SZAKDOLGOZAT

Catalan-számok

Szécsi Balázs

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika Bsc

Témavezető: Dr. Ágoston István

Algebra és Számelmélet tanszék

Budapest, 2022.

NYILATKOZAT

Név: Szécsi Balázs

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: FEL7X8

Szakdolgozat címe:
Catalan-számok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.26.

Szécsi

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Ágoston Istvánnak, a tanulmányaim alatt nyújtott segítségért, valamint végtelen türelméért mind a kurzusok, mind a konzultációk alatt.

Köszönöm Gelman Krisztiánnak a program megvalósítására tett javaslatait, valamint a programozásban nyújtott nélkülözhetetlen segítségét.

Végül köszönöm családomnak a bizalmukat és a rengeteg támogatást amit kaptam tőlük, valamint hogy végig hittek benne, hogy egyszer végre elkészül a szakdolgozatom.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Már gyerekként is vonzott a világ megismerése, a felfedezés öröme. Ennek az izgalmas és fordulatos útnak sosem lehet a végére érni, az ember tudás iránti vágya az évek folyamán egyre csak nő. Utunk során sokat segít az ismeretanyagok összekapcsolása, a rendszerezés, a minták felismerése. Mindig jó érzés valami újjal találkozva rájönni, hogy ezt igazából már ismerjük. A szakdolgozatom témájának éppen ezért választottam a Catalan-számokat. Geometriai előfordulásaik számos helyen felbukkannak és merőben különbözőek egymástól, de legbelül valahogy mégis egyformák.

1. Történelmi áttekintés

Napjainkban több, mint 400 Catalan-számokkal foglalkozó cikk elérhető. A történelem során számos neves matematikus foglalkozott velük. Az ismeretanyag bővülése viszonylag pontosan követhető a korabeli matematikusok levelezéseiből és publikációiból. Rövid történeti bevezetőnkben ezt a fejlődést fogjuk végigkövetni a 18. századtól, egészen napjainkig.

A Catalan-számokról elsőként a híres svéd matematikus, Leonard Euler tesz említést mentorának és kollégájának, a porosz Christian Goldbachnak címzett levelében. Ebben a levélben azt a problémát veti fel, hogy vajon a konvex sokszögeket hányféleképp lehet háromszögekre bontani nem metsző átlók segítségével. Egy későbbi, Johann Andreas von Segner magyar matematikussal történt levélváltásban Euler szintén említést tesz a háromszögelések problémájáról. Von Segner válaszában egészen a 20 csúcsú sokszögig kiszámolja a megoldásokat. Ugyan a levélben számolási hibát vétett, de Euler ez alapján is könnyedén meghatározta a rekurziót a bizonyítás részletei nélkül.

Kevésbé ismert tény, hogy a Catalan-számokat már Euler előtt felfedezték. A Kínában élt mongol matematikus, Antu Ming könyvében számos interpretációjuk megjelenik, valamint különböző hatványsorokban is használja őket. Halála után könyvét diákja, Chen Jixin fejezte be, de a publikálásra további – valamivel több mint – hatvan évet várni kellett. Munkája a nyugatra tehát csak későn jutott el, nem csoda hogy az európai matematikusok a Catalan-számokat addigra már rég ismerték. Érdekes, hogy a számsorozatot a világ két felén egymástól függetlenül szinte egyszerre, alig több mint két évtized eltéréssel fedezték fel. A felfedezések ráadásul mind geometriai interpretációkon keresztül történtek.

Évtizedekkel később, a francia matematikus, Gabriel Lamé, egy Joseph Liouvillehez írt levelében elsőként ad elegáns kombinatorikus bizonyítást Euler és von Segner eredményeire. A belga matematikus, Charles Eugéne Catalan ezt a bizonyítást továbbfejlesztette, majd publikálta. Catalan több cikket is megjelentetett a számsorozattal kapcsolatban. Megoldotta a szorzótényező zárójelezéseinek problémáját, amit össze is kötött a konvex sokszögek háromszögelésével. Megemlítette a szavazati sorrendek problémáját is, viszont ezt nem bizonyította. Erre elsőként egy brit matematikustól, William Allen Whitworthtől kaptunk kombinatorikus bizonyítást. Whitworth érdekes kombinatorikai alkalmazásokat is talált a témában, viszont nem vette észre, hogy az általa meghatározott számsorozat a Catalan-számok sorozata.

Az évek folyamán rohamosan nőtt a Catalan-számokkal kapcsolatos publikációk száma. Rendre jelentek meg új interpretációk, bizonyítások és alkalmazások. François Édouard Anatole Lucas francia, és Eugen Otto Erwin Netto német matematikus is írt monográfiát a témával kapcsolatban. A bőséges szakirodalom ellenére a Catalan-számok mégis – még hosszú évtizedekig – viszonylag ismeretlennek számítottak a nagyközönség előtt. A huszadik század második felében Ebben William G. Brown felismerte a jelenséget, és számos hivatkozást gyűjtött rájuk. Ez egy hatalmas lökést adott a Catalan-számok népszerűsítésének. Azóta több száz tanulmány jelent meg a témában, és a legtöbb tankönyvbe is bekerültek. Érdekesség, hogy keszekusza történetüknek köszönhetően viszonylag későn nyerték el végleges megnevezésüket. Történelmi okokból sokáig főként Segner-számokként, vagy Euler–Segner-számokként hivatkoztak rájuk. A Catalan-számok elnevezés a múlt századból származik John Riordan amerikai matematikustól.

M. Gardner így ír róluk: „A Catalan-számok hihetetlen hajlandóságot mutatnak a váratlan felbukkanásra, főként kombinatorikai problémákban.” [9, 187.o]

Nem csoda, hogy a matematikusokat a mai napig foglalkoztatja ez a számsorozat. Az elmúlt két évtizedből is rengeteg új tétel és alkalmazás látott napvilágot velük kapcsolatban, valamint nagyszabású könyvek is születtek a témában Richard P. Stanley illetve Thomas Koshy jóvoltából. A szakdolgozatom tételei, valamint a bizonyításuknál használt gondolatmenetek jelentős része is ezen könyvekből származik. A Catalan-számoknak ma már több, mint 200 geometriai interpretációját és számos általánosításukat ismerjük. Azt, hogy a jövőjük mi mindent tartogat, ma még nem tudhatjuk.

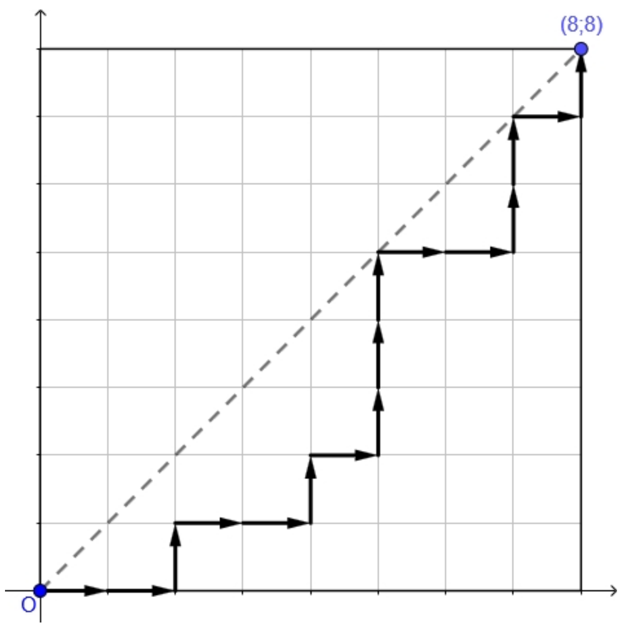
A történelmi bevezető megírásához Stanley[9, 177-189.o], Koshy[5, 103-*], és Grimaldi [4, 147-149.o] könyveit is felhasználtam. Igyekeztem ezek alapján egy kerek áttekintést írni. Az események pontos feltárása ennyi év távlatából igen nehéz, és sokszor nem is lehetséges. Volt, hogy a forrásokban bizonyos történelmi részletek másként szerepeltek, de ez semmit nem von le a matematikusok érdemeiből és a publikációk jelentőségéből.

2. Catalan-számok definiálása

A Catalan-számokba számos kombinatorikai feladat megoldása során belefuthatunk, éppen ezért a definiálásukra is rengeteg különböző lehetőségünk van. Meghatározhatjuk őket többek között a rekurzív képletük, a generátorfüggvényük, a zárt képletük, vagy egy tetszőleges kombinatorikus előfordulásuk, azaz interpretációjuk segítségével. Véleményem szerint a legszemléletesebb egy kombinatorikus előfordulással felvezetni a témakört. A történelmi áttekintőből már tudjuk, hogy az egész az n csúcsú konvex sokszögek háromszögeléseinek számának meghatározásával kezdődött. Én most mégis egy másik, a szívemhez közelebb álló feladattal kezdek. Akik jártak valaha "Véges matematika 1" előadáson, nekik ismerős lehet a feladat. Kezdjük tehát a szavazati sorrendekről szóló feladattal.

Egy választáson két jelölt indul, A és B. $2n$ db szavazó egymás után adja le a szavazatait a jelöltekre úgy, hogy az A jelöltnek mindig legalább annyi szavazata van mint a B jelöltnek, de végül mindketten ugyanannyi szavazatot kapnak. Hányféle különböző szavazati sorrend lehetséges?

2.1. Definíció. (Monoton út (Lattice Paths)). Monoton út alatt olyan $(0; 0)$ -ból $(n; n)$-be tartó, $2n$ hosszú vektorsorozatot értünk, amely n db $(1; 0)$, és n db $(0; 1)$ vektorból áll, valamint a $(0; 1)$ vektorok száma sosem haladja meg az $(1; 0)$ vektorokét.

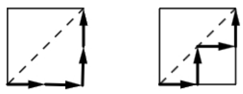
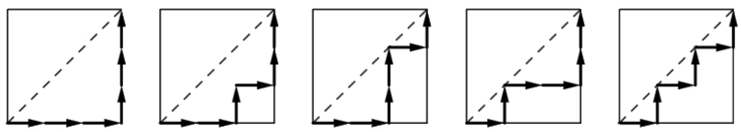
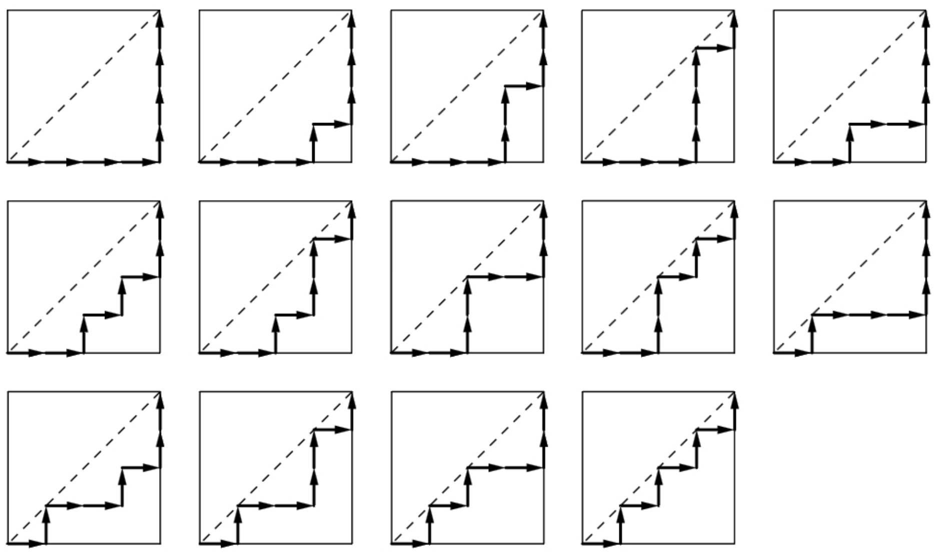


1. ábra. Példa monoton útra

Az egyszerűség kedvéért az A jelöltre érkező szavazatokat jelöljük $(1;0)$ vektorral, míg B jelöltre érkező szavazatokat $(0;1)$ vektorral. A szavazati sorrendes feladatot rögtön át is alakítottuk a monoton utak problémájává. A kérdés tehát a következő: Hányféle különböző $2n$ vektorból álló monoton út létezik?

2.2. Definíció. (Catalan-szám). A $2n$ vektorból álló monoton utak számát nevezzük n-edik Catalan-számnak, és C_n-nel jelöljük.

Rajzoljuk fel a különböző monoton utakat az első néhány esetre, ezáltal határozzuk meg az első néhány Catalan-szám értékét.

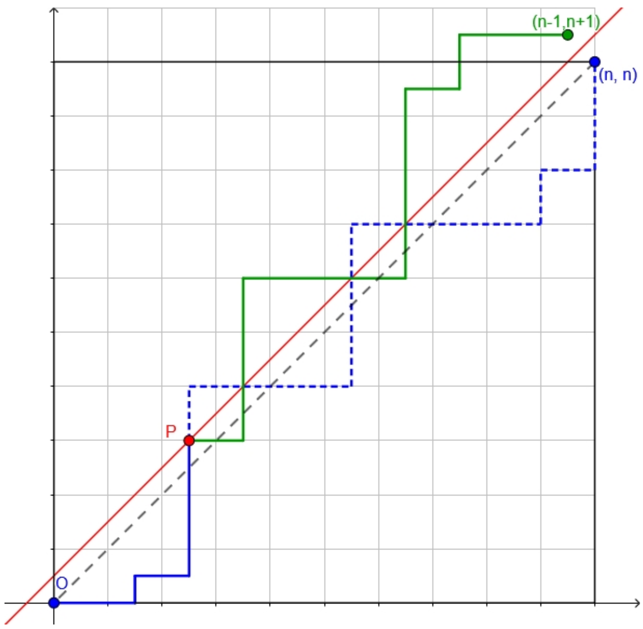
n	monoton utak	Cn
1		1
2		2
3		5
4		14
5	...	42

2. ábra. Az első néhány Catalan-szám

2.3. Tétel. *Az n-edik Catalan-szám felírható $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ zárt képlet segítségével.*

Bizonyítás: Ábrázoljunk egy, az n-edik Catalan-számhoz tartozó $2n$ darab vektorból álló monoton utat. Az egyszerűség kedvéért most csak egy töröttvonalat fogok rajzolni, a vektorokat külön nem jelölöm. Egy töröttvonalunk van $(0;0)$-ból $(n;n)$-be.

Tudjuk, hogy a $(0;1)$ vektorok száma sosem haladhatja meg az $(1;0)$ vektorokét, tehát a töröttvonal nem lépheti át az $y = x$ egyenest. $(0;0)$-ból $(n;n)$-be összesen $\binom{2n}{n}$ darab különböző töröttvonal lehetséges. Ebben azonban benne vannak a rossz töröttvonalak is, ahol átléptük ezt az egyenest. Vegyük észre, hogy az ilyen rossz esetekben létezik olyan pont a töröttvonalon, amely rajta van az $y = x + 1$ egyenesen is. (Ekkor ugyanis a $(0;1)$ vektorok száma több, mint amennyi az $(1;0)$ vektoroké.) Az első ilyen pontot keressük meg és a töröttvonal hátralevő részét tükrözzük az egyenesre.



3. ábra. Rossz utak összeszámolása

Ekkor $(0;0)$-ból $(n-1;n+1)$-be jutottunk, és egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kaptunk a rossz utakra. Ezek száma $\binom{2n}{n-1}$. Dobjuk ki a rosszat elv alapján, a $2n$ hosszú monoton utak száma, azaz az n-edik Catalan-szám $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$. Ez felírható $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ alakban is.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

Tehát az n-edik Catalan-szám zárt képlete tényleg $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$.

A zárt képlet segítségével könnyedén meghatározhatjuk a Catalan-számok további értékeit. Ezt tegyük is meg, majd vessünk rájuk egy pillantást.

n	Cn
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1 430
9	4 862

n	Cn
10	16 796
11	58 786
12	208 012
13	742 900
14	2 674 440
15	9 694 845
16	35 357 670
17	129 644 790
18	477 638 700
19	1 767 263 190

n	Cn
20	6 564 120 420
21	24 466 267 020
22	91 482 563 640
23	343 059 613 650
24	1 289 904 147 324
25	4 861 946 401 452
26	18 367 353 072 152
27	69 533 550 916 004
28	263 747 951 750 360
29	...

4. ábra. Catalan-számok további értékei

Megjegyzés: A zárt képletbe 0-t helyettesítve 1-et kapunk, hiszen $\frac{1}{0+1} \cdot \binom{2 \cdot 0}{0} = 1$. Célszerű a nulladik Catalan-számot is meghatározni, mert a későbbiekben - például a rekurzív képlet felírásához - szükség lesz rá.

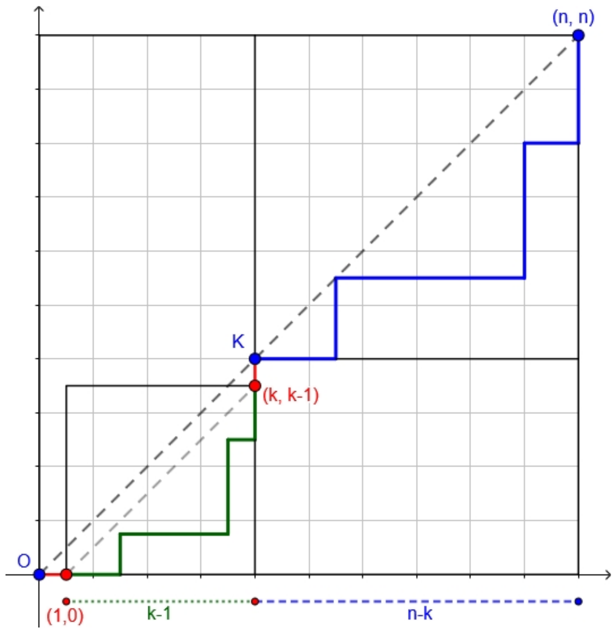
2.4. Definíció. (Nulladik Catalan-szám). A nulladik Catalan-szám legyen 1, azaz $C_0 := 1$

2.5. Tétel. *Az n-edik Catalan-szám felírható* $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k}$ *rekurzív képlet segítségével.*

Bizonyítás: A C_n rekurzív alakjának meghatározásához használjuk a már ismert koordináta-rendszeres ábrázolást. $(0;0)$-ból $(n;n)$-be szabályosan C_n féleképpen juthatunk a Catalan-számok definíciója alapján.

Legyen $K = (k, k)$ az első olyan pont, ahol a $(0;1)$ és az $(1;0)$ vektorok száma megegyezik. $(k = 1, 2, ..., n)$. Ilyen pont létezik, hiszen (n, n)-nél biztosan megegyezik. A K pontba történő eljutás során az első jobbra és az utolsó felfelé lépés meghatározott. (Ha nem így lenne, akkor már rögtön az elején elrontottam volna a monoton utat.)

Ezt eltolva a $(0;0)$-ból $(k-1;k-1)$ -be való eljutást kapjuk, amiről tudjuk, hogy szabályosan C_{k-1} féleképpen lehetséges. Továbbá (k, k)-ból (n, n)-be C_{n-k} féleképp mehetünk.



5. ábra. Monoton utak rekurziója

Ez az érték $k = 1$ esetén $C_0 \cdot C_{n-1}$; $k = 2$ esetén $C_1 \cdot C_{n-2}$; $k = 3$ esetén $C_2 \cdot C_{n-3}$; ... ; $k = n - 1$ esetén $C_{n-2} \cdot C_1$; és $k = n$ esetén $C_{n-1} \cdot C_0$. Vegyük észre, hogy az összeszorzandó tagok indexeinek összege mindig egyel kevesebb, mint az éppen számolt tag indexe. Szorozzuk össze minden lehetséges módon ezeket a tagokat. Az esetszétválasztás miatt C_n meghatározásához az így kapott szorzatokat még össze kell adni.

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + ... + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0 = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k}.$$

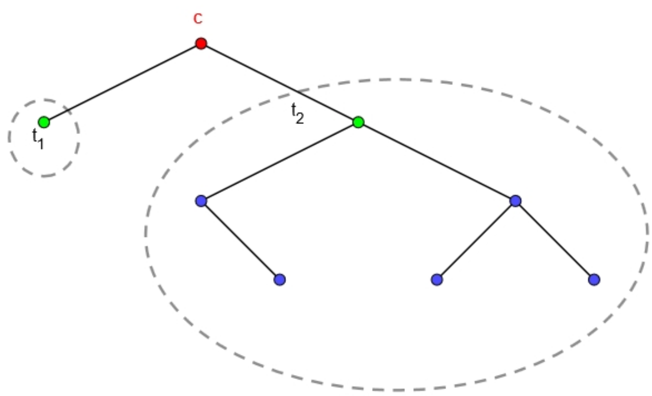
Tehát az n-edik Catalan-szám rekurzív képlete tényleg $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k}$.

A fejezet címe a Catalan-számok definiálása volt. A definíción túl meghatároztuk a számsorozat zárt képletét, a rekurzív képletét, valamint kiszámoltuk az értékeit az első néhány esetre. Ezek ismerete feltétlenül szükséges lesz a továbbiak megértéséhez. A későbbiekben nézünk még érdekes tételeket és állításokat is a Catalan-számokkal kapcsolatban, de előtte kanyarodjunk el egy kicsit a geometriai interpretációk irányába.

3. Néhány interpretáció

Már ismerjük a Catalan-számokat. Tudjuk, hogy ezeket a monoton utak száma adja. Korábban azt is említettük, hogy a Catalan-számoknak többféle interpretációjuk létezik. De mik is ezek az interpretációk pontosan? Nos, ebben a fejezetben ezek közül ismertetünk néhányat, és nézünk rájuk egy-egy konkrét példát is. Lesznek köztük olyanok, melyek kimondottan emlékeztetnek a monoton utakra, de bemutatunk olyan interpretációkat is, melyeknél kevésbé egyértelmű a kapcsolat. Az ismertetésen egyenlőre nem megyünk túl. Azt, hogy az imént felsorolásra kerülő interpretációk miként vezetnek a Catalan-számokra, a későbbi fejezetekben tárgyaljuk. Az itt felsorolásra kerülő objektumok - számos társukkal együtt - megtalálhatóak Stanley könyvében. [9, 15-55.o]

3.1. Definíció (Bináris fa)**.** A t bináris fa legyen vagy az üres fa, vagy egy olyan (c, t_1, t_2) hármas, ahol c a fa gyökere, t_1 és t_2 pedig bináris fák. Azt mondjuk, hogy c-nek t_1 a bal gyereke, t_2 pedig a jobb gyereke.



6. ábra. Példa bináris fára a gyökércsúcs és a részfák jelölésével

3.2. Definíció. (Szavazati sorrend (Ballot Sequence)). Szavazati sorrenden olyan $2n$ hosszú számsorozatot értünk, amely n db $(+1)$ -ből és n db (-1) -ből áll, valamint minden részletösszege nemnegatív.

+1	+1	–1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1
1	*2*	*1*	*2*	*3*	*2*	*3*	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*	*1*	*0*	*1*	*0*

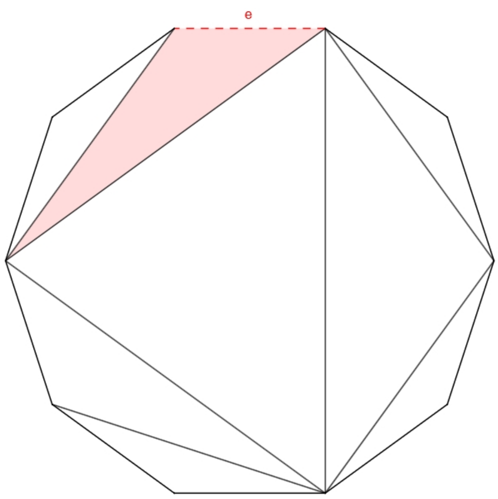
7. ábra. Példa szavazati sorrendre részletösszegekkel

3.3. Definíció. (Kiegyensúlyozott zárójelezések (Balanced Parentheses)). Kiegyensúlyozott zárójelezésen olyan karaktersorozatot értünk, amely n darab nyitó és n darab csukó zárójelből áll, és megköveteljk, hogy az első k karakterében a csukó zárójelek száma ne haladja meg a nyitó zárójelekét. ($k = 0, 1, .., 2n$)

(	(	)	(	(	)	(	)	)	)	(	(	)	)	(	)
1	2		3	4		5				6	7			8	
		1			2		3	4	5			6	7		8

8. ábra. Példa kiegyensúlyozott zárójelezésre a nyitó és csukó zárójelek számával

3.4. Definíció (Konvex poligon háromszögelése)**.** A konvex poligon háromszögelése alatt azt értjük, hogy az n csúcsú konvex sokszöget nem metsző átlók segítségével $n - 2$ darab háromszögre bontjuk. Fontos, hogy a sokszöget az egyik éle mentén rögzítsük, hogy a különböző háromszögeléseit forgatással ne lehessen egymásba vinni.



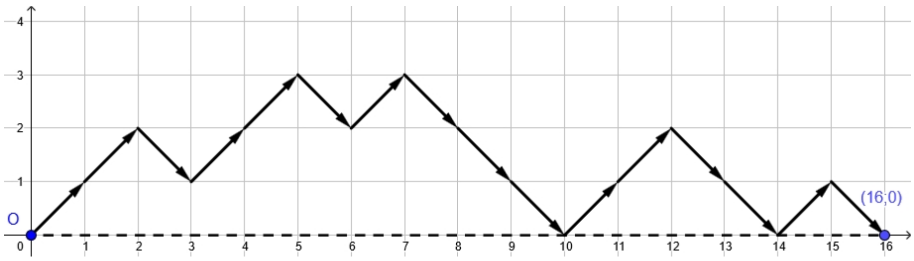
9. ábra. Példa konvex poligon háromszögelésére rögzített élekkel

3.5. Definíció (Szorzótényező zárójelezés (Multiplication Orderings))**.** Szorzótényező zárójelezésen $n+1$ darab szorzótényezőn n db szorzás egyértelmű elvégzését értjük úgy, hogy a szorzótényezők sorrendjén nem változtatunk.

$$((((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)) \cdot ((e \cdot f) \cdot g)) \cdot (h \cdot i))$$

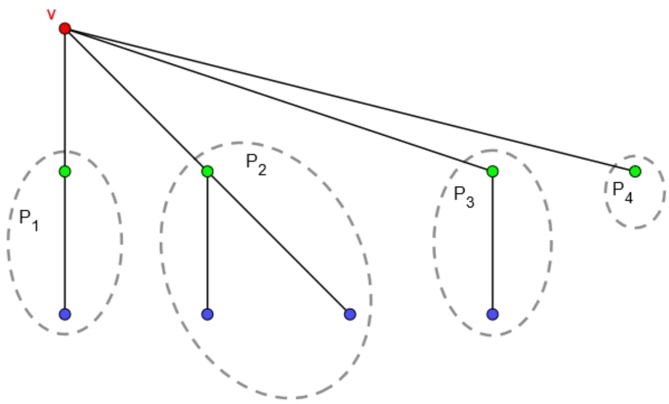
10. ábra. Példa szorzótényező zárójelezésre

3.6. Definíció. (Hegyvonulatok (Mountain Ranges)).Hegyvonulat alatt olyan $(0;0)$ -ból $(2n;0)$-ba tartó, $2n$ hosszú vektorsorozatot értünk, amely n db $(1;1)$ vektorból, és n db $(1;-1)$ vektorból áll úgy, hogy a vektorsorozat sosem megy az x tengely alá.



11. ábra. Példa hegyvonulatra

3.7. Definíció (Rendezett fa, más néven Catalan fa)**.** A P rendezett fa legyen $(v, P_0, ..., P_m)$, ahol v gyökércsúcs mindig létezik, P_i részfák pedig rendezett részfák úgy, hogy $0 \leq i$ és minden $i < j$ esetén P_i rendezett részfa balra van P_j rendezett részfától.



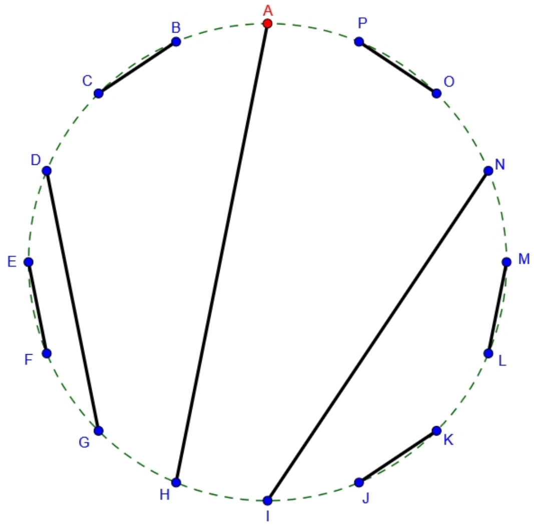
12. ábra. Példa rendezett fára a gyökércsúcs és a részfák jelölésével

3.8. Definíció. (Dyck-szó). Dyck-szón olyan $2n$ hosszú karaktersorozatot értünk, amely n db X -ből és n db Y -ból áll, valamint első k karakterében az X-ek száma nem haladja meg az Y-ok számát. $(k = 0, 1, .., n)$

X	X	Y	X	X	Y	X	Y	Y	Y	X	X	Y	Y	X	Y
1	*2*		*3*	*4*		*5*				*6*	*7*			*8*	
		1			*2*		*3*	*4*	*5*			*6*	*7*		*8*

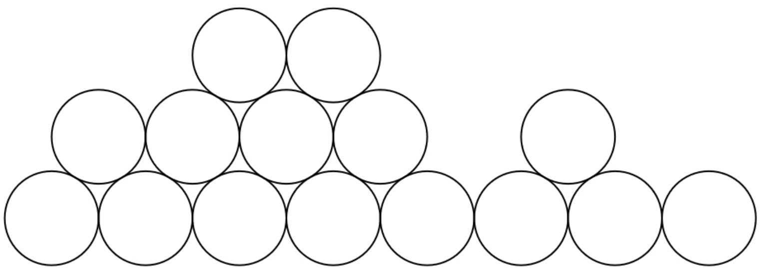
13. ábra. Példa Dyck-szóra az X -ek és Y -ok számával

3.9. Definíció (Illedelmes kézfogás (Noncrossing Handshakes))**.** Illedelmes kézfogás alatt azt értjük, hogy egy körasztal körül helyet foglaló $2n$ darab ember hányféle különböző módon tud egyszerre kezet fogni úgy, hogy a kézfogások nem keresztezik egymást. Fontos, hogy az asztal mentén az emberek helye rögzített.



14. ábra. Példa illedelmes kézfogásra

3.10. Definíció (Érmetornyozás (Stacking Pennies))**.** Érmetornyozás alatt azt értjük, hogy hányféleképpen tudunk érméket egymásra rakni úgy, hogy az alsó sorban n darab érme található, valamint két egymás mellett lévő érme fölé tetszés szerint tehetünk érmét. Az érmék oldalai között nem teszünk különbséget.



15. ábra. Példa érmetornyozásra

A Catalan-számok interpretációinak tárháza igen széles, az összes előfordulásukat lehetetlenség felsorolni. Éppen ezért álljunk is meg ennyinél. Az eddig felsorolt interpretációk szerintem kellően változatosak, és jól szemléltetik, hogy egy kombinatorikai probléma megoldása során tényleg bármikor előkerülhet a számsorozat. De várjunk csak! Az imént definiált alakzatok biztosan a Catalan-számokra vezetnek?!? Ennek bizonyítására több módszerünk is van. Első körben győződjünk meg róla rekurzív úton.

4. Interpretációk rekurzív összeszámolása

Nézzünk meg egy tételt Loehr és Nikolas könyvéből, mely szerint a Catalan-számok rekurzív képlete egyértelműen meghatározza a Catalan-számokat. [6, 61.o]

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az a_n sorozat $(n \geq 0)$ kezdőértéke $a_0 = 1$ és tagjai előállíthatóak az $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \cdot a_{n-k}$ rekurzív képlet segítségével. Ekkor $a_n = C_n$ minden $n \geq 0$ esetén.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $n = 0$ esetén $a_0 = 1 = C_0$. Már csak $n > 0$-ra kell belátnunk, hogy $a_n = C_n$ minden $m < n$ esetén. Ekkor viszont tudjuk, hogy $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \cdot a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} = C_n$. Az állítást tehát teljes indukcióval beláttuk.

Az előző - amúgy nyilvánvaló - tétel szerint, ha egy számsorozat rekurzív képlete megegyezik a Catalan-számok rekurzív képletével, valamint a kezdőértéke is stimmel, akkor az a sorozat szükségszerűen megegyezik a Catalan-számok sorozatával. Ebben a fejezetben pontosan ezzel fogunk foglalkozni, és néhány, korábban megismert interpretációról belátjuk, hogy tényleg a Catalan-számokra vezetnek. Megnézzük, hogy hogyan tudjuk rekurzív módon előállítani a felsorolt alakzatokat, majd megnézzük a kezdőértéküket. A bizonyításokat Stanley [9] és Koshy [5] könyveiben, valamint Tom Davis jegyzetében [3] szereplő rekurziók alapján végeztem.

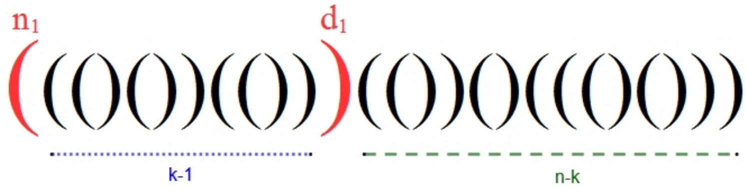
4.2. Állítás. *Az n darab zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések száma C_n.*

Bizonyítás: Az n darab zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések számát jelölje Z_n. Egyértelmű, hogy $Z_1 = 1$, $Z_2 = 2$. Nézzük meg az első néhány kiegyensúlyozott zárójelezést.

Az első néhány n-re $Z_n = C_n$. Határozzuk meg Z_n értékét rekurzívan. Ehhez szükségünk lesz Z_0-ra is, legyen $Z_0 = 1$. Vegyünk egy tetszőleges, n db zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezést. Tudjuk, hogy a zárójelezés mindig egy nyitó zárójellel kezdődik. Keressük meg ennek a nyitó zárójelnek a csukó párját. Jelölje őket n_1 és d_1. Legyen $k-1$ a köztük lévő zárójelpárok száma. $(1 \leq k \leq n)$ Ekkor d_1 után található zárójelpárok száma $n-k$.

n	kiegyensúlyozott zárójelezések	Zn
1	()	1
2	(()), ()()	2
3	((())), (()()), (())(), ()(()), ()()()	5
4	(((()))), ((()())), ((())()), ((()))(), (()(())), (()()()), (()())(), (())(()), (())()(), ()((())), ()(()()), ()(())(), ()()(()), ()()()()	14
5	((((())))), (((()()))), (((())())), (((()))()), (((())))(), ((()(()))), ((()()())), ((()())()), ((()()))(), ((())(())), ((())()()), ((())())(), ((()))(()), ((()))()(), (()((()))), (()(()())), (()(())()), (()(()))(), (()()(())), (()()()()), (()()())(), (()())(()), (()())()(), (())((())), (())(()()), (())(())(), (())()(()), (())()()(), ()(((()))), ()((()())), ()((())()), ()((()))(), ()(()(())), ()(()()()), ()(()())(), ()(())(()), ()(())()(), ()()((())), ()()(()()), ()()(())(), ()()()(()), ()()()()()	42
6	...	132

16. ábra. Az első néhány kiegyensúlyozott zárójelezés



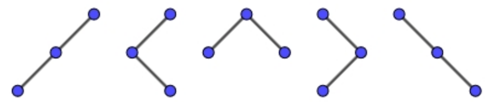
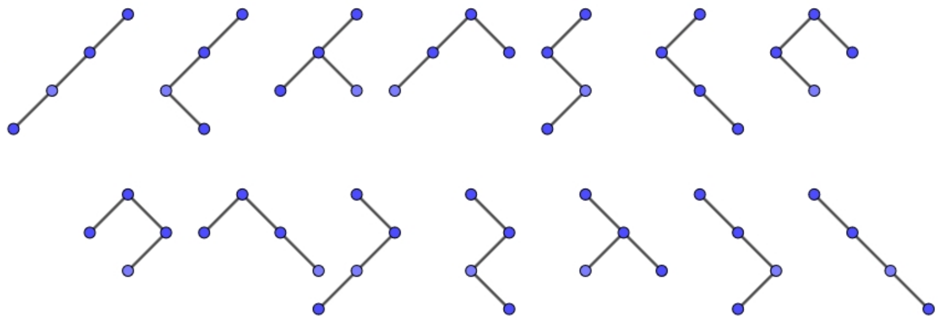
17. ábra. Kiegyensúlyozott zárójelezések rekurziója

Tudjuk, hogy $k-1$ zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések száma Z_{k-1}, míg az $n-k$ hosszú kiegyensúlyozott zárójelezéseké Z_{n-k}. Esetszétválasztás miatt $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{k-1} \cdot Z_{n-k}$, ami pont a C_n rekurziós képlete. Tehát $Z_n = C_n$.

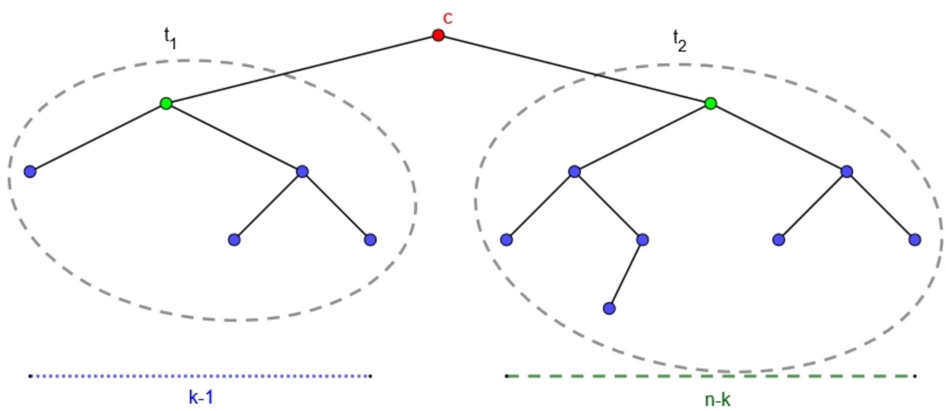
4.3. Állítás. *Az n csúcsú bináris fák száma C_n.*

Bizonyítás: Az n csúcsú bináris fák számát jelölje B_n. Egyértelmű, hogy $B_1 = 1$, $B_2 = 2$. Nézzünk meg az első néhány bináris fát.

Az első néhány n-re $B_n = C_n$. Határozzuk meg B_n értékét rekurzívan. Ehhez szükségünk lesz B_0-ra is, legyen $B_0 = 1$. Tudjuk, hogy egy nem üres bináris fát (c, t_1, t_2) hármassal írhatunk fel. Legyen ez most egy n csúcsú bináris fa. Ebből a c gyökércsúcs egy csúcsot takar, a maradék $n-1$ csúcsot a t_1 és t_2 részfák adják. Tehát $|t_1| + |t_2| = n-1$. Legyen t_1 részfa csúcsszáma $k-1$ és t_2 részfa csúcsszáma $n-k$. $(1 \leq k \leq n)$

n	bináris fák	Bn
1		1
2		2
3		5
4		14
5	...	42

18. ábra. Az első néhány bináris fa

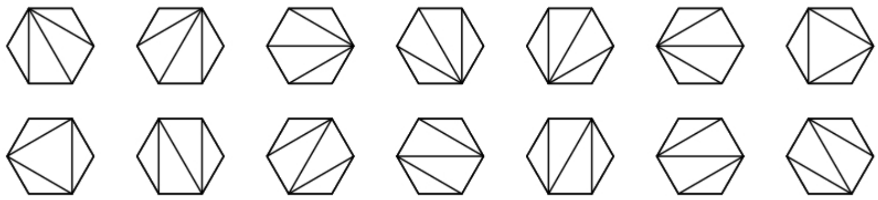


19. ábra. Bináris fák rekurziója

Ekkor t_1 részfát B_{k-1} féleképpen választhatom, hiszen B_{k-1} a $k-1$ csúcsú részfák számát jelöli. Hasonlóan t_2 részfát B_{n-k} féleképp választhatom. Esetszétválasztás miatt $B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} \cdot B_{n-k}$, ami pont a C_n rekurziós képlete. Tehát $B_n = C_n$.

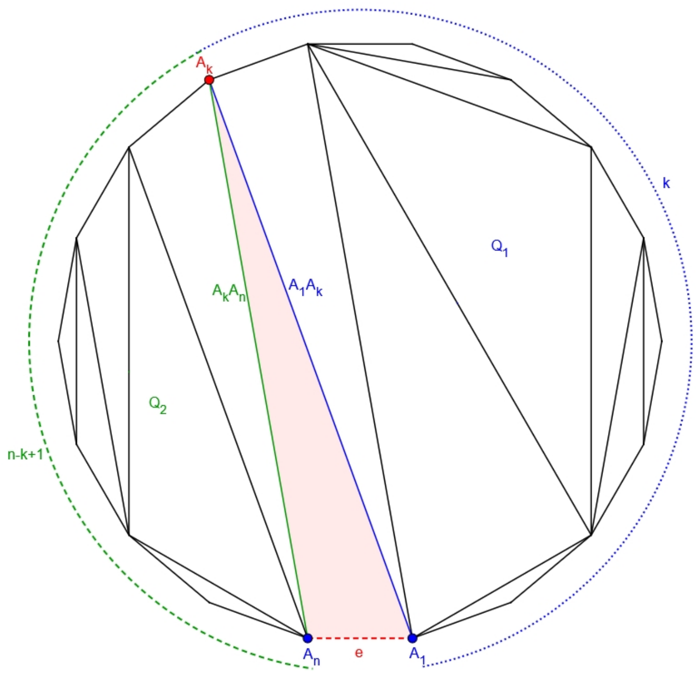
4.4. Állítás. *Az $n+2$ csúcsú konvex sokszög háromszögeléseinek a száma C_n*

Bizonyítás: Az n csúcsú konvex poligon háromszögeléseinek a számát jelölje P_n. Egyértelmű, hogy $P_3 = 1$, $P_4 = 2$. Nézzünk meg az első néhány poligon háromszögelést.

n	poligon háromszögelések	Pn
3		1
4		2
5		5
6		14
7	...	42

20. ábra. Az első néhány poligon háromszögelés

Az első néhány n-re $P_n = C_{n-2}$. Határozzuk meg P_n értékét rekurzívan. Ehhez szükségünk lesz P_2-re is, legyen $P_2 = 1$. Vegyünk egy tetszőlegesen háromszögezett n csúcsú konvex poligont. A csúcsait a háromszögelés során rögzítettük. Nevezzük őket sorban $A_1; A_2; \ldots A_n$ -nek. Az A_1 és az A_n csúcs között húzódó élet jelöljük e-vel. Az e élt elhagyva az n csúcsú poligon két másik poligonra bomlik, Q_1-re és Q_2-re.

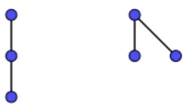
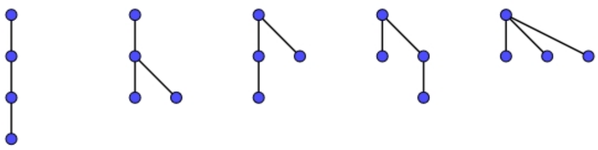
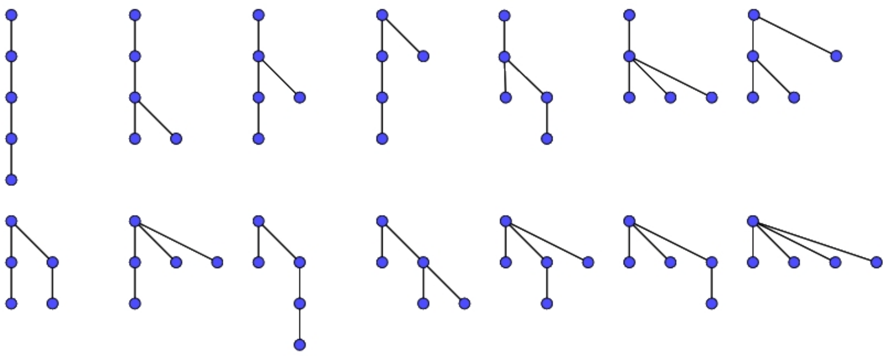


21. ábra. Háromszögezett poligon felbontása

Vegyük észre, hogy Q_1-nek és Q_2-nek pontosan egy közös csúcsa van. Legyen ez A_k. ($2 \leq k \leq n-1$) Látjuk, hogy Q_1 és Q_2 oldaléleinek összege egyel több, mint az eredeti sokszög oldaléleinek száma, hiszen kitöröltük az e élet, viszont bejött két új él (A_1A_k) és (A_kA_n), melyek az eredeti sokszög háromszögeléséhez tartoztak. Q_1 tehát k oldalú,Q_2 pedig $n-k+1$ oldalú sokszög. Ezek szerint háromszögeléseik száma P_k és P_{n-k+1}. Az esetszétválasztás miatt $P_n = \sum_{k=2}^{n-1} P_k \cdot P_{n-k+1}$. Legyen $P_k = S_{k-2}$ minden $2 \leq k \leq n$ esetén. Ekkor $P_n = S_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} P_{k-1} \cdot P_{n-2-k}$, ami pont C_{n-2} rekurziós képlete. Tehát $P_{n+2} = C_n$.

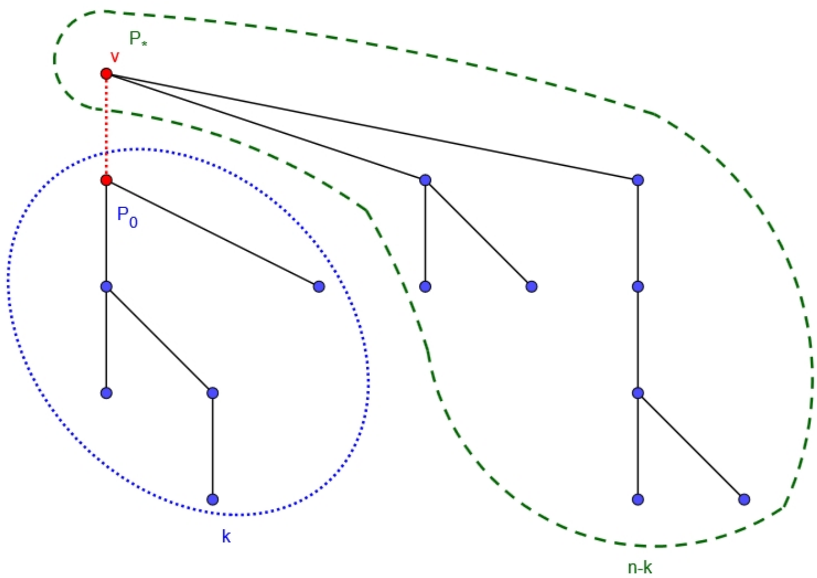
4.5. Állítás. *Az n+1 csúcsú rendezett fák száma C_n.*

Bizonyítás: Az n csúcsú rendezett fák számát jelölje R_n. Egyértelmű, hogy $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $R_3 = 2$. Nézzük meg az első néhány rendezett fát.

n	rendezett fák	Rn
1		1
2		1
3		2
4		5
5		14
6	...	42

22. ábra. Az első néhány rendezett fa

Az első néhány n-re $R_n = C_{n-1}$. Határozzuk meg R_n értékét rekurzívan. Vegyünk egy tetszőleges, n csúcsú rendezett fát. Vágjuk le a rendezett fa P_0 részfáját, míg a maradékot jelölje P_*. P_0 csúcsszáma legyen k. $(1 \leq k \leq n)$ Ekkor P_* csúcsszáma $n-k$.



23. ábra. Rendezett fák rekurziója

Ekkor P_0 részfát R_k féleképpen választhatom, P_* részfát pedig R_{n-k} féleképp. Esetszétválasztás miatt $R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot R_{n-k}$. Legyen $R_k = S_{k-1}$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén. $R_n = S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} P_{k-1} \cdot P_{n-1-k}$, ami pont C_{n-1} rekurziós képlete. Tehát $R_{n+1} = C_n$.

5. Interpretációk közötti bijekciók

Az interpretációk rekurzív összeszámolása eléggé monoton, és egy idő után kezd unalmassá válni. Felmerül a kérdés: Létezik-e izgalmasabb módja annak, hogy a 3. fejezetben megismert alakzatokról belássuk, hogy megszámolhatóak a Catalan-számok segítségével? Szerencsére igen, van másik módszer is. Ebben a fejezetben bijekciók útján bizonyítjuk, hogy a már megismert problémák a Catalan-számok sorozatára vezetnek. A bizonyítások alapját itt is Stanley [9] és Koshy [5] könyvei képzik. Az átalakítások többsége egészen természetes módon adódik. A bizonyításoknál a definícóból fogunk kiindulni, azon kívül egy kis időre felejtsünk el minden mást, amit a Catalan-számokról tudunk.

5.1. Definíció. (Bijektív leképzés). Legyen A, B tetszőleges halmaz és $\varphi : A \to B$ leképzés. Azt mondjuk, hogy φ bijekció, ha tetszőleges $a, b \in A$ és $\varphi(a) = \varphi(b)$ esetén $a = b$, és $\forall b \in B$ esetén $\exists a \in A$ úgy, hogy $\varphi(a) = b$.

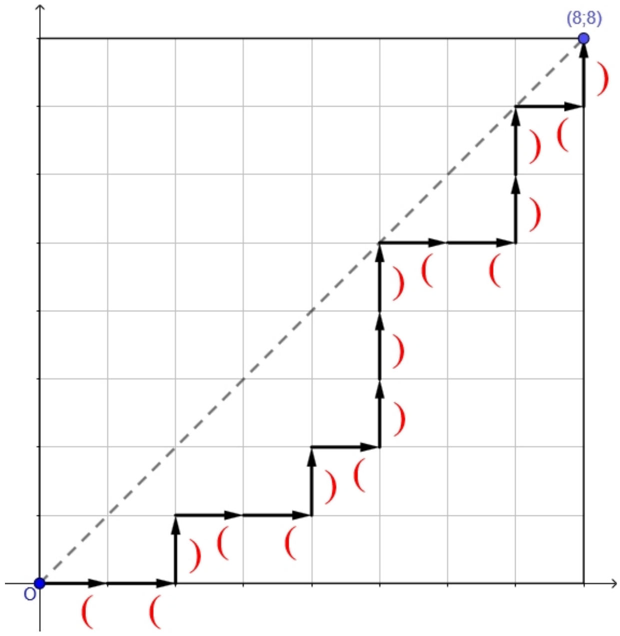
5.2. Tétel. *Két véges halmaz között pontosan akkor létesíthető bijekció, ha a két halmaz elemszáma megegyezik.*

Bizonyítás: A leképzés egyértelmű, és minden előáll képként. (Triviális)

Következmény: Ha van két kombinatorikai problémánk, melyek között bijekciót határoztunk meg, és ezek közül az egyik a Catalan-számok sorozatára vezet, akkor a másik is a Catalan-számok sorozatára fog vezetni.

Bizonyítsuk a 4.2-es állítást bijektív megfeleltetés útján.

Bizonyítás: A Catalan-számok definíciójából tudjuk, hogy a $2n$ vektorból álló monoton utak száma C_n. Határozzunk meg bijekciót a monoton utak és a kiegyensúlyozott zárójelezések között. Tudjuk, hogy minden $2n$ vektorból álló monoton út n db $(1; 0)$ és n db $(0; 1)$ vektort tartalmaz. Ezen felül a vektorsorozaton végighaladva mindig legalább annyi $(1; 0)$ vektorunk van, mint amennyi $(0; 1)$ vektorunk. A kiegyensúlyozott zárójelezésünk n darab zárójelpárból áll. Tehát itt is egy $2n$ hosszú sorozatunk van, ami n db nyitó és n db csukó zárójelet tartalmaz, valamint a csukó zárójelek száma sosem haladja meg a nyitó zárójelekét. A megfeleltetés adja magát. Minden "(" nyitó zárójelet feleltessünk meg egy $(1; 0)$ vektornak, és minden ")" csukó zárójelet egy $(0; 1)$ vektornak.



24. ábra. Monoton utak és kiegyensúlyozott zárójelezések bijekciója

A megfeleltetés visszafelé is világos. A két halmaz között bijekciót határoztunk meg, tehát az n darab zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések száma C_n.

5.3. Állítás. *A* $2n$ *karakterből álló Dyck-szavak, valamint a* $2n$ *hosszú szavazati sorrendek száma* C_n.

Bizonyítás: A kiegyensúlyozott zárójelezések nyitó zárójeleit feleltessük meg a Dyck-szavakban az X-nek illetve a szavazati sorrendekben a $+1$-nek. A csukó zárójeleket hasonlóan Y-nak, illetve -1-nek.

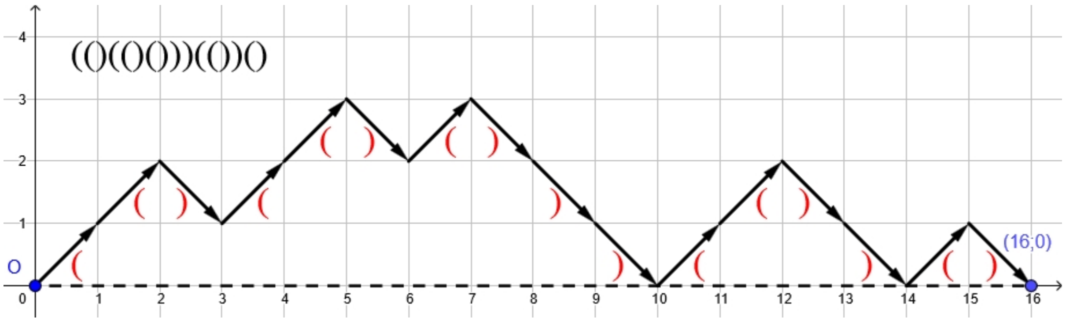
Kiegyensúlyozott zárójelezés:	(	(	)	(	(	)	(	)	)	)	(	(	)	)	(	)
Dyck szó:	X	X	Y	X	X	Y	X	Y	Y	Y	X	X	Y	Y	X	Y
Szavazati sorrend:	+1	+1	−1	+1	+1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1

25. ábra. Kiegyensúlyozott zárójelezések, Dyck-szavak és szavazati sorrendek bijekciója

Látjuk tehát, hogy a kiegyensúlyozott zárójelezések, a Dyck-szavak, valamint a szavazati sorrendek miként alakíthatóak át egymásba. Mivel bijekciókat határoztunk meg, ezért a $2n$ darab karakterből álló Dyck-szavak, valamint a $2n$ hosszú szavazati sorrendek száma szintén C_n.

5.4. Állítás. *A* $2n$ *darab vektorból álló hegyvonulatok száma* C_n.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy az n db zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések száma C_n. Határozzuk meg bijekciót ezek között a kiegyensúlyozott zárójelezések, és a hegyvonulatok között. A nyitó zárójeleket cseréljük ki $(1,1)$ vektorokra, a csukó zárójeleket pedig $(1,-1)$ vektorokra.



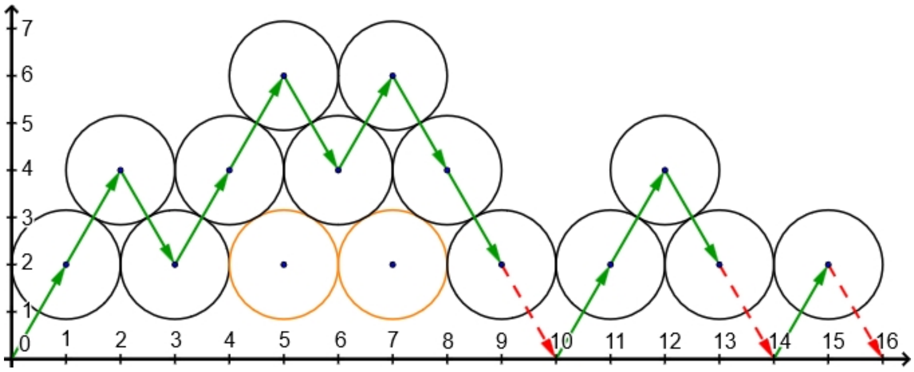
26. ábra. Kiegyensúlyozott zárójelezések és hegyvonulatok bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik, az $(1,1)$ vektorokat kicseréljük nyitó zárójelekre, míg a $(1,-1)$ vektorokat csukó zárójelekre. Bijekciót határoztunk meg, tehát a $2n$ darab vektorból álló hegyvonulatok száma valóban C_n.

Érdekesség, hogy a hegyvonulatokban lévő vektor második koordinátája azt mutatja, hogy az adott pillanatig mennyivel volt több nyitó zárójelünk, mint csukó.

5.5. Állítás. *A n darab érmére C_n-féleképpen tudunk érméket tornyozni.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a $2n$ darab vektorból álló hegyvonulatok száma C_n. A bizonyításhoz a $2n$ darab vektorból álló hegyvonulatok és az n darab érmére rakott érmetornyozások között fogunk bijekciót létesíteni. Tekintsük a hegyvonulatot alkotó vektorok végpontjait. Minden ilyen végpontba helyezzünk egy érmét, de csak akkor, ha a vektor második koordinátája nem nulla. Egyéb esetben ne csináljunk semmit. Amint végzünk az érmék letételével megkaptuk az érmetornyozásunk tetejét. Ez egyértelműen meghatározza az érmetornyozásunkat, hiszen minden érmét két másik érme tart, tehát az összes alattuk elhelyezhető érmére szükségünk van. A vektorsorozatunk első és utolsó vektora adott, ezért az első érmét biztosan $(1,1)$-ban helyeztük le, az utolsót pedig $(2n-1,1)$-ben. Az is világos, hogy az alsó sorban lehelyezett érméink x koordinátái kettesével növekednek. Ezek szerint összesen n darab érme alkotja az alsó sort. (Az ábrán az $(1,1)$ vektorok helyett $(1,2)$ vektorokat, míg $(1,-1)$ vektorok helyett $(1,-2)$ vektorokat használok, hogy az érmék között ne legyen hézag. Ez a bijekcót nem befolyásokja.)



27. ábra. Hegyvonulatok és érmetornyozások bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik, egy adott érmetornyozáshoz csupán be kell húzni a megfelelő vektorokat. Bijekciót határoztunk meg, tehát n darab érmére C_n féleképpen tudunk érméket tornyozni.

5.6. Állítás. *$n+1$ darab szorzótényezőt C_n féleképpen tudunk összeszorozni, ha a szorzótényezők sorrendjén nem változtatunk.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy az n db zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések száma C_n. Határozzunk meg bijekciót a $2n$ hosszú kiegyensúlyozott zárójelezések és az $n+1$ szorzótényező zárójelezései között. Tudjuk, hogy $n+1$ szorzótényező összeszorzásához n darab szorzást kell elvégeznünk, ami pont annyi, mint a kiegyensúlyozott zárójelezésben a zárójelpárok száma. Ezt a kapcsolatot fogjuk kihasználni. Tekintsük a szorzótényező zárójelezésünket. A szorzást jelölő pontokon és a csukó zárójeleken kívül töröljünk ki belőle mindent. A pontokat cseréljük ki nyitó zárójelekre, és már meg is van a kiegyensúlyozott zárójelezésünk.

$$((((a\cdot b)\cdot(c\cdot d))\cdot((e\cdot f)\cdot g))\cdot(h\cdot i))$$

$$((((a\cdot b)\cdot(c\cdot d))\cdot((e\cdot f)\cdot g))\cdot(h\cdot i))$$

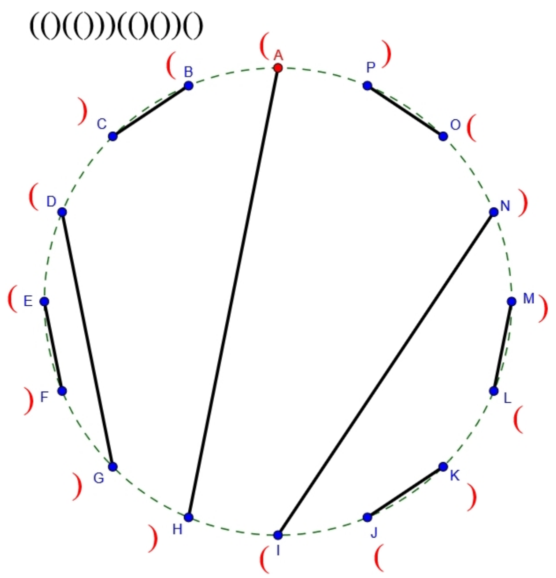
$$(\ )(\ \ (\ ))(\ \ \ (\ )(\ ))(\ \ (\ ))$$

28. ábra. Kiegyensúlyozott zárójelezések és szorzótényező zárójelezések bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik, viszont ez egy kicsit trükkösebb lesz. Tekintsük a kiegyensúlyozott zárójelezésünket. A nyitó zárójeleket cseréljük ki pontokra. Az első szorzás elé, az egymást követő szorzások közé és minden első csukó zárójel elé írjuk be a szorzótényezőket. (Ha egymás után több csukó zárójel következik, akkor csak az első elé kell szorzótényező). A nyitó zárójelek kirakása ekkor már egyértelmű. Úgy kell őket kitenni, hogy minden egyes szorzást két - akár elvégzett szorzások után kapott - szorzótényező és egy zárójelpár fogjon körül. Bijekciót határoztunk meg, $n+1$ darab szorzótényezőt tényleg C_n-féleképpen tudunk összeszorozni.

5.7. Állítás. *Egy körasztal körül helyet foglaló $2n$ ember C_n-féleképpen tud illedelmesen kezet fogni.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy az n db zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések száma C_n. Határozzunk meg bijekciót a $2n$ hosszú kiegyensúlyozott zárójelezések és $2n$ ember illedelmes kézfogásai között. Vegyünk egy kiegyensúlyozott zárójelezést. Helyezzük el az embereket egy körasztal mentén. Rögzítsük a kezdő embert és írjuk mellé a zárójelsorozat első karakterét, majd az óramutató járásával ellentétes irányban mindenkihez írjuk oda a zárójelsorozat soron következő elemét. Ha valakihez csukó zárójelet írunk, az fogjon kezet azzal, akihez legutoljára írtunk nyitó zárójelet és még nem fog kezet senkivel.



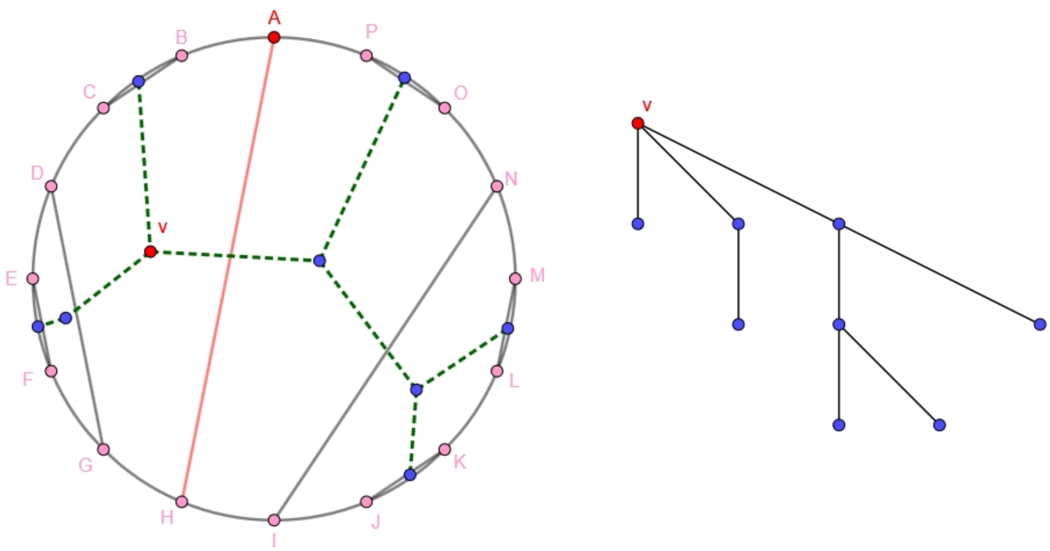
29. ábra. Kiegyensúlyozott zárójelezések és illedelmes kézfogások bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik. Óramutató járásával ellentétes irányba haladjunk végig az embereken és mindenkinél nézzük meg, hogy olyannal fog kezet aki a bejárás szerint utána fog következni, vagy olyannal, aki már volt előtte. Előbbi esetben írjunk mellé nyitó zárójelet, utóbbiban pedig csukó zárójelet. Meg is van a szabályos zárójelezésünk. Bijekciót határoztunk meg, tehát egy körasztal körül helyet foglaló $2n$ ember tényleg C_n féleképpen tud illedelmesen kezet fogni.

5.8. Definíció. (Előrendezés szerinti bejárás). Legyen $P(v, P_0, ..., P_m)$ egy rendezett fa. Ha a bejárandó fa üres, akkor végeztünk a bejárással. Ha a bejárandó fa nem üres, akkor járjuk be a gyökérelemet, v-t. Ez után járjuk be a gyökérelem soron következő rendezett részfáját $(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ az előrendezés szerint.

Bizonyítsuk a 4.5-ös állítást bijektív megfeleltetés útján.

Bizonyítás: Azt már tudjuk, hogy $2n$ ember illedelmes kézfogásainak száma C_n. Határozzunk meg bijekciót $2n$ ember illedelmes kézfogásai és az $n+1$ csúcsú rendezett fák között. Az illedelmes kézfogások behúzásakor $n+1$ részre osztottuk a körasztalt, ami pont annyi, mint a rendezett fa csúcsszáma. Minden ilyen asztalszeletre vegyünk fel egy csúcsot és két csúcs között húzzunk be élt, ha az őket tartalmazó asztalszeletek szomszédosak. Vegyük észre, hogy minden ember két asztalszelettel szomszédos. A rendezett fa csúcsa kerüljön a kezdő ember mellett óramutató járásával ellentétes irányban levő asztalszeletbe. A rendezett fa gyökércsúcsát nézzük olyan irányból, hogy a rögzített ember kézfogását keresztező él legyen felül. Haladjunk végig a fa csúcsain előrendezés szerinti bejárással. Egy csúcs rendezett részfái mindig az óramutató járásával ellentétesen következnek. Ha egy új csúcsba lépünk, akkor azt mindig olyan irányból nézzük, hogy az az él legyen fölül, amin keresztül a csúcsba érkeztünk. Ez alapján fel tudjuk rajzolni a rendezett fát.

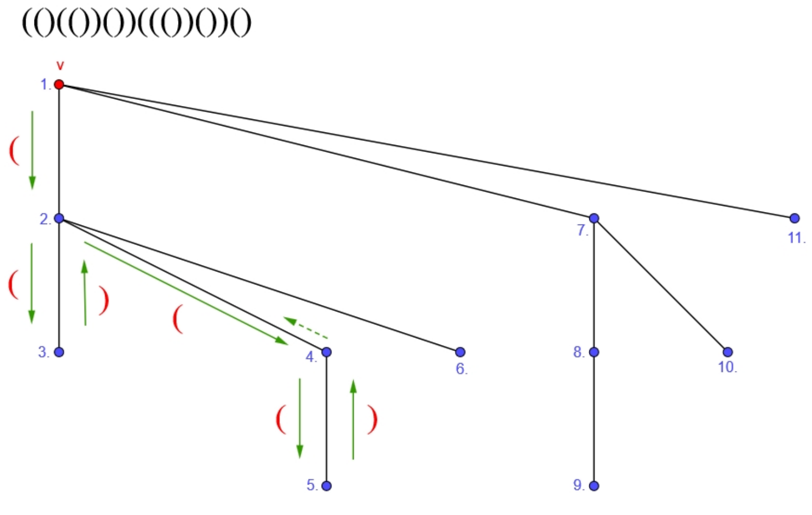


30. ábra. Illedelmes kézfogások és rendezett fák bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik. A rendezett fa minden csúcsa köré vegyünk fel egy sokszöget annyi oldallal, ahány éle van az adott csúcsnak. Ha egy csúcsnak egy vagy két éle van, akkor oda elfajult sokszöget kapunk, de az nem lesz gond. A sokszögeket illesszük egymáshoz úgy, hogy csúcsaik egy körön kívül essenek, de a bennük elhelyezett rendezett fa csúcsai még a körön belül legyenek. Ekkor a kézfogásokat a sokszögek oldalai határozzák meg. Vágjuk ki a kört és meg is van az illedelmes kézfogásunk. Bijekciót határoztunk meg, tehát az $n+1$ csúcsú rendezett fák száma C_n.

Nézzünk rá még egy bizonyítást egy újabb bicekció megadásával.

Bizonyítás: Azt már tudjuk, hogy az n db zárójelpárból álló kiegyensúlyozott zárójelezések száma C_n. Határozzunk meg bijekciót $2n$ hosszú kiegyensúlyozott zárójelezések és az $n+1$ csúcsú rendezett fák között. Itt már nehezebb megtalálni az átalakítást, hiszen első ránézésre a halmazaink elemszáma nem fog stimmelni. Semmi gond, egy kis trükközéssel megoldjuk. Bevezető gráfelméleti ismereteinkből tudjuk, hogy az n csúcsú fának $n-1$ éle van. Ezek szerint az $n+1$ csúcsú rendezett fának n éle van. A rendezett fának tehát nem a csúcsait, hanem az éleit fogjuk használni. Minden élt feleltessünk meg egy zárójelpárnak a következőféleképpen: Haladjunk végig a fa csúcsain előrendezés szerinti bejárással. Ha a bejárásban a következő bejárandó csúcsra lépünk, akkor írjunk egy "(" nyitó zárójelet. Ha a bejárásban egy már bejárt csúcsra lépünk, akkor írjunk egy ")" csukó zárójelet. A bejárás minden élen kétszer halad át, minden élhez egy zárójelpár fog tartozni.



31. ábra. Kiegyensúlyozott zárójelezések és rendezett fák bijekciója

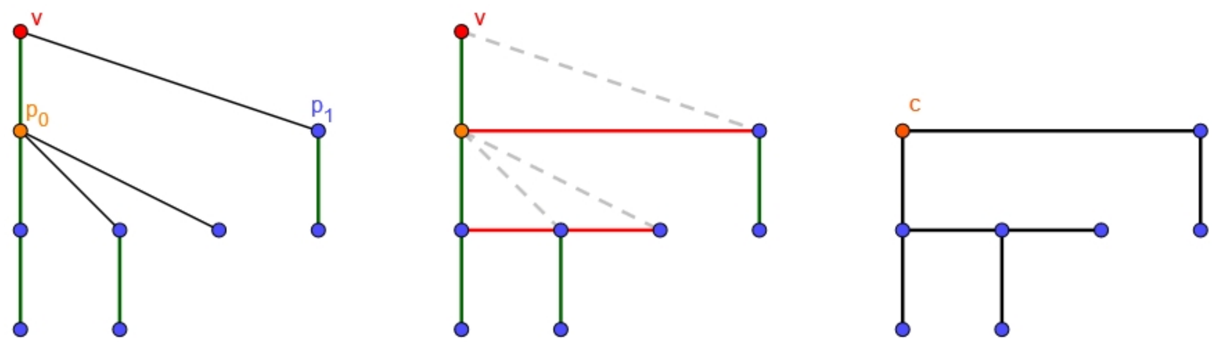
Az eljárás visszafele is működik, egy kiegyensúlyozott zárójelezés segítségével könnyedén felépíthetjük a hozzá tartozó rendezett fát. Itt egyedül arra kell figyelnünk, hogyha legalább másodjára lépünk ki egy csúcsból, akkor új részfát kell nyitni. Bijekciót határoztunk meg, az $n+1$ csúcsú rendezett fák száma tényleg C_n.

Bizonyítsuk a 4.3-as állítást bijektív megfeleltetés útján.

Bizonyítás: Azt a korábbiakból már tudjuk, hogy az $n+1$ csúcsú rendezett fák száma C_n. A bizonyításhoz az $n+1$ csúcsú rendezett fák és az n csúcsú bináris fák között fogunk bijekciót létesíteni. Vegyünk egy tetszőleges, $n+1$ csúcsú rendezett fát és haladjunk végig a csúcsain előrendezés szerinti bejárással. Ha egy csúcsból első alkalommal lépünk tovább a bejárás során, akkor a kiindulási csúcs és az érkezési csúcs közti élet jelöljük, egyéb esetben nem. A fából töröljük ki a jelöletlen éleket. A kitörölt élek helyett húzzunk be új éleket a következőféleképp: A kitörölt él érkezési csúcsát kössük össze a kiindulási csúcs által meghatározott fa érkezési csúcs által meghatározott részfájánál eggyel balrább levő részfájának gyökércsúcsával. Ez így elég nyakatekerten hangzik. Nézzünk rá egy példát és rögtön érthető lesz.

Legyen egy P rendezett fa $(v, P_0, P_1, \ldots P_m)$, ahol v a fa gyökéreleme. Legyen P_i rendezett részfa gyökércsúcsa p_i. Ekkor $v - p_0$ élet megtartjuk, $v - p_1, v - p_2, \ldots, v - p_m$ éleket pedig kitöröljük. $v - p_1$ él helyett behúzzuk a $p_0 - p_1$ élet, $v - p_2$ helyett a $p_1 - p_2$ élet, $\ldots, v - p_m$ él helyett pedig a $p_{m-1} - p_m$ -et.

Ezeket az élcseréket az eredeti fa minden rendezett részfájára rekurzívan végigcsináljuk és már meg is vagyunk. Pontosabban majdnem. Egy n csúcsú bináris fát szeretnénk kapni, de jelenleg egy $n+1$ csúcsú bináris fánk van. Töröljük ki az eredeti rendezett fa gyökércsúcsát, valamint a hozzá kapcsolódó élet. Ezt ezen a ponton már megtehetjük, hiszen ez a csúcs és a hozzá kapcsolódó él a bináris fában mindig azonosan helyezkedik el, információtartalma nincs. Az előrendezés szerinti bejárás végrehajtásához még szükség volt rá, de most már nem kell. A bináris fa gyökércsúcsa az eredeti rendezett fa első részfájának gyökércsúcsa lett.

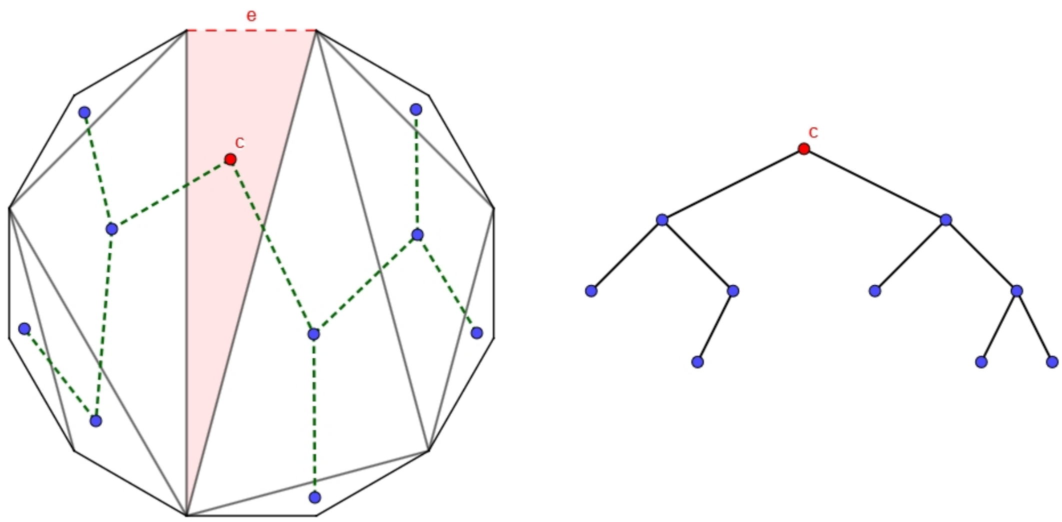


32. ábra. Rendezett fák és bináris fák bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik. Egy n csúcsú bináris fa fölé fölveszünk egy csúcsot, majd a megfelelő éleket lecseréljük akkor visszakapjuk az $n+1$ csúcsú rendezett fát. A két halmaz között bijekciót határoztunk meg, tehát az n csúcsú bináris fák száma tényleg C_n. Ez a bijekció eredetileg de Bruijn-tól és Morselt-től származik. [9, 9.o]

Bizonyítsuk a 4.4-es állítást bijektív megfeleltetés útján.

Bizonyítás: Azt már tudjuk, hogy az n csúcsú bináris fák száma C_n. A bizonyításhoz bijekciót fogunk keresni az n csúcsú bináris fák és az $n+2$ csúcsú konvex poligonok háromszögelései között. Tudjuk, hogy egy n csúcsú konvex sokszög nem metsző átlók behúzásával $n-2$ háromszögre bomlik. Az $n+2$ csúcsú konvex sokszöget ezek szerint n darab háromszögre bonthatjuk. Ezeket a háromszögeket fogjuk megfeleltetni a bináris fa csúcsainak. Rögzítsük a poligont az egyik élénél fogva, bontsuk háromszögekre, majd minden háromszögbe rajzoljunk egy csúcsot. Két csúcs között húzzuk be az élet, ha a két csúcs szomszédos háromszögben helyezkedik el. A bináris fa gyökércsúcsa a sokszög rögzített oldaléle által meghatározott háromszögben lesz. Tekintsük ezt a háromszöget úgy, hogy a rögzített oldalél legyen fölfelé. Ha a sokszögben két csúcs közötti él a háromszög bal oldalán megy ki, akkor az adott csúcs az eredeti csúcs bal részfájának gyökércsúcsa, ha a jobb oldalon megy ki, akkor pedig a jobb részfájának gyökércsúcsa. Az új háromszögnek mindig az érkezési oldala van felül, vagyis amelyiken keresztül először beléptünk a háromszögbe. Haladjunk végig a sokszögben lévő csúcsokon előrendezés szerinti bejárással a gyökércsúcstól kezdve, és rajzoljuk fel a bináris fát.

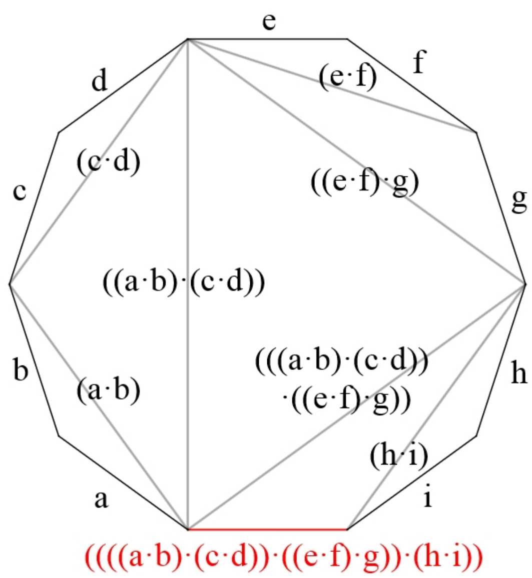


33. ábra. Bináris fák és háromszögezett konvex poligonok bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik. Bináris fából történő konvex poligon építése esetén a gyökércsúcsot tartalmazó háromszögből indulunk ki, és a sokszöget folyamatosan csúcsokat tartalmazó háromszögekkel bővítem, amíg minden csúcsot fel nem használtam. Itt egyedül arra kell figyelni, hogy a soron levő csúcs bal oldali, vagy jobb oldali részfa gyökércsúcsa. Bijekciót határoztunk meg, tehát az $n+2$ csúcsú konvex poligonok száma tényleg C_n.

Nézzünk rá még egy bizonyítást egy újabb bicekció megadásával.

Bizonyítás: Azt már tudjuk, hogy az $n+1$ szorzótényezőt C_n féleképpen tudunk összeszorozni. Határozzunk meg bijekciót az $n+1$ szorzótényező zárójelezései és az $n+2$ csúcsú konvex poligonok között. Rajzoljuk fel az $n+2$ csúcsú háromszögekre bontott sokszöget, majd rögzítsük az egyik élénél fogva. A rögzített élre és az átlókra egyenlőre nem kerül semmi, a többi élére az óramutató járásával megegyező irányban írjuk fel sorban a zárójelezésben szereplő szorzótényezőket. Keressünk olyan háromszögeket a felbontott poligonban, melyeknek két oldala fel van címkézve szorzótényezőkkel, de a harmadik oldala még üres. Ekkor az üres oldalra a másik két oldalon található szorzótényező szorzata kerül. A szorzatba az a tényező kerül előre, ami a rögzített éltől indulva óramutató járásával megegyező irányban hamarabb található. Haladjunk egészen addig, amíg a rögzített oldalél felcímkézésre kerül. Ekkor megkaptuk a szorzótényező zárójelezésünket.



34. ábra. Szorótényező zárójelezések és konvex poligonok bijekciója

Az eljárás visszafelé is működik. Ha van egy szorzótényező zárójelezésünk, akkor rajzoljuk fel a szorzótényezők darabszámánál egyel több csúcsból álló szabályos sokszöget. A sokszöget rögzítsük az egyik élénél. Erre írjuk fel a szorzótényező zárójelezésünket, majd betűzzük az oldalait. Húzzuk be a szorzótényező zárójelezés által meghatározott átlókat, és már meg is vagyunk. Bijekciót határoztunk meg, tehát az $n+2$ csúcsú konvex poligonok száma tényleg C_n. Ez a bijekció eredetileg H. G. Forder-től származik. [5, 135.o]

A fejezet célja az volt, hogy a korábban ismertetett alakzatokról belássuk, hogy tényleg a Catalan-számokra vezetnek. Látjuk, hogy a felsorolt interpretációk között bőven lehetne még további bijekciókat felsorolni, de ez kvázi felesleges, hiszen már elértük a kitűzött célt. Néhány esetekben írtam a szükségesnél több bizonyítást is, viszont ott érdekes és egymástól merőben eltérő bijekciókat ismertettem.

Ha a bijekciók létesítése valakinek felkeltette az érdeklődését, akkor nyugodtan kísérletezzen velük. Ki lehet próbálni az erre a célra írt programomat is, ami a megismert átalakítások közül hajt végre néhányat. Ezt a 7. fejezetben ismertetem.

6. További érdekességek és tételek

Ebben a fejezetben további érdekességeket és tételeket fogunk nézni a Catalan-számokról.

6.1. Definíció. (Generátorfüggvény). Legyen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tetszőleges számsorozat. Ekkor $\{a_n\}$ generátorfüggvénye $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ hatványsor.

Kezdésnek bizonyítsuk a 2.3-as tételt, vagyis hogy a Catalan-számok felírhatóak a $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ explicit alakban. Ehhez a Catalan-számokra volatkozó rekurzív összefüggéseket, valamint a generátorfüggvényüket fogjuk felhasználni.

Bizonyítás: A Catalan-számok generátorfüggvényét jelölje $C(x)$. Tudjuk, hogy $C(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 + C_4 \cdot x^4 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot x^k$, ahol C_k a k-adik Catalan-szám. Határozzuk meg a generátorfüggvény négyzetét $C^2(x)$ -et, vagyis szorozzuk meg $C(x)$ -et önmagával. A következőt kapjuk:

$C^2(x) = C_0 \cdot C_0 + C_0 \cdot C_1 \cdot x + C_0 \cdot C_2 \cdot x^2 + C_0 \cdot C_3 \cdot x^3 + ... + C_1 \cdot x \cdot C_0 + C_1 \cdot x \cdot C_1 \cdot x + C_1 \cdot x \cdot C_2 \cdot x^2 + C_1 \cdot x \cdot C_3 \cdot x^3 + ... + C_2 \cdot x^2 \cdot C_0 + C_2 \cdot x^2 \cdot C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 \cdot C_2 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \cdot C_3 \cdot x^3 + ...$

Ezt átrendezve a következőt kapjuk:

$C^2(x) = C_0 \cdot C_0 + (C_0 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_0) \cdot x + (C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_0) \cdot x^2 + (C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_3 \cdot C_0) \cdot x^3 + (C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_0) \cdot x^4 + ...$

Vegyük észre, hogy az x-es tagok zárójelben lévő szorzótényezői szintén Catalan-számok. Ezt a rekurzív képletből jól látható. Ha a megfelelő tagokat kicseréljük a megfelelő Catalan-számokra, akkor a következőt kapjuk:

$C^2(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot x^{k-1}.$

A $C^2(x)$ -et x -el szorozva C_0 híján pont $C(x)$ -et kapjuk vissza.

$C(x) = C_0 + x \cdot C^2(x)$

A kapott másodfokú egyenletet rendezzük nullára, majd keressük meg a megoldásait.

$x \cdot C^2(x) - C(x) + 1 = 0$

$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$

Ez az átrendezés helyén való, hiszen C_0 értéke továbbra is 1. Foglalkozzunk kicsit a gyökös kifejezéssel, és alakítsuk át a jól ismert binomiális sorfejtés szerint.

$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0}(4x)^0 - \binom{\frac{1}{2}}{1}(4x)^1 + \binom{\frac{1}{2}}{2}(4x)^2 - \binom{\frac{1}{2}}{3}(4x)^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4}(4x)^4 - ...$

Bontsuk ki a binomiális együtthatókat, majd szépítsük meg a kifejezésünket.
$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{(\frac{1}{2})}{1}4x + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2\cdot 1}(4x)^2 - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3\cdot 2\cdot 1}(4x)^3 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(4x)^4 - ...$
Egyszerűsítés után a következőt kapjuk:
$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1!}2x - \frac{1}{2!}4x^2 - \frac{3\cdot 1}{3!}8x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}16x^4 - ...$
Ezt a $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ képletbe visszahelyettesítve a következőt kapjuk:
$C(x) = \dfrac{1 + (1 - \frac{1}{1!}2x - \frac{1}{2!}4x^2 - \frac{3\cdot 1}{3!}8x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}16x^4 - ...)}{2x} = \dfrac{1}{x} - 1 - x - ...$
Ez nem lehet, hiszen $x \to 0$ esetén $C(x) \to \infty$, de tudjuk hogy a hatványsorok a középpontjukban konvergensek, és $C(x)$ hatványsor középpontja nullában található. Nézzük meg a másik esetet is, és helyettesítsünk vissza a $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ képletbe.
$C(x) = \dfrac{1 - (1 - \frac{1}{1!}2x - \frac{1}{2!}4x^2 - \frac{3\cdot 1}{3!}8x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}16x^4 - ...)}{2x} =$
$1 + \frac{1}{2!}2x + \frac{3\cdot 1}{3!}4x^2 + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{3!}8x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{k}(2i-1)}{(k+1!)}2^k x^k$
Vegyük észre, hogy a törtek számlálójában csak páratlan (egész) számok szerepelnek. Ezeket ki kéne pótolnunk a megfelelő páros számokkal, hogy faktoriálisokat kapjunk. Ismerjük az alábbi összefüggéseket:
$\prod_{i=1}^{k}(2i-1) \cdot \prod_{i=1}^{k}(2i) = (2k)!$ és $2^k \cdot k! = \prod_{i=1}^{k}(2i)$
A szorzat rendelkezik a 2^k-os taggal, tehát csak $k!$-al kell bővítenem a törtet.
$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \cdot k! \cdot \prod_{i=1}^{k}(2i-1)}{(k+1!)\cdot k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+1)\cdot k!\,k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\cdot \binom{2k}{k}\cdot x^k$$
Megkaptuk a Catalan-számok generátorfüggvényének zárt alakját.
Tudjuk, hogy $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot x^k$, valamint hogy $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\cdot\binom{2k}{k}\cdot x^k$. Helyettesítsünk k helyére n -et. Az n-edik Catalan-szám zárt képlete tényleg $\dfrac{1}{n+1}\cdot\dbinom{2n}{n}$.
[9, 11-12.o] [3, 3-4.o]

Ejtsünk szót arról is, hogy miként viselkedik a Catalan-számok sorozata nagy n-ekre. Viszont még mielőtt rátérnénk a Catalan-számok aszimptotikus viselkedésére, jöjjön egy egyértelmű észrevétel.

6.2. Tétel. *Az n-edik Catalan-szám felírható $C_n = \dfrac{4n-2}{n+1}\cdot C_{n-1}$ rekurzív képlet segítségével.*

Bizonyítás: Ezt a rekurzív alakot a Catalan-számok zárt képletéből könnyen meghatározhatjuk. Tudjuk, hogy az n-edik Catalan-szám zárt képlete $C_n = \dfrac{1}{n+1}\cdot\dbinom{2n}{n}$. Az n helyébe $(n-1)$-et helyettesítve megkapjuk az $(n-1)$-edik Catalan-szám zárt képletét. $C_{n-1} =$

$\dfrac{1}{(n-1)+1}\cdot\dbinom{2(n-1)}{n-1}=\dfrac{1}{n}\cdot\dbinom{2n-2}{n-1}$. A zárt képletet egy kicsit alakítva rögtön meg is lesz a kívánt alak. $C_n=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dbinom{2n}{n}=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{2n!}{n!\cdot n!}=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)!}{n\cdot n\cdot(n-1)!\cdot(n-1)!}=$ $\dfrac{4n-2}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\cdot(n-1)!}=\dfrac{4n-2}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dbinom{2n-2}{n-1}=\dfrac{4n-2}{n+1}\cdot C_{n-1}$. Tehát az n-edik Catalan-szám tényleg felírható a $\dfrac{4n-2}{n+1}\cdot C_{n-1}$ rekurzív képlet segítségével.
Érdekesség, hogy Euler eredetileg a konvex sokszög háromszögelésének segítségével ezt a rekurzív alakot határozta meg. [5, 107-108.o]

6.3. Állítás. *Az egymást követő Catalan-számok hányadosa 4-hez tart.* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+1}}{C_n}=4$

Bizonyítás: A Catalan-számok előbb meghatározott rekurzív képletét fogjuk használni. Ezek szerint $C_n=\dfrac{4n-2}{n+1}\cdot C_{n-1}$. Ha a rekurzióval egyel tovább megyünk, akkor a következőt kapjuk: $C_{n+1}=\dfrac{4n+2}{n+2}\cdot C_n$. Itt C_n-nel osztva azt kapjuk, hogy $\dfrac{C_{n+1}}{C_n}=\dfrac{4n+2}{n+2}$. Ezek szerint $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+1}}{C_n}=\dfrac{4n+2}{n+2}=4$. Az egymást követő Catalan számok hányadosa tényleg 4-hez tart. [5, 111.o]

Következmény: Megfelelően nagy n-ek esetén $C_{n+1}\sim 4\cdot C_n$.

6.4. Állítás. *A Catalan-számok sorozata a végtelenbe tart.*

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hiszen $C_n>0$ minden n-re, és az előbbiek szerint $C_{n+k}>3^k\cdot C_n$ minden kellően nagy k-ra.

6.5. Állítás. *A Catalan-számokra teljesül a* $C_n\sim\dfrac{2^{2n}}{(n+1)\sqrt{\pi n}}$ *aszimptotikus becslés.*

Bizonyítás: Az aszimptotikus becsléshez használjuk a Stirling formulát. Mint tudjuk, a Stirling formula azt mondja ki, hogy $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Ezt most alkalmazzuk C_n-re.

$$C_n=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n!}{n!\cdot n!}\sim\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2\pi 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\cdot 2\pi n}=\frac{2^{2n}}{(n+1)\sqrt{\pi n}}.$$

Az n-edik Catalan-szám aszimptotikus becslése tényleg $C_n\sim\dfrac{2^{2n}}{(n+1)\sqrt{\pi n}}$.
[5, 110-111.o]

Végül nézzünk meg néhány Catalan-számokkal kapcsolatos számelméleti érdekességet.

6.6. Tétel. *Az n-edik Catalan-szám pontosan akkor páratlan, ha $n=2^k-1$ alakú, minden más n esetén páros.*

Bizonyítás: Használjuk a Catalan-számok rekurzív képletét.
$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0$
Tudjuk, hogy a képletben az összeszorzandó tagok indexeinek összege mindig $n-1$. Vegyük észre, hogy $C_{k-1} \cdot C_{n-k} = C_{n-k} \cdot C_{k-1}$. Ennek segítségével párokba rendezhetjük a szimmetrikus tagokat. A további vizsgálódás előtt csináljunk egy esetszétválasztást aszerint, hogy páros, vagy páratlan indexű Catalan-számról beszélünk. Első esetben nézzük meg, hogy mi történik, ha n páros. Ha n páros, akkor $\frac{n}{2}$ és $\frac{n}{2}-1$ is egész és összegük éppen $n-1$. Ekkor a képlet a következő:
$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}} + C_{\frac{n}{2}} \cdot C_{\frac{n}{2}-1} + \ldots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0$
Írjuk egymás mellé az azonos értékű tagokat.
$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_{n-1} \cdot C_0 + C_1 \cdot C_{n-2} + C_{n-2} \cdot C_1 + \ldots + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}} + C_{\frac{n}{2}} \cdot C_{\frac{n}{2}-1}$
Most pedig emeljünk ki kettőt. $C_n = 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}})$ Látjuk, hogy páros n-ekre C_n is páros lesz. Mi történik akkor, ha n páratlan? Ebben az esetben $\frac{n-1}{2}$ lesz egész és $2 \cdot \frac{n-1}{2} = n-1$, tehát a képletben ezzel az indexszel rendelkező tag önmagával fog szorzódni. $C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{\frac{n-1}{2}} + \ldots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0$. Most is írjuk egymás mellé az azonos értékű tagokat.
$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_{n-1} \cdot C_0 + C_1 \cdot C_{n-2} + C_{n-2} \cdot C_1 + \ldots + C_{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{\frac{n-1}{2}}$. Az eddigiekhez hasonlóan emeljünk ki kettőt. Az utolsó tag kivételével mindegyiknek van párja, tehát a képletünk a következő: $C_n = 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-3}{2}} \cdot C_{\frac{n+1}{2}}) + C_{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{\frac{n-1}{2}}$. Az n-edik Catalan-szám paritása tehát az $\frac{n-1}{2}$-edik Catalan-szám paritásától függ. Ha n páratlan de $C_{\frac{n-1}{2}}$ páros, akkor C_n is páros. Ha n páratlan és $C_{\frac{n-1}{2}}$ is páratlan, akkor C_n is páratlan. Mi kell ahhoz, hogy $C_{\frac{n-1}{2}}$ páratlan legyen? Az előző gondolatmenetet megismételve $C_{\frac{n-1}{2}}$ akkor páratlan, ha $C_{\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2}}$ is páratlan. De ekkor $C_{\frac{\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2}-1}{2}}$ is páratlan. ... Ha ezt folytatjuk, a folyamat során minden páratlan Catalan-számot szükségszerűen érintünk, végül eljutunk egészen a nulladik Catalan-számig. Tudjuk, hogy $C_0 = 1$ a legelső páratlan Catalan-szám. Az eljárást megfordítva azt kapjuk, hogy $n = 0, 1, 3, 7, 15, \ldots, 2^k - 1, \ldots$-re lesz páratlan C_n. Ezt teljes indukcióval be is látjuk. Tudjuk, hogy $n = 0$-ra C_n páratlan. Tegyük fel, hogy C_n páratlan $n = 2^k - 1$-ra és lássuk be $n = 2^{k+1} - 1$-re. Az eljárás megfordítása szerint C_n pontosan akkor páratlan, ha C_{2n+1} is páratlan. Ekkor $C_{2n+1} = C_{2 \cdot (2^k - 1) + 1} = C_{2^{k+1} - 2 + 1} = C_{2^{k+1} - 1}$. Ezek szerint C_n páratlan $n = 2^{k+1} - 1$-re. Végeztünk a teljes indukcióval. Beláttuk, hogy az n-edik Catalan-szám pontosan akkor páratlan, ha $n = 2^k - 1$ alakú, minden más n esetén páros. [5, 329-330.o]

6.7. Tétel. *Catalan-szám nem lehet teljes hatvány, vagyis $C_n \neq k^t$, ahol $k, t \in \mathbb{N}$ és $k, t > 1$.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz használni fogjuk a Chebyshev-tételnek azt a Ramanujan-tól származó erősített alakját, miszerint n és $2n$ között legalább kettő prímszám található, amennyiben $n \geq 6$. Írjuk fel a Catalan-számok zárt képletét, és egy kicsit alakítsunk rajta. $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{n!}$. Tudjuk, hogy n és $n+1$ nem lehet egyszerre prím ($n > 2$ esetén), vagyis Ramanujan tételét alkalmazva látjuk, hogy $n+2$ és $2n$ között még mindig található legalább egy prímszám. Ennek a prímnek pontosan az első hatványa osztja C_n-et, tehát C_n nem lehet teljes hatvány. Mi a helyzet az $n < 6$ esetben? Tudjuk, hogy $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$ és $C_5 = 42$. Ezek egyike sem teljes hatvány. Ezek szerint Catalan-szám tényleg nem áll elő teljes hatványként.
[2, 2-3.o]

6.8. Tétel. *A Catalan-számok között csak a C_2 és a C_3 prímszámok.*

Bizonyítás: Használjuk a Catalan-számok 6.2.-es tételben meghatározott rekurzív képletét $n+1$-re: $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} \cdot C_n$. Ezek szerint $(n+2) \cdot C_{n+1} = (4n+2) \cdot C_n$. Tegyük fel, hogy C_n prím. Ekkor $C_n \mid n+2$ vagy $C_n \mid C_{n+1}$.

Először vizsgáljuk meg a $C_n \mid n+2$ esetet. Tudjuk, hogy $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{n!}$. Nézzük a $\frac{n+2}{C_n}$ törtet. Világos, hogy ez a tört egy idő után nem lesz egész, hiszen C_n sokkal gyorsabban tart a végtelenbe, mint $n+2$, azaz $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{C_n} = 0$. Nézzük meg a kezdeti értékeket: $\frac{0+2}{C_0} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{1+2}{C_1} = \frac{3}{1} = 1$, $\frac{2+2}{C_2} = \frac{4}{2} = 2$, $\frac{3+2}{C_3} = \frac{5}{5} = 1$, $\frac{4+2}{C_4} = \frac{6}{14}$. Világos, hogy innentől kezdve a tört sosem lesz egész, ugyanis $n \geq 4$-re használva a rekurzív képletet azt kapjuk, hogy $\frac{n+3}{C_{n+1}} < \frac{n+2}{C_n}$, hiszen $\frac{n+3}{C_{n+1}} = \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+2}{C_n} \cdot \frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+2}{C_n} \cdot \frac{n+2}{4n+2} = \frac{n+3}{4n+2} \cdot \frac{n+2}{C_n}$, és itt $\frac{n+3}{4n+2} < 1$. Ezek szerint C_n akkor és csak akkor osztója az $n+2$-nek, ha $3 \geq n \geq 0$. Ekkor $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ és $C_3 = 5$, amiből csak C_2 és C_3 a prím.

A másik esetben $C_n \mid C_{n+1}$, vagyis $\frac{C_{n+1}}{C_n} = k$, ahol k egy pozitív egész szám. Ezt a rekurzív képletbe visszahelyettesítve a következőt kapjuk: $\frac{4n+2}{n+2} = k$. Ezt átrendezve $4n+2 = nk+2k$, amit tovább alakítva azt kapjuk, hogy $n(4-k) = 2k-2$. Mivel itt mind a két oldal ≥ 0, ezért $1 \leq k < 4$. Nézzük végig a lehetséges eseteket. Ha $k = 1$, akkor $n = 0$ és $C_0 = 1$, ami nem prím. Ha $k = 2$, akkor $n = 1$ és $C_1 = 1$, ami nem prím. Ha $k = 3$, akkor $n = 4$ és $C_4 = 14$, ami szintén nem prím.

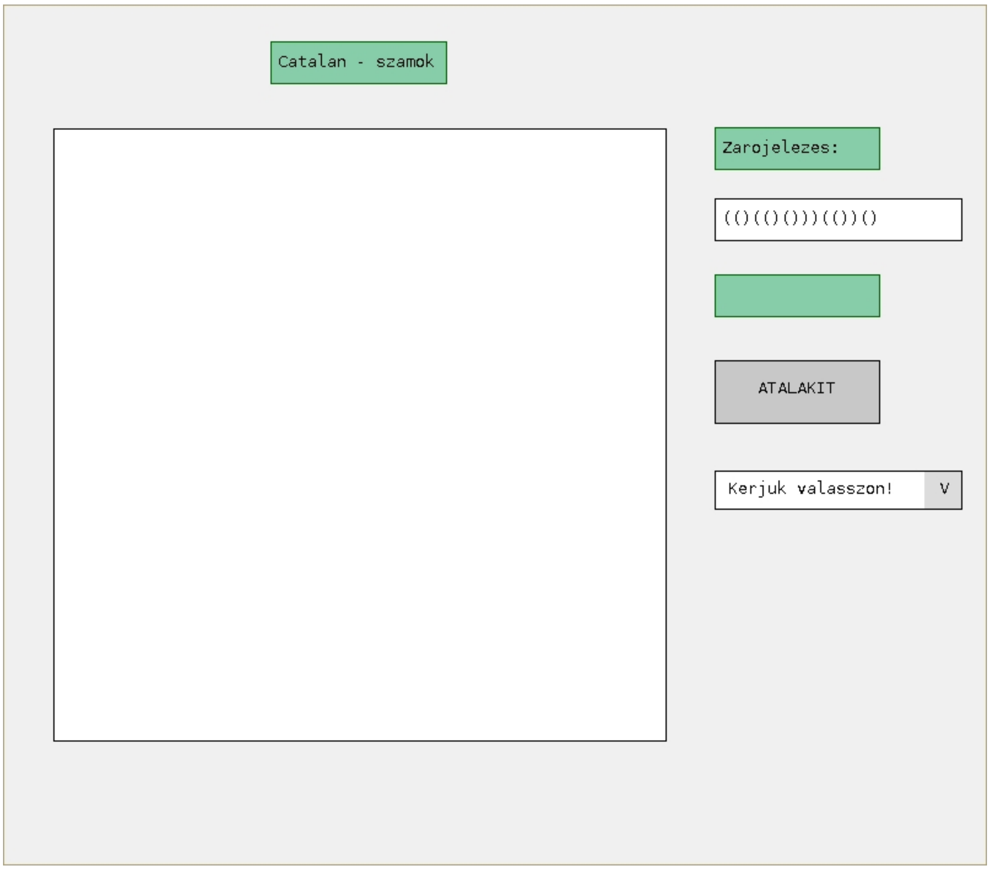
Látjuk, hogy a Catalan-számok között valóban csak a $C_2 = 2$ és a $C_3 = 5$ prímszámok. [5, 331-332.o]

Számtalan további tételt és érdekességet lehetne sorolni a Catalan-számokkal kapcsolatban, viszont ezek a szakdolgozatomba már nem fognak bekerülni. Ha valakinek ez a kis ízelítő meghozta a kedvét, és mélyrehatóbban szeretné tanulmányozni a számsorozatot, akkor neki bátran ajánlom fő forrásaimat, Richard P. Stanley [9], Thomas Koshy [5], illetve Ralph P. Grimaldi [4] könyveit. A témában a mai napig írnak cikkeket is, melyek egy része a fajsúlyosabb matematika témakörébe tartozik. [1] [8] Akad köztük olyan eredmény is, melynek nyomtatásban történő megjelenésére még várni kell, viszont az interneten már hozzáférhető. [7] Ismeretanyag tehát van bőven, már csak ezek felfedezése várat magára.

7. Számítógépes program

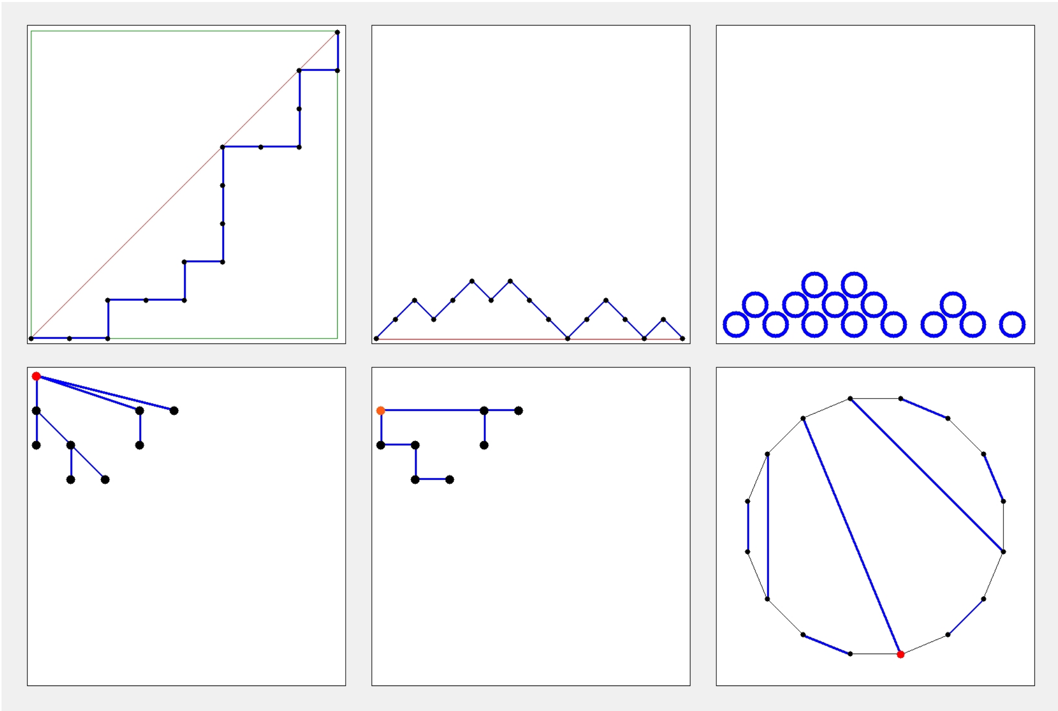
Richard P. Stanley Catalan-számokról írt könyvében arra bíztatja olvasóit, hogy a könyvben megjelenített 214 geometriai interpretáció mindegyike között létesítsenek bijekciót. [9, 15.o] Ezek meghatározása eltartana egy darabig, úgyhogy a szakdolgozatomban nem fog rá sor kerülni. De mi lenne, ha ehelyett a már ismert átalakításokat tanulmányoznánk, és megnéznénk őket minden - vagy legalábbis nagyon sok - esetre? Papír alapon még ez is rengeteg időt venne igénybe. Ha valaki szeretné ezt gyorsan és különösebb erőfeszítések nélkül megtenni, vagy csak játszana egy kicsit a bemutatott alakzatokkal, akkor neki ajánlom az erre a célra írt programunkat.

A program bemenő adata egy kiegyensúlyozott zárójelezés, kimenő adata pedig egy megjelenített geometriai interpretáció. Indítás után az alábbi képernyő fogad minket.



35. ábra. Program az indítása után

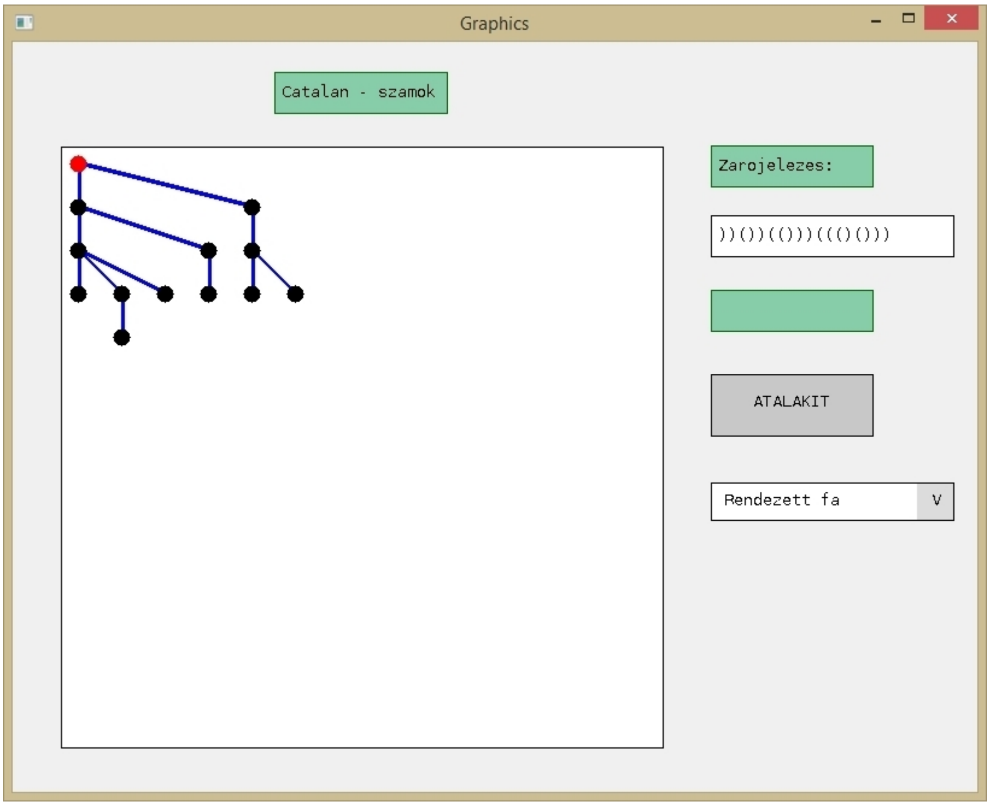
A beviteli mezőben alapból meg van adva egy kiegyensúlyozott zárójelezés, de belekattintva tetszés szerint átírhatjuk. Ide csak nyitó, valamint csukó zárójeleket tudunk beírni, illetve lehetőségünk van még törölni is. Egyéb gombokra a legutoljára megadott zárójelet ismétli. A megfelelő zárójelezés beírása után a legördülő listából kiválasztahatjuk, hogy a Catalan-számok melyik interpretációját szeretnénk megkapni. Itt hat választási lehetőségünk van. Választahatunk monoton utat, hegyvonulatot, érmetornyozást, rendezett fát, bináris fát, vagy illedelmes kézfogást. Az ÁTALAKÍT gomb megnyomása után a program a képernyő közepén lévő 400 pixel széles és 400 pixel magas rajzlapon ki is rajzolja a kívánt alakzatot. A beírt zárójelezést egymás után akár az összes választható interpretációvá átalakíthatjuk.



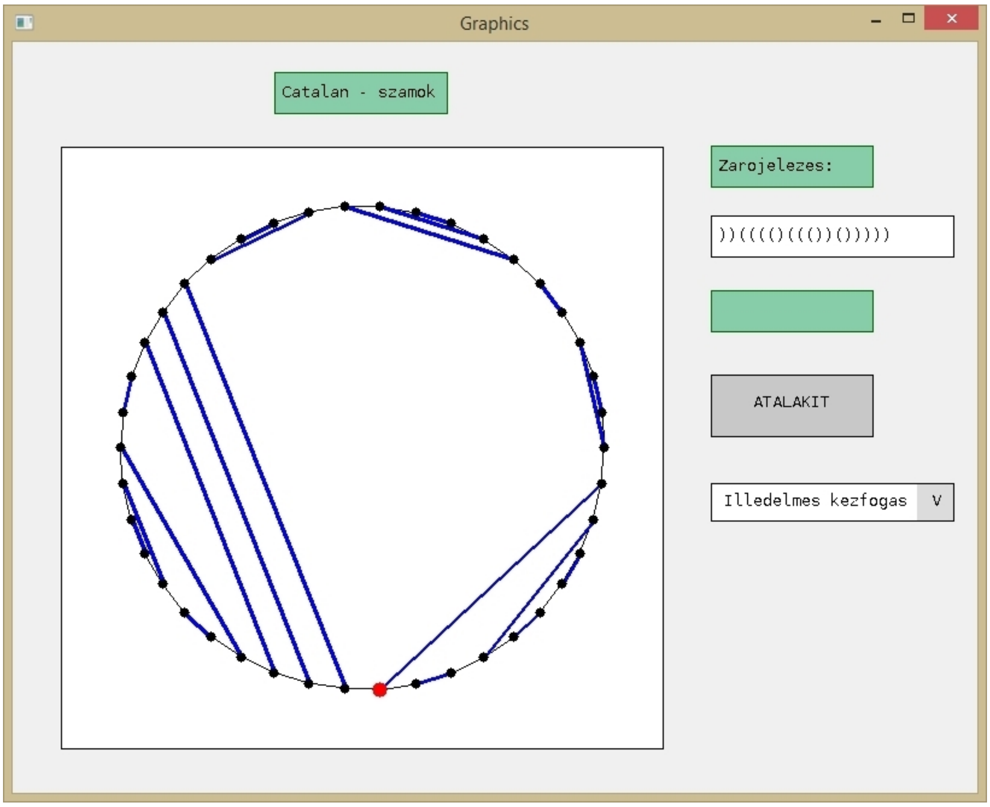
36. ábra. Alakzatok az alapból megadott kiegyensúlyozott zárójelezésre

A kirajzolt alakzatok mérete a bevitt zárójelezés hosszától függően dinamikusan változik, hogy lehetőleg minél szebb képet kapjunk, ugyanakkor sose lógjunk le a rajzlapról. A kezdeti értékeknél előforduló speciális esetek is kezelve vannak, a program ekkor is a megfelelő interpretációt rajzolja ki. A bemenő adatsor legfeljebb 100 karakter hosszú lehet, tehát akár az ötvenedik Catalan-szám interpretációit is meghatározhatjuk. Sajnos az ábra ekkor már a legtöbb esetben nem látszik rendesen.

A beviteli mező kitöltésekor nagyon oda kell figyelni. Tudjuk, hogy egy kiegyensúlyozott zárójelezésben mindig ugyanannyi nyitó és csukó zárójel van, valamint hogy a csukó zárójelek száma sosem haladja meg a nyitó zárójelekét. Ha ezek közül valamelyik nem teljesül, akkor a program jelez, és a bemenő adatunkat ki kell javítanunk.



37. ábra. Egy rendezett fa megjelenítése



38. ábra. Egy illedelmes kézfogás megjelenítése

A programot Gelman Krisztiánnal közösen írtuk, aki kérésemre segített az elkészítésében. A programkörnyezet kiválasztása és a grafikus megjelenés az ő érdeme, többek közt a kiválasztó widget és a nyomógomb is saját munkája. A programozás során én az interpretációk közti bijekciók felkutatásáért, valamint ezek egymásba történő átalakítását végző algoritmusok leírásáért feleltem. A segítséget ezúton is nagyon köszönöm.

A program és a futtatásához szükséges segédfájlok elérhetőek az alábbi linken:
`https://drive.google.com/drive/folders/1yX6wvdma6HqW03E9BmO0bPUgAFTTTFNT?usp=sharing`

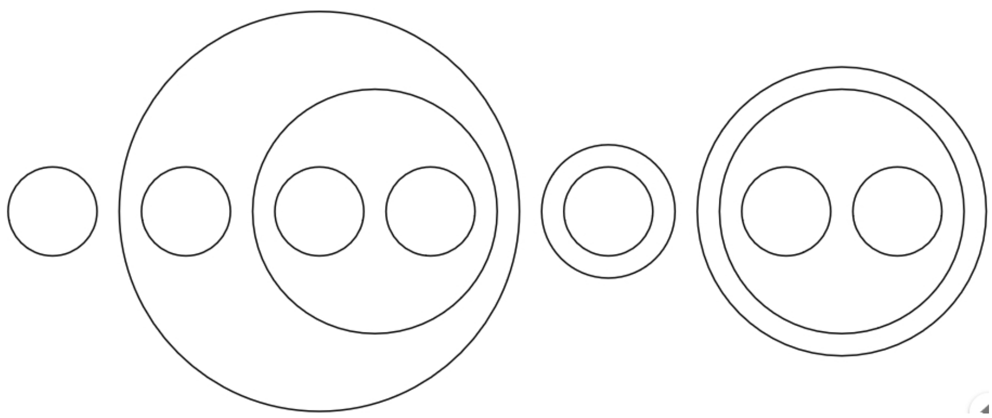
8. Összefoglaló

A szakdolgozatom elején elmeséltem a Catalan-számok történetét, aztán precízen definiáltam őket. A több száz, erre a számsorozatra vezető geometriai alakzat közül ismertettem néhányat, ezekről be is bizonyítottam, hogy valóban a Catalan-számok interpretációi. Bemutattam néhány további tételt és érdekességet. Végül adtam egy részletes leírást az interpretációk közti átalakításokat végző programomról.

Igyekeztem a témát körültekintően, több irányból körüljárni, valamint egyéb tudományágak határait súrolva, a mondandót még érdekesebbé tenni. A fő hangsúlyt Stanley felvetése [9, 15.o] alapján, a Catalan-számok geometriai előfordulásai közti bijekciók létesítésére helyeztem. Célom, hogy a későbbiekben a Catalan-számok sorozatát diákjaimmal is megismertessem. Matek szakkör keretein belül biztosan megvizsgáljuk majd néhány interpretációjukat, valamint nézünk példákat bijekciókra is.

Zárásként, hogy senki se maradjon házi feladat nélkül, ismertetek még egy kombinatorikai objektumot. Tessék otthon önállóan belátni, hogy ez miként vezet a Catalan-számokra.

8.1. Definíció. (Szeparált körök (Disjoint Circles)). Szeparált körök alatt azt értjük, hogy felveszünk n darab kört úgy, hogy középpontjaik egy egyenesre esnek, valamint a körök nem érnek össze. A köröknek, csak az egymáshoz képest elfoglalt pozíciójuk számít, a méretük nem.



39. ábra. Példa szeparált körökre

Hivatkozások

[1] Armstrong, D., Loehr, N. A., Warrington, G. S. (2015). *Rational Parking Functions and Catalan Numbers*. Annals of Combinatorics, 20(1), 21–58. https://doi.org/10.1007/s00026-015-0293-6

[2] Checcoli, S., D'Adderio, M. (2013). *Perfect powers in Catalan and Narayana numbers*. arXiv: Number Theory.

[3] Davis, T. (2016, February 19). *Catalan Numbers*. Mathematical Circles Topics. Retrieved May 13, 2022, from https://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf

[4] Grimaldi, R. (2012). *Fibonacci and Catalan Numbers*. Wiley.

[5] Koshy, T. (2009). Catalan Numbers with Applications. Oxford University Press.

[6] Loehr, N. (2011). *Bijective Combinatorics*. Amsterdam University Press.

[7] Qi, F. (in press). *Some Properties of the Catalan Numbers*. Ars Combinatoria.

[8] Qi, F., Guo, B. N. (2017). *Integral Representations of the Catalan Numbers and Their Applications*. Mathematics, 5(3), 40. https://doi.org/10.3390/math5030040

[9] Stanley, R. P. (2015). *Catalan Numbers*. Cambridge University Press.