik, tehát a népesség napi változása nagyobb, így a népesség változásának üteme is nagyobb lesz, mint egy tőle kisebb méretű ország esetén. Ez az érvelés a következőkhöz vezet bennünket:

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \tag{3.1}$$

Ez esetben az  $f$  függvény a populáció növekedésének függvénye. Továbbá feltehetjük, hogy a populáció változásának mértéke csak az  $N$ -től függ, a  $t$ -től nem, hiszen például egy háborús időszakban jelentősen kevesebb gyermek születik, mint békeidőben.

**3.1.2. Feltétel.** *A populáció változásának mértéke egyenesen arányos a populáció méretével.*

Az alábbi kezdetiérték problémából indulunk ki:

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad N(0) = \alpha, \quad t \in (0, \infty) \quad (3.2)$$

Az  $\alpha \geq 0$  a populáció kiinduló méretét, a  $k \in \mathbb{R}$  állandó az egy populációra jutó nettó növekedési rátát jelöli. Ezen kívül azt is feltehetjük  $k$ -ról, hogy kettő részből tevődik össze az alábbi képlet alapján:  $k = b - d$ , ahol a  $b$  a születések miatti növekedési rátát jelöli, míg a  $d$  a halálozások miatti csökkenési rátát.

Érdeemes ezen a ponton megjegyezni, hogy a kapott differenciálegyenletünk szétválasztható változójú és a hozzá tartozó  $N(t)$  megoldást háromféleképpen is megkaphatjuk a (3.2)-ből:

- Első esetben, ha a  $k$  értékét 1-nek választjuk, akkor  $N$  deriváltja egyenlő lesz  $N$ -nel, így biztosak lehetünk benne, hogy az  $N$  függvény exponenciális alakú, vagyis

$$N(t) = \alpha e^{kt} \quad (3.3)$$

- Második esetben, a változókat rendezzük külön oldalra:

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$$

$$\ln N = kt + c$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  konstans.

- Az utolsó esetben pedig szorozzunk meg minden tagot  $e^{-kt}$ -vel.

$$\frac{dN}{dt} e^{-kt} = kN e^{-kt}$$

$$\frac{dN}{dt} e^{-kt} - kN e^{-kt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (N e^{-kt}) = 0$$

$$N e^{-kt} = c$$

Itt  $N$  a  $t$  folytonos függvénye, ami szintén megadja a (3.3) megoldást. Ebből következik, hogy a differenciálegyenletnek létezik megoldása. A harmadik megoldómódszerből látszik az egyértelműség minden  $t > 0$  esetén. Továbbá ezzel a módszerrel, vagyis a Newton-Leibniz formulával az összes megoldást képesek vagyunk megtalálni és mivel van kezdeti értékünk, az  $\alpha$ , így megtalálhatjuk az egyetlen pontos megoldást is.

Most meg kell vizsgálnunk, hogy a megoldás a kezdeti érték folytonos függvénye-e. Ehhez tegyük fel, hogy  $N(t)$  a következő differenciálegyenlet megoldás

$$\frac{dM}{dt} = kM, \quad M(0) = \alpha + \epsilon \quad (3.4)$$

ahol  $\epsilon$  egy kicsi valós szám. Ennek a feladatnak a megoldása pedig

$$M(t) = (\alpha + \epsilon)e^{kt} \quad (3.5)$$

Továbbá a fentiekben leírtakból következik, hogy

$$|N(t) - M(t)| = |\epsilon e^{kt}| \leq |\epsilon| e^{kT}$$

ha  $0 \leq t \leq T$ . Az  $|N(t) - M(t)|$  különbsége tetszőlegesen kicsinek választható, ha

$$|N(0) - M(0)| = |\epsilon|$$

elég kicsi minden  $t \in [0, T]$  esetén.

Tehát tudjuk, hogy a problémának ez az egyetlen lehetséges megoldása, így ennek segítségével tudjuk interpretálni a matematikai modell megoldását is a populációs modellünkre:

- Ha  $k$  pozitív, akkor a populációnk mérete exponenciálisan nőni fog.
- Ha  $k = 0$ , akkor a populációnk mérete megmarad a kezdeti méretén, azaz  $\alpha$ -n.
- Ha  $k$  negatív, akkor a populációnk mérete csökkeni fog, de sosem éri el a nullát.

Valójában persze, ha  $N(t)$  értéke kisebb, mint 1, akkor a populáció ki fog halni.

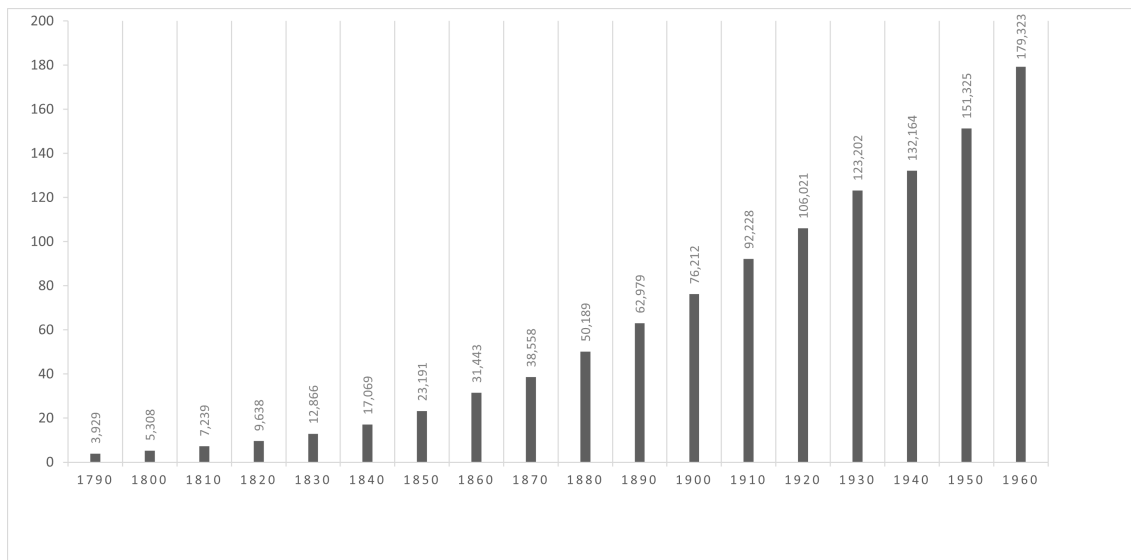
Mindezekből láthatjuk, hogy a populáció méretének jövőbeli alakulására különösen nagy hatása van a  $k$  paraméternek, mely meghatározásához a populáció méretének pontos ismerete szükséges egy  $t \neq 0$  időpontban. Ha a  $k$  paraméter értéke ismert, akkor meg tudjuk határozni az  $N(t)$  értékét bármelyik  $t$  időpontban.

Az előbbieken bemutatott modell, azaz a (3.2) Thomas R. Malthus (1766-1834) nevéhez köthető, aki egy angol demográfus, közgazdász volt. Szintén az ő nevéhez köthető az 1798-ban bemutatott “An Essay on the Principle of Population” tanulmány is [16].

Az ipari forradalom idején Európa lakossága gyors növekedésen esett át. Malthus megállapította, hogy míg az élelmiszer termelés lineárisan, addig a lakosság exponenciális mértékben növekszik. Ezekre alapozva válságot jósolt a jövőben, ami elmaradt, ugyanis a 19. században háborúk söpörtek végig Európában, valamint tömeges kivándorlás is megfigyelhető volt Amerika, valamint Ausztrália felé. Mivel ezekkel Malthus nem számolt, így az általa készített modell igen pontatlannak számít a populáció pontos jövőbeli méretének meghatározásához.

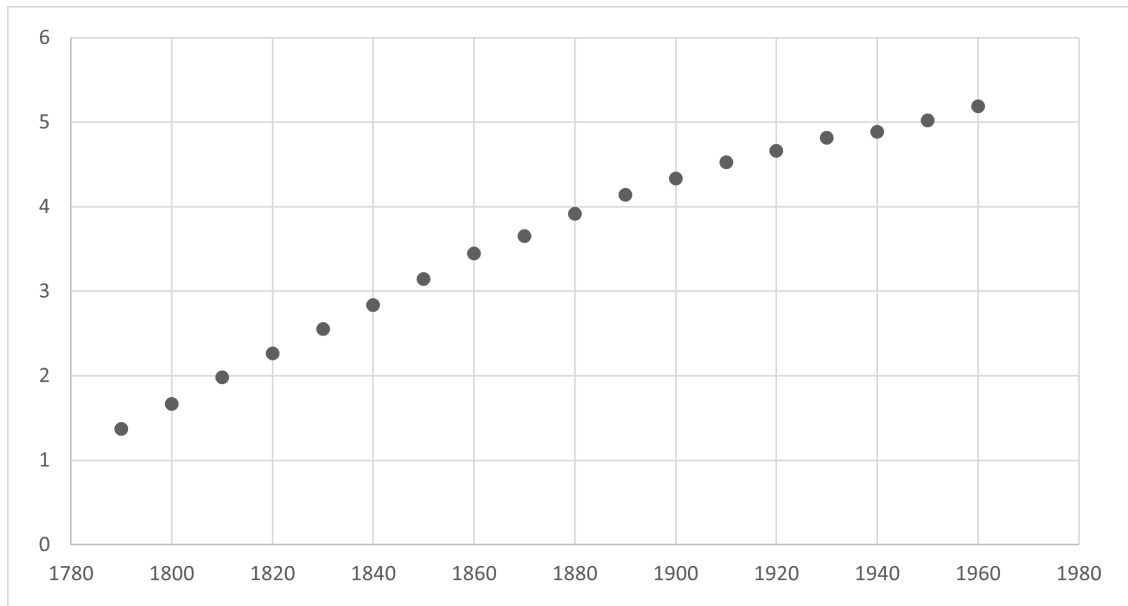
## 3.2. A logisztikus modell

Az előző részhez hasonlóan szintén egy egyszerű populációdinamikai modellt szeretnék bemutatni. Mivel a Malthus modelltől már láttuk, hogy nem a legmegfelelőbb, így egy olyan modellt kell keresnünk, amiben a  $k$  paraméter értéke nem állandó, hanem az időtől függő. A logisztikus modell bemutatását egy példán keresztül fogom szemléltetni, ahol az Amerikai Egyesült Államok népességének változását vizsgálom.



3.1. ábra. Az Amerikai Egyesült Államok népessége az 1790 és 1960 közötti időszakban

A (3.1) ábra elkészítéséhez az Amerikai Egyesült Államok népszámlálási adatait [8] használtam fel. A vízszintes tengely jelöli az idő változását 1790-től 1960-ig, míg a függőleges tengely a népesség nagyságát millióban ( $N$ ).



3.2. ábra. Az Amerikai Egyesült Államok népesség nagyságának logaritmusa az 1790 és 1960 közötti időszakban

Láthattuk, hogy az előzőekben a  $k$  paraméter felírható volt  $b$  és  $d$  paraméterek különbségeként, de a (3.2) ábra alapján a növekedés üteme csökkenni látszik, feltehetjük, hogy a  $d$ , azaz a halálozási ráta, az  $N$  növekvő függvénye.

**3.2.1. Feltétel.** Az  $N$  populáció változásának mértéke leírható a

$$\frac{dN}{dt} = (b - sN)N$$

formulával, ahol  $b$  és  $s$  is pozitív konstansok.

Az alábbi modell a populáció méretének fizikai törvényszerűségéből következik. Tegyük fel, hogy a már korábban bemutatott  $f(N) = \frac{dN}{dt}$  felírható Maclaurin sorozatként:

$$f(N) = a_0 + a_1N + a_2N^2 + \dots$$

Mivel az  $N(t)$  az USA népességének nagyságát jelöli a  $t$ . időpillanatban, így egyértelmű, hogy  $f(0) = 0$ -val, mivel ha nincsenek emberek, akkor a számuk sem tud megváltozni, így  $a_0$  is egyenlő lesz 0-val. Ha  $f(N)$ -t a második taggal szeretnénk közelíteni, akkor a Malthus-modellhez jutunk. A következő lépésben, ha az  $f(N)$ -t közelítjük a Maclaurin sorának első 3 tagjával, akkor pontosan megkapjuk a felírt modellünket. A (3.1) ábrából látszik, hogy  $N(t)$  meredeksége pozitív ha  $t = 0$ . Ezt a tényt a következő feltételezés mondja ki:

**3.2.2. Feltétel.** Ha  $\alpha$  jelöli a populáció méretét a  $t = 0$  időpillanatban, akkor  $b - s\alpha > 0$ .

A (3.1.1),(3.2.1),(3.2.2) feltételekből származó kezdeti érték probléma leír egy olyan matematikai modellt, melyet fel tudunk használni az USA népeségnövekedésének modellezéséhez:

$$\frac{dN}{dt} = (b - sN)N, \quad N(0) = \alpha, \quad t \in (0, \infty) \quad (3.6)$$

3.2.1. *Megjegyzés.* Ez a differenciálegyenlet nem lineáris az  $sN^2$  tag miatt, viszont szétválasztható változójú. Továbbá a (3.2.2) feltevésből következik, hogy  $b - sN(t) > 0$ , valamint  $N(t) > 0$  minden  $t$ -re, ahol  $t \in (0, T)$ , mivel  $N(t)$  folytonos függvény.

Ezért  $t \in (0, T)$  esetén a (3.6) egyenletet átírhatjuk a következő alakra:

$$\int_{\alpha}^N \frac{1}{(b - sx)x} dx = t + c \quad (3.7)$$

$$\ln \left( \frac{N}{b - sN} \right) - \ln \left( \frac{\alpha}{b - s\alpha} \right) = bt$$

$$\frac{N}{b - sN} = \frac{\alpha}{b - s\alpha} e^{bt} \quad (3.8)$$

$$N(t) = \frac{b\alpha}{s\alpha + (b - s\alpha)e^{-bt}} \quad (3.9)$$

Közvetlen differenciálással igazolható, hogy a (3.6)-os probléma megoldása a (3.9) minden  $t > 0$  esetén. A megoldásnak az egyértelműség vizsgálatához a Picard-Lindelöf-tételt használjuk, de előtte fontos megemlítenünk az alábbi definíciót:

**3.2.2. Definíció.** Az  $f(x)$  függvény teljesíti a Lipschitz-feltételt az  $I$  intervallumon, ha létezik olyan  $k$  állandó, hogy

$$|f(r) - f(s)| \leq k|r - s| \quad (3.10)$$

minden  $r, s \in I$  esetén.

**3.2.3. Tétel.** Legyen  $f(t, y)$  folytonos az  $R = \{(t, y) : t \in (a, b), y \in (c, d)\}$  téglalapon, valamint  $f(t, y)$  teljesítse a Lipschitz feltételt  $y$ -ban a  $[c, d]$  intervallumon ugyanazzal a  $k$  állandóval minden  $t \in [a, b]$  esetén. Ha az alábbi kezdeti érték feladatnak a megoldása létezik  $\mathbb{R}$ -ben,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(a) = \alpha \quad (3.11)$$

akkor a megoldás egyértelmű, valamint a megoldás az  $R$ -beli  $\alpha$  határérték folytonos függvénye.

Használjuk fel az alábbi tételt a (3.6)-os modellünkre. Jelen esetben  $f(t, N) = bN - sN^2$ , aminek a  $b - 2sN$  az  $N$  szerinti folytonos deriváltja. Így  $f$  teljesíti a Lipschitz feltételt  $N$ -ben bármely véges intervallumon, és mivel  $f$  nem  $t$  függvénye, így ugyanaz a  $k$  konstans lesz érvényes minden  $t > 0$  esetén. A tételünk kimondja, hogy amíg az  $N$  megoldás korlátos, addig a  $d$  véges és  $N(t)$  a (3.6) egyértelmű megoldása. De a (3.9)-ből látszik, hogy  $N(t)$ -nek a  $\frac{b}{s}$  a határértéke, ha  $t \rightarrow \infty$ , és így korlátos lesz. Éppen ezért ez az egyetlen megoldás  $t \geq 0$  esetén.

1920-ban R. Pearl és L. J. Reed használta fel a fenti modellt az USA népességének modellezéséhez [17]. Az 1790-es, 1850-es és 1910-es évek adatait használták fel, hogy a (3.9) egyenlet alapján három egyenletet kaphassanak az  $\alpha, b$  és  $s$  ismeretlen paraméterekkel. A három egyenletből álló egyenletrendszernek egyáltalán nem könnyű megtalálni a megoldását, mivel egy nemlineáris egyenlethez vezet, aminek nincs explicit megoldása. Pearl és Reed az  $\alpha, b, s$  paraméterek értékét illesztették az 1790-es, 1850-es és 1910-es évek adataira. Az illesztett paraméterekkel, azaz az  $\alpha = 4, b = 0,03$  és az  $s = \frac{1}{7000}$  az általunk használt modell a populáció méretére az alábbi függvényt adja:

$$N(t) = \frac{210}{1 + 51,5e^{-0,03t}} \quad (3.12)$$

Az alábbi táblázat bemutatja az 1920 utáni évek tényleges népességének összehasonlítását az előrejelzett értékeivel:

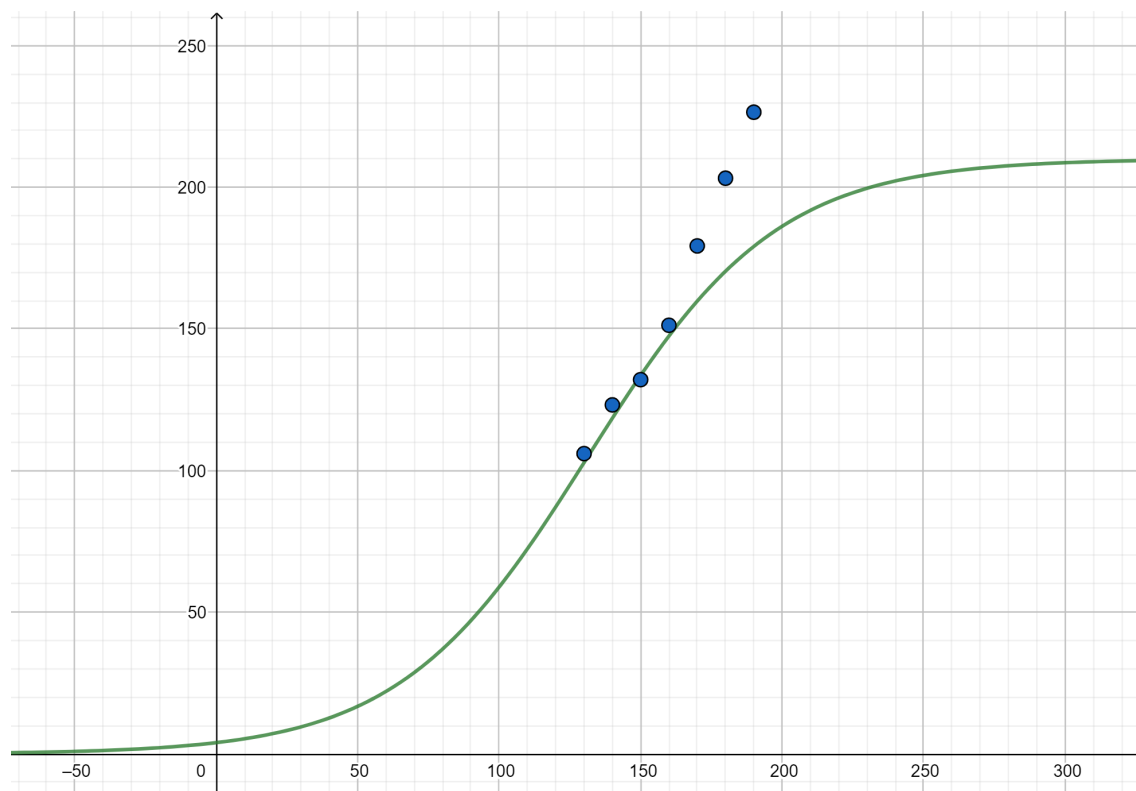
Év	$t$	$N(t)$	Populáció tényleges mérete
1920	130	103,5	106,0
1930	140	118,5	123,2
1940	150	133,6	132,1
1950	160	147,4	151,3
1960	170	159,8	179,3
1970	180	170,4	203,2
1980	190	179,1	226,5

A táblázatban feltüntetett értékek felhasználásával készült el a (3.3) ábra. Itt a vízszintes tengely jelöli az idő változását, a táblázatban feltüntetett  $t$  oszlop szerint, míg a függőleges tengely a népesség nagyságát millióban (N). Az ábrán zöld színnel van jelölve az  $N(t)$  függvény, vagyis a (3.12), és kék pontokkal a populáció tényleges mérete az adott évben.

Az előrejelzés meglehetősen pontos 1950-ig, hiszen a hiba kevesebb, mint 3%, viszont ezt követően a modell már nem ad pontos értékeket. Például a modell szerint az USA lakosságának 210 milliónál kellene stabilizálnia, de ehhez képest már 1986-ban meghaladta a 240 milliót.

A modellben szereplő  $b$  állandó születési ráta állandósága nem teljesül. 1910 és 1960 között a születési ráta évi 18,7 és 30 ezrelék között ingadozott. Továbbá arra is számítani lehetett, hogy a polgárháború és a két világháború bizonyára hatással volt  $b$  és  $d$  értékekre. Ráadásul 1800 és 1950 között mintegy 40 millió ember vándorolt át Európából az USA-ba. Ezt a tényt teljesen figyelmen kívül hagyták a modell elkészítése során, ezért különösen meglepő, hogy mégis 1950-ig meglehetősen pontos eredményeket ad a modell.

A (3.6)-os egyenletet logisztikus egyenletként ismerhetjük, és a hozzá tartozó grafikont a (3.3) ábrán láthatjuk. Ezt logisztikus görbének vagy S-görbének is szokás nevezni. P. F. Verhulst belga szociológus használta először ezt az egyenletet 1847-ben az emberi populáció tanulmányozására [15]. Azóta is sok esetben használják elméleti, valamint kísérleti kutatásra is egyaránt.



3.3. ábra. Az  $N(t)$  függvény ( $\alpha = 4$ ,  $b = 0,03$ ,  $s = \frac{1}{7000}$  paraméterekkel) összehasonlítása a pontos népességi adatokkal [8]

Ebben a fejezetben bemutatott modelleknél léteznek sokkal pontosabbak, ám-bár összetettebbek is, melyek több különböző tényezőök együttes populációra kiható hatását is figyelembe veszik.

### 3.3. A logisztikus modell bővítése vadászattal

Egyes matematikai modellek esetén előfordulhat, hogy a differenciálegyenletek megoldását csak kvalitatív formában szeretnénk megkapni, vagyis ezekben az esetekben nem szükséges megoldanunk az adott egyenleteket. Ilyen modell(ek)re fogunk példát látni ebben a fejezetben.

A 21. században egyre jobban előtérbe kerülnek a megújuló energiaforrások, ugyanis az elmúlt évszázadok, évezredek során tanúsított emberi magatartás miatt sokuk megcsappant vagy akár teljesen meg is szűnt. Erre tökéletes példa néhány állatfaj, amik a kihalás szélére kerültek, vagy már ki is pusztultak a túlvadászat, túlhalászat miatt.



Építsünk fel egy olyan modellt, ami figyelembe veszi a populáció természetes növekedését (lásd: logisztikus modell), valamint maximalizáljunk egy  $E$  állandót is, ami a populációban végbemenő természetes vagy emberi ritkítás nagyságát jelöli. Ha az  $N(t)$  a populáció méretét jelöli a  $t$ . időpillanatban, akkor a (3.6) kezdeti érték probléma az alábbira módosul:

$$\frac{dN}{dt} = (b - sN)N - E, \quad N(0) = \alpha, \quad t \in (0, \infty) \quad (3.13)$$

Ha a  $b, s, \alpha$  és  $E$  állandók ismertek, akkor meg tudjuk határozni  $N(t)$  értékét, minden  $t$  időpillanatban. Viszont ebben az esetben nem egy konkrét időpillanatban érdekel bennünket a populáció mérete, hanem a végtelenben, vagyis a populáció méretének hosszútávú változására vagyunk kíváncsiak. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a vizsgált populáció hosszútávon kihal-e vagy sem. Ha nem, akkor  $N$  tartani fog egy  $\beta \in \mathbb{R}$  számhoz  $t \rightarrow \infty$  esetén.

Ezen  $N$  pontos meghatározása azon döntéshelyzetben lévő szakemberek számára fontos, akik megállapítják az  $E$  értékét egyes állatfajokra nézve úgy, hogy a lehető legtöbb állatot tudják az emberek levadászni, mégis a populáció ne halljon ki hosszú távon. Jelen esetben az a feladatunk, hogy meghatározzuk  $\beta$  határértékét  $E$  függvényében. A  $\beta$  határértékben  $N(t)$  meredeksége nulla, így a (3.13) egyenletből:

$$\begin{aligned} (b - s\beta)\beta - E &= 0 \\ s\beta^2 - b\beta + E &= 0 \\ \beta &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4sE}}{2s} \end{aligned}$$

Ha  $b^2 - 4sE \geq 0$ , akkor  $\beta$  valós szám lesz. Legyen

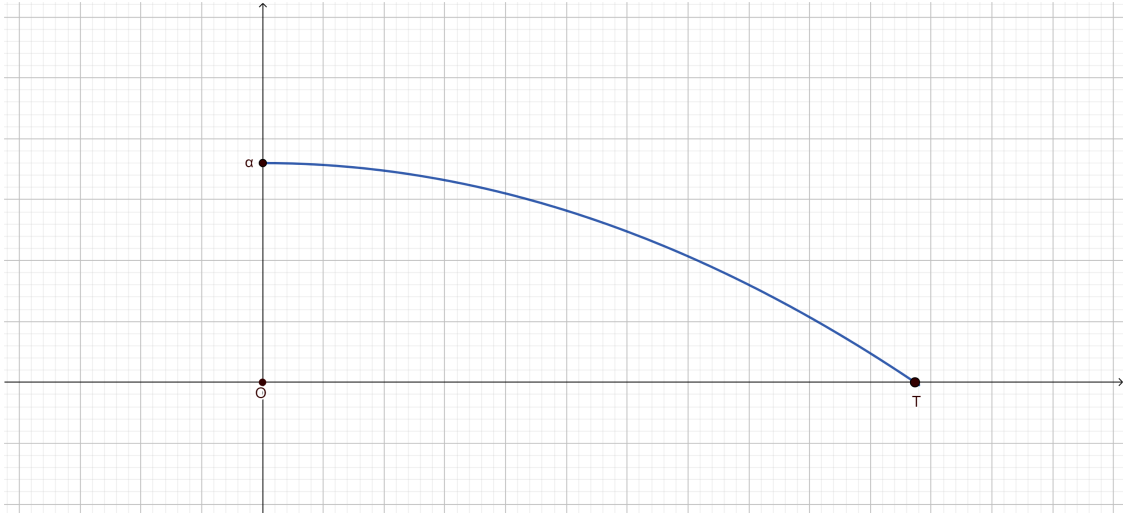
$$F = \frac{b^2}{4s}. \quad (3.14)$$

Ekkor  $E \leq F$  egy küszöb létezését jelenti.

Másrészről ha  $E > F$  az azt jelenti, hogy

$$(b - sN)N - E < 0$$

vagyis  $N$  grafikonja negatív meredekségű, és így a populáció véges  $T$  idő alatt kihal, amint azt a (3.4) ábra mutatja. Ezért,  $F$  kritikus érték abban az értelemben, hogy az  $F$ -et meghaladó mértékű vadászati rátának a populáció kihalásához kell vezetnie.



3.4. ábra. Az  $N(t)$  kvalitatív viselkedése, ha  $E > F$

Tegyük fel, hogy  $E < F$ . Ebben az esetben két különböző határérték létezik a  $\beta_1$  és a  $\beta_2$ :

$$\beta_1 = \frac{b}{2s} + \frac{\sqrt{b^2 - 4sE}}{2s} = \frac{\sqrt{F} + \sqrt{F - E}}{\sqrt{s}}$$

$$\beta_2 = \frac{b}{2s} - \frac{\sqrt{b^2 - 4sE}}{2s} = \frac{\sqrt{F} - \sqrt{F - E}}{\sqrt{s}}$$

A (3.13) egyenlet átírható az alábbi formára:

$$\frac{dN}{dt} = -s(N - \beta_1)(N - \beta_2) \quad (3.15)$$

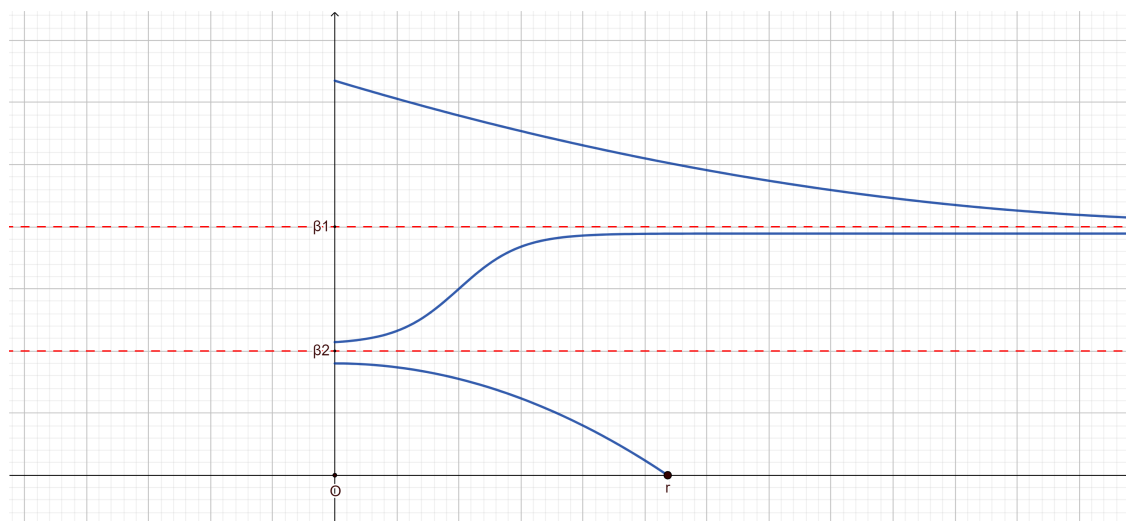
A (3.13) differenciálegyenlet megoldása a (3.6)-os tétel miatt egyértelmű, ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy különböző kezdeti értékek esetén a hozzájuk tartozó megoldások grafikonjai sohasem metszik egymást. Ha metszenék egymást a  $t = \lambda$  pontban, akkor az adott differenciálegyenletet kellene tekintenünk a  $t \in [\lambda, \infty)$  intervallumon az  $N(\lambda)$  kezdeti értékkel. Mivel ennek két megoldása is létezik, mindkettő  $N(\lambda)$  kezdeti értékkel, így a (3.6) tétel által garantált egyértelműségnek ellent mondana.

Most megrajzolhatjuk a (3.15) modell kvalitatív grafikonját. Ha  $\alpha > \beta_1$  (és  $\alpha > \beta_2$ ) fennáll, akkor a meredekség  $t = 0$ -nál negatív, és mindaddig negatív is marad, míg  $N(t) > \beta_1$ . Viszont ha  $\alpha = \beta_1$ , akkor a meredekség nulla, és így  $N(t) > \beta_1$  állandó marad. A fentiek alapján az  $N(t)$  grafikonja az  $\alpha > \beta_1$  esetre nem biztos, hogy nem metszi az  $N(t) = \beta_1$ -et, bár meredeksége szigorúan negatív. Így a meredekségnek nullához kell tartania, hogy az  $N(t) = \beta_1$  mindig a határérték legyen, amikor  $\alpha > \beta_1$ .

Ha  $\beta_2 < \alpha < \beta_1$ , akkor a meredekség  $t = 0$ -nál pozitív, és mindaddig pozitív marad, míg  $N(t) < \beta_1$ . Mivel a grafikon nem metszi az  $N(t) = \beta_1$  egyenest, így az előzőekben felhasználtak szerint  $N(t) = \beta_1$  a határérték ebben az esetben.

Ha  $\alpha = \beta_2$ , akkor ismét  $N(t) = \beta_2$  a (3.15) állandó megoldása.

Végül, ha  $0 < \alpha < \beta_2$ , akkor a  $t = 0$ -nál a meredekség negatív, és egyre meredekebb lesz, ahogy  $N$  egyre csökken, így  $N$ -nek nullának kell lennie egy véges  $T$  időben. A  $T$  időpillanatot más néven kihalási időnek is nevezzük. Tehát még ha  $E < F$ , a populáció akkor is kihalhat, ha a populáció kezdeti mérete  $\beta_2$  kritikus érték alatti.



3.5. ábra. Az  $N(t)$  kvalitatív viselkedése, ha  $E < F$

A  $T$  kihalási időt a (3.13) egyenlet integrálásával kaphatjuk meg:

$$T = \int_{\alpha}^0 \frac{1}{(b - sN)N - E} dN \quad (3.16)$$

Amikor  $E = F$ , akkor könnyű dolgunk van, ugyanis  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  a határérték. Ha  $\alpha > \beta$ , akkor  $N$  tartani fog  $\beta$ -hoz, ha  $t \rightarrow \infty$  és ha  $\alpha < \beta$ , akkor  $N$  nulla lesz a  $T$ . időpillanatban.

Most már rálátásunk van a (3.13) differenciálegyenlet megoldásának minőségi viselkedésére. Használjuk fel ezt a tudást a következő konkrét modellben:

Védettség alá került 1916-ban Észak-Amerikában a kanadai daru (*Grus canadensis*), mert a veszélyeztetett fajok listáján szerepelt. 1961-ben az Egyesült Államok nyugati részén és Kanadában bekövetkező terméskár miatt ismételtengedték a vadászatukat.



3.6. ábra. Kanadai daru, *Grus canadensis* [14]

Ezek a madarak ugyanis 4 éves korukig nem tudnak szaporodni és általában 25 év a maximális élettartamuk. Két amerikai ökológusok, R. Miller és D. Botkin publikáltak egy tanulmányt, amelyben egy szimulációs modellt építettek tíz paraméterrel, hogy megvizsgálják a különböző arányú vadászat hatását a kanadai darvak populációjának méretére [18]. Ha az egyszerű modellünket (3.13) az adataikhoz illesztjük, hogy összehasonlítsuk a modellünket a kifinomultabb modelljünkkel, azt találjuk, hogy

$$b = 0,09866 \quad \text{és} \quad s = 5,06989 \cdot 10^{-7}$$

A (3.14)-ből az következik, hogy a kritikus vadászati ráta, vagyis az  $F = 4800$  madarat jelent évente. Vegyük az  $\alpha = 194600$  kezdeti értéket, ami a  $bs^{-1}$  határértéke a logisztikus modell szerint, ha  $E = 0$ .

A következő táblázat első oszlopa jelöli az adott évben levadásztható állatok tömegét ezres nagyságban, a második oszlop a modellünk által jósolt kihalási időt években, a harmadik pedig a Miller és Botkin-féle modell által meghatározott kihalási időt.

$E$	$T$ (években)	Miller és Botkin (években)
2000	171,6	167,5
3000	156,9	149,9
4000	137	125,8
6000	90	71
8000	44	38
12770	21	19

A táblázatban megjelenő adatokból látszik, hogy az  $E$  értékének növelésével a kanadai darvak kihalása egyre hamarabb fog bekövetkezni. Továbbá megfigyelhetjük, hogy modellünk optimistább, mint Miller és Botkin előrejelzése, és meglepően közel áll hozzá, tekintve feltételezéseink egyszerűségét. Végül Millernek és Botkinnak rossz híre volt a kanadai darvak számára. Becslésük szerint 9800 kanadai darvat vadásztak le legálisan 1970-ben, és 30%-kal többet öltek meg az illegális vadászok, vagy haltak bele később a sérüléseikbe, azaz összesen 12 770 madár pusztult el abban az évben, vagyis a populáció 6%-a. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a kanadai darvaknak 19 éven belül végleg ki kellett volna pusztulniuk. Ennek megelőzése érdekében Miller és Botkin szigorúbb ellenőrzést és kisebb kvóták bevezetését kérték a felügyelő szervektől.

## 4. fejezet

# Közgazdasági modell - profit optimalizálás

A fejezet alapjául T.P. Dreyer *Modelling with Ordinary Differential Equations* [1] könyve szolgált.

A közgazdaság számos problémái olyan matematikai modellekhez vezetnek, amelyekben a differenciálegyenletek kiemelkedő szerepet játszanak. Vegyünk most is egy egyszerű példát, viszont előtte fontos kiemelni, hogy míg a 3.1 és 3.2 alfejezetben a differenciálegyenletek megoldása is fontos volt, addig a 3.3 alfejezetben inkább a megoldás minőségi viselkedésére voltunk kíváncsiak, azaz valójában soha nem oldottuk meg a kezdeti érték problémákat. Ebben a fejezetben a differenciálegyenletek megoldásai relatíve kis szerepet kapnak a megoldásokhoz vezető rögzített úthoz képest.

A modellezési folyamat első lépéseként képzeljünk el egy idealizált céget. A menedzsment célja, hogy a lehető legjobb osztalékot termelje a részvényesek számára. Feltehetjük, hogy minél nagyobb a cégbe befektetett tőke, annál nagyobb lesz a profit, azaz a nettó bevétel. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogyha a teljes nyereséget osztalékként kifizetnék a részvényeseknek, akkor a vállalat nem tudna növekedni. Hosszútávon a menedzsment az éves nyereség egy részét szeretné újra befektetni, így a későbbi években kifizetett nyereség nagyobb tudna lenni. A probléma jelen esetben az, hogy a nyereségnek mekkora részét fizessék ki évente osztalékként úgy, hogy a részvényesek teljes hozama egy adott időszak alatt maximális legyen.

Ezt követően meg kell vizsgálnunk a matematikai modell felépítéséhez szükséges feltevéseket. Jelölje  $u(t)$  a  $t$ . időpontban a vállalatba fektetett tőkét. Általában a tőkét és a nyereséget a vállalat pénzügyi évének végén számítják ki, így az  $u(t)$  függvény grafikonja lépésfüggvény lenne, viszont mi feltesszük, hogy a tőke és a nyereség folyamatosan ismert, valamint az újrabefektetési és osztalékfizetési folyamat is folyamatos. Ekkor  $u(t)$  egy folytonos függvény, továbbá feltesszük róla a következőket.

**4.0.1. Feltétel.** Az  $u(t)$  függvény  $t$  szerint differenciálható függvény, ha  $t \in (0, \infty)$ .

Ezen kívül szükségünk van további információra az adott időintervallumban megtermelt nyereség nagyságáról.

**4.0.2. Feltétel.** *A nyereség a  $[t, t + \delta t]$  intervallumon egyenesen arányos  $u(t)\delta t$  értékével tetszőlegesen kicsi  $\delta t$  esetén.*

Most áttérhetünk a modellezési folyamat következő szakaszára, azaz a modell felépítésére. Jelölje  $w(t)$  a részvényesek teljes osztalékát a  $[0, t]$  időintervallumon. Legyen  $k$  a  $[t, t + \delta t]$ -ben megtermelt nyereség állandó hányada, amelyet erre az időszakra a tőke  $\delta u$  kiegészítéseként újra befektetnek ( $k \in [0, 1]$ ). Ebből következik, hogy

$$\delta u = kau(t)\delta t,$$

ahol  $a$  az arányossági állandó a (4.0.2) feltételből. Hasonlóképpen, ha  $\delta w$  a  $[t, t + \delta t]$ -ben termelt nyereség fennmaradó részéből kifizetett osztalék, akkor

$$\delta w = (1 - k)au(t)\delta t$$

Osszuk el mindkét egyenletet  $\delta t$ -vel, továbbá tegyük fel, hogy  $\delta t \rightarrow 0$ , ekkor megkapjuk az alábbi két differenciálegyenletet:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = kau, & u(0) = \alpha \\ \frac{dw}{dt} = (1 - k)au, & w(0) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Az  $\alpha$  az induló tőkét jelöli, míg az osztalék kezdetben nullával egyenlő. A (4.1) modell elemzése egyszerű. Észrevehetjük, hogy a (4.1) tulajdonképpen egy Malthus modell, aminek a megoldása

$$u(t) = \alpha e^{akt} \quad (4.2)$$

Helyettesítsük az  $u(t) = \alpha e^{akt}$  kifejezést a (4.1)-be és ezt követően integráljuk, hogy megkaphassuk a következőt:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{(1-k)\alpha}{k}(e^{akt} - 1) & \text{ha } k \in (0, 1] \\ a\alpha t & \text{ha } k = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Ha  $k = 1$ , akkor  $w(t) = 0$   $t \geq 0$  esetén, vagyis nem fizetnek osztalékot a részvényeseknek, hanem a társaság tőkéje nő. Másrészt, ha  $k = 0$ , a tőke állandó marad  $\alpha$  értékkel, és az összes nyereséget osztalékként fizetik ki. Jelen esetben arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott  $[0, T]$  időszakban, hogyan kell a  $k$  paramétert úgy megválasztani, hogy a teljes osztalék a  $[0, T]$  időszakra maximális legyen? A (4.3)-es egyenlet tehát  $k \in (0, 1)$  esetén

$$w(T) = \frac{(1 - k)\alpha}{k}(e^{akT} - 1) \quad (4.4)$$

A számítások egyszerűsítése érdekében használjunk skálázást és vezessünk be új változókat. Jelölje

$$x = aTk \quad \text{és} \quad y = \frac{w(T)}{\alpha} \quad (4.5)$$

Mivel  $k \in (0, 1)$ , így  $x \in (0, aT)$  és a (4.4) egyenletet is át kell alakítanunk az adott formára:

$$y = \frac{aT - x}{x}(e^x - 1) \quad (4.6)$$

Mivel  $a, T$  és  $\alpha$  ismert állandók, a kérdés továbbra is a következő:

Az  $x$  mely értékei esetén lesz  $y$  maximális?

A kérdés megválaszolásának legkézenfekvőbb módja az, hogy  $y$ -t megkülönböztetjük  $x$ -től, és meghatározzuk, hogy  $x$  mely értékei esetén lesz a derivált nulla. Remélhetőleg ez meg fogja hozni a szükséges  $y$  maximumot.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-x - (aT - x)}{x^2}e^x + \frac{aT - x}{x}e^x - \frac{-x - (aT - x)}{x^2} = & (4.7) \\ &= \frac{-aT}{x^2}e^x + \frac{aT - x}{x}e^x + \frac{aT}{x^2} = \\ &= \frac{e^x aT}{x^2} \left( -1 + x - \frac{x^2}{aT} \right) + \frac{aT}{x^2} = \\ &= \frac{e^x aT}{x^2} \left( -1 + x - \frac{x^2}{aT} + e^{-x} \right) = \\ &= e^x aT \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{aT} + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) = \\ &= e^x aT \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{aT} + \frac{\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}{x^2} \right) = \\ &= e^x aT \left( -\frac{1}{aT} + \frac{1}{2!} - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{5!} + \dots \right) \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Fontoljuk meg az alábbi három esetet:

1. Ha  $aT = 2$ , akkor a (4.7)-ben szereplő sorozat első két tagja kiesik, és mivel  $x \in (0, 2]$ , a fennmaradó sorozat váltakozó előjelű és monoton csökkenő lesz. Ezért a sorozat összege negatív lesz, de a derivált soha nem nulla az  $x \in (0, 2]$  esetén. Így  $y$  az  $x$  csökkenő függvénye, valamint az  $y$  a maximumát az  $x = 0$  pontban veszi fel.
2. Ha  $aT < 2$ , akkor a (4.7)-beli sorozat első két tagjának összege negatív lesz, és ugyanazzal az érveléssel  $y$  ismét egy csökkenő függvény, melyben az  $y$  a maximumát  $x = 0$ -ban veszi fel.

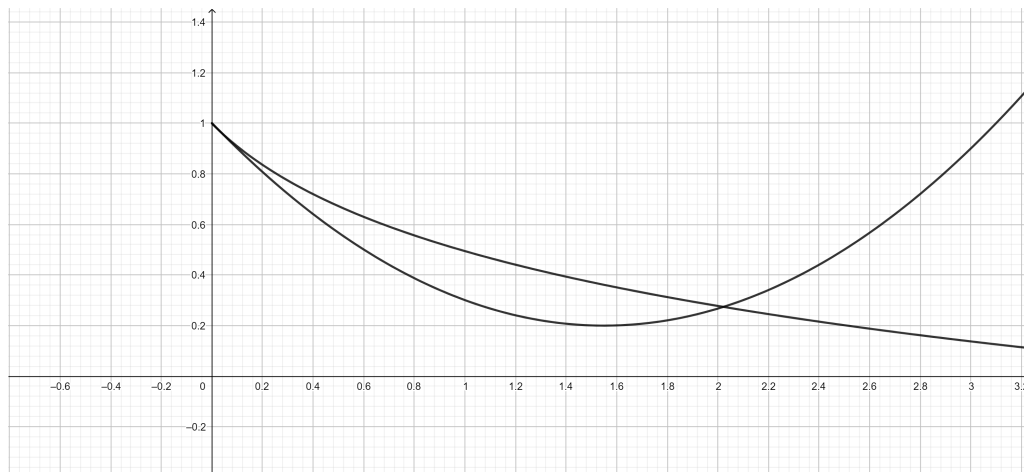


3. Ha  $aT > 2$ , akkor  $y$  meredeksége pozitív  $x = 0$ -nál. A (4.7) első sorából azonban az is következik, hogy  $y$  meredeksége negatív  $x = aT$ -nél. Mivel  $y$  meredeksége  $x$  folytonos függvénye a  $[0, aT]$  zárt intervallumon, így van legalább egy olyan  $X \in (0, aT)$  pont, ahol a meredekség nulla. A (4.7) szerint  $X$ -nek teljesítenie kell az alábbi egyenletet:

$$1 - x + \frac{x^2}{aT} = e^{-x} \quad (4.8)$$

A bal oldal az  $x$  másodfokú függvénye, amelynek grafikonja az  $x = \frac{aT}{2}$  egyenesre szimmetrikus parabola, amely a függőleges  $z$ -tengelyt a  $z = 1$  pontban metszi. A jobb oldal egy negatív meredekségű exponenciális görbe, amely a függőleges  $z$ -tengelyt is a  $z = 1$  pontban metszi. Nyilvánvaló, hogy a nyitott  $(0, aT)$  intervallumon legfeljebb egy metszéspont lehetséges. Ezért az  $X \in (0, aT)$  pont egyértelmű. Mivel  $y$  meredeksége pozitív  $x \in (0, X)$  esetén, és negatív  $x \in (X, aT)$  esetén, így a (4.6)-ben szereplő  $y$  függvény a maximumát az  $x = X$ -ben veszi fel. A (4.1) ábráról azt is észrevehetjük, hogy ha  $aT$  nő, akkor  $X$  is nő.

A modell értelmezésének és megvalósításának összefoglalása: A (4.5) egyenlet segítségével visszatérünk az eredeti problémához, és azt találjuk, hogy ha  $aT \leq 2$ , akkor  $k = 0$  adja a legnagyobb osztalékot  $T$  év alatt, ami tulajdonképpen azt jelenti, hogy a teljes nyereséget osztalékként fizetik ki. Ezért nem éri meg újra befektetni a pénzt a cégbe, mert  $a$  vagy  $T$ , vagy mindkettő túl kicsi. Másrészt, ha  $aT > 2$ , akkor létezik egy egyértelmű  $K = \frac{X}{aT}$  szám úgy, hogy  $Ku(t)$  összeget újra be kelljen fektetni.



4.1. ábra. A (4.8) egyenlet numerikus megoldása

## 5. fejezet

# Járványterjedési modellek

Járványok elég régóta körülvesznek bennünket, viszont talán csak a koronavírus volt annyira jelentőségteljes, hogy figyelmet fordítsunk felé. Szakdolgozatom ezen fejezetének megszületését pont ez a vírus inspirálta, hiszen előtte még csak nem is hallottam járvány matematikáról, pedig ez egy igazán különleges, érdekes és igen összetett része a matematikának. Ebben a fejezetben csupán csak a felszín fogjuk megkapargatni, hiszen egy járvány terjedésének teljes modellezése rendkívül bonyolult folyamat, melyre egy egész tudományág épül.

Először is tegyük fel, hogy egy populációt járvány sújt. Az egészségügyi hatóságok lehetőség szerint megpróbálják megfékezni a betegség terjedését. A fontos kérdés számunkra, hogy hány ember kapja el a betegséget korlátozó intézkedések, illetve megelőző kezelések hiányában. A betegség súlyosságától függően cselekvési tervet lehet kidolgozni, illetve meg lehet jósolni a tervezett óvintézkedések hatását. A fejezet első részében egy egyszerűbb, később pedig egy fokkal összetettebb modellen keresztül fogom bemutatni egy járvány terjedésének dinamikáját. A fejezet alapjául Valkó Éva 2021-es Folytonos modellezés előadásjegyzete [9], valamint T.P. Dreyer Modelling with Ordinary Differential Equations [1] könyve szolgált.

### 5.1. Az SI-modell

Feltételezzük, hogy a betegség terjedésének hátterében a fertőzött és egészséges emberek fizikai érintkezése áll. A dolgok leegyszerűsítése érdekében az embereket két zárt közösségre tudjuk bontani: egészséges, fertőzhető emberekre, illetve az adott vírussal már fertőzött személyekre. A modell nevében található két betű pontosan ezen két zárt csoportra utal, ahol az  $S(t)$  az egészséges emberek tömegét, míg az  $I(t)$  a fertőzöttekét jelöli. A  $t$ . időpillanatban senki sem lép be vagy ki az adott közösségekből, a modellben nincs gyógyulás a betegségből.

**5.1.1. Feltétel.** *A betegség fertőzött és fertőzhető emberek érintkezése útján terjed egy zárt közösségben, ahol nincs karantén, azaz az emberek szabadon keveredhetnek.*

A matematikai modell megalkotásához jelölje  $t$  az időt, és  $x(t)$  a közösség azon hányadát, amely  $t$ . időpontban fertőzött. Mivel a közösség zárt, így  $1 - x(t)$  a közösségben élő egészséges emberek hányada. Ezért, ha  $n$  emberből áll a közösség, akkor  $nx(t)$  fertőzött és  $n(1 - x(t))$  egészséges személy van a  $t$ . időpillanatban. Ha  $n$  elég nagy, akkor ésszerű feltételezni az alábbi:

**5.1.2. Feltétel.** *Az  $x(t)$  függvény deriváltja  $t$  folytonos függvénye, ha  $t > 0$ .*

Az (5.1.1)-ből következik, hogy a  $\delta t$  időintervallumban a betegséggel fertőzöttek száma egyenesen arányos az egészséges és beteg emberek közötti kapcsolatfelvételek számával, amelyek a  $\delta t$  időintervallumban történtek. Ez viszont arányos az egészséges és beteg emberek közötti összes lehetséges érintkezések számával a  $[0, \delta t]$  időintervallumban. A  $\rho$  valószínűségét, azaz hogy egy beteg ember kapcsolatba kerül egy egészséges emberrel az alábbi hányados adja meg:

$$\rho = \frac{\text{beteg és egészséges emberek közötti kapcsolatok időegységénként}}{\text{összes kapcsolat időegységénként}}$$

Feltehetjük, hogy a  $\rho$  valószínűség állandó. Vegyük észre, hogy  $\rho$  általában az idő függvénye, továbbá azt várnánk, hogy  $\rho$  nagyobb napközben, mint éjszaka. Az összes lehetséges kapcsolat természetesen a betegek számának és az egészséges emberek számának a szorzata  $t$ . időpontban. Ha  $\delta x$  jelöli az  $x(t)$  változását a  $\delta t$ . időintervallumon, akkor

$$\delta x = kx(1 - x)\delta t$$

ahol  $k$  egy pozitív állandó, melyet fertőzési aránynak is nevezünk. Ez magába foglalja a  $\rho$  valószínűséget és a teljes  $n$  populációt is. Ha a betegek kezdeti arányát  $\alpha$  -val jelöljük, ahol  $\alpha \in (0, 1)$ , akkor az alábbi kezdetiérték problémához jutunk:

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - x), \quad x(0) = \alpha \quad t \in (0, \infty) \quad (5.1)$$

Ez szintén egy logisztikus modell, amire láttunk példákat a (3.2) alfejezetben. Ezáltal a probléma egyértelmű megoldása az

$$x(t) = \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-kt}} \quad (5.2)$$

Megfigyelhetjük továbbá, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-kt}} = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy hosszútávon mindenki meg fog betegedni függetlenül a populáció kezdeti méretétől. Ez nem meglepő, mivel nem vezettek be karantént, ami automatikusan korlátozná a beteg emberek egészséges személyekkel való érintkezéseinek számát. Továbbá nem kapott a közösség megelőző oltást vagy egyéb gyógykezelést. Végül pedig azt is fel kell tennünk, hogy az emberek örökké betegek maradnak anélkül, hogy felépülnének. Mindezeket összefoglalva a feltételezéseink irreális eredményt adnak, miszerint senki sem fogja elkerülni a betegséget. Ezt elkerülendő, a következő alfejezetben egy fokkal realisabb modellt próbálunk felépíteni, mely talán valóságosabb eredményt ad számunkra.

## 5.2. Az SIR-modell

Az előző modellhez képest a mostani modellben már 3 zárt csoportra osztjuk az embereket, azaz fertőzhetőkre, fertőzöttekre és rezisztensekre és ezen három csoport járványterjedési dinamikáját vizsgáljuk.

Jelölje az  $S(t)$  az egészségesek, fertőzhetők tömegét, az  $I(t)$  a fertőzött sokaságát illetve az  $R(t)$  a az immunis/rezisztensek tömegét a  $t$ . időpillanatban. Továbbá fel kell tennünk, hogy egy adott  $t$  időpillanatban mindhárom csoport zárt. Csoportok közötti átjárás csak az  $S$ -ből az  $I$ -be és az  $I$ -ből az  $R$ -be lehetséges, vagyis egy egészséges embernek fertőzöttnek kell lennie először ahhoz, hogy később immunitást tudjon szerezni az adott járvány ellen. Jelen modellünkben eltekintünk a vakcina útján szerzett védettségtől.

Ezen csoportok időbeli változását az alábbi differenciálegyenlet-rendszer adja meg, ahol  $\alpha, \beta > 0$  arányossági tényezőket jelölnek.

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\alpha S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) &= \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ \dot{R}(t) &= \beta I(t)\end{aligned}$$

Ha összegezzük az alábbi három egyenletet, akkor rájöhettünk, hogy időben állandó a populáció össztömege.

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0$$

A populáció össztömegét, azaz az  $N$ -t az  $S_0 + I_0 + R_0$  összeg adja meg, ahol az  $S_0, I_0, R_0$  az adott csoport méretét jelöli a  $t = 0$  időpillanatban.

Következő lépésben érdemes megvizsgálni az egyensúlyi helyzeteket és azok stabilitását.

$$\begin{aligned}\dot{S} = 0 &\rightarrow -\alpha S(t)I(t) = 0 \\ \dot{I} = 0 &\rightarrow \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = 0 \\ \dot{R} = 0 &\rightarrow \beta I(t) = 0\end{aligned}$$

Az egyenletrendszerből tisztán látszik, hogy  $I^* = 0$ , mert  $\beta > 0$  feltételt kikötöttük, viszont  $R^*$  és  $S^*$  értéke bármilyen nemnegatív szám lehet, ha teljesítik az alábbi feltételt:

$$R^* + S^* = S_0 + I_0 + R_0 = N$$

Például az  $S^* = s$  és az  $R^* = N - s$  egy lehetséges jó megoldás. Viszont végtelen sok  $(S^*, I^*, R^*) = (s, 0, N - s)$  alakú egyensúlyi helyzet létezik, ami közül érdemes kiemelni 2 speciális esetet. Ha  $s = 0$ , akkor  $(0, 0, N)$ -t kapjuk. Ha viszont a  $\alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = 0$  egyenletből indulunk ki, ahol tudjuk, hogy  $I \neq 0$ -val, akkor az  $s = \frac{\beta}{\alpha}$  kifejezhető az egyenletből, így megkapjuk az alábbi egyensúlyi helyzetet  $(\frac{\beta}{\alpha}, 0, N - \frac{\beta}{\alpha})$

Ahhoz, hogy meg tudjuk ezen egyensúlyi helyzetek stabilitását vizsgálni, fel kell írunk a modellhez tartozó Jacobi-mátrixot:

$$\mathbf{J}(S, I, R) = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S & 0 \\ \alpha I & \alpha S - \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

- Első esetben helyettesítsük be a  $(0, 0, N)$  egyensúlyi helyzetét a Jacobi-mátrixba.

$$A_1 = \mathbf{J}(0, 0, N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

A kapott  $A_1$  mátrixnak határozzuk meg a sajátértékeit.

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\beta - \lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)((-\beta - \lambda)(-\lambda)) = \lambda^2(-\beta - \lambda)$$

$\lambda^2 = 0$ -ból megkapjuk a  $\lambda_1 = 0$  és a  $\lambda_2 = 0$  sajátértékeket, valamint a  $(-\beta - \lambda) = 0$  egyenletből a  $\lambda_3 = -\beta$  sajátértéket. A sajátértékekből látszik, hogy a  $(0, 0, N)$  egyensúlyi helyzet stabil, ami a kiinduló értékek miatt is azt jelenti, hogy mivel már az egész populáció immunis az adott járvánnyal szembe, így nincs senki, akit újonnan megfertőzhetne.

- A második esetben pedig a  $(\frac{\beta}{\alpha}, 0, N - \frac{\beta}{\alpha})$  esetet vizsgáljuk.

$$A_2 = \mathbf{J}\left(\frac{\beta}{\alpha}, 0, N - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha\frac{\beta}{\alpha} - \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Ezt követően meg kell határoznunk az  $A_2$  mátrix sajátértékeit.

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\beta & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)((-\lambda)(-\lambda)) = (-\lambda)^3$$

A  $-\lambda^3 = 0$ -ból következik, hogy a  $(\frac{\beta}{\alpha}, 0, N - \frac{\beta}{\alpha})$ -hoz tartozó mindhárom sajátérték nullával egyenlő, azaz  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Viszont emiatt a stabilitása nem eldönthető ennek az egyensúlyi helyzetnek. Ebben az esetben tulajdonképpen azt vizsgáltuk meg, amikor a populációnk egy része már átesett, míg a másik még nem az adott fertőzésen, viszont jelenleg senki sem fertőző az adott populációban.

- Harmadik esetben pedig vizsgáljuk meg általánosan az  $(s, 0, N - s)$  egyensúlyi helyzetet.

$$A_3 = \mathbf{J}(s, 0, N - s) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha s & 0 \\ 0 & \alpha s - \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

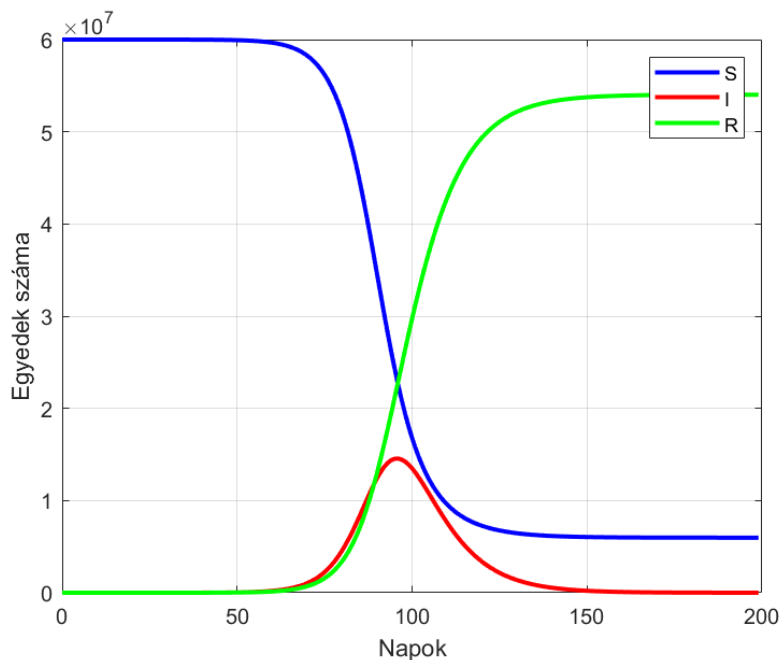
Ennek az  $A_3$  mátrixnak a sajátértékei:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha s & 0 \\ 0 & \alpha s - \beta - \lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(\alpha s - \beta - \lambda) = \lambda^2(\alpha s - \beta - \lambda)$$

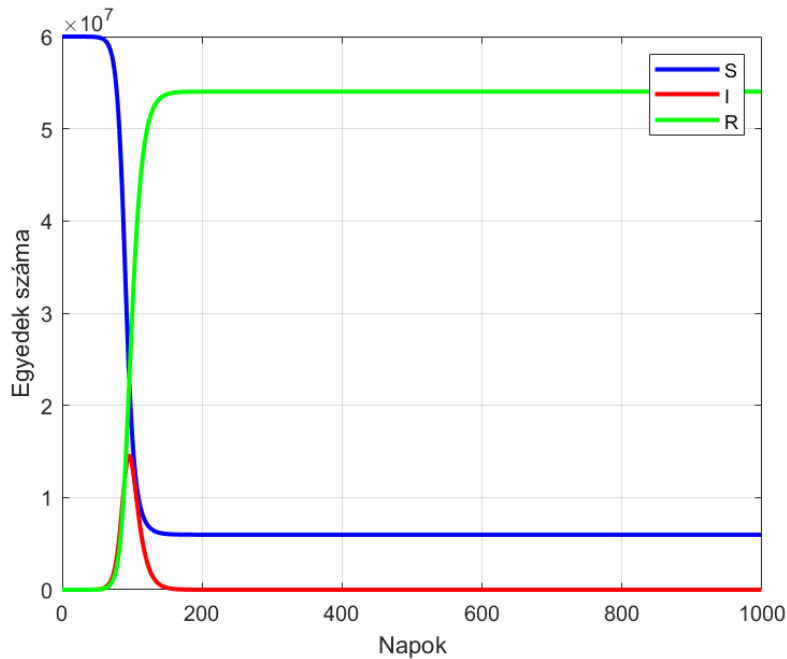
A  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  sajátérték nulla lesz, viszont a  $\lambda_3$  sajátérték  $\alpha s - \beta$  értékkel lesz egyenlő. Ez esetben az  $\alpha s - \beta$  előjelétől függ az egyensúlyi helyzet stabilitása. Ha  $\alpha s - \beta > 0$ , akkor instabil csomó, míg ha  $\alpha s - \beta < 0$ , akkor stabil csomó lesz az  $(s, 0, N - s)$  egyensúlyi helyzetet stabilitása. Viszont, ha  $\alpha s = \beta$  értékkel, akkor a stabilitás nem eldönthető.

Az SIR-modell legegyszerűbben egy MATLAB kód segítségével tudom szemléltetni. Ehhez a kódhoz az (5.2) differenciálegyenlet-rendszert használtam fel, valamint az  $\alpha = 5 \cdot 10^{-9}$  értékkel jelöltem a fertőzési rátát, a  $\beta = 0,12$  pedig a gyógyulási rátát jelöli. A teljes populáció méretét, azaz az  $N$  értékét 60 millióban határoztam meg végül pedig az  $I_0$  jelölte a kezdeti fertőzött személyek számát, ami ebben az esetben 10 fő volt.

A kódot 200, illetve 1000 napra is lefutattam, viszont ahogy az ábrákból is látszik, az első 200 nap után már nem történik változás, a rendszer beállt az egyensúlyi állapotra.



5.1. ábra. Az SIR-modell szemléltetése  $\alpha = 5 \cdot 10^{-9}$ ,  $\beta = 0,12$ ,  $N = 60000000$ ,  $I_0 = 10$  paraméterek esetén. (t=200 nap)



5.2. ábra. Az SIR-modell szemléltetése  $\alpha = 5 \cdot 10^{-9}$ ,  $\beta = 0,12$ ,  $N = 60000000$ ,  $I_0 = 10$  paraméterek esetén. (t=1000 nap)

Az (5.1), illetve az (5.2) ábrákból azt a következtetést tudjuk levonni, hogy a járvány az 50. és a 150. nap között tombol, viszont ezt követően beáll az egyensúlyi állapot, aminek eredményeképpen nem lesz új fertőzhető, fertőzött, és immunis személy sem a populációban. Ezen kívül még látszik az ábrákból, hogy a társadalom nagy része átesik az első 150 napban a betegségen, viszont kevesebb, mint 1 millió állampolgár nem fogja sohasem elkapni ezt a betegséget, ugyanis a későbbiekben a fertőző személyek száma nulla lesz, ami megadadályozza a járvány újabb fellendülését.

Az SI, illetve az SIR-modelleken kívül léteznek jóval összetettebbek is, amik jóval realisabban tudják modellezni egy adott járvány terjedését. Az ilyen modellek figyelembe veszik az oltás által szerzett immunitást, a betegség utáni esetleges immunitás hiányát, az immunitás idővel elvesztését, a fertőzés során bekövetkező halált, a betegségtől független születéseket és halálozásokat illetve a járvány megfékezése érdekében bevezetett óvintézkedések összességét is.

## 6. fejezet

# Fizikai modell - teljesítmény

Az előző fejezetek során már láthattunk példát a differenciálegyenletek különböző biológiai, járványmodellezési, illetve gazdasági használatára. Ebben a fejezetben egy fizikai alkalmazásba szeretnék betekintést nyújtani a teljesítmény, mint fizikai fogalom segítségével. Ezen fizikai alkalmazás ismertetését egy matematikai modell segítségével fogom megtenni, aminek a felhasználásával egy hajó által megtett távolságot, illetve az ehhez szükséges időt fogom tudni meghatározni.

Amikor egy gépet értékelnek, fontos a munkavégzés üteme. Akit érdekelnek az autók teljesítményei, az ismeri a lóerőt vagy a kilowattot. Ennek matematikai kifejezésére a teljesítmény fogalmát használjuk. A fejezet alapjául T.P. Dreyer *Modelling with Ordinary Differential Equations* [1] könyve szolgált.

**6.0.1. Definíció.** Ha egy  $F$  erő hatására egy részecske  $v$  sebességgel mozog, akkor a teljesítmény a két vektor skaláris szorzata, azaz

$$P = F \cdot v \tag{6.1}$$

Ha  $v$  méter per szekundomban, azaz  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ben, az  $F$  pedig newtonban (N) van megadva, akkor a teljesítmény mértékegysége watt (W) lesz. Szemléltessük egy példán keresztül is az adott fizikai problémát:

Egy  $M$  kilogramm tömegű hajót olyan gépek hajtanak meg, amelyek állandó  $H$  watt teljesítményt generálnak. A hajó előre felé irányuló mozgásával szembeni ellenállás nagysága arányos a hajó sebességével minden időpillanatban. Ha a hajó nyugalmi helyzetből indul és  $V$   $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  végsebességet ér el, amikor egy rögzített irányba halad, akkor határozzuk meg azt a megtett távolságot, amíg a hajó sebessége  $\frac{1}{2}V$  nem lesz, valamint az ehhez szükséges idő nagyságát is.

Válasszuk az  $x$ -tengelyt a hajó által megtett haladás reprezentálására úgy, hogy az origó legyen a kiindulási pont, és ebben a pontban vegyük a  $t$  értékét nullának. Jelölje a  $v(t)$  a sebességet a  $t$ . időpillanatban. Vegyük észre, hogy  $v$  előjele határozza meg a sebesség irányát, ezért az egydimenziós  $v$  vektort egyszerűen  $v$ -ként írjuk fel, és ezáltal a skaláris szorzat visszaáll a valós számok halmazán értelmezett szokásos szorzására.



Ha a gépek ereje  $F$  newton  $v \frac{m}{s}$  sebességnél, akkor (6.1) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$F(v) = \frac{H}{v} \quad \text{newton}$$

**6.0.2. Definíció** (Newton második törvénye). Ha egy részecske tömege mozgás közben változatlan marad, akkor a részecske gyorsulása arányos a részecskére ható eredő erő nagyságával, és iránya megegyezik az eredő erő irányával.

$$\text{tömeg} \cdot \text{gyorsulás} = \text{eredő erő} \quad (6.2)$$

Használjuk most Newton második törvényét egy  $m$  tömegű részecskére ellentétes irányba ható  $F$  erő és egy  $P(v)$  ellenállási erő miatti egyenes vonalú mozgás modelljének megalkotására. Newton második törvényének segítségével megkapjuk, hogy

$$M \frac{dv}{dt} = F(v) - P(v) \quad (6.3)$$

Ezt felhasználva a matematikai modellünk a következő lesz:

$$\begin{cases} M \frac{dv}{dt} = \frac{H}{v} - kv & t \in (0, \infty) \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

ahol  $k \in \mathbb{R}$  egy rögzített konstans. Mivel  $V$  végsebességnél nincs gyorsulás, azaz  $\frac{dv}{dt} = 0$ , így adódik, hogy

$$\frac{H}{V} = kV$$

Ebből az egyenletből átalakítással ki tudjuk fejezni a  $k = \frac{H}{V^2}$  konstanst, amit ha behelyettesítünk a (6.4) egyenletbe, az alábbi egyenletet kapjuk.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{H}{MV^2} \frac{V^2 - v^2}{v} & t \in (0, \infty) \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

Ennek a differenciálegyenletnek könnyen megkaphatjuk a megoldását:

$$\frac{v}{V^2 - v^2} dv = \frac{H}{MV^2} dt$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{V^2 - v^2}} = \frac{H}{MV^2} t$$

$$t = \frac{MV^2}{2H} \ln \frac{1}{V^2 - v^2} + c$$

A kezdeti feltételből következik, hogy

$$-c = \frac{MV^2}{2H} \ln \frac{1}{V^2}$$

$$c = \frac{MV^2}{2H} \ln V^2$$

$$t = \frac{MV^2}{2H} \ln \frac{V^2}{V^2 - v^2} \quad (6.6)$$

Érdemes átírni a (6.5) differenciálegyenletet a következő alakra

$$\frac{d}{dt}(v^2) + \frac{2H}{MV^2}v^2 = \frac{2H}{M}$$

ami lineáris  $v^2$ -ben, és ezért a  $v^2$  egyértelmű és a kezdeti érték folytonos függvénye a (3.2.3) tétel szerint. Ebből két megoldást is kapunk  $v$ -re. Figyeljük meg, hogy mindkét megoldás kielégíti a (6.5) differenciálegyenletet és csak előjelben különböznek egymástól. Ennek a problémának az értelmezési szakaszában azonban  $v$  mindig nem negatív, így  $v$  ekkor a probléma egyértelmű megoldása és a kezdeti érték folytonos függvénye.

A probléma második kérdésére most már tudunk válaszolni. Az  $\frac{1}{2}V$  sebesség eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{MV^2}{2H} \ln \frac{4}{3} \quad \text{s.} \quad (6.7)$$

A probléma első kérdése a sebesség és a távolság kapcsolatával foglalkozik. A (6.5) deriváltat alakítsuk át úgy, hogy a  $t$  változótól ne függjön. Ezt a következő módszer segítségével tudjuk könnyedén megoldani:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

ahol  $x$  a  $t$ . időpontban megtett távolságot jelöli. Most (6.5) átírható szétválasztható változójú differenciálegyenletté.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{H}{MV^2} \frac{V^2 - v^2}{v^2} & x \in (0, \infty) \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Ennek a differenciálegyenletnek könnyen megkaphatjuk a megoldását:

$$\frac{v^2}{V^2 - v^2} dv = \frac{H}{MV^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{v}{V} + 1}{1 - \frac{v}{V}} - v \right) = \frac{H}{MV^2} x$$

$$x = \frac{MV^2}{2H} \ln \left( \frac{\frac{V+v}{V}}{\frac{V-v}{V}} - v \right)$$

$$x = \frac{MV^2}{2H} \ln \left( \frac{V+v}{V-v} - v \right) \quad (6.9)$$

Ha behelyettesítjük  $v = \frac{1}{2}V$  értéket a (6.9) egyenletbe, akkor megkapjuk az  $x$  távolságot.

$$x = \frac{MV^2}{2H} \ln \left( 3 - \frac{1}{2}V \right) \quad (6.10)$$

Tehát a teljesítmény definícióját (6.0.1) és Newton második törvényét (6.0.2) felhasználva alkottunk egy matematikai modellt (6.4), aminek a segítségével megtudtuk határozni a hajó által elért  $\frac{1}{2}V$  sebességhez szükséges időt (6.7) és az ezidő alatt megtett távolságot (6.10).

A differenciálegyenleteket a fizika más területén is előszeretettel használják, például: a radioaktív bomlások modellezésénél, a mechanikai rezgések leírásakor vagy a hőkeveredési egyenletek viselkedésének megértésekor.

## 7. fejezet

### Szerelmi modellek

A következő fejezet Valkó Éva 2021-es Folytonos modellezés előadásjegyzete [9], valamint J. C. Sprott Dynamical Models of Love [10] publikációja alapján készült.

Elsőre talán kicsit furcsán hangozhat, viszont a matematikát, akár két ember szerelmi kapcsolatának leírására is tökéletesen lehet használni. Strogatz 1994-ben megjelent könyvében [11] egy rövid részt szentelt a szerelmi kapcsolatoknak és számos hozzá kapcsolódó matematikai példának. Lényegében ugyanezt a modellt írta le 1960-ban Rapoport [12], és 1993-ban Radzicki [13] is tanulmányaiban. Bár Strogatz modelljét eredetileg inkább a hallgatók motiválására, mint a szerelmi kapcsolatok komoly leírására szánta, mégis számos érdekes és elfogadható előrejelzést ad, és olyan kiterjesztéseket javasol, amelyek még szélesebb körű viselkedés leírással tudnak szolgálni. Strogatz a modelljében kitér a szerelmi háromszögekre is, mint jelenségre, viszont ebben a fejezetben én csak a két ember kapcsolatát leíró esetet fogom vizsgálni.

A szerelmi modellek leírásában az első nehézségbe akkor ütközünk, amikor a szerelem fogalmát szeretnénk meghatározni és azt valamilyen értelmes módon számszerűsíteni is szeretnénk. Ebben a modellben csak a párok saját illetve egymás iránt érzett szerelmét fogjuk felhasználni. Vagyis eltekintünk más külső hatásoktól, továbbá a leíró paramétereket változatlanok tekintjük, kizárva ezzel a tanulás és az alkalmazkodás lehetőségét.

Jelölje  $R$  és  $J$  egy-egy  $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  képező függvényt, ahol  $R(t)$  Rómeó, míg  $J(t)$  Júlia érzéseinek erősségét és irányát reprezentálja a  $t$ . időpillanatban.

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = aR(t) + bJ(t) & R(0) = R_0 \\ \dot{J}(t) = cR(t) + dJ(t) & J(0) = J_0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Itt  $a$  és  $b$  konstansok Rómeó romantikus érzéseit, míg  $c$  és  $d$  Júliáét befolyásolják. Az  $a$  paraméter azt írja le, hogy Rómeót mennyire bátorítják saját érzései, míg a  $b$  paraméter azt, hogy Júlia érzései milyen mértékben ösztönzik őt. Gottman az előbbire a viselkedési tehetetlenséget, az utóbbira a befolyásolási függvény kifejezést használta, és feltevése szerint a tehetetlenség akkor a legnagyobb, ha  $a = 0$ . A kapott dinamika kétdimenziós, amelyet a kezdeti feltételek és a négy paraméter szabályoznak, amik lehetnek pozitívak vagy negatívak is egyaránt, azaz  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Rómeó romantikus érzéseinek négy típusa létezik az  $a$  és  $b$  előjeleitől függően, a hozzájuk tartozó neveket pedig Strogatz tanítványai javasolták:

1. Buzgó hód  $a > 0, b > 0$  Rómeónak vannak saját érzései és Júlia érzései is bátorítják őt.
2. Nárcisztikus majom  $a > 0, b < 0$  Rómeónak vannak saját érzései, de elvonul Júlia érzései elől.
3. Óvatos, vagy biztonságos szerető  $a < 0, b > 0$  Rómeó visszavonul saját érzései elől, míg Júlia bátorítja őt.
4. Remete  $a < 0, b < 0$  Rómeó éppúgy visszavonul saját érzései elől, mint Júlia.

Mivel ezt Júlia esetén is le tudjuk írni, így összesen 16 párosítás lehetséges, melyek mindegyikének megvan a saját maga dinamikája, bár ezek fele Rómeó és Júlia felcserélésével is megkapható. Vegyünk pár konkrét esetet ezek közül, viszont előtte határozzuk meg a (7.1) differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzetét.

A (7.1) differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjai az alábbi egyenlet-rendszer megoldásával kapható meg:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = 0 \\ \dot{J}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} aR + bJ = 0 \\ cR + dJ = 0 \end{cases}$$

Ha az  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mátrix determinánsa nem egyenlő 0-val, akkor egy megoldása van az egyenletrendszernek a  $(0, 0)$  egyensúlyi helyzet. Míg ha az előbbieken említett mátrix determinánsa megegyezik 0-val, akkor végtelen sok megoldást kapunk, amik kielégítik a fenti egyenletrendszert.

Ezt követően vizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását általánosan a Jacobi-mátrix segítségével.

$$\mathbf{J}(R, J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial J} \\ \frac{\partial \dot{J}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{J}}{\partial J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Megvizsgáljuk a  $(0, 0)$  egyensúlyi helyzet stabilitását.

$$A = \mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Határozzunk meg a kapott  $A$  mátrix sajátértékeit.

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Láthatjuk, hogy  $\lambda$ -t csak konkrét  $a, b, c$  és  $d$  értékek megadása esetén kaphatjuk meg, vázoljunk pár esetet és vizsgáljuk meg az origó, mint egyensúlyi pont stabilitását.

1. Rómeó és Júlia érzései pontosan ellentétesek egymás iránt.

Itt a paraméterek a következők lesznek:  $a = 0, b, c = b, d = 0$  és az eredeti (7.1) differenciálegyenlet az alábbira módosul:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = bJ(t) \\ \dot{J}(t) = bR(t) \end{cases}$$

A differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó együttható mátrix, mely megegyezik a Jacobi-mátrixszal.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az  $A_1$  mátrix sajátértékeit.

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & b \\ b & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - b^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{b^2} = \pm|b| = \pm b$$

Láthatjuk, hogy a  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  abszolútértéke azonos, viszont előjele eltérő, így nyereg pontot fogunk kapni, ha  $b \neq 0$ . Ha a  $b$  paraméter értéke 0 lenne, akkor  $\dot{R} = \dot{J} = 0$  egyenlőségből következne, hogy Rómeó és Júlia érzései időben állandóak.  $b = 0$  esetén nem tudjuk meghatározni a stabilitást.

2. Se veled se nélküled kapcsolat.

Ez esetben Rómeó furcsán viselkedik, míg Júlia teljesen normálisan. Ezt lefordítva a paraméterek nyelvére azt jelenti, hogy  $a = 0, b = -c, c, d = 0$ . Ezáltal az alábbi differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -cJ(t) \\ \dot{J}(t) = cR(t) \end{cases}$$

Jelölje  $A_2$  a differenciálegyenlet-rendszer együttható mátrixát.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az  $A_2$  mátrix sajátértékeit, majd később a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat is.

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -c \\ c & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + c^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-c^2} = \pm i|c| = \pm ic$$

Mivel a  $\lambda$  sajátértékek  $\pm ic$  alakú komplex számok, ezért a  $(0,0)$  egyensúlyi helyzetünk centrum lesz.

3. Ellentétek vonzák egymást.

Ez esetben  $c = -b$  és  $d = -a$ . Az ehhez a paraméterekhez tartozó differenciálegyenlet az alábbi lesz:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = aR(t) + bJ(t) \\ \dot{J}(t) = -bR(t) - aJ(t) \end{cases}$$

Jelölje  $A_3$  a differenciálegyenlet-rendszer együttható mátrixát.

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Ezt követően határozzuk meg a mátrix sajátértékeit, azaz oldjuk meg a  $\det(A_3 - \lambda I) = 0$  egyenletet.

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ -b & -a - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(-a - \lambda) + b^2 = \lambda^2 - a^2 + b^2$$

Ebben az esetben  $\lambda^2 = a^2 - b^2$  értékkel, amit ha átalakítunk megkapjunk, hogy  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ . A gyökvonás tulajdonságaiból tudjuk, hogy  $a^2 - b^2 \geq 0$ , azaz  $|a| \geq |b|$  minden esetben.

Láthatjuk, hogy a  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  értéke azonos, viszont előjele eltérő, így nyereg pontot fogunk kapni, ha  $a \neq b$ .

4. Hasonló szerelmesek alkotnak jó párt.

Ebben az esetben  $c$  paraméter értéke megegyezik  $b$ -vel, míg  $d$  paraméter értéke  $a$ -val. Írjuk fel a megfelelő differenciálegyenlet-rendszert.

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = aR(t) + bJ(t) \\ \dot{J}(t) = bR(t) + aJ(t) \end{cases}$$

Jelölje  $A_4$  a differenciálegyenlet-rendszer együttható mátrixát.

$$A_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Ezt követően határozzuk meg az  $A_4$  mátrix sajátértékeit.

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)^2 - b^2$$

Ebből következik, hogy az  $|a - \lambda| = |b|$ , azaz  $a - \lambda = b$  vagy  $a - \lambda = -b$ . Ha ezeket rendezzük, akkor megkapjuk, hogy  $\lambda_1 = a - b$  és  $\lambda_2 = a + b$  értékekkel. Ezen egyensúlyi helyzet stabilitása  $a$ -tól,  $b$ -től és egymás viszonyától függ.

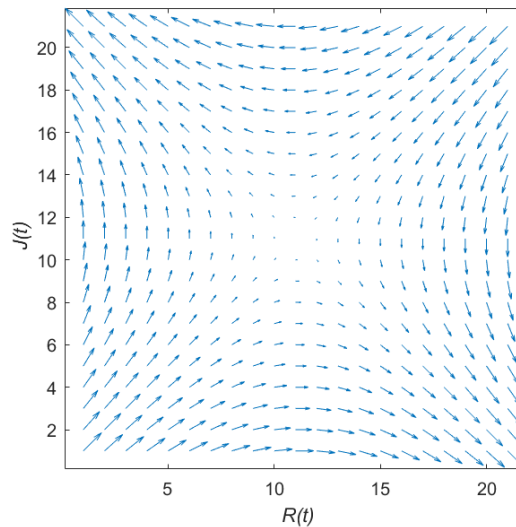
- (a) Ha  $a$  pozitív és  $b = 0$ , akkor  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  is pozitív lesz, vagyis ez egy instabil csomó.
- (b) Ha  $a$  pozitív,  $b$  negatív és  $|a| > |b|$ , akkor  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  is pozitív lesz, vagyis ez egy instabil csomó.
- (c) Ha  $a$  pozitív,  $b$  negatív és  $|a| = |b|$ , akkor  $\lambda_1$  pozitív, viszont  $\lambda_2 = 0$ , vagyis ez egy instabil csomó.
- (d) Ha  $a$  pozitív,  $b$  negatív és  $|a| < |b|$ , akkor  $\lambda_1$  pozitív,  $\lambda_2$  negatív lesz, vagyis ez egy nyeregpont.
- (e) Ha  $a = 0$  és  $b$  negatív, akkor  $\lambda_1$  pozitív,  $\lambda_2$  negatív lesz, vagyis ez egy nyeregpont.
- (f) Ha  $a$  negatív,  $b$  negatív és  $|a| < |b|$ , akkor  $\lambda_1$  pozitív,  $\lambda_2$  negatív lesz, vagyis ez egy nyeregpont.
- (g) Ha  $a$  negatív,  $b$  negatív és  $|a| = |b|$ , akkor  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2$  negatív lesz, vagyis ez egy stabil csomó.
- (h) Ha  $a$  negatív,  $b$  negatív és  $|a| > |b|$ , akkor  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  is negatív lesz, vagyis ez egy stabil csomó.
- (i) Ha  $a$  negatív és  $b = 0$ , akkor  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  is negatív lesz, vagyis ez egy stabil csomó.
- (j) Ha  $a$  negatív,  $b$  pozitív és  $|a| > |b|$ , akkor  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  is negatív lesz, vagyis ez egy stabil csomó.
- (k) Ha  $a$  negatív,  $b$  pozitív és  $|a| = |b|$ , akkor  $\lambda_1$  negatív, míg  $\lambda_2 = 0$  lesz, vagyis ez egy stabil csomó.
- (l) Ha  $a$  negatív,  $b$  pozitív és  $|a| < |b|$ , akkor  $\lambda_1$  negatív, míg  $\lambda_2$  pozitív lesz, vagyis ez egy nyeregpont.
- (m) Ha  $a = 0$  és  $b$  pozitív, akkor  $\lambda_1$  negatív, míg  $\lambda_2$  pozitív lesz, vagyis ez egy nyeregpont.
- (n) Ha  $a$  pozitív,  $b$  pozitív és  $|a| < |b|$ , akkor  $\lambda_1$  negatív, míg  $\lambda_2$  pozitív lesz, vagyis ez egy nyeregpont.
- (o) Ha  $a$  pozitív,  $b$  pozitív és  $|a| = |b|$ , akkor  $\lambda_1 = 0$ , míg  $\lambda_2$  pozitív lesz, vagyis ez egy instabil csomó.
- (p) Ha  $a$  pozitív,  $b$  pozitív és  $|a| > |b|$ , akkor  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  is pozitív lesz, vagyis ez egy instabil csomó.



Nézzünk pár konkrét esetet is a fent bemutatott példákra. A fázisképek szemléltetéséhez a MATLAB programot használtam.

1. Rómeó és Júlia is furcsa.

Ez az általánosan vizsgált első esetünk volt, amit az  $a = 0, b = -1, c = -1$  és  $d = 0$  paraméterekkel szemléltetve a következőre jutunk:

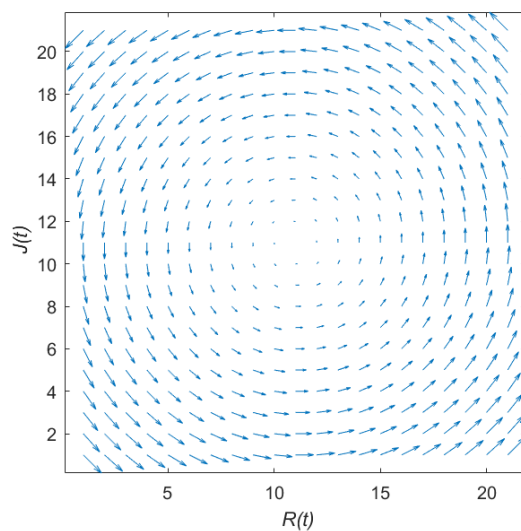


7.1. ábra. Az 1. esethez tartozó fáziskép

A korábbi számításunkat igazolva, ezen paraméterek megválasztása mellett az origó, mint egyensúlyi pont valóban nyeregpont.

2. Rómeó furcsa, Júlia normális.

Ez az általánosan vizsgált második esetünk volt, amit az  $a = 0, b = -1, c = 1$  és  $d = 0$  paraméterekkel szemléltetve a következő fázisképet kapjuk:

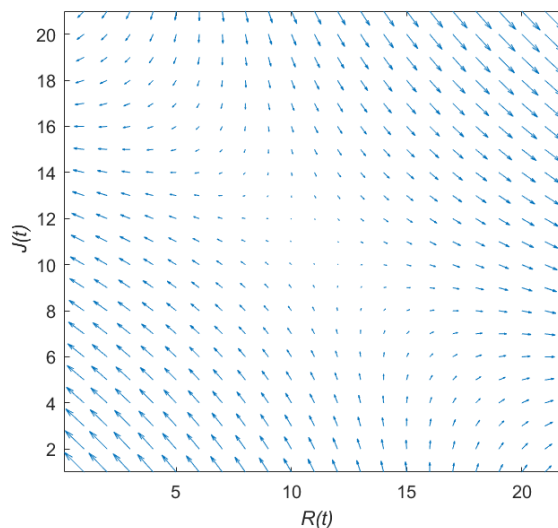


7.2. ábra. A 2. esethez tartozó fáziskép

Ahogy azt előzetesen is láthattuk, a  $(0,0)$  egyensúlyi pont valóban egy centrum.

3. Ellentétek vonzák egymást.

Ezt az esetet legjobban az  $a = 2, b = 1, c = -1$  és  $d = -2$  paraméterekkel lehet szemléltetni:

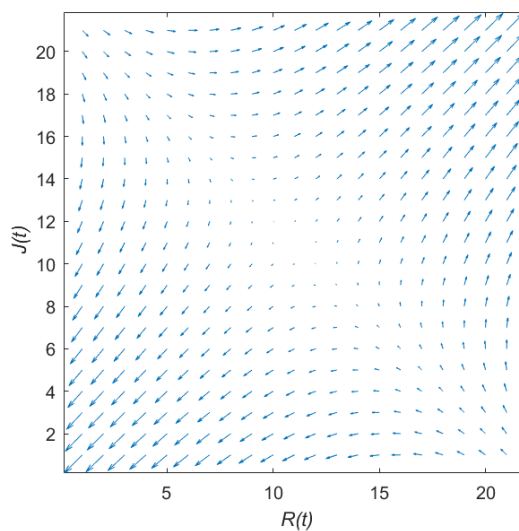


7.3. ábra. 3. esethez tartozó fáziskép

Az előzetes feltevésünket igazolva, az origó valóban egy nyeregpon.

4. Hasonló szerelmek alkotnak jó párt.

Az előzőekhez képest, csak a  $d$  paraméter értékét növeltem, így az alábbikra jutottam:  $a = 1, b = 2, c = 2$  és  $d = 1$ :



7.4. ábra. 4. esethez tartozó fáziskép

Ezen paraméterek mellett az origó nyeregpont lesz.

# Irodalomjegyzék

- [1] T.P. Dreyer - Modelling with Ordinary Differential Equations, CRC Press, United States of America, 1993
- [2] Pfeil Tamás - Differenciálegyenletek előadásjegyzet, ELTE, 2021
- [3] Csomós Petra - Alkalmazott analízis 2 előadásjegyzet, ELTE, 2021
- [4] Faragó István - Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei  
[http://faragois.web.elte.hu//jegyzet\\_Szeged.pdf](http://faragois.web.elte.hu//jegyzet_Szeged.pdf)
- [5] Farkas Csaba - Differenciálegyenletek  
[https://moodle.ms.sapientia.ro/pluginfile.php/12204/mod\\_resource/content/1/konyv.pdf](https://moodle.ms.sapientia.ro/pluginfile.php/12204/mod_resource/content/1/konyv.pdf)
- [6] Szaszko-Bogár Viktor - Közönséges differenciálegyenletek  
<http://www.staff.u-szeged.hu/~vszaszko/ODE%2020130902.pdf>
- [7] Tóth János, Simon L. Péter - Differenciálegyenletek, Typotex Kiadó, Budapest, 2005
- [8] USA lakossága  
<https://www2.census.gov/prod2/statcomp/documents/CT1970p2-13.pdf>
- [9] Valkó Éva - Folytonos modellezés előadásjegyzet, ELTE, 2021
- [10] J. C. Sprott - Dynamical Models of Love  
<https://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper277.pdf>
- [11] Strogatz, S.H. - Nonlinear dynamics and chaos, 1994  
<https://www.fulviofrisone.com/attachments/article/464/Strogatz,%20S.H.%20-%20Nonlinear%20dynamics%20and%20chaos.pdf>
- [12] Rapoport, A. - Fights, games and debates, University of Michigan Press, United States of America, 1960
- [13] Radzicki, M. J. - Dyadic processes, tempestuous relationships, and system dynamics, 1993  
<https://doi.org/10.1002/sdr.4260090105>

- [14] Kanadai daru k ep  
[https://hu.wikipedia.org/wiki/Kanadai\\_daru](https://hu.wikipedia.org/wiki/Kanadai_daru)
- [15] Verhulst, Pierre-Fran ois - Deuxi me m emoire sur la loi d'accroissement de la population, 1847
- [16] Thomas R. Malthus - An Essay on the Principle of Population, 1798  
<http://la.utexas.edu/users/hcleaver/368/368MalthusPopCh10table.pdf>
- [17] Pearl Raymond, Lowell J. Reed - On the Rate of Growth of the Population of the United States and its Mathematical Representation, 1920  
<https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.6.6.275>
- [18] Miller R., Botkin D. - Endangered species: models and predictions, 1974  
<https://www.jstor.org/stable/27844812>

# Függelék

## Az 5. fejezethez tartozó MATLAB kódok

Az 5.1 ábra MATLAB kódja:

```
function [S,I,R] = sir_modell(alfa,beta,N,I0,T,dt)
    S = zeros(1,T/dt);
    S(1) = N;
    I = zeros(1,T/dt);
    I(1) = I0;
    R = zeros(1,T/dt);
    for tt = 1:(T/dt)-1
        dS = (-alfa*I(tt)*S(tt)) * dt;
        dI = (alfa*I(tt)*S(tt) - beta*I(tt)) * dt;
        dR = (beta*I(tt)) * dt;
        S(tt+1) = S(tt) + dS;
        I(tt+1) = I(tt) + dI;
        R(tt+1) = R(tt) + dR;
    end
end
alfa = 5*10^-9;
beta = 0.12;
N = 6*10^7;
I0 = 10;
T = 200;
dt = 1;
[S,I,R] = sir_modell(alfa,beta,N,I0,T,dt);
tt = 0:dt:T-dt;
plot(tt,S,'b',tt,I,'r',tt,R,'g','LineWidth',2); grid on;
xlabel('Napok'); ylabel('Egyedek száma');
```

```
legend('S','I','R');
```

Az 5.2 ábra MATLAB kódja:

```
alfa = 5*10^-9;
beta = 0.12;
N = 6*10^7;
I0 = 10;
T = 1000;
dt = 1;
[S,I,R] = sir_modell(alfa,beta,N,I0,T,dt);
tt = 0:dt:T-dt;
plot(tt,S,'b',tt,I,'r',tt,R,'g','LineWidth',2); grid on;
xlabel('Napok'); ylabel('Egyedek száma');
legend('S','I','R');
```

## A 7. fejezethez tartozó MATLAB kódok

A 7.1 ábra MATLAB kódja:

```
[X1,X2] = meshgrid(-5:0.5:5);
xs = arrayfun(@(x,y) {odeFun([], [x,y])}, X1, X2);
x1s = cellfun(@(x) x(1), xs);
x2s = cellfun(@(x) x(2), xs);
quiver(x1s, x2s)
xlabel('\it R(t)')
ylabel('\it J(t)')
axis tight equal;
function dxdt = odeFun(t,x)
    dxdt(1) = 0*x(1)-1*x(2);
    dxdt(2) = -1*x(1)+0*x(2);
end
```

A 7.2 ábra MATLAB kódja:

```
[X1,X2] = meshgrid(-5:0.5:5);
xs = arrayfun(@(x,y) {odeFun([], [x,y])}, X1, X2);
x1s = cellfun(@(x) x(1), xs);
```

```

x2s = cellfun(@(x) x(2), xs);
quiver(x1s, x2s)
xlabel('\it R(t)')
ylabel('\it J(t)')
axis tight equal;
function dxdt = odeFun(t,x)
    dxdt(1) = 0*x(1)-1*x(2);
    dxdt(2) = 1*x(1)+0*x(2);
end

```

A 7.3 ábra MATLAB kódja:

```

[X1,X2] = meshgrid(-5:0.5:5);
xs = arrayfun(@(x,y) {odeFun([], [x,y])}, X1, X2);
x1s = cellfun(@(x) x(1), xs);
x2s = cellfun(@(x) x(2), xs);
quiver(x1s, x2s)
xlabel('\it R(t)')
ylabel('\it J(t)')
axis tight equal;
function dxdt = odeFun(t,x)
    dxdt(1) = 2*x(1)+1*x(2);
    dxdt(2) = -1*x(1)-2*x(2);
end

```

A 7.4 ábra MATLAB kódja:

```

[X1,X2] = meshgrid(-5:0.5:5);
xs = arrayfun(@(x,y) {odeFun([], [x,y])}, X1, X2);
x1s = cellfun(@(x) x(1), xs);
x2s = cellfun(@(x) x(2), xs);
quiver(x1s, x2s)
xlabel('\it R(t)')
ylabel('\it J(t)')
axis tight equal;
function dxdt = odeFun(t,x)
    dxdt(1) = 1*x(1)+2*x(2);
    dxdt(2) = 2*x(1)+1*x(2);
end

```