

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Approximációs és interpolációs spline görbék

Szakdolgozat

Készítette:

Sándor Ramóna

matematika BSc,
matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Verhóczy László

egyetemi docens,
Geometriai Tanszék



Budapest

2022

NYILATKOZAT

Név: Sándor Ramóna

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: H7LK5J

Szakedolgozat címe:

Approximációs és interpolációs spline görbék

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.30.



a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Előszó	4
1. Geometriai előkészítés	6
1.1. Véges sok pont affin és konvex kombinációi	6
1.2. Görbék az \mathbb{R}^3 euklideszi térben	9
1.2.1. Az \mathbb{R}^3 -beli C^1 -osztályú görbék	9
1.2.2. Az \mathbb{R}^3 -beli C^2 -osztályú görbék geometriai jellemzői	11
1.2.3. Csatlakozó C^2 -osztályú görbék	13
2. Approximációs spline görbék	15
2.1. Egy általános tervezési módszer	15
2.2. A Bézier-féle görbék	16
2.3. A de Casteljau-algoritmus	19
2.4. Bézier-féle görbeívek másodrendben sima csatlakozása	21
2.5. A racionális Bézier-féle görbék	22
2.6. A B-spline görbék	24
3. Interpolációs spline görbék	28
3.1. Az interpolációs alapfeladat	28
3.2. A harmadfokú Hermite-féle görbe	29
3.3. Megoldás az interpolációs alapfeladatra	31
3.3.1. Ekvidisztáns paraméterezés	31
3.3.2. Az általános paraméterezés esete	32
Irodalomjegyzék	34

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Verhóczy Lászlónak, aki ismeretlenül is bizalmat szavazott nekem, majd a rendszeres konzultációk során segített a kiválasztott téma feldolgozásában és a szakdolgozat megírásában.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani szaktársaimnak a közös tanulásokért, a jegyzetekért és a sok segítségért, amikkel hozzásegítettek az egyetem elvégzéséhez.

Köszönöm a családomnak, a páromnak és a barátaimnak, hogy egyetemi tanulmányaim során melletttem voltak a legnehezebb időszakaimban is, és ezáltal segítettek végigmenni ezen a nehéz úton.

Előszó

Az angol nyelvben a spline szó eredetileg egy fából készült és részben meghajlítható vonalzót jelent, amelyet korábban a hajók tervezésében és építésében alkalmaztak a hajóácsok. Ezzel jól megtudtak megrajzolni egy olyan görbe vonalat, amely áthaladt több megadott ponton és olykor néhány peremfeltételnek is megfelelt.

A XX. század második felében főként az autók felületeinek tervezésében olyan görbéket és felületeket alkalmaztak, amelyeket viszonylag kevés vezérlő ponttal lehet meghatározni és amelyeket viszonylag egyszerű függvényekkel (többnyire alacsony fokszámú polinomokkal) lehet leírni. A kidolgozott tervezési eljárások során arra törekedtek, hogy a felhasználó kevés adattal és interaktívan tudja vezérelni a görbék alakját. A tervezésnél a görbeívek alakját a vezérlőpontok helyének megváltoztatásával lehet módosítani. A görbék paraméterezésében szereplő függvények pedig olyanok, hogy az értelmezési tartományuk felbontható olyan részintervallumokra, amelyeken polinomokkal leírhatóak a függvények leszűkítései. Ezeket a görbéket aztán spline görbéknek nevezték el. A spline görbékre vonatkozó eljárásokat ma már a vektorgrafikai szoftverek is kiterjedten használják. Emiatt a számítógépi grafika elméletében is szerephez jutnak a spline görbék.

Szakedolgozatom célja egy olyan betekintést adni a spline görbék matematikai világába, amely által könnyen kezelhető algoritmusokat lehet kapni a számítógépes programozáshoz. A téma szakirodalmában alapkönyvnek számít Gerald Farin *Curves and Surfaces for CAGD* című [1] műve, amely a korábbi kiadásoknak egy kibővített változata. A dolgozat megírása során főként erre támaszkodtam. A szemléltető ábrákat a GeoGebra matematikai szoftver alkalmazásával magam készítettem el.

A spline görbék elméletében a konvex geometria és a differenciálgeometria eszközeinek a felhasználására is szükség van. A dolgozat első fejezetében áttekintésre kerülnek azok a geometriai fogalmak és a velük kapcsolatos azon állítások, amelyek felhasználásra kerülnek a későbbi fejezetekben.

A második fejezet a szakdolgozat lényegi része, melyben az approximációs görbékkel kapcsolatos eljárásokat tárgyaljuk. Elsőként a Bézier-féle görbék elméletének az alapjait tanulmányozzuk. Az elnevezés Pierre Bézier francia mérnökre utal, aki az 1960-as évek elején a Renault művek tervezőjeként dolgozta ki ezen görbék alkalmazásának lehetőségeit. Bemutatjuk a Paul de Casteljau, francia matematikus nevéhez fűződő algoritmust, miszerint a kontrollpontokból kiindulva szakaszok rekurzív felosztásával is megkaphatjuk a Bézier-görbe pontjait. Többek között megvizsgáljuk még, hogy

miként lehet egymáshoz csatlakoztani két Bézier-féle görbeívet oly módon, hogy az összetett görbe másodrendben sima legyen.

Az úgynevezett B-spline görbék elméletét az 1970-es évek elején fejlesztették ki. Ezen görbetípus előnye, hogy egy vezérlőpont pozíciójának megváltoztatása esetén a teljes approximációs görbének csak az a szegmense módosul, amelyre ez a vezérlőpont hatással bír. A fejezet végén a B-spline görbékről adunk egy áttekintést.

A harmadik fejezetben azt a kérdést tárgyaljuk, hogy miként lehet adott pontsorozathoz egy olyan görbét illeszteni, amely az összes ponton áthalad. Mint a gyakorlati vizsgálatok során kiderült, célszerű ezt görbét a harmadfokú Hermite-féle görbeívekből összeállítani. Ez esetben az illesztett görbe koordinátafüggvényei harmadfokú polinomokként állnak elő a görbeíveknek megfelelő részintervallumokon.

1. fejezet

Geometriai előkészítés

1.1. Véges sok pont affin és konvex kombinációi

Ebben az alfejezetben a jelölések bevezetése mellett értelmezni fogjuk véges sok pontnak az affin és konvex kombinációit, továbbá áttekintjük az ezekkel kapcsolatos alapvető összefüggéseket, állításokat. A téma részletesebb tárgyalását a Szabó László által írt [4] jegyzet első fejezetében lehet fellelni.

Az euklideszi tér pontjainak halmazát jelölje X . Szokás szerint a pontokat nagy latin betűkkel, például A, B, P, Q fogjuk jelölni. Az X részhalmazait ponthalmazoknak vagy alakzatoknak nevezük. Az egyeneseket és a síkokat kitüntetett alakzatoknak tekintjük.

Az A és B pontokon átmenő egyenest jelölje $\langle A, B \rangle$, az őket összekötő szakaszt pedig \overline{AB} . A két pont távolságát $d(A, B)$ vagy AB fogja jelölni. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszra a szokásos \overrightarrow{AB} jelölést alkalmazzuk. Emellett \overrightarrow{AB} az irányított szakasszal képviselt szabad vektort is jelöli.

A térbeli szabad vektorok az összeadás és a valós számmal történő szorzás műveletére nézve egy 3-dimenziós vektorteret alkotnak az \mathbb{R} valós számtest felett. Ezt a vektorteret továbbiakban V fogja jelölni. A vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, például $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Ha egy térbeli O pontot kezdőpontnak tekintünk, akkor egy tetszőleges P pontnak az O -ra vonatkozó helyvektorán az \overrightarrow{OP} vektort értjük.

Mint ismeretes, a térbeli vektorok esetében értelmezni lehet két vektor skaláris szorzatát és a vektoriális szorzatukat is. Vegyük az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vektorokat. A szakdolgozatban a két vektor skaláris szorzatára $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ helyett, inkább az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ jelölést alkalmazzuk. A két vektor vektoriális szorzatára a szokásos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jelölést használjuk.

Az alábbiak során áttekintünk néhány olyan a konvexitással kapcsolatos fogalmat és összefüggést, amelyekre a későbbiek során majd hivatkozni fogunk.

Mint ismeretes, egy alakzatot akkor mondunk konvexnek, ha bármely két pontjának az összekötő szakaszát tartalmazza. Eszerint az üres halmazzt is konvex alakzatnak tekintjük. Könnyű belátni, hogy konvex alakzatoknak a metszete egy konvex ponthalmaz, és ennek alapján lehet bevezetni a konvex burok fogalmát.

1.1.1. Definíció. Egy \mathcal{A} alakzat konvex burkán, az \mathcal{A} -t tartalmazó összes konvex alakzat metszetét értjük. Ezen konvex burokra a $Konv(\mathcal{A})$ jelölést alkalmazzuk.

1.1.2. Megjegyzés. A definícióból adódik, hogy a $Konv(\mathcal{A})$ konvex burok a legszűkebb olyan konvex alakzat, amely tartalmazza az \mathcal{A} ponthalmazt.

A véges sok pontból álló alakzat konvex burkával kapcsolatosan igazak az alábbi kijelentések. Ha adott két pont, akkor azok konvex burka az őket összekötő szakasz.

Ha véges sok olyan pontot veszünk, amelyek egy síkban vannak és nincsenek egy egyenesen, akkor azok konvex burka egy olyan konvex sokszög, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

Ha adva van véges sok pont, amelyek nincsenek egy síkban, akkor azok konvex burka egy olyan konvex poliéder, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

A pontok affin kombinációjának fogalmához szükségünk van az alábbi állításra.

1.1.3. Állítás. *Legyenek adva a P_1, \dots, P_n ($n \geq 1$) pontok és olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ valós számok, amelyek összegére fennáll $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Tekintsünk a térben egy O kezdőpontot, és vegyük azt az R pontot, amelynek helyvektorára teljesül $\overrightarrow{OR} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OP_i}$. Ez esetben az R pont nem függ az O kezdőpont megválasztásától.*

Bizonyítás. Az állításban szereplő O pont helyett válasszunk egy másik O' kezdőpontot. Ekkor felhasználva az $\overrightarrow{O'P_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}$ és $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ összefüggéseket azt kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{O'P_i} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) \\ (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OP_i} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{O'R}, \end{aligned}$$

ami már igazolja is a kijelentést. \square

A fenti állítás ismeretében már értelmezni tudjuk az affin kombináció fogalmát.

1.1.4. Definíció. Legyenek adva a P_1, \dots, P_n ($n \geq 1$) pontok és olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ valós számok, amelyek összege 1 (vagyis $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$). Kezdőpontként válasszunk egy tetszőleges O pontot. Az $\overrightarrow{OR} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OP_i}$ helyvektor által meghatározott R pontot a P_1, \dots, P_n pontok $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ együtthatókkal vett affin kombinációjának mondjuk.

1.1.5. Definíció. Súlyozott pontrendszerhez jutunk, ha egy véges P_1, \dots, P_n ($n \geq 1$) pontsorozat minden eleméhez súlyként hozzárendelünk egy w_i ($i = 1, \dots, n$) valós számot.

Amennyiben fennáll a $\sum_{i=1}^n w_i \neq 0$ egyenlőtlenség, akkor ezen súlyozott pontrendszer súlypontján azt az S pontot értjük, amelynek egy O kezdőponthoz tartozó helyvektorára fennáll az

$$\vec{OS} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \cdot (\sum_{r=1}^n w_r \vec{OP}_r) \quad \text{összefüggés.}$$

1.1.6. Megjegyzés. A súlypont a súlyozott P_1, \dots, P_n pontoknak egy olyan affin kombinációja, ahol az együtthatók értékei $\alpha_i = \frac{w_i}{\sum_{r=1}^n w_r}$ ($i = 1, \dots, n$).

Az affin kombinációnak egy speciális esete a konvex kombináció, ahol az együtthatók között nem szerepelhet negatív szám.

1.1.7. Definíció. Legyenek adva a P_1, \dots, P_n ($n \geq 1$) pontok és olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nemnegatív valós számok, amelyek összegére fennáll $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Válasszunk kezdőpontnak egy O pontot. Az $\vec{OR} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OP}_i$ helyvektor által meghatározott R pontot a P_1, \dots, P_n pontok egy konvex kombinációjának mondjuk. Az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nemnegatív számokat nevezzük a konvex kombináció együtthatóinak.

Rögzítsünk a térben egy O kezdőpontot, továbbá vegyünk két pontot A -t és B -t. Az A, B pontok konvex kombinációit a tér azon P pontjai alkotják, amelyek helyvektorai előállnak az $\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$ alakban valamely $t \in [0, 1]$ valós számmal. Ebből pedig az $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$ kifejezés adódik. Ennek következtében már világos, hogy a két pont összes konvex kombinációinak halmaza éppen az \overline{AB} szakasz.

1.1.8. Definíció. Legyen adva a térben két pont A és B , továbbá olyan w_A, w_B nemnegatív valós számok, hogy $w_A + w_B > 0$. Az A, B pontpár szakaszának a w_A, w_B súlyoknak megfelelő felosztásán azt értjük, hogy kijelöljük az \overline{AB} szakasz azon P pontját, amelynek helyvektora $\vec{OP} = \frac{w_A}{w_A + w_B} \vec{OA} + \frac{w_B}{w_A + w_B} \vec{OB}$.

1.1.9. Megjegyzés. Az \overline{AB} szakaszon vegyünk egy P pontot és annak a végpontoktól mért AP, BP távolságát. Ha tekintjük a $w_A = BP, w_B = AP$ súlyoknak megfelelő felosztást a szakaszon, akkor éppen a P pontot kapjuk.

Az alábbi állítás igazolására nem térünk ki a szakdolgozatban. A bizonyítás megtalálható a [4] jegyzet 1.2. alfejezetében.

1.1.10. Állítás. Legyen adott egy \mathcal{H} ponthalmaz. Tekintsük a \mathcal{H} pontjaiból képzett összes konvex kombinációt és az általuk alkotott ponthalmazt. Az így nyert alakzat megegyezik a \mathcal{H} ponthalmaz $\text{Konv}(\mathcal{H})$ konvex burkával.

A geometriában az analitikus tárgyaláshoz általában derékszögű koordináta-rendszert alkalmaznak. A térben vegyünk fel egy Descartes-féle koordináta-rendszert, amelynek O legyen a kezdőpontja

és \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} az alapvektorai. Ezek páronként egymásra merőleges egységvektorok, melyek a szabad vektorok V terének egy bázisát adják. A továbbiakban feltesszük azt is, hogy az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} vektorhármast egy jobbrendszert képez.

Tekintsünk a térben egy P pontot. Ennek az O kezdőpontra vonatkozó \overrightarrow{OP} helyvektora egyértelműen áll elő az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$ alakban. A lineáris kombinációban szereplő x_P , y_P , z_P együtthatókat mondjuk a P pont koordinátáinak az adott koordináta-rendszerben. Eszerint a P pontnak megfelel az (x_P, y_P, z_P) számhármast, melyet a P koordináta-hármastának mondunk.

A tér koordinátázásának nevezzük azt a $\xi: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, ahol tetszőleges $P \in X$ pontra fennáll $\xi(P) = (x_P, y_P, z_P)$. Világos, hogy ξ egy bijektív megfeleltetést ad a tér pontjainak halmaza és a valós számhármastok \mathbb{R}^3 tere között.

A $\xi: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ koordinátázással az X teret azonosítani lehet a valós számhármastok \mathbb{R}^3 terével. Ez pedig lehetőséget ad arra, hogy az alakzatok geometriai jellemzőinek vizsgálatához a valós függvénytan eszközeit is alkalmazzuk.

1.2. Görbék az \mathbb{R}^3 euklideszi térben

Ebben az alfejezetben áttekintjük azokat a görbékre vonatkozó fogalmakat és összefüggéseket, melyeket majd alkalmazni fogunk a dolgozat további fejezeteiben. A tárgyalás elsődlegesen az interneten elérhető [6] jegyzetre támaszkodik. Abban fellelhetőek azon összefüggések és állítások igazolásai, melyeket ezúttal bizonyítás nélkül mondunk ki.

1.2.1. Az \mathbb{R}^3 -beli C^1 -osztályú görbék

Tekintsük a valós számhármastok \mathbb{R}^3 a halmazát. Ezen természetes módon értelmezhető az összeadás és a számmal való szorzás művelete. Eszerint az \mathbb{R}^3 -beli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ elemek összegét az $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ kifejezés írja le. Az \mathbf{u} -nak egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal vett szorzatát pedig a $\lambda \mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$ összefüggés adja meg. Ezen műveletekre nézve az \mathbb{R}^3 egy vektorteret ad az \mathbb{R} valós számtest felett.

Az \mathbb{R}^3 vektortér természetes bázisának nevezzük az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ vektorhármast. Ezen bázist alkalmazva tetszőleges \mathbb{R}^3 -beli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektorra fennáll az $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i$ egyenlőség.

Az \mathbb{R}^3 vektortéren vezessük be a természetes skaláris szorzást. Ez azt jelenti, hogy valamely $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok skaláris szorzatát az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$ összefüggés adja meg. Ennek alapján egy \mathbf{u} vektor hosszán az $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ nemnegatív számot értjük. Nyilvánvaló, hogy az \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 természetes bázis egy ortonormált bázisa a térnek. Ily módon definálni lehet két

vektor vektoriális szorzatát is az

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

kifejezéssel.

Az \mathbb{R}^3 elemeit nemcsak vektoroknak, hanem pontoknak is tekinthetjük. Ily módon beszélhetünk \mathbb{R}^3 -beli ponthalmazokról, vagy más szóval alakzatokról. Valamely \mathbb{R}^3 -beli \mathbf{p} , \mathbf{q} pontok távolságán a $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ nemnegatív számot értjük.

Az előző alfejezetben az X euklideszi téren vettünk egy $\xi: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ koordinátázást, vagyis egy bijekciót, amely az X térbeli alakzatoknak \mathbb{R}^3 -beli alakzatokat feleltet meg. Ennek alapján az \mathbb{R}^3 térben is bevezethetjük az egyenes, a szakasz és a sík fogalmát. Az X térbeli egyeneseknek, szakaszoknak és síkoknak a ξ bijekció szerinti képei adják az \mathbb{R}^3 -beli egyeneseket, szakaszokat és síkokat.

A dolgozatban az I egy nyílt vagy zárt valós intervallumot fog jelölni. Vegyünk egy $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorértékű leképezést. Legyenek $x_1, x_2, x_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ azok a valós függvények, amelyekkel tetszőleges $t \in I$ helyen teljesül az

$$\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$$

egyenlőség. Ezek az x_1, x_2, x_3 valós függvények az \mathbf{r} leképezés koordinátafüggvényei.

Az \mathbf{r} vektorfüggvény akkor folytonos, ha mindhárom koordinátafüggvénye folytonos. Az \mathbf{r} vektorfüggvény abban az esetben differenciálható, ha a koordinátafüggvényei deriválhatóak, és ekkor az $\mathbf{r}'(t)$ deriváltra fennáll

$$\mathbf{r}'(t) = x'_1(t)\mathbf{e}_1 + x'_2(t)\mathbf{e}_2 + x'_3(t)\mathbf{e}_3.$$

Hasonlóan lehet értelmezni az \mathbf{r} vektorfüggvény magasabb rendű differenciálhatóságát is.

1.2.1. Definíció. Az \mathbb{R}^3 térbeli paraméterezett görbén egy $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonos leképezést értünk. Az \mathbb{R}^3 -beli $\mathbf{r}(I) = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in I\}$ ponthalmazt, vagyis a leképezés értékkészletét, az \mathbf{r} paraméterezett görbe pályájának nevezzük.

A továbbiakban paraméterezett görbe helyett inkább csak a görbe elnevezést alkalmazzuk, a pályát pedig olykor görbeívnek hívjuk. Meg kell azt is említeni, hogy a szakirodalomban a leírt pályára is szokás alkalmazni a görbe elnevezést.

1.2.2. Definíció. Az $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét C^k -osztályúnak mondjuk ($k \geq 1$), ha a koordinátafüggvényei legalább k -szor folytonosan differenciálhatóak.

1.2.3. Definíció. Legyen adott egy C^1 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe. Az $\mathbf{r}'(t)$ deriváltat a görbe t -beli sebességvektorának nevezzük. A görbét regulárisnak mondjuk, ha tetszőleges $t \in I$ értékre fennáll $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Az ilyen görbe t helyen vett érintőjén azt az egyenest értjük, amelyik áthalad az $\mathbf{r}(t)$ ponton és párhuzamos az $\mathbf{r}'(t)$ vektorral.

1.2.4. Megjegyzés. Vegyünk egy C^1 -osztályú $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét. Ezen görbének értelmezni lehet az ívhosszát a beírt töröttvonalak hosszai alapján. Mint ismeretes, a görbe ívhosszát az $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ integrál adja meg.

A továbbiakban alkalmazni fogjuk majd a görbe sebességének a nagyságát mérő $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt is, melyet a $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ kifejezés ír le. Ennek integrálásával kaphatjuk meg a görbe ívhosszát.

1.2.5. Definíció. Egy C^1 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbéről akkor mondjuk hogy ívhossz szerint paraméterezett, ha fennáll $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ bármely $t \in I$ -re.

1.2.2. Az \mathbb{R}^3 -beli C^2 -osztályú görbék geometriai jellemzői

A spline görbék elméletében fontos szerepet játszanak a C^2 -osztályú görbék. Ugyanis, ezek már elegendően simák a gyakorlati alkalmazások számára.

1.2.6. Definíció. Legyen adott egy C^2 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe. Ezen görbe t -beli érintő egységvektorának mondjuk a $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \mathbf{r}'(t)$ vektort. A görbe t helyen vett gyorsulásvektorán az $\mathbf{r}''(t)$ másodrendű deriváltat értjük.

Az érintő egységvektorokkal egy $\mathbf{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt nyerünk, amely folytonosan differenciálható. Ezt alkalmazva lehet értelmezni a görbületet. Emlékezzünk rá, hogy $v(t)$ az $\mathbf{r}'(t)$ sebességvektor hosszát jelöli.

1.2.7. Definíció. A C^2 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbének a t helyen vett görbületén a $\kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \|\mathbf{T}'(t)\|$ nemnegatív számot értjük.

1.2.8. Megjegyzés. A görbület értéke kiszámítható az első két derivált vektorból a

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

összefüggés alapján. A formula bizonyítása megtalálható a [6] jegyzet 2.2. alfejezetében. Eszerint a $\kappa(t)$ görbület csakis akkor 0, ha az $\mathbf{r}'(t)$ és $\mathbf{r}''(t)$ vektorok párhuzamosak egymással.

Amennyiben a $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{T}(t) \rangle = 1$ egyenlet mindkét oldalát deriváljuk t szerint, akkor a $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{T}'(t)$ vektorok skaláris szorzatára $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{T}'(t) \rangle = 0$ adódik, tehát ezek merőlegesek egymásra.

1.2.9. Definíció. Legyen adva egy olyan C^2 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, amelynek a t helyen vett görbülete nem 0. Ekkor az $\mathbf{F}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \mathbf{T}'(t)$ vektort a görbe t -beli főnormális egységvektorának mondjuk. A $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{F}(t)$ vektort nevezzük a görbe binormális egységvektorának a t paraméterű pontban. Az ortonormált $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ vektorhármast a görbe t helyen vett Frenet-bázisának hívjuk.

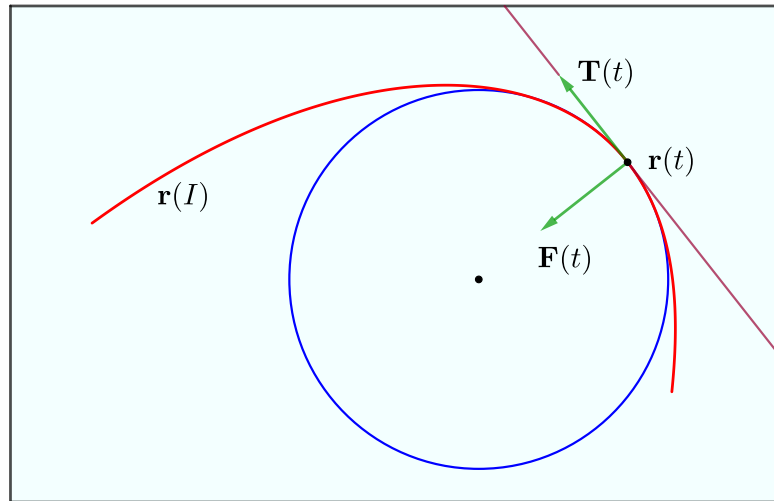
1.2.10. Definíció. Legyen adott egy olyan C^2 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, amelynek a t helyen vett görbülete nem 0. A görbe t -beli simulósíkjának mondjuk azt az $\mathbf{r}(t)$ pontot tartalmazó síkot, amelyet az $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$ vektorok feszítenek ki.

1.2.11. Megjegyzés. A Frenet-bázis vektorait az alábbi sorrendben is meg lehet határozni:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}, \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t).$$

Ugyanis, a binormális egységvektor merőleges a simulósíkra.

1.2.12. Definíció. Legyen adott egy C^2 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, amelynek a t helyen vett görbülete nem 0. A görbe t -beli simulóköre az a kör, amelynek síkja a simulósík, sugara $r = \frac{1}{\kappa(t)}$ és centruma a $\mathbf{c} = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{F}(t)$ pont.



1.2.1. ábra. Egy síkbeli görbe érintője és simulóköre.

1.2.13. Megjegyzés. A pontbeli simulókör másodrendben érintkezik a görbe pályájával. Ugyanis, ha a görbe pályáján és a simulókörön konstans 1 sebességgel haladunk végig, akkor az így kapott két vektorfüggvénynek a pontbeli első két deriváltja megegyezik.

Amennyiben más sebességgel haladunk végig a görbe pályáján, akkor egy másik leíró vektorfüggvényt kapunk. Ehhez kapcsolódik a következő fogalom.

1.2.14. Definíció. Legyen adott egy C^2 -osztályú $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe. Egy J intervallumon vegyünk egy olyan $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényt, amire igaz, hogy $h(J) = I$ és bármely $u \in J$ helyen $h'(u) > 0$. Ekkor az $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbéről azt mondjuk, hogy azt az \mathbf{r} görbe átparaméterezésével nyertük.

Világos, hogy a $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ h$ görbe is C^2 -osztályú és a deriváltjaira teljesül

$$\tilde{\mathbf{r}}'(u) = h'(u) \mathbf{r}'(h(u)), \quad \tilde{\mathbf{r}}''(u) = h''(u) \mathbf{r}'(h(u)) + (h'(u))^2 \mathbf{r}''(h(u)).$$

Igazolható, hogy a pontbeli érintő, a simulósík, a görbület és a simulóköre csakis a görbe pályájától függ, az átparaméterezésnél ezek nem változnak meg.

Amennyiben a h függvény lineáris az u változóra nézve, akkor az átparaméterezést lineárisnak mondjuk. Ez esetben $h'(u)$ egy konstans és $h''(u) = 0$.

1.2.15. Megjegyzés. Megfelelő h függvényt alkalmazva elérhető, hogy az átparaméterezéssel kapott $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe ívhossz szerint legyen paraméterezve, vagyis teljesüljön $\|\tilde{\mathbf{r}}'(u)\| = 1$ bármely $u \in J$ -re.

1.2.3. Csatlakozó C^2 -osztályú görbék

Ezt követően mindig feltesszük, hogy a tekintett görbe reguláris. Tekintsünk olyan C^2 -osztályú $\mathbf{r}_1 : [0, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{r}_2 : [0, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbéket, melyekre igaz $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(0)$. Eszerint az első görbeív végpontja megegyezik a második görbeív kezdőpontjával. Ezt a pontot nevezzük el csatlakozási pontnak.

1.2.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy az \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 görbék pályái elsőrendben simán csatlakoznak egymáshoz, ha a csatlakozási helyen vett érintő egységvektoraik megegyeznek, azaz teljesül

$$\mathbf{T}_1(b_1) = \mathbf{T}_2(0).$$

1.2.17. Definíció. Az \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 görbék pályái másodrendben simán csatlakoznak egymáshoz, ha fennáll $\mathbf{T}_1(b_1) = \mathbf{T}_2(0)$ és teljesül még az alábbi két feltétel egyike:

- (1) A csatlakozási helyen mindkét görbe görbülete 0.
- (2) A csatlakozási helyen a két görbe simlóköre megegyezik.

Az általános esetben a csatlakozási helyen nem tűnik el a görbület. Másodrendben sima csatlakozásnál ekkor a két görbe görbülete és a Frenet-bázisuk is megegyezik a csatlakozási pontban.

1.2.18. Állítás. Legyenek $\mathbf{r}_1 : [0, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{r}_2 : [0, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ olyan C^2 -osztályú görbék, melyekre igaz $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(0)$. A görbék pályái másodrendben simán csatlakoznak egymáshoz akkor és csak akkor, ha van egy olyan α pozitív szám és egy olyan β valós szám, melyekkel a derivált vektorokra fennállnak az

$$\mathbf{r}'_2(0) = \alpha \mathbf{r}'_1(b_1), \quad \mathbf{r}''_2(0) = \alpha^2 \mathbf{r}''_1(b_1) + \beta \mathbf{r}'_1(b_1)$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. Világos, hogy a csatlakozási helyen akkor lesznek azonosak a görbék érintő egységvektorai, ha az $\mathbf{r}'_1(b_1)$ és $\mathbf{r}'_2(0)$ vektorok megegyező irányúak. Ez pedig akkor igaz, ha fennáll $\mathbf{r}'_2(0) = \alpha \mathbf{r}'_1(b_1)$ valamely α pozitív számra.

Vegyük észre, hogy az első feltétel fennállása esetén a csatlakozás akkor lesz másodrendben is sima, ha teljesül az

$$\frac{\mathbf{r}'_1(b_1) \times \mathbf{r}''_1(b_1)}{\|\mathbf{r}'_1(b_1)\|^3} = \frac{\mathbf{r}'_2(0) \times \mathbf{r}''_2(0)}{\|\mathbf{r}'_2(0)\|^3}$$

egyenlőség. Ugyanis, ha a fenti egyenlet mindkét oldalán a $\mathbf{0}$ vektor szerepel, akkor a két görbe görbülete egyaránt 0. Ha viszont nem tűnik el a két görbe görbülete, akkor ebből az összefüggésből már következik, hogy a csatlakozási helyen a görbék görbületei és a Frenet-bázisai is megegyeznek. Ez pedig azt jelenti, hogy a csatlakozási pontban a simulókörök is azonosak.

Ha kihasználjuk, hogy a sebességvektorokra igaz $\mathbf{r}'_2(0) = \alpha \mathbf{r}'_1(b_1)$, akkor behelyettesítés és egyszerűsítés után az előző egyenlőségből az

$$\alpha^2 (\mathbf{r}'_1(b_1) \times \mathbf{r}''_1(b_1)) = \mathbf{r}'_1(b_1) \times \mathbf{r}''_2(0)$$

összefüggéshez jutunk. Ebből pedig

$$\mathbf{r}'_1(b_1) \times (\alpha^2 \mathbf{r}''_1(b_1) - \mathbf{r}''_2(0)) = \mathbf{0}$$

adódik. Ismeretes, hogy amennyiben két vektor vektoriális szorzata $\mathbf{0}$, akkor a két vektor párhuzamos, vagyis az egyik egy számszorosa a másiknak. A fenti egyenlőség szerint tehát van olyan β szám, hogy igaz $\alpha^2 \mathbf{r}''_1(b_1) - \mathbf{r}''_2(0) = \beta \mathbf{r}'_1(b_1)$. Ebből viszont már következik az $\mathbf{r}''_2(0) = \alpha^2 \mathbf{r}''_1(b_1) + \beta \mathbf{r}'_1(b_1)$ összefüggés az \mathbf{r}_2 görbe gyorsulásvektorára. \square

2. fejezet

Approximációs spline görbék

2.1. Egy általános tervezési módszer

A görbék tervezésének egyik jól bevált módja, hogy ahhoz rögzített bázisfüggvényeket és a helyüket változtatható vezérlőpontokat alkalmaznak. A görbét leíró vektorfüggvényt a bázisfüggvényekkel és a vezérlőpontokkal határozzák meg, vagyis azokkal fejezik ki. Ily módon a görbe alakját az egyes vezérlőpontok helyzetének változtatásával lehet módosítani. A megtervezett görbe adattárolását a neki megfelelő vezérlőpontok koordinátaival lehet megoldani.

Vegyünk egy $[a, b]$ zárt intervallumot, és azon olyan k -szor folytonosan differenciálható $B_0, B_1, \dots, B_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre tetszőleges $t \in [a, b]$ helyen fennállnak a

$$\sum_{i=0}^n B_i(t) = 1, \quad B_j(t) \geq 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

összefüggések. A továbbiakban ezeket bázisfüggvényeknek vagy súlyfüggvényeknek mondjuk.

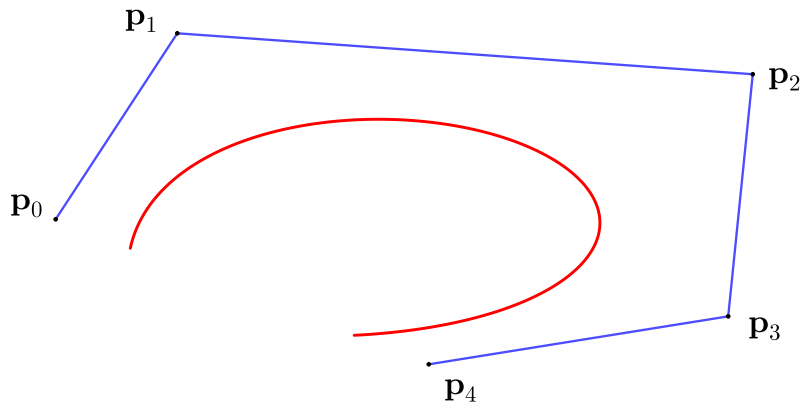
Tekintsünk az \mathbb{R}^3 térben egy tetszőleges $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontsorozatot. Vegyük azt az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelyet az

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) \cdot \mathbf{p}_i$$

összefüggés határoz meg bármely $t \in [a, b]$ esetén. Ekkor az \mathbf{r} vektorfüggvény k -szor folytonosan differenciálható, vagyis egy C^k -osztályú görbét ad. Ez általában nem halad át a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontokon, vagy csupán a pontsorozat egyes elemein halad át. Emiatt ezt approximációs görbének szokás mondani.

A $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontokat az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ approximációs görbe kontrollpontjainak (vagy vezérlőpontjainak) hívjuk. A bázisfüggvényekre kiszabott feltételek miatt a görbe pályája benne van a kontrollpontok konvex burkában. Alkalmasan választott súlyfüggvények esetén a görbe valamelyest közelíti azt a töröttvonalat, amelyet a szomszédos kontrollpontok összekötésével nyerünk.

A tervezési eljárásokban célszerűnek bizonyult olyan bázisfüggvényeket alkalmazni, melyeknek az $[a, b]$ egyes részintervallumaira vett leszűkítései alacsonyabb fokszámú polinomfüggvények.



2.1.1. ábra. Egy approximációs görbe a kontrollpontokkal.

A dolgozat ezen fejezetében a legismertebb görbetervezési eljárásokat fogjuk áttekinteni, tanulmányozni. A tárgyalás alapjául a G. Farin által angol nyelven írt [1] könyv releváns fejezetei szolgálnak.

2.2. A Bézier-féle görbék

A görbetervezési eljárások elméletének kidolgozásában fontos szerepet játszottak az úgynevezett Bézier-féle görbék. Ezek leírásához a binomiális együtthatók alkalmazására is szükség van.

2.2.1. Definíció. Adott n pozitív egész szám esetén n -edfokú Bernstein-féle polinomfüggvényeknek mondjuk azokat a $B_i^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) valós függvényeket, melyeket a

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} t^i$$

összefüggés ír le, amelyben $t \in \mathbb{R}$.

A továbbiakban a B_0^0 polinomfüggvény alatt majd a konstans 1 valós függvényt értjük, tehát erre teljesül $B_0^0(t) = 1$ ($t \in \mathbb{R}$).

Világos, hogy az n -edfokú Bernstein-féle polinomok nemnegatívak a $[0, 1]$ intervallumon, továbbá fennáll $B_0^n(0) = 1$ és $B_n^n(1) = 1$. Ezeket csak akkor alkalmazhatjuk bázisfüggvényekként, ha azt is megmutatjuk, hogy az összegük mindenütt 1. Ehhez pedig elegendő a binomiális tételt alkalmaznunk az $(1-t) + t$ összegre. Ugyanis, eszerint teljesül

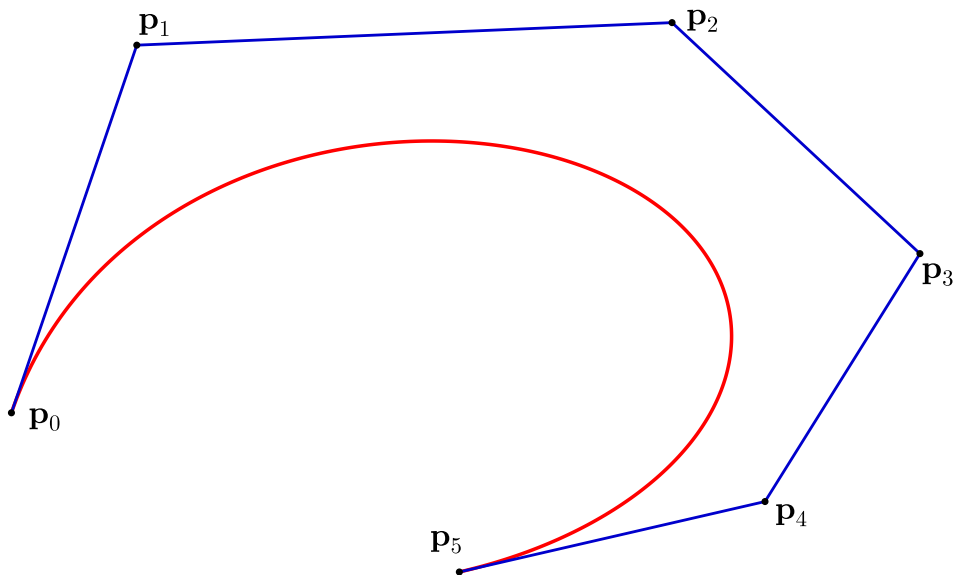
$$1 = ((1-t) + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t).$$

A fenti észrevételek alapján már kimondható az alábbi definíció.

2.2.2. Definíció. Vegyünk az \mathbb{R}^3 térben $n+1$ számú pontot ($n \geq 1$), melyek legyenek $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Azt az $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbét, amelyet az $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \mathbf{p}_i$ kifejezés ír le, egy n -edfokú Bézier-féle görbének mondjuk. A $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontokat a Bézier-féle görbe kontrollpontjainak nevezzük.

A Bézier-féle görbeívnek \mathbf{p}_0 a kezdőpontja és \mathbf{p}_n a végpontja, hiszen teljesül $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_0$ és $\mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_n$. A többi kontrollponton általában nem halad át a görbe. A kezdőpontban és a végpontban a kontrollpoligon szakaszai megadják az érintő irányát, mivel a sebességvektorokra teljesül

$$\mathbf{r}'(0) = n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{r}'(1) = n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}).$$



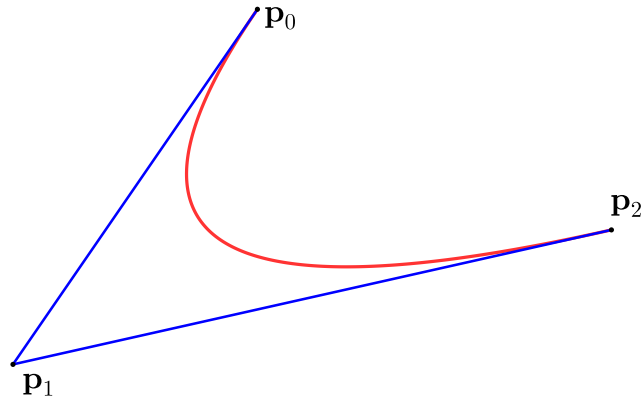
2.2.1. ábra. Egy ötödfokú Bézier-féle görbeív a kontrollpontokkal.

2.2.3. Megjegyzés. Világos, hogy az elsőfokú Bézier-féle görbeív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokat összekötő szakasz, mivel ekkor fennáll $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$.

2.2.4. Megjegyzés. Az $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ másodfokú Bézier-féle görbét az

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)^2 \mathbf{p}_0 + 2(1-t)t \mathbf{p}_1 + t^2 \mathbf{p}_2$$

összefüggés írja le. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ kontrollpontok nem kollineárisak. A görbe pontjai ezek affin kombinációi, tehát benne vannak a három pontot tartalmazó síkban. Világos, hogy az \mathbf{r} síkgörbe koordinátáfüggvényei másodfokú polinomok. Ennek alapján igazolható, hogy a másodfokú Bézier-görbe egy parabolaív.



2.2.2. ábra. A másodfokú Beziér-féle görbe pályája egy parabolaív.

2.2.5. Megjegyzés. A harmadfokú Bézier-féle görbét az

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)^3 \mathbf{p}_0 + 3(1 - t)^2 t \mathbf{p}_1 + 3(1 - t) t^2 \mathbf{p}_2 + t^3 \mathbf{p}_3$$

összefüggés írja le, amelyben $t \in [0, 1]$. Amennyiben a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ vezérlőpontok nincsenek egy síkban, akkor ez már egy térbeli görbe. A görbe mentén az $\mathbf{r}'(t)$ sebességvektor és az $\mathbf{r}''(t)$ gyorsulásvektor is változik.

A Bernstein-féle polinomfüggvényeknek van egy kedvező tulajdonságuk, miszerint előállíthatóak az 1-gyel alacsonyabb fokszámúakból egy lineáris súlyozással.

2.2.6. Állítás. Az m -edfokú ($m \geq 1$) Bernstein-polinomokat ki lehet fejezni az $(m - 1)$ -edfokú Bernstein-polinomokból az alábbi formában

$$\begin{aligned} B_i^m(t) &= t B_{i-1}^{m-1}(t) + (1 - t) B_i^{m-1}(t) & (i = 1, \dots, m - 1), \\ B_0^m(t) &= (1 - t) B_0^{m-1}(t), & B_m^m(t) = t B_{m-1}^{m-1}(t). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Mivel a Bernstein-féle polinomok definíciója alapján fennáll $B_0^m(t) = (1 - t)^m$, $B_m^m(t) = t^m$ és megállapodás szerint $B_0^0(t) = 1$, az utóbbi két egyenlőség nyilván igaz.

Ismeretes, hogy a binomiális együtthatókra teljesül az $\binom{m}{i} = \binom{m-1}{i-1} + \binom{m-1}{i}$ egyenlőség. Ennek alapján az állításban szereplő első összefüggést az alábbi levezetés már igazolja:

$$\begin{aligned} &t B_{i-1}^{m-1}(t) + (1 - t) B_i^{m-1}(t) = \\ &t \cdot \binom{m-1}{i-1} (1 - t)^{m-i} t^{i-1} + (1 - t) \cdot \binom{m-1}{i} (1 - t)^{m-1-i} t^i = \\ &\left[\binom{m-1}{i-1} + \binom{m-1}{i} \right] (1 - t)^{m-i} t^i = \binom{m}{i} (1 - t)^{m-i} t^i = B_i^m(t). \end{aligned}$$

□

2.3. A de Casteljau–algorithmus

A de Casteljau–algorithmus alkalmazásával egy $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ Bézier–görbének egy adott t ($t \in [0, 1]$) paraméterű $\mathbf{r}(t)$ pontját megkaphatjuk oly módon, hogy a kontrollpontokból kiindulva pontpárok szakaszain felosztásokat hajtunk végre az $1 - t$, t súlyozással. Az alábbiak során ismertetjük az algoritmust, amely valójában vektorfüggvényekről szól, és igazoljuk a kijelentést.

Az \mathbb{R}^3 térben legyen adva egy $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ($n \geq 2$) pontsorozat. Kiindulásként tekintsük azokat a $\mathbf{b}_k^0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($k = 0, 1, \dots, n$) konstans vektorfüggvényeket, melyekre fennáll $\mathbf{b}_k^0(t) = \mathbf{p}_k$ ($t \in [0, 1]$). Az algoritmusnak megfelelően vegyük azon $\mathbf{b}_j^1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$) lineáris vektorfüggvényeket, melyeket a

$$\mathbf{b}_j^1(t) = (1 - t) \mathbf{b}_j^0(t) + t \mathbf{b}_{j+1}^0(t) = (1 - t) \mathbf{p}_j + t \mathbf{p}_{j+1} \quad (t \in [0, 1])$$

összefüggések határoznak meg. Nyilvánvaló, hogy ezek a görbék a $\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+1}$ pontokat összekötő szakaszokat írják le.

Az algoritmus utasítása szerint a már meghatározott $(m - 1)$ –edfokú \mathbf{b}_i^{m-1} vektorfüggvényekből származtatjuk az m –edfokú $\mathbf{b}_i^m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($m \leq n; i = 0, 1, \dots, n - m$) vektorfüggvényeket a

$$\mathbf{b}_i^m(t) = (1 - t) \mathbf{b}_i^{m-1}(t) + t \mathbf{b}_{i+1}^{m-1}(t) \quad (t \in [0, 1])$$

összefüggéssel. Ily módon az algoritmus végén a $\mathbf{b}_0^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét kapjuk, amelynek koordinátafüggvényei n –edfokú polinomok.

A kapott görbékre vonatkozóan igaz a következő állítás.

2.3.1. Állítás. *Az algoritmussal definiált m –edfokú $\mathbf{b}_i^m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbékre teljesül a*

$$\mathbf{b}_i^m(t) = \sum_{j=0}^m B_j^m(t) \mathbf{p}_{i+j} \quad (m = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - m)$$

összefüggés, vagyis a \mathbf{b}_i^m görbe megegyezik a $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_{i+m}$ kontrollpontokkal meghatározott m –edfokú Bézier–féle görbével.

Bizonyítás. Az állítás igazolását az m fokszámra vonatkozó teljes indukcióval végezzük el.

Az $m = 1$ esetben a teljesülés nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy a t változójában $(m - 1)$ –edfokú \mathbf{b}_i^{m-1} vektorfüggvényekre igaz a kijelentés ($2 \leq m \leq n$). Ezen indukciós feltevést felhasználva az m –edfokú \mathbf{b}_i^m vektorfüggvényekre a

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^m(t) &= (1 - t) \mathbf{b}_i^{m-1}(t) + t \mathbf{b}_{i+1}^{m-1}(t) = \\ &= (1 - t) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} B_j^{m-1}(t) \mathbf{p}_{i+j} + t \cdot \sum_{j=0}^{m-1} B_j^{m-1}(t) \mathbf{p}_{i+j+1} \end{aligned}$$

egyenlőséget nyerjük tetszőleges $t \in [0, 1]$ esetén. Ebből átrendezéssel adódik a

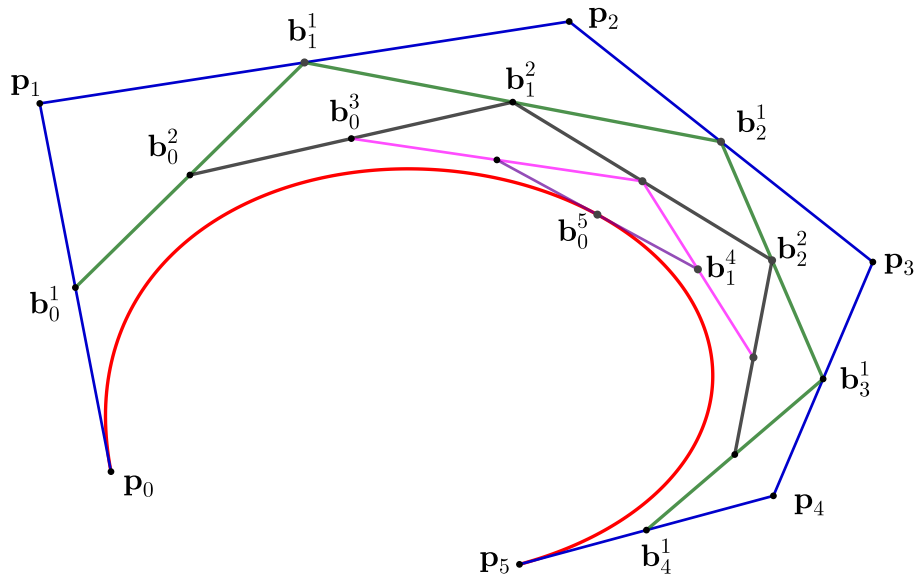
$$\mathbf{b}_i^m(t) = (1 - t) B_0^{m-1}(t) \mathbf{p}_i + \sum_{j=1}^{m-1} \left((1 - t) B_j^{m-1}(t) + t B_{j-1}^{m-1}(t) \right) \mathbf{p}_{i+j} + t B_{m-1}^{m-1}(t) \mathbf{p}_{i+m}$$

összefüggés. A fenti egyenletből a Bernstein–polinomokra vonatkozó 2.2.6. Állítás alkalmazásával a kívánt

$$\mathbf{b}_i^m(t) = \sum_{j=0}^m B_j^m(t) \mathbf{p}_{i+j}$$

egyenlőséghez jutunk. \square

2.3.2. Következmény. Az algoritmussal nyert $\mathbf{b}_0^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény megegyezik a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontok által meghatározott n -edfokú Bézier-féle görbével.



2.3.1. ábra. Egy ötödfokú Bézier-görbe $r(1/2)$ pontjának kijelölése az algoritmussal.

2.3.3. Megjegyzés. A de Casteljau–algoritmus végrehajtása során az összes $\mathbf{b}_i^m(t)$ pontot úgy kaptuk meg, hogy a $\mathbf{b}_i^{m-1}(t), \mathbf{b}_{i+1}^{m-1}(t)$ pontok összekötő szakaszán az $1-t, t$ súlyozásnak megfelelő felosztást hajtottunk végre. (Lásd az 1.1.8. Definíciót.) Ezen felosztások legvégén pedig az n -edfokú Bézier-görbe t paraméterű pontja adódik. Ezerint a kontrollpontokból kiindulva az összekötő szakaszok megfelelő arányú felosztásaival megkaphatjuk a Bézier-féle görbe pontjait.

Ismeretes, hogy amennyiben egy szakaszt az egyik pontjával felosztjuk két részz szakaszra, akkor ezek arányát a párhuzamos vetítés megőrzi. Ily módon a de Casteljau–algoritmus következtében igaz az alábbi kijelentés.

2.3.4. Következmény. Az \mathbb{R}^3 térben legyenek adva a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ($n \geq 3$) pontok. Vetítsük le párhuzamosan ezen pontokat a tér egy rögzített síkjára és az így nyert vetületi pontok legyenek

$\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$. Ha vesszük a $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ kontrollpontokkal meghatározott n -edfokú Bézier-görbét, akkor az megegyezik a kiindulási pontokkal meghatározott Bézier-görbe paralel vetületével.

2.4. Bézier-féle görbeívek másodrendben sima csatlakozása

Vegyünk az \mathbb{R}^3 térben négy pontot, melyek legyenek $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Ezek meghatároznak egy harmadfokú Bézier-görbét, amelyet most jelöljön \mathbf{r}_1 . Emiatt teljesül $\mathbf{r}_1(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{p}_i$ ($t \in [0, 1]$).

Csatoljunk ehhez egy másik harmadfokú Bézier-görbét oly módon, hogy a görbeívek csatlakozása másodrendben sima legyen. A második $\mathbf{r}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ Bézier-görbe vezérlőpontjai legyenek $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Eszerint fennáll $\mathbf{r}_2(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{q}_i$.

A csatlakozás az első ív $\mathbf{r}_1(1)$ végpontjában és a második ív $\mathbf{r}_2(0)$ kezdőpontjában történjen. Ez esetben teljesül $\mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_0$. A csatolási helyen a két görbe érintő egységvektorának és simulókörének meg kell egyeznie a másodrendben sima csatlakozásnál. Az 1.2.18. Állítás szerint ennek az a feltétele, hogy legyen egy olyan α pozitív szám és egy β valós szám, amelyekkel fennállnak az

$$\mathbf{r}'_2(0) = \alpha \mathbf{r}'_1(1), \quad \mathbf{r}''_2(0) = \alpha^2 \mathbf{r}''_1(1) + \beta \mathbf{r}'_1(1)$$

egyenlőségek. A csatolási helyen a két görbe első és második deriváltjai a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1(1) &= 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2), & \mathbf{r}''_1(1) &= 6(\mathbf{p}_3 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1), \\ \mathbf{r}'_2(0) &= 3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0), & \mathbf{r}''_2(0) &= 6(\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0). \end{aligned}$$

Az első feltétel szerint egy α pozitív számmal teljesülnie kell a

$$3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) = \alpha \cdot 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

egyenlőségnek. Ebből $\mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_0$ miatt a

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_3 + \alpha(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) = (1 + \alpha)\mathbf{p}_3 - \alpha\mathbf{p}_2 \quad (\text{Q1})$$

összefüggéshez jutunk. Ez mindössze annyit jelent, hogy a \mathbf{q}_1 pontnak rajta kell lennie a \mathbf{p}_2 és \mathbf{p}_3 pontok összekötő egyenesén.

A második feltétel szerint egy β valós számmal teljesülnie kell a

$$6(\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) = \alpha^2 \cdot 6(\mathbf{p}_3 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1) + \beta \cdot 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

egyenlőségnek is. Egyszerűsítés után ebből a

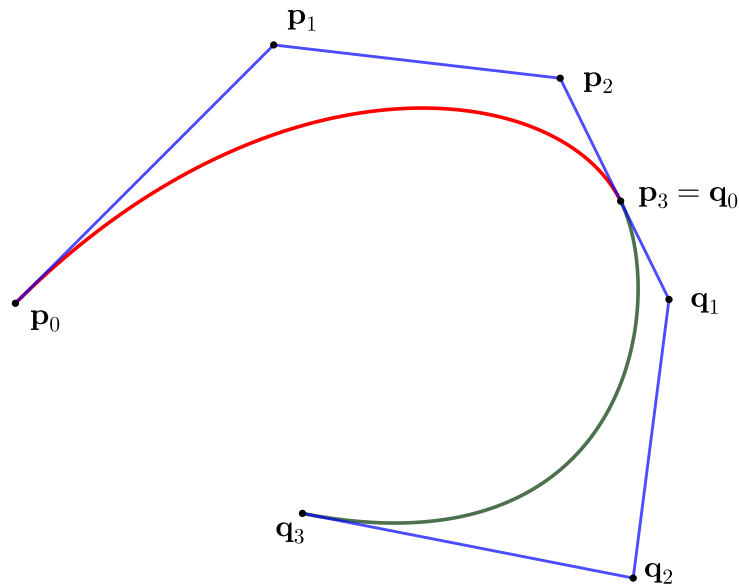
$$\mathbf{q}_2 = \alpha^2(\mathbf{p}_3 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1) + \frac{\beta}{2}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_3 + 2\mathbf{q}_1$$

összefüggés adódik. Amennyiben a \mathbf{q}_1 pontra vonatkozó (Q1) egyenlőséget felhasználjuk, akkor a

$$\mathbf{q}_2 = \alpha^2 \mathbf{p}_1 - \left(2\alpha^2 + 2\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \mathbf{p}_2 + \left(1 + \alpha^2 + 2\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \mathbf{p}_3 \quad (\text{Q2})$$

kifejezést nyerjük. Eszerint a \mathbf{q}_2 kontrollpontot az α és β együtthatók változtatásával tudjuk csak módosítani és ez a pont mindig benne van a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ pontok síkjában.

Egyedül a \mathbf{q}_3 kontrollpontot lehet szabadon változtatni a csatolt második Bézier-görbénél, amennyiben harmadfokú görbét alkalmazunk.



2.4.1. ábra. Másodrendben simán csatlakozó harmadfokú Bézier-görbék: $\alpha = 0,8$, $\beta = 2$.

2.5. A racionális Bézier-féle görbék

A Bézier-féle görbét a kontrollpontok változtatásával lehet módosítani, illetve tervezni. A tervezésre egy további lehetőséget ad az, ha a pontokhoz súlyokat is rendelünk és ezek értékének változtatásával módosítjuk a görbe pályájának az alakját.

Vegyünk az \mathbb{R}^3 térben $n + 1$ számú pontot ($n \geq 1$), melyek legyenek $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Ezen pontok mindegyikéhez rendeljünk hozzá egy pozitív valós számot, egy úgynevezett súlyfaktort. A továbbiakban a \mathbf{p}_i ponthoz rendelt súlyt jelölje w_i ($i = 0, 1, \dots, n$). Mivel a $[0, 1]$ intervallumon a Bernstein-polinomok nemnegatív értékűek és súlyok pozitív valós számok a $\sum_{r=0}^n w_r B_r^n(t)$ összeg is egy pozitív szám bármely $t \in [0, 1]$ -re.

2.5.1. Definíció. Azt az $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelyet az

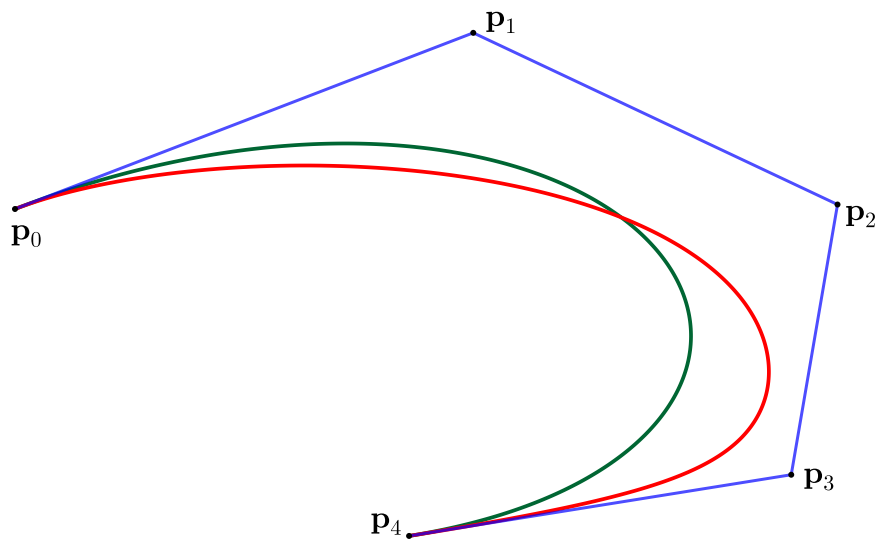
$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{B_i^n(t)}{\sum_{r=0}^n w_r B_r^n(t)} \cdot w_i \mathbf{p}_i$$

kifejezés ír le, egy n -edfokú racionális Bézier-féle görbének mondjuk.

2.5.2. Megjegyzés. Amennyiben a kontrollpontokhoz ugyanazt a súlyt rendeljük, akkor az eredeti Bézier-féle görbét írja le a definícióban szereplő összefüggés.

Az $r(t)$ görbepont ezúttal is a p_0, p_1, \dots, p_n vezérlőpontoknak egy konvex kombinációja bármely $t \in [0, 1]$ -re. Emiatt a racionális Bézier-görbe pályája is benne van a p_0, p_1, \dots, p_n pontok konvex burkában.

2.5.3. Megjegyzés. Legyenek p_0, p_1, p_2 nem kollineáris pontok. Ezekhez rendeljük a w_0, w_1 és w_2 pozitív súlyokat. Tekintsük a három kontrollpont és a három súly által meghatározott másodfokú racionális Bézier-görbét, amely benne van a három pont síkjában. Belátható, hogy ez előáll egy másodfokú Bézier-görbe, azaz egy parabola, centrális vetületeként. Ennek következtében a másodfokú racionális Bézier-görbe a súlyok értékétől függően vagy egy ellipszisívet, vagy egy hiperbolaívet, vagy pedig egy parabolaívet ír le.



2.5.1. ábra. Egy negyedfokú racionális Bézier-görbe a $w_0 = 1, w_1 = 1, w_2 = 3, w_3 = 5, w_4 = 1$ súlyokkal.

2.5.4. Megjegyzés. A mellékelt ábrán egy negyedfokú racionális Bézier-görbe pályája van feltüntetve, továbbá zöld színnel a (nem racionális) Bézier-görbe. Látható, hogy a nagyobb súllyal rendelkező kontrollpontok maguk felé húzzák el a görbét.

2.6. A B-spline görbék

A Bézier-féle görbéknek van egy kedvezőtlen tulajdonságuk. Amennyiben a kontrollpontok egyikének a helyzetét megváltoztatjuk, akkor a teljes Bézier-görbe módosul. Ezt a problémát úgy lehet kiküszöbölni, ha a Bernstein-polinomok helyett olyan folytonosan differenciálható súlyfüggvényeket alkalmazunk, amelyek az értelmezési tartománynak csak egy-egy részintervallumán pozitívak, egyébként pedig eltűnnek, azaz 0 értéket vesznek fel. Ehhez adnak megoldást az úgynevezett B-spline függvények, melyek konstrukcióját ebben az alfejezetben ismertetjük.

Induljunk ki abból, hogy $n + 1$ számú $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ vezérlőpontot akarunk alkalmazni egy C^{k-1} -osztályú ($k \geq 2$) görbe tervezésénél. A görbe értelmezési tartománya ezúttal legyen $[a, b]$. Az n és k számok ismeretében rögzítsük az $m = n + 1 - k$ egész számot. Vegyük az $[a, b]$ intervallumnak egy $m + 1$ elemű $a = u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} < u_m = b$ felosztását. A felosztás u_i ($i = 0, 1, \dots, m$) elemeit nevezzük csomópontoknak. Ezek az u_i csomópontok m számú részintervallumra osztják fel az $[a, b]$ intervallumot. Algoritmikus eljárással lehetőség van olyan C^{k-1} -osztályú bázisfüggvények meghatározására, amelyek leírhatóak k -adfokú polinomokkal a felosztás szerinti részintervallumokon. Ezeket a függvényeket a lineáris átlagolás módszerével lehet előállítani egy rekurzív eljárással.

Az alább ismertetett eljárást a szakirodalomban a *Cox-de Boor-féle algoritmus* elnevezéssel szokták említeni. Az u_0, u_1, \dots, u_m véges számsorozat kibővítésével vegyünk egy olyan $v_0, v_1, \dots, v_{m+2k}$ növekvő számsorozatot, amelyre fennáll $u_i = v_{k+i}$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Ehhez rendeljük a $[c, d]$ intervallumot, ahol $c = v_0$ és $d = v_{m+2k}$. Az algoritmus végrehajtásával olyan $N_r^j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket nyerünk, ahol a j felső index a $0, 1, \dots, k$ értékeket veszi fel, az r alsó index pedig a 0 -tól az $m + 2k - j - 1 = n + k - j$ értékig futja be az egész számokat. A felső j index arra utal, hogy a függvénynek a részintervallumokra történő leszűkítései j -edfokú polinomok.

Algoritmus elindításához vegyük azon $N_r^0 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ($r = 0, 1, \dots, m + 2k - 1$) függvényeket, melyekre fennáll

$$N_r^0(t) = 1 \quad \text{ha} \quad v_r \leq t < v_{r+1}, \quad \text{illetve} \quad N_r^0(t) = 0 \quad \text{ha} \quad t \notin [v_r, v_{r+1}).$$

Tegyük fel, hogy az algoritmus alapján a $j - 1$ ($j = 1, \dots, k$) felső indexhez tartozó függvények már meghatározásra kerültek. Ekkor az algoritmus utasítása szerint az $N_r^j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket az

$$N_r^j(t) = \frac{t - v_r}{v_{r+j} - v_r} N_r^{j-1}(t) + \frac{v_{r+j+1} - t}{v_{r+j+1} - v_{r+1}} N_{r+1}^{j-1}(t) \quad (\text{C-dB})$$

összefüggés adja meg, amelyben $t \in [c, d]$. A formula szerint az N_r^j ($r = 0, 1, \dots, n + k - j$) függvényeket lineáris átlagolással kapjuk meg az N_r^{j-1} ($r = 0, 1, \dots, n + k + 1 - j$) függvényekből, melyeket korábban már meghatároztunk az algoritmussal.

Az algoritmust leíró (C-dB) összefüggésből már következik, hogy az N_r^j függvény a részintervallumokon felírható egy j -edfokú polinomként, továbbá csak a (v_r, v_{r+j+1}) intervallumon vehet fel pozitív értékeket, a többi helyen eltűnik.

2.6.1. Megjegyzés. A j fokszámra való teljes indukció módszerével igazolható, hogy teljesül

$$\sum_{r=0}^{n+k-j} N_r^j(t) = 1 \text{ bármely } t \in [v_j, v_{m+2k-j}] \text{ esetén.}$$

Amennyiben a maximális k fokszámot vesszük, akkor fennáll

$$\sum_{i=0}^n N_i^k(t) = 1 \text{ amennyiben } t \in [a, b].$$

Az $[a, b]$ intervallumon az N_i^k ($i = 0, 1, \dots, n$) függvények nemnegatívak és az összegük 1. Bár ezek a $[c, d]$ intervallumon vannak értelmezve, a továbbiakban csak az $[a, b]$ -re történő leszűkítéseiket alkalmazzuk, mint súlyfüggvényeket. Bizonyítható az is, hogy ezek a leszűkített függvények $(k-1)$ -szer folytonosan deriválhatóak, de erre a szakdolgozatban nem térünk ki.

2.6.2. Definíció. Az $N_i^k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) függvényeket az u_0, u_1, \dots, u_m csomópontokhoz illesztett k -adfokú normalizált B-spline függvényeknek mondjuk.

2.6.3. Megjegyzés. Az u_0, u_1, \dots, u_m ($m = n+1-k$) csomópontok az $[a, b]$ intervallumot m számú részintervallumra osztják fel. Az N_i^k függvényeknek ezen részintervallumokra vonatkozó leszűkítési k -adfokú polinomok. A normalizált elnevezés arra utal, hogy a függvények összege 1.

2.6.4. Megjegyzés. Tekintsük azokat az $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvényeket, amelyek $(k-1)$ -szer folytonosan differenciálhatóak, vagy más szóval C^{k-1} -osztályúak, továbbá az $[u_r, u_{r+1}]$ ($r = 0, 1, \dots, m-1$) részintervallumokon vett leszűkítéseik k -adfokú polinomok. Vegyük észre, hogy ezek a függvények az összeadásra és a valós számmal való szorzásra nézve egy vektorteret alkotnak az \mathbb{R} felett. Igazolható, hogy a fenti algoritmussal nyert $N_i^k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 0, 1, \dots, n$) függvények ennek a vektortérnek egy bázisát adják, azaz bármely ilyen függvény egyértelműen áll elő ezen B-spline függvények lineáris kombinációjaként.

2.6.5. Megjegyzés. A B-spline függvényeket valójában a kibővítéssel kapott $v_0, v_1, \dots, v_{m+2k}$ számsorozatból nyertük a Cox-de Boor-féle algoritmussal. Azt szokás mondani, hogy a

$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{m+2k})$ csomópontvektorból kiindulva lehet meghatározni a B-spline függvényeket.

Ha veszünk az \mathbb{R}^3 térben $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokat is, akkor már definiálhatjuk, hogy mit értünk B-spline görbén.

2.6.6. Definíció. Az \mathbb{R}^3 térben legyenek adva a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontok. Azt az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelyet az $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) \mathbf{p}_i$ összefüggés ír le egy k -adfokú B-spline görbének mondjuk.

2.6.7. Megjegyzés. Általános esetben az N_i^k B-spline függvény az $[a, b]$ -nek csak egy részintervallumán nem tűnik el (vagyis azon vesz fel pozitív értéket). Ha megváltoztatjuk a \mathbf{p}_i vezérlőpont pozícióját, akkor B-spline görbének csak az az íve módosul, amely ennek a részintervallumnak felel meg.

2.6.8. Megjegyzés. A B -spline görbék általában nem haladnak át kontrollpontok egyikén sem. Azt viszont meg lehet oldani, hogy a görbe kezdőpontja \mathbf{p}_0 a végpontja pedig \mathbf{p}_n legyen. Ezt úgy lehet elérni, hogy az $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ csomópontsorozat kibővítésénél a $v_i = u_0$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) és $v_{u+k+i} = u_m$ ($i = 1, 2, \dots, k$) csomóértékeket választjuk. Ebben az esetben azt szokás mondani, hogy a $v_k = u_0$ és $v_{m+k} = u_m$ értékek többszörös csomópontok. Ilyen választás esetén is alkalmazni lehet a Cox–de Boor algoritmust, de a többszörös csomópontok miatt a (C-dB) kifejezésben a hányadosok nevezőjében a 0 érték is szerepelhet. Ekkor a hányados értékét 0-nak kell venni.

B-spline függvények egy konkrét esetben

Példaként vegyük az alábbi egyszerű esetet. Egy C^2 -osztályú görbét 5 vezérlőponttal szeretnénk tervezni a $[0, 2]$ intervallumon. Eszerint fennáll $n = 4$, $k = 3$ és $m = 2$. A $[0, 2]$ intervallumnak vegyük az $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ felosztását. Ezt a csomópontsorozatot bővítsük ki az alábbiak szerint: $v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $v_4 = 1$, $v_5 = v_6 = v_7 = v_8 = 2$. Amennyiben végrehajtjuk a Cox–de Boor-féle algoritmust ezen csomópontokra, akkor az $N_i^3 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) harmadfokú B-spline függvényeket kapjuk, melyek polinomiális kifejezései a következők:

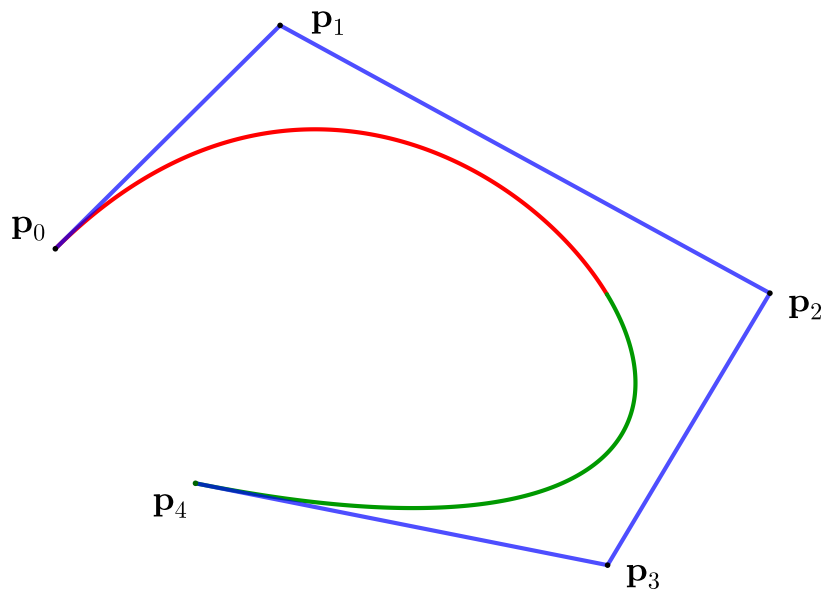
$N_0^3(t) = (1-t)^3$ ha $t \in [0, 1]$, illetve $N_0^3(t) = 0$ amennyiben $t \in [1, 2]$.

$$N_1^3(t) = \begin{cases} \frac{7}{4}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t, & \text{ha } t \in [0, 1], \\ \frac{1}{4}(2-t)^3, & \text{amennyiben } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

$$N_2^3(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}(3-2t), & \text{ha } t \in [0, 1], \\ \frac{1}{2}(t-2)^2(2t-1), & \text{amennyiben } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Belátható, hogy az N_3^3 és N_4^3 B-spline függvényekre teljesülnek az $N_3^3(t) = N_1^3(2-t)$ és $N_4^3(t) = N_0^3(2-t)$ összefüggések bármely $t \in [0, 2]$ esetén.

A fenti függvényekkel és a \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_4 kontrollpontokkal meghatározott $\mathbf{r} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ B-spline görbe pályája van feltüntetve a következő 2.6.1. ábrán. Világos, hogy ez a görbe C^2 -osztályú. Az ábrán az $\mathbf{r}([0, 1])$ és $\mathbf{r}([1, 2])$ görveívek különböző színekkel vannak megrajzolva.



2.6.1. ábra. Egy harmadfokú B-spline görbe 5 kontrollponttal.

3. fejezet

Interpolációs spline görbék

3.1. Az interpolációs alapfeladat

Az \mathbb{R}^3 térben legyen adott egy nagyobb elemszámú $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontsorozat. Ehhez egy olyan C^2 -osztályú görbét szeretnénk meghatározni valamely $[a, b]$ zárt intervallumon, amely sorrendben halad át az összes ponton.

A görbeillesztés céljából vegyünk egy szigorúan monoton növekvő u_0, u_1, \dots, u_n számsorozatot, melynek elemei legyenek a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontoknak megfelelő paraméterértékek. Tekintsünk azon C^2 -osztályú $\mathbf{r} : [u_0, u_n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbét, melyekre fennáll $\mathbf{r}(u_i) = \mathbf{p}_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Azonban ezek közül csak azokat szeretnénk alkalmazni, amelyek "jól követik" a pontsorozat menetét. Ezen feltételt szeretnénk valamelyest tisztázni.

Ha a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontsorozat szomszédos elemeit összekötő szakaszokat vesszük, akkor egy töröttvonalat kapunk, amelynek az adott pontokban általában törése van, azaz nincs érintője. Viszont a pontokon áthaladó görbék közül ennek hossza a legkisebb. Emiatt olyan görbeillesztést keresünk, ahol a görbe ívhossza valamelyest közelíti a töröttvonal hosszát (más szóval azt lényegesen nem haladja meg). További szempont az, hogy a görbe görbülete ne vegyen fel túl nagy értékeket.

Ismeretes, hogy amennyiben az u_0, u_1, \dots, u_n helyeken adva vannak a függvényértékek, akkor a Lagrange-féle interpolációval megadható az az n -edfokú polinomfüggvény, amely a megadott értékeket veszi fel az u_0, u_1, \dots, u_n pontokban. Ennek alapján meghatározható egy olyan $\mathbf{r} : [u_0, u_n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe, amelyre teljesül az $\mathbf{r}(u_i) = \mathbf{p}_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) illeszkedési feltétel és amelynek koordinátafüggvényei legfeljebb n -edfokú polinomok. Azonban nagyobb n értékeknél a polinomfüggvénynek sok szélsőérték helye lehet és a grafikonja oszcillálhat. Emiatt a Lagrange-féle interpolációval nyert vektorfüggvény nem felel meg a fentiekben felvázolt feltételeknek.

A gyakorlati alkalmazások során kiderült, hogy célszerű olyan $\mathbf{r} : [u_0, u_n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét venni, amelyeknek az $[u_i, u_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) részintervallumokra vett leszűkítései alacsony fokszámú polinomokkal írhatóak le. Egy viszonylag egyszerű eljárásnak mondható az, amikor a teljes

görbének az intervallumokon vett $\mathbf{r}[[u_i, u_{i+1}], (i = 0, 1, \dots, n - 1)$ leszűkítései, vagy más szóval a szegmensei, harmadfokú Hermite-féle görbék. Ebben a fejezetben ezt az interpolációs eljárást fogjuk tanulmányozni. Tárgyalásunk az [1] alapkönyv 7. fejezetén alapul, de az ekvidisztáns paraméterezés esete jóval részletesebben kerül kifejtésre a szakdolgozatban.

3.2. A harmadfokú Hermite-féle görbe

Legyen adva az \mathbb{R}^3 térben két pont \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 , továbbá két vektor \mathbf{v}_0 és \mathbf{v}_1 . Egy olyan $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét keresünk, amelynek \mathbf{p}_0 a kezdőpontja és \mathbf{p}_1 a végpontja, ezen pontokban a sebességvektorai \mathbf{v}_0 és \mathbf{v}_1 , továbbá a koordinátafüggvényei alacsony fokszámú polinomok. Eszerint a polinomokkal leírt \mathbf{r} vektorfüggvénynek eleget kell tennie az $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_1$ és $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{v}_1$ feltételeknek.

Nem nehéz megmutatni, hogy ilyen $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe egyértelműen létezik, amennyiben a koordinátafüggvényeire azt is kikötjük, hogy azok harmadfokú polinomok legyenek. Mint ismeretes, egy harmadfokú $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomfüggvény a $\varphi(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ alakban írható fel valamely a_0, a_1, a_2, a_3 együtthatókkal. Amennyiben a 0, 1 helyeken megadjuk a φ függvényértékeit és a deriváltak értékét, akkor ez a négy független feltétel már meghatározza a négy együtthatót és ezáltal magát a polinomot.

Vegyük azon $G_0, G_1, H_0, H_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ harmadfokú polinomfüggvényeket, melyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{aligned} G_0(0) &= 1, & G_0(1) &= 0, & G_0'(0) &= 0, & G_0'(1) &= 0, \\ G_1(0) &= 0, & G_1(1) &= 1, & G_1'(0) &= 0, & G_1'(1) &= 0, \\ H_0(0) &= 0, & H_0(1) &= 0, & H_0'(0) &= 1, & H_0'(1) &= 0, \\ H_1(0) &= 0, & H_1(1) &= 0, & H_1'(0) &= 0, & H_1'(1) &= 1. \end{aligned}$$

Belátható, hogy ezek a polinomok a következők:

$$\begin{aligned} G_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3, & G_1(t) &= 3t^2 - 2t^3, \\ H_0(t) &= t - 2t^2 + t^3, & H_1(t) &= t^3 - t^2. \end{aligned}$$

3.2.1. Definíció. A fenti kifejezésekkel leírt $G_0, G_1, H_0, H_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket harmadfokú Hermite-féle polinomfüggvényeknek nevezzük.

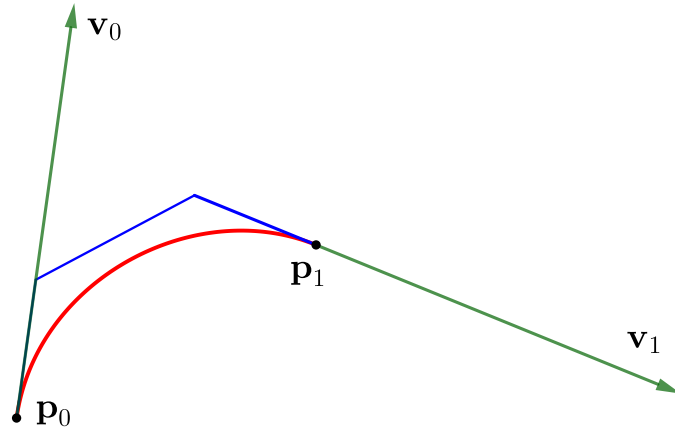
A Hermite-féle harmadfokú polinomokat alkalmazzuk a következő definícióban.

3.2.2. Definíció. Azt az $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelyet az

$$\mathbf{r}(t) = G_0(t) \cdot \mathbf{p}_0 + G_1(t) \cdot \mathbf{p}_1 + H_0(t) \cdot \mathbf{v}_0 + H_1(t) \cdot \mathbf{v}_1$$

összefüggés ír le, a \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 pontokkal és a \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 sebességvektorokkal meghatározott harmadfokú Hermite-féle görbének nevezzük.

A Hermite-féle polinomok tulajdonságainak következtében ezen \mathbf{r} görbe koordinátafüggvényei harmadfokúak és teljesülnek rá az $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{v}_1$ feltételek.



3.2.1. ábra. Egy Hermite-féle harmadfokú görbe.

3.2.3. Megjegyzés. Tekintsük azt a harmadfokú Bézier-féle görbét, amelynek kontrollpontjai $\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{v}_0$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{v}_1$ és $\mathbf{q}_3 = \mathbf{p}_1$. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ezen Bézier-féle görbe és Hermite-féle görbe harmadfokú koordinátafüggvényei megegyeznek, tehát a két görbe azonos. A mellékelt 3.2.1. ábrán a Bézier-görbe kontrollpoligonja is fel van tüntetve (kék színnel).

Az eredeti feladaton hajtsunk végre egy kisebb módosítást. Tegyük fel, hogy ismét adva van két pont \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , továbbá két érintővektor \mathbf{v}_0 és \mathbf{v}_1 , de a keresett görbe intervalluma ezúttal legyen egy tetszőleges $[a, b]$ zárt intervallum. A két ponthoz és a két sebességvektorhoz egy olyan $\tilde{\mathbf{r}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét akarunk illeszteni, amelynek koordinátafüggvényei harmadfokú polinomok és amelyre fennáll:

$$\tilde{\mathbf{r}}(a) = \mathbf{p}_0, \quad \tilde{\mathbf{r}}(b) = \mathbf{p}_1, \quad \tilde{\mathbf{r}}'(a) = \mathbf{v}_0, \quad \tilde{\mathbf{r}}'(b) = \mathbf{v}_1.$$

Vegyük a $h(u) = \frac{u-a}{b-a}$ kifejezéssel leírt $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris függvényt, amelyre nyilván teljesül $h(a) = 0$, $h(b) = 1$ és $h'(u) = \frac{1}{b-a}$. Ezzel át lehet paraméterezni a \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 pontokkal és a \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 érintővektorokkal meghatározott $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ harmadfokú Hermite-féle görbét. Azonban az $\mathbf{r} \circ h$ összetett függvény deriváltjaira $(\mathbf{r} \circ h)'(a) = \frac{1}{b-a} \mathbf{v}_0$ és $(\mathbf{r} \circ h)'(b) = \frac{1}{b-a} \mathbf{v}_1$ adódik az intervallum végpontjaiban. Ezt figyelembe véve a keresett $\tilde{\mathbf{r}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ harmadfokú görbét az

$$\tilde{\mathbf{r}}(u) = G_0\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \cdot \mathbf{p}_0 + G_1\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \cdot \mathbf{p}_1 + H_0\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \cdot (b-a) \mathbf{v}_0 + H_1\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \cdot (b-a) \mathbf{v}_1$$
 összefüggéssel írhatjuk le.

3.3. Megoldás az interpolációs alapfeladatra

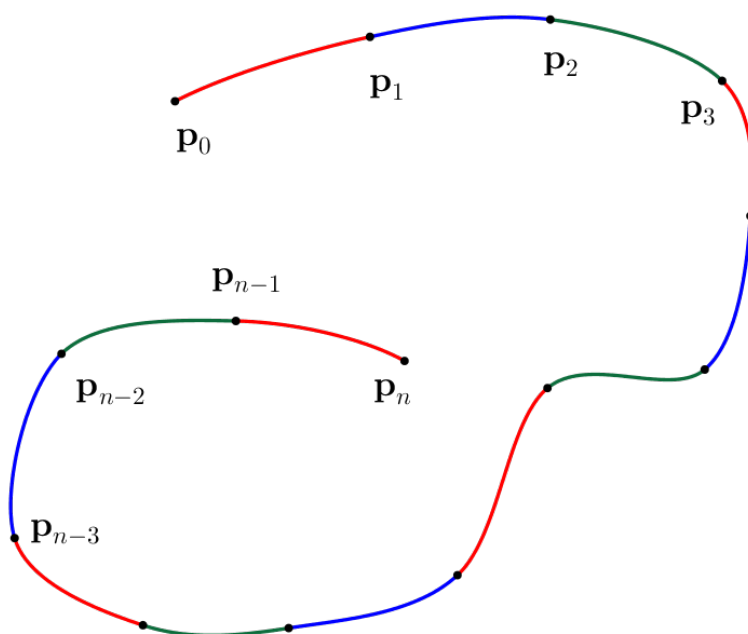
3.3.1. Ekvidisztáns paraméterezés

A görbeillesztési feladatnál elsőként a paraméterezés kérdését kell tisztázni, vagyis azt, hogy az adott $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontokhoz milyen eljárással rendeljük az u_0, u_1, \dots, u_n paraméterértékeket.

A legegyszerűbb eljárást az $u_i = i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) hozzárendelés jelenti. Ezt ekvidisztáns paraméterezésnek nevezik, mivel a szomszédos paraméterértékek távolsága 1, vagyis állandó. Tekintsük most ezt az esetet. Az Hermite-féle harmadfokú görbét alkalmazva meg tudunk adni egy olyan C^1 -osztályú $\mathbf{r} : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelyre $\mathbf{r}(i) = \mathbf{p}_i$ teljesül. Mint ismeretes, az Hermite-féle görbék előállításában a

$G_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$, $G_1(t) = 3t^2 - 2t^3$, $H_0(t) = t - 2t^2 + t^3$, $H_1(t) = t^3 - t^2$ harmadfokú polinomokat alkalmazzuk.

Jelölünk ki az összes adott pontban egy \mathbf{v}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) sebességvektort valamely eljárással. Ennek egyik célszerű módja, ha a $\mathbf{v}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_{j-1})$ vektorokat vesszük amennyiben $1 \leq j \leq n - 1$, továbbá kijelöljük a $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_n$ vektorokat is.



3.3.1. ábra. C^1 -osztályú görbeillesztés Hermite-féle harmadfokú görbeívvel.

Tekintsük most azt az $\mathbf{r} : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelynek az $[i, i + 1]$ részintervallumokra vonatkozó $\mathbf{r}_i : [i, i + 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) leszűkítéseit az

$$\mathbf{r}_i(t) = G_0(t - i) \cdot \mathbf{p}_i + G_1(t - i) \cdot \mathbf{p}_{i+1} + H_0(t - i) \cdot \mathbf{v}_i + H_1(t - i) \cdot \mathbf{v}_{i+1}$$

összefüggés írja le, amelyben $t \in [i, i + 1]$.

Világos, hogy az így nyert $\mathbf{r} : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe C^1 -osztályú és áthalad a megadott pontokon. Az \mathbf{r} koordinátáfüggvényeinek az egyes részintervallumokon vett leszűkítései harmadfokú polinomok, és a görbe pályája harmadfokú Hermite-féle görveívekből tevődik össze. (Lásd a 3.3.1. ábrát.)

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, miként kellene az érintővektorokat megválasztani ahhoz, hogy a görbe C^2 -osztályú legyen. Ugyanis, ehhez a csatlakozási pontokban a Hermite-féle görbeszegmensek második deriváltjának is meg kell egyeznie. A Hermite-féle polinomok második deriváltjára a

$$G_0''(t) = 12t - 6, \quad G_1''(t) = 6 - 12t, \quad H_0''(t) = 6t - 4, \quad H_1''(t) = 6t - 2$$

kifejezéseket nyerjük. Emiatt a polinomok másodrendű deriváltjaira a 0, 1 helyeken a

$$G_0''(0) = -6, \quad G_1''(0) = 6, \quad H_0''(0) = -4, \quad H_1''(0) = -2 \quad \text{és}$$

$$G_0''(1) = 6, \quad G_1''(1) = -6, \quad H_0''(1) = 2, \quad H_1''(1) = 4 \quad \text{értékek adódnak.}$$

Vegyünk egy tetszőleges $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ csatlakozási helyet. A fentiek következtében az \mathbf{r}_{j-1} görbeszegmens végpontjában és az \mathbf{r}_j szegmens kezdőpontjában a gyorsulásvektorokra igazak az

$$\mathbf{r}_{j-1}''(j) = 6\mathbf{p}_{j-1} - 6\mathbf{p}_j + 2\mathbf{v}_{j-1} + 4\mathbf{v}_j,$$

$$\mathbf{r}_j''(j) = 6\mathbf{p}_{j+1} - 6\mathbf{p}_j - 4\mathbf{v}_j - 2\mathbf{v}_{j+1}$$

kifejezések. Ezek alapján az $\mathbf{r}_{j-1}''(j) = \mathbf{r}_j''(j)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül az összes csatlakozási helyen, ha a sebességvektorokra teljesülnek a

$$\mathbf{v}_{j-1} + 4\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j+1} = 3(\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_{j-1})$$

($j = 1, 2, \dots, n-1$) összefüggések. Az $n+1$ számú sebességvektornak tehát a fenti $n-1$ számú lineáris egyenletet kell kielégítenie ahhoz, hogy az $\mathbf{r} : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ illesztett görbe C^2 -osztályú legyen.

Belátható, hogy amennyiben megadunk két érintővektort, akkor a többi sebességvektort a fenti egyenletek már meghatározzák. Célszerűnek látszik a kezdőpontbeli \mathbf{v}_0 és a végpontbeli \mathbf{v}_n érintővektorokat megadni.

3.3.2. Az általános paraméterezés esete

Tegyük fel, hogy valamely eljárással már meghatározásra kerültek a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontsorozat elemeihez tartozó u_0, u_1, \dots, u_n paraméterértékek. Amennyiben csak egy C^1 -osztályú görbeillesztést akarunk elvégezni, akkor elegendő az előző alfejezetben ismertett eljárás a megfelelő módosítást elvégezni.

Rendeljünk hozzá a pontokhoz egy-egy \mathbf{v}_i sebességvektort. Ezek ismeretében az $\mathbf{r} : [u_0, u_n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ interpolációs görbét úgy írjuk le, hogy a Hermite-féle polinomokat alkalmazva a

részintervallumokra vonatkozó leszűkítéseit adjuk meg. Jelölje \mathbf{r}_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) az $[u_i, u_{i+1}]$ intervallumra történő leszűkítést, és ezt határozza meg az

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(t) = & G_0\left(\frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i}\right) \cdot \mathbf{p}_i + G_1\left(\frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i}\right) \cdot \mathbf{p}_{i+1} + \\ & + H_0\left(\frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i}\right) \cdot (u_{i+1} - u_i) \mathbf{v}_i + H_1\left(\frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i}\right) \cdot (u_{i+1} - u_i) \mathbf{v}_{i+1} \end{aligned}$$

összefüggés, amelyben $t \in [u_i, u_{i+1}]$.

Az érintővektorok megfelelő megválasztásával ezen általános esetben is elérhető, hogy az \mathbf{r} görbe C^2 -osztályú legyen. Ehhez az

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{j-1}''(j) = & \frac{1}{(u_j - u_{j-1})^2} (6\mathbf{p}_{j-1} - 6\mathbf{p}_j) + \frac{1}{(u_j - u_{j-1})} (2\mathbf{v}_{j-1} + 4\mathbf{v}_j), \\ \mathbf{r}_j''(j) = & \frac{1}{(u_{j+1} - u_j)^2} (6\mathbf{p}_{j+1} - 6\mathbf{p}_j) - \frac{1}{(u_{j+1} - u_j)} (4\mathbf{v}_j + 2\mathbf{v}_{j+1}) \end{aligned}$$

vektoroknak kell megegyezniük a csatolási helyeken. Tehát a sebességvektoroknak ezúttal is $n - 1$ számú egyenletet kell kielégíteniük.

A szakaszhosszak szerinti paraméterezés

Az ekvidisztáns paraméterezéssel előállított görbe akkor ad megfelelő illesztést, ha a pontsorozat szomszédos elemeinek távolságaiban nincsenek nagyobb eltérések. Azonban ez sokszor nem áll fenn a megadott pontsorozatra, ami aztán oda vezet, hogy az illesztett görbe sebességében nagyobb ingadozások adódnak.

Jobb görbeillesztést kaphatunk, ha a pontsorozat által meghatározott töröttvonal oldalhosszai szerint paraméterezünk. Az $u_0 = 0$ kezdeti érték választása esetén ez azt jelenti, hogy az

$$u_i = \sum_{r=1}^i \|\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_{r-1}\| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

paraméterértékeket alkalmazzuk. Amennyiben megelégszünk a C^1 -osztályú görbeillesztéssel, akkor a \mathbf{v}_i érintővektorokat szabadon megválaszthatjuk. Célszerű azonban közel 1 hosszúságú sebességvektorokat választani. Ugyanis ez esetben az illesztett görbe sebessége végig 1-hez közeli értékeket vesz majd fel.

Irodalomjegyzék

- [1] G. Farin: *Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide (Fifth Edition)*, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2002.
- [2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [3] Juhász Imre: *Számítógépi geometria és grafika*, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1993.
- [4] Szabó László: *Konvex geometria*, ELTE TTK, Egyetemi jegyzet, Budapest, 1996.
- [5] Szirmay–Kalos László, Antal György, Csonka Ferenc: *Háromdimenziós grafika, animáció és játékfejlesztés*, ComputerBooks, Budapest, 1996.
- [6] Verhóczy László: *Klasszikus differenciálgeometria*, Digitális Tankönyvtár, 2013.
<https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/handle/123456789/12078>