
JÁRVÁNYTERJEDÉSI MODELLEK ELEMZÉSE

Szakdolgozat

Szerző: *Siró Bálint*

Matematika BSc

Matematikai Elemző szakirány

Témavezető: *Maros Gábor*

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR



BUDAPEST, 2022

NYILATKOZAT

Név: Siró Bálint

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

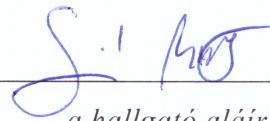
NEPTUN azonosító: HGCLGY

Szakdolgozat címe:

Járványterjedési modellek elemzése

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.31



a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani Maros Gábornak, hogy elvállalta szakdolgozatom témavezetését, illetve tudásával, javaslataival és iránymutatásaival hozzájárult annak megírásában.

Továbbá szeretném külön megköszönni Pfeil Tamásnak és Csomós Petrának, hogy egyetemi tanulmányaim során a differenciálegyenletek és numerikus módszerek világát megismertették és megszerettették velem.

Végezetül köszönöm családomnak és barátaimnak a sok támogatást és segítséget, melyeket az elmúlt években kaptam; barátnőmnek, hogy az út vége felé közeledve a legnagyobb támaszt nyújtotta; és hallgató társaimnak akikkel csodás éveket tölthettünk együtt.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Mi az, hogy járvány?	2
1.2. Hogy jön ide a matematika?	2
2. Matematikai alapok összefoglalása	3
2.1. Differenciálegyenletek	3
2.2. Mátrixok karakterisztikus polinomjai, sajátértékei	5
2.3. Runge–Kutta-módszer	6
2.3.1. Közönséges negyedrendű Runge–Kutta-módszer	8
3. A modellek	10
3.1. A Kermack–McKendrick modell	10
3.1.1. Modell felépítése	11
3.1.2. Egyensúlyi helyzetek és ezek stabilitásai	12
3.1.3. Numerikus megoldás	13
3.2. Az anyai eredetű immunitás	16
3.2.1. Modell felépítése	17
3.2.2. Egyensúlyi helyzetek és ezek stabilitásai	18
3.2.3. Numerikus megoldás	19
3.3. Immunitás hiánya	23
3.3.1. Modell felépítése	23
3.3.2. Egyensúlyi helyzetek és ezek stabilitásai	24
3.3.3. Numerikus megoldás	26
4. Zárszó	30
Irodalomjegyzék	31
Ábrák jegyzéke	32
Matlab kódok	33

1. fejezet

Bevezetés

Földünk történelme során számtalan alkalommal súlytotta élővilágunkat különféle megbetegedések, melyek néha nem maradtak meg az egyszerű könnyebb lefolyású kór szintjén és járvánnyá, esetlegesen világjárvánnyá nőttek ki magukat, melyek vagy egysze-rien végig mentek a populáció nagy részén és immunitás alakult ki, akár védőoltás, akár természetes immunitás formájában; vagy periódikus szinten újra és újra előjönnek, mert az adott betegségek folyamatosan változnak.

Szerencsére ezek nagy része ma már ismert, így a mechanizmusuk is, emiatt könnyebb rájuk felkészülni.

Sokféleképpen lehet a betegségeket csoportosítani, például milyen alapú és hogyan terjed. Első sorban ami fontosabb talán, az az, hogy milyen alapon nyugszik, ebből is kettő csoportot tudnék megemlíteni. A *vírusok* által terjesztett betegségek, mint például az influenza, a kanyaró vagy a bányahimlő, melyek egy része az első alkalom után adhat immunitást az újrafertőzés ellen, de van köztük olyan is, mint az influenza, ami évről évre képes megújulni, így hatékonyabb ellene az éves oltás, továbbá vannak esetek, amikor a vakcina korai beadása a célszerű, mert lefolyással járó esetleges súlyos szövődmények nem érik meg a természetes immunitást [4]. Beszélhetünk *bakteriális* úton terjedőkről is, ilyen az agyhártyagyulladás vagy a tuberkulózis (másnéven tbc), melyek ellen már ajánlatos a védőoltás beadása, mert nem biztosítanak védeltséget az újrafertőződés ellen és nagyon gyakran halálosak.[3]. Másik szempont lehet a hogyan terjedés, ami megint csak széles skálán mozog. Ebből csak párat említenék példákkal együtt: személyes kapcsolat - szexuális úton terjedő betegségek, csepfertőzés - influenza, állat-ember kapcsolat - veszettség, rovarcsípés - malária [5].

Az eddigiek alapján láttuk, hogy nem kevés betegségről tudunk beszélni, de mégis mikor tekinthetők járványnak, lehet-e előre jelezni, vizsgálni, megnézni, hogy nagyjából mire számíthatunk?

1.1. Mi az, hogy járvány?

Egy a témában írodott cikk szerint [1] a fertőzések útját három különféle csoportba sorolhatjuk: *kitörés*, *epidémia* és *pandémia*.

A *kitörésről* akkor beszélhetünk, ha a kórság váratlanul nagy számban fordul elő és az adott területen marad, esetleg innen kicsivel kiterjedhet.

Az *epidémia*, más néven járvány, már akkor kerül szóba, ha a fertőző betegség gyorsan és több emberre terjed, mint ahogyan arra számítanánk és ehhez igazodva jóval nagyobb régióban is fordul elő. Ami ezt *pandémiává*, azaz világjárvánnyá teszi, az az, hogy a régió amire kiterjed már ország, akár kontinens méretű is lehet, ebből kifolyólag több embert is érint, illetve több életet is követelhet.

Fontos, hogy akármilyen betegségről vagy állapotról járvány kapcsán nem beszélhetünk, kell hogy fertőző is legyen, ugyan is például a rák sok halálesetért felelős, de nem tekintik világjárványnak, mivel nem fertőző.

1.2. Hogy jön ide a matematika?

A matematikán belül a differenciálegyenletek azok, amik az elmélet mellett egy jól megfogható gyakorlati alkalmazást is nyújtanak számunkra. Ezen egyenletek sokszínűségét az is tanúsítja, hogy más tudományterületeken belül, például műszaki vagy társadalomtudományokban is előfordul, főként „folytonos idejű” folyamatok leírására és vizsgálatára.

Ez a terület tehát a járványok modellezésében is nagy szerepet vesz ki. Segít egy esetleges kór lefolyását, végkimenetelét megjósolni így információt szolgáltatva a megfelelő embereknek, hogy azok a szükséges intézkedéseket megtehessék. A modellekhez szükséges statisztikák egy ilyen folyamat esetén már az elején adottak, de önmagukban ezekre nem támaszkodhatunk, hiszen a külső hatások során – folyamatos születés és természetes halálozás, vakcina adagolás, a vírus változó terjedése – esetleges paraméter változások jöhetnek majd be, így célszerű ezeket is frissen tartani vagy a modellt bővíteni, hogy az előrejelzésünk pontosabb legyen.

Ezekből is látszik, hogy mennyire sokszínűen meglehet közelíteni ezt a problémát, de a továbbiakban egy ennél egyszerűbb, alapabb járványterjedési modellel és annak kisebb módosításaival szeretnék majd foglalkozni, amit 1927-ben *W. O. Kermack* és *A. G. McKendrick* hozott létre. A témában más híres orvos és matematikus – köztük *Daniel Bernoulli*, akinek a figyelmét a himlő vírus keltette fel [2] – is foglalatostkodott, de Kermack-ék modellje az egyszerűsége, bővíthetősége és viszonylag széles alkalmazása miatt, jobban ismert.

2. fejezet

Matematikai alapok összefoglalása

A következőkben célom összefoglalni azokat az elméleti anyagokat, amelyeket a későbbiekben fel is szeretnék használni a modellek ismertetése kapcsán. Ehhez az alábbi szakirodalmak váltak segítségemre: [7], [8], [9], [10].

Későbbiekben az egyszerűség kedvéért jelölje a következő a valós n dimenziós pozitív számokat: $\mathbb{R}_{>0}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0\}$; és a nem negatív számokat: $\mathbb{R}_{\geq 0}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$.

2.1. Differenciálegyenletek

A *differenciálegyenletek* olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen kifejezés egy differenciálható függvény és az ezen egyenletek kapcsolatot teremtenek az ismeretlen függvények és azok deriváltjai közt.

Közönséges differenciálegyenleteknek (KDE) nevezzük azokat, ahol a függvény egyváltozós, míg *parciális differenciálegyenleteknek* (PDE) a több változósokat, de a szakdolgozat keretein belül ezzel nem foglalkozok. Az hogy egy egyenlet hanyad rendű, azt majd a fellépő legmagasabb rendű derivált fogja meghatározni. Továbbá, ha az ismeretlen függvény számértékű, akkor *differenciálegyenletről*, ha vektorértékű, akkor *differenciálegyenlet-rendszerről* beszélünk.

2.1.1. Definíció. Legyen $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ folytonos függvény és legyen $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor n -edrendű közönséges differenciálegyenletnek nevezzük a következőt:

$$F(t, Y(t), \dot{Y}(t), \dots, Y^{(n)}(t)) = 0.$$

2.1.2. Definíció. Ha $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény, akkor az

$$Y^{(n)}(t) = f(t, Y(t), \dot{Y}(t), \dots, Y^{(n-1)}(t))$$

egyenletet n -edrendű explicit közönséges differenciálegyenletnek nevezzük.

2.1.3. Tétel. Átviteli elv: Minden n -edrendű lineáris differenciálegyenlet megfeleltethető n darab elsőrendű egyenletből álló differenciálegyenlet rendszernek.

Az $Y^{(n)}(t) = f(t, Y(t), \dot{Y}(t), \dots, Y^{(n-1)}(t))$ egyenlet új ismeretlen függvényekkel bevezetve, ahol $y_1(t) = Y(t)$, $y_2(t) = \dot{Y}(t)$, \dots , $y_{n-1} = Y^{(n-1)}(t)$ az alábbi rendszerré alakítható:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_3(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = Y^{(n)}(t) \end{cases}$$

2.1.4. Definíció. Legyen $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos és $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvények, továbbá $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$. Ekkor adott $(t_0, y_0) \in T$ kezdeti értékek esetén az alábbi

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

kezdeti érték feladathoz jutunk, amit szokás Cauchy feladatnak is nevezni.

2.1.5. Tétel. Peano-tétel: A (2.1) kezdeti érték feladatnak minden $(t_0, y_0) \in D(f)$ kezdeti feltétellel létezik megoldása, ahol $D(f)$ egy nyílt halmaz.

2.1.6. Definíció. A (2.1) Cauchy feladatnak megoldása globálisan egyértelmű, ha a differenciálegyenletnek $(t_0, y_0) \in D(f)$ kezdeti feltétellel legfeljebb egyetlen megoldása van. Lokálisan egyértelmű a megoldása, ha (t_0, y_0) -nak van olyan környezete, melyre leszűkítve az f függvényt az új differenciálegyenletnek a vizsgált kezdeti feltételt teljesítő bármely két megoldása egyenlő.

2.1.7. Definíció (Lipschitz-feltétel). Egy $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény teljesíti a Lipschitz-feltételt, ha létezik $L > 0$ Lipschitz-konstans, melyre:

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in D(g).$$

A g függvény lokálisan teljesíti a Lipschitz-feltételt, ha $D(g)$ minden pontjának létezik olyan U környezete, melyre a g megszorítva teljesíti a Lipschitz-feltételt.

2.1.8. Tétel. Picard-Lindelöf-tétel: Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos és $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ha $f = f(t, y)$ a második változójában teljesíti a lokális Lipschitz-feltételt, akkor az (2.1) Cauchy problémának megoldása minden kezdeti feltétellel létezik és globálisan egyértelmű.

2.1.9. Definíció (Egyensúlyi helyzet és stabilitás). Azt mondjuk, hogy $y^* \in \mathbb{R}^n$ a (2.1)-nek egyensúlyi helyzete, ha igaz rá, hogy $f(t, y^*) \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$. Az y^* egyensúlyi helyzet stabil, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|y_0 - y^*\| < \delta \Rightarrow \|y(t) - y^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$. Instabil az y^* , ha nem stabil. Az y^* egyensúlyi helyzet asszimptotikusan stabil, ha stabil és $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*\| = 0$.

Ennél a definíciónál megjegyezném azt, hogy ha létezik $t^* > 0$, hogy $y(t^*) = y^*$, ahol y^* egyensúlyi helyzet, akkor $y(t) = y^*$ minden $t \geq t^*$, továbbá ha létezik $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \hat{y}$, akkor \hat{y} egyensúlyi helyzet.

2.1.10. Definíció (Autonóm differenciálegyenletek). Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény teljesíti a lokális Lipschitz-feltételt, akkor az $\dot{y}(t) = f(y(t))$ egyenletet autonóm differenciálegyenletnek nevezzük, ha $n = 1$, illetve differenciálegyenlet rendszernek, ha $n > 1$.

2.1.11. Definíció (Jacobi mátrix). Legyen adott egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az f parciális deriváltjaiból képzett $n \times n$ -es mátrixot Jacobi-mátrixnak fogjuk hívni.

Tehát, ha

$$f : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

akkor az ebből képzett Jacobi-mátrix

$$\dot{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

2.1.12. Tétel. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kétszer folytonosan differenciálható és $y^* \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi helyzete az $\dot{y}(t) = f(y(t))$ autonóm egyenletnek. Ekkor, ha az $\dot{f}(y^*)$ $n \times n$ -es behelyettesített Jacobi mátrix minden $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$) sajátértékére igaz, hogy $Re(\lambda_i) < 0$, akkor y^* stabil egyensúlyi helyzet. Ha $\exists \lambda_i$, melyre $Re(\lambda_i) > 0$, akkor y^* instabil.

A tételhez még megjegyezném, hogy abból, hogy $Re(\lambda_i) = 0$ még nem tudunk semmilyen következtetést levonni.

2.2. Mátrixok karakterisztikus polinomjai, sajátértékei

Ebben a szekcióban azon lineáris algebrabeli fogalmakat szeretném tisztázni, melyek korábban is elhangzottak, illetve a későbbiekben is alkalmazásra kerülnek. A definíciókat és tételeket általános T test felett mondom ki.

2.2.1. Definíció (Sajátérték, sajátvektor). Legyen adott $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$ mátrix és $v \in T^n$ nemnulla vektor. Ha $Av = \lambda v$, ahol $\lambda \in T$ tetszőleges, akkor λ sajátértéke, v pedig a λ -hoz tartozó sajátvektora A -nak.

A definícióban fontos, hogy nemnulla vektorra mondjuk ki, különben, ha nulla lenne, akkor a T test minden eleme sajátérték lenne.

2.2.2. Tétel. Minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik.

2.2.3. Definíció (Karakterisztikus polinom). Egy $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomján a $k_A(x) = \det(A - xI)$ polinomot értjük, ahol I az $n \times n$ -es identitás mátrix.

$$k_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

2.2.4. Definíció (Aldetermináns). Legyen $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$ tetszőleges mátrix és tekintsük a determinánsát. Hagyjuk el az i -edik sort és j -edik oszlopot. Ekkor az így keletkezett $(n-1) \times (n-1)$ -es determinánst az a_{ij} elemhez tartozó A_{ij} előjeles al-determinánsnak szokás hívni, melynek előjelén a $(-1)^{i+j}$ -szeresét értjük.

2.2.5. Tétel. Kifejtési tétel: Ha egy sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles al-determinánssal, akkor az így kapott szorzatnak az összege a determinánssal egyenlő.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

2.2.6. Tétel. Legyen $A \in T^{n \times n}$ mátrix és $k_A(x)$ karakterisztikus polinomja, továbbá ennek gyöktényezőzős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$. Ekkor $k_A(x)$ egy n -edfokú polinom, melynek gyökei az A mátrix $\lambda_i \in T$ ($i = 1 \dots n$) sajátértékei.

2.3. Runge–Kutta-módszer

Végezetül utolsó részben a differenciálegyenletek közelítésére használt egyik egy lépéses módszert fogom levezetni, amit a modellek numerikus megoldásainál, és MATLAB kód megírásánál is alkalmazok.

2.3.1. Állítás (Interpolációs polinom Lagrange-féle alakja). Legyen adott n darab (x_k, y_k) pontpár, továbbá egy $p(x)$ polinom, melyre teljesül, hogy $p(x_k) = y_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Ekkor

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_k \cdot l_k(x), \text{ ahol } l_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \text{ (} k = 0, 1, \dots, n \text{) a Lagrange-bázis.}$$

Legyen adott (2.1) Cauchy feladat és $\tau > 0$ tetszőleges rögzített szám. Keressük azt a $p(x)$ polinomot, ami interpolálja $y(t)$ -t, azaz az interpolációs polinom az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- (i) $p(t_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$ interpolációs tulajdonság.
- (ii) $\dot{p}(t_n + c_j\tau) = f(t_n + c_j\tau, p(t_n + c_j\tau))$, $j = 1 \dots, s$, azaz a $t_n + c_j\tau$ pontokban kielégíti a (2.1) kezdeti érték feladatot.

Írjuk fel az interpolációs polinomot a Lagrange-féle alakban (2.3.1), majd integráljuk le 0-tól 1-ig:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t_n + \xi\tau) &= \sum_{i=1}^s \dot{p}(t_n + c_i\tau) \cdot l_i(\xi) \\ \int_0^1 \dot{p}(t_n + \xi\tau) d\xi &= \int_0^1 \sum_{i=1}^s \dot{p}(t_n + c_i\tau) \cdot l_i(\xi) d\xi \\ \frac{1}{\tau} [p(t_n + \xi)]_{\xi=0}^1 &= \sum_{i=1}^s \dot{p}(t_n + c_i\tau) \cdot \underbrace{\int_0^1 l_i(\xi) d\xi}_{=: b_i} \\ p(t_n + \tau) - p(t_n) &= \tau \sum_{i=1}^s \underbrace{\dot{p}(t_n + c_i\tau)}_{=: k_i} \cdot b_i \end{aligned}$$

A (i) tulajdonság miatt $p(t_n + \tau) = y_{n+1}$, $p(t_n) = y_n$, ekkor amit eddig kaptunk:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i \cdot k_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

ahol $k_i = \dot{p}(t_n + c_i\tau) = f(t_n + c_i\tau, p(t_n + c_i\tau))$. Most kiszámoljuk $p(t_n + c_i\tau)$ -t. Vegyük a korábbi Lagrange alakot, de mostmár a k_i helyettesítéssel és 0-tól c_i -ig integráljunk:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t_n + \xi\tau) &= \sum_{j=1}^s k_j \cdot l_j(\xi) \\ \int_0^{c_i} \dot{p}(t_n + \xi\tau) d\xi &= \int_0^{c_i} \sum_{j=1}^s k_j \cdot l_j(\xi) d\xi \\ \frac{1}{\tau} [p(t_n + \xi\tau)]_{\xi=0}^{c_i} &= \sum_{j=1}^s k_j \underbrace{\int_0^{c_i} l_j(\xi) d\xi}_{=: a_{ij}} \\ p(t_n + c_i\tau) &= \underbrace{p(t_n)}_{= y_n} + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot k_j \end{aligned}$$

Összeségében az alábbi s -lépcsős Runge–Kutta módszert kapjuk a (2.1) feladat közelítésére:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i \cdot k_i, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

$$k_i = f(t_n + c_i \tau, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot k_j), \quad (i = 1 \dots, s)$$

ahol $s \in \mathbb{N}$ a lépcsők száma, $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ a súlyok, $c_i \in [0, 1]$ csomópontok, $t_n = t_0 + n\tau$, ahol τ valójában a lépés nagysága, k_i pedig a csomópontokbeli meredekségek közelítése. Ezt a módszert azért nevezik egylépésesnek, mert a soron következő ponthoz mindig elég lesz nekem tudni azt, hogy az előző helyen milyen érték szerepel.

2.3.2. Definíció. (Konzisztencia) Azt mondjuk, hogy egy egylépéses módszer konzisztens a $t \geq 0$ időpillanatban, ha

$$\|\varepsilon^{lok}(t + \tau)\| = \|y(t + \tau) - [y(t) + \tau\Phi(f, \tau, t, y(t))]\| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0,$$

és p -ed rendben konzisztens t -ben, ha $\exists c > 0$, hogy

$$\|\varepsilon^{lok}(t + \tau)\| = \|y(t + \tau) - [y(t) + \tau\Phi(f, \tau, t, y(t))]\| \leq c\tau^{p+1} = \mathcal{O}(\tau^{p+1}),$$

ahol $\Phi(f, \tau, t, y(t))$ az egylépéses módszer maga és $\varepsilon^{lok}(t + \tau)$ az egylépésben elkövetett hiba.

2.3.3. Definíció. (Konvergencia) Azt mondjuk, hogy egy egylépéses módszer konvergens a $t \geq 0$ időpillanatban, ha

$$\|\varepsilon(t)\| = \|y(t) - y_n\| \xrightarrow{\tau = \frac{t}{n} \rightarrow 0} 0,$$

és p -ed rendben konvergens t -ben, ha $\exists c > 0$, hogy

$$\|\varepsilon(t)\| = \|y(t) - y_n\| \leq c\tau^p = \mathcal{O}(\tau^p),$$

ahol y_n a módszer által kapott n -edik pont és $\varepsilon(t)$ az összes lépés után megjelenő hiba.

2.3.4. Állítás. Ha egy egylépéses módszer p -ed rendben konzisztens, akkor p -ed rendben konvergens.

2.3.1. Közöséges negyedrendű Runge–Kutta-módszer

A negyedrendű Runge–Kutta-módszer (röviden RK4) az egyik legelterjedtebb módszer közöséges differenciálegyenletek közelítésére. Ennek oka, hogy a módszer negyedrendig

egzakt, azaz a lépésenként elkövetett hiba ötödrendű (2.3.4), így ez a fajta megközelítés stabil, továbbá megfelelően használva pedig igen pontos számításokhoz is használható.

Tekintsük továbbra is a (2.1) Cauchy feladatot és a módszer (2.2)-es általános alakját. Ekkor az RK4 paraméterei (2.b) egy úgy nevezett Butcher-tabló (2.a) segítségével megadható az alábbi módon:

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}	0	0	0	0	0
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}	$1/2$	$1/2$	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	$1/2$	0	$1/2$	0	0
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}	1	0	0	1	0
	b_1	b_2	\dots	b_s		$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$

2.a. ábra. Butcher tabló általános alakja

2.b. ábra. RK4 Butcher tablója

Leírva tehát az alábbi n -szerinti rekúrziós lépésekkel kapjuk az $y(t)$ közelítését:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 k_1 &= f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= f(t_n + \tau, y_n + \tau k_3)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. fejezet

A modellek

Ebben a fejezetben céloom felépíteni az alap Kermack-McKendrick modellt, továbbá két variánsát is bemutatni, majd ezen egyenletek viselkedését vizsgálni. Ehhez az alábbi szakirodalmakat vettem alapul: [2], [6], [11].

3.1. A Kermack–McKendrick modell

A modell alapját azt képezi, hogy a populációt rekeszekbe fogjuk osztani, ezért szokás az ilyen modelleket *rekeszes modellek*nek is hívni. A rekeszek közti átmenetelt fogjuk matematikailag differenciálegyenletek segítségével leírni, ami az adott csoport változását is nyomon fogja követni.

Különböző fertőzésekhez különböző rekeszes modellt szokás alkotni, de a legalapabb amit nézni fogunk, az SIR modell. A névben a betűk mindig az osztályokat fogják jelölni, jelen esetünkben: *Susceptible*, egészséges/fertőzhető egyedek; *Infected*, a fertőzöttek; *Recovered*, a rezisztensek. A független változónk az idő lesz, emellé társul kettő, az átmenetelt leíró mértékek. Ezekkel fogjuk matematikailag kifejezni a csoportok méretének változásait az időbeli deriváltakkal, így kezdetben egy-egy differenciálegyenletet kapva.

A folytonosság elérése miatt, a klasszisokat leíró függvények, melyeknek korábban említett deriváltjait fogjuk majd venni, nem az egyedek számát, hanem az egyedek tömegét fogja megadni az adott időpillanatban, azaz

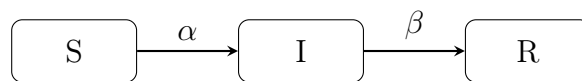
- $S(t)$ - fertőzhető egyedek tömege a t . időpillanatban,
- $I(t)$ - fertőzöttek tömege a t . időpillanatban,
- $R(t)$ - rezisztensek tömege a t . időpillanatban,

továbbá a fentebb említettek alapján legyen α a fertőzés, β a gyógyulás mértéke.

3.1.1. Modell felépítése

A 3.a ábra szemlélteti a modellt, ehhez teszünk most észrevételeket, feltételeket:

- (i) Mindenki egyenlő módon interaktál a másikkal és egységnyi idő alatt a populáció egy fertőzött tagja αN másik taggal érintkezik.
- (ii) Az I osztályt időegységként βI egyed hagyja el.
- (iii) Nem vesszük figyelembe születést és természetes halálozást.



3.a. ábra. SIR model folyamábrája

Ezek után azt mondhatjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a t . időpillanatban egy fertőző egyed egy egészséggel érintkezik $\frac{S(t)}{N}$. Az (i) miatt ekkor az új betegek száma minden időpillanatban $\alpha N \cdot \frac{S(t)}{N} = \alpha S(t)$, így az új fertőzések aránya időegységként $\alpha S(t)I(t)$ lesz.

Felhasználva ezen levezetést és a (ii) észrevételt a következő differenciálegyenleteket írhatjuk fel, amelyek egy rendszer fognak alkotni:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ \dot{R}(t) = \beta I(t) \end{cases} \quad \forall t > t_0 \quad (3.1)$$

ahol t_0 pillanatban $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ kezdeti értékek adottak, továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{> 0}$. Vegyük észre, hogy $S_0 + I_0 + R_0 = N$, de meggondolható, hogy ez állandó marad, mert

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) &= -\alpha S(t)I(t) + \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) + \beta I(t) \\ \dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) &= 0 \end{aligned}$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{konstans} = N, \quad (3.2)$$

minden $t \geq t_0$ pillanatban.

3.1.2. Egyensúlyi helyzetek és ezek stabilitásai

Legyen $\dot{y}(t) = f(y(t)) = \begin{bmatrix} \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \\ \dot{R}(t) \end{bmatrix}$, ahol $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, mindemellett $y^* = (S^*, I^*, R^*) \in \mathbb{R}^3$ az egyensúlyi helyzet.

Vizsgáljuk meg az $\dot{y}(t) = 0$ -t:

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) = \begin{bmatrix} \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \\ \dot{R}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha S(t)I(t) \\ \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ \beta I(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ebből pedig kapjuk a következő egyenletrendszert

$$\begin{cases} -\alpha S(t)I(t) = 0 \\ \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = 0 \\ \beta I(t) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

amibe, ha y^* egyensúlyi helyzetünket behelyettesítjük (2.1.9), akkor megmutatható, hogy $I^* = 0$, továbbá $S^*, R^* \geq 0$ tetszőlegesen, tehát $y^* = (S^*, 0, R^*)$, de (3.2) tulajdonság miatt $S^* + R^* = N \Rightarrow R^* = N - S^*$, azaz $y^* = (S^*, 0, N - S^*)$ alakú, ami végtelen sok egyensúlyihelyzet.

Hogy megtudjuk a helyzet stabilitását, írjuk fel a rendszer Jacobi-mátrixát (2.1.11)

$$\dot{f}(S(t), I(t), R(t)) = \begin{bmatrix} -\alpha I(t) & -\alpha S(t) & 0 \\ \alpha I(t) & \alpha S(t) - \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

majd helyettesítsük be az egyensúlyi helyzetet

$$\dot{f}(S^*, 0, N - S^*) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha S^* & 0 \\ 0 & \alpha S^* - \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} =: A. \quad (3.5)$$

Ezek után az A mátrix sajátértékeit határozzuk meg a karakterisztikus polinomja segítségével (2.2.5, 2.2.6)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha S^* & 0 \\ 0 & \alpha S^* - \beta - \lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\alpha S^* - \beta - \lambda) = 0,$$

ebből pedig kapjuk, hogy a sajátértékek $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = \alpha S^* - \beta$. Az y^* stabilitása tehát $Re(\lambda_3)$ előjelétől függ. Ha ez pozitív, akkor biztosra állíthatom, hogy instabil lesz, viszont ha negatív, akkor 2.1.12 tétel és az utána tett megjegyzés értelmében nem tudjuk megállapítani a stabilitást.

3.1.3. Numerikus megoldás

Most vizsgáljuk meg az egyenletrendszerünk egy pár megoldását és érdekesebb eseteket, a negyedrendű Runge–Kutta-módszert alkalmazva. Ezt azért merem meglépni, mert szeretnénk kapni egy kis elképzelést arról, hogy mégis hogyan nézhet ki a görbe bizonyos paraméterek mellett, viszont egy ilyen kaliberű differenciálegyenlet rendszerénél az analitikus megoldás már jóval több erőforrást venne igénybe.

Tehát adott a (3.1)-es egyenletrendszerünk és mellé $y(t_0) = (S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ kezdeti értékünk. Ekkor (2.3) alapján az SIR modellünk numerikus megoldása az alábbi formába írható fel:

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ I_{n+1} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n \\ I_n \\ R_n \end{bmatrix} + \frac{\tau}{6} \left(\begin{bmatrix} k_1^S \\ k_1^I \\ k_1^R \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_2^S \\ k_2^I \\ k_2^R \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_3^S \\ k_3^I \\ k_3^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_4^S \\ k_4^I \\ k_4^R \end{bmatrix} \right),$$

ahol k_j^S, k_j^I, k_j^R ($j = 1, 2, 3, 4$) az alábbiak:

$$k_1^S = f_S(t_n, S_n, I_n, R_n) = -\alpha S_n I_n$$

$$k_1^I = f_I(t_n, S_n, I_n, R_n) = \alpha S_n I_n - \beta I_n$$

$$k_1^R = f_R(t_n, S_n, I_n, R_n) = \beta I_n$$

$$k_2^S = f_S\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_1^R \tau}{2}\right)$$

$$k_2^I = f_I\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_1^R \tau}{2}\right)$$

$$k_2^R = f_R\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_1^R \tau}{2}\right)$$

$$k_3^S = f_S\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_2^R \tau}{2}\right)$$

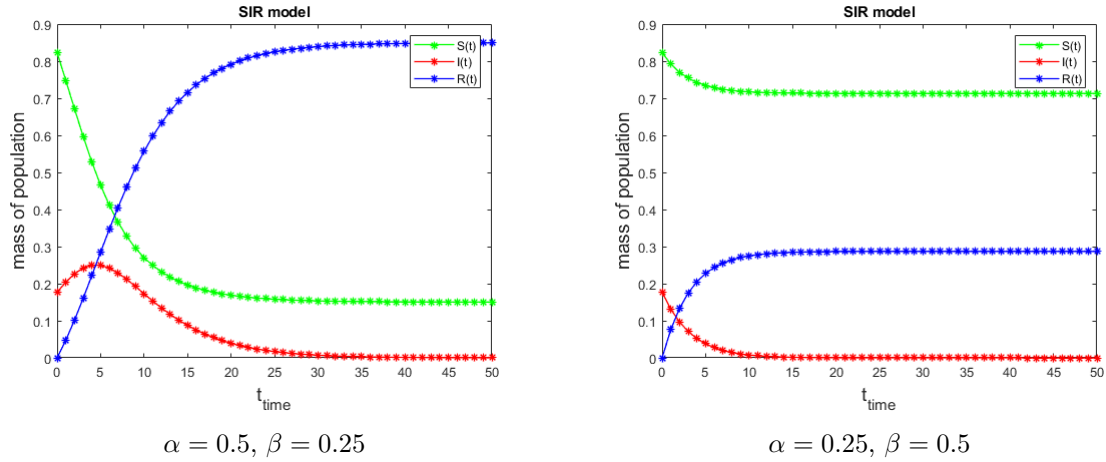
$$k_3^I = f_I\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_2^R \tau}{2}\right)$$

$$k_3^R = f_R\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_2^R \tau}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
k_4^S &= f_S(t_n + \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau, R_n + k_4^R \tau) \\
k_4^I &= f_I(t_n + \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau, R_n + k_4^R \tau) \\
k_4^R &= f_R(t_n + \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau, R_n + k_4^R \tau)
\end{aligned}$$

Mivel a modellünk valójában egy normalizált változat, ez azt jelenti, hogy az $N = 1$, azaz $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ minden t -re, így "valós" adatok helyett a populáció eredeti méretével leosztott S_0, I_0 és R_0 -t adjuk meg. A rendszer nem lineáris, ezért az egyensúlyi helyzetek vizsgálata során a linearizáció miatt csak lokálisan tudunk valamit modani. Az egyszerűség miatt a továbbiakban a kezdeti értékek új változata fog szerepelni, emellett az ábrázolás során nem csak kész görbék, hanem az RK4 során kiszámolt pontok is jelen lesznek. A stabilitás vizsgálat során, ha a harmadik sajátérték $\lambda_3 > 0$, akkor biztosra állíthatom, hogy a rendszer instabil, így azzal külön nem foglalkozok, csak az általános esetről.

Általános eset:

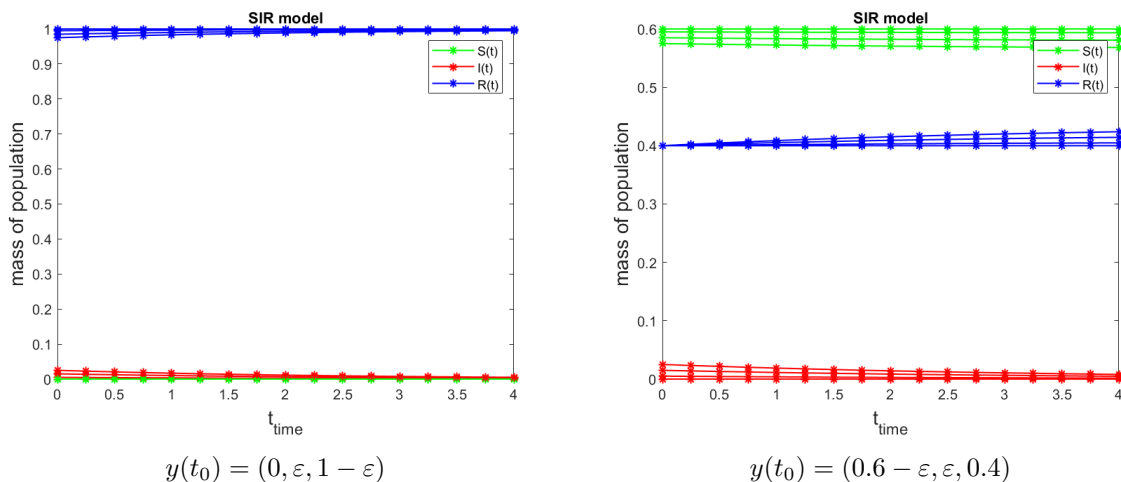


3.b. ábra. SIR: $t \in [0, 50]$, $y(t_0) = (0.823, 0.177, 0)$, $\tau = 1$

A 3.b ábrákon a modell egy általános viselkedése figyelhető meg, annak függvényében, hogy a $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ reprodukciós ráta egynél kisebb vagy nagyobb-e. Továbbá, ha egyensúlyi helyzetek tekintetében nézem, akkor az első eset egy instabil helyzetre példa, ekkor (3.5) A mátrix harmadik sajátértéke $\lambda_3 = \alpha S^* - \beta > 0$, ez az ábrán látszik is, hogy lokálisan eltart a kiindulási pontból, még a másodikonál azt figyelhetjük meg, hogy viszonylag hamar az indulástól valami $(S^*, 0, N - S^*)$ egyensúlyi helyzet behúzza a rendszert, ekkor $\lambda_3 < 0$, de a 2.1.12 tétel és megjegyzése miatt nem mondhatjuk, hogy ez stabil lenne. Ez egy durvább perturbálásnak is tekinthető, mert $(1, 0, 0)$ pontból indítva a rendszert különböző α, β és $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mellett az $(1 - \varepsilon, \varepsilon, 0)$ viselkedése szemlélhető a két ábrán.

A $Re(\lambda_3) < 0$ eset:

Tekintsük most a $(0, 0, N)$ egyensúlyi helyzetet. Ha ezt a (3.4) Jacobi-mátrixba behelyettesítjük, akkor a (3.5) A mátrix sajátértékei ez esetben $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = -\beta$. A stabilitási tétel és megjegyzése miatt nem tudjuk megállapítani a rendszer stabilitását, de valahol érezzük, hogy ennek stabilnak kellene lennie a feladat szempontjából, ugyanis ilyenkor mindenki rezisztens, tehát nincs kit fertőzni. Azért, hogy valami képet mégis kapjunk erről a helyzetről ezt a pontot kicsit perturbáljuk. A 3.c ábra $y(t_0) = (0, \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ esete szemlélteti ezt a folyamatot különböző kicsi ε -ok mellett, ahol minden esetben a rendszer a $(0, 0, 1)$ ponthoz tart lokálisan.



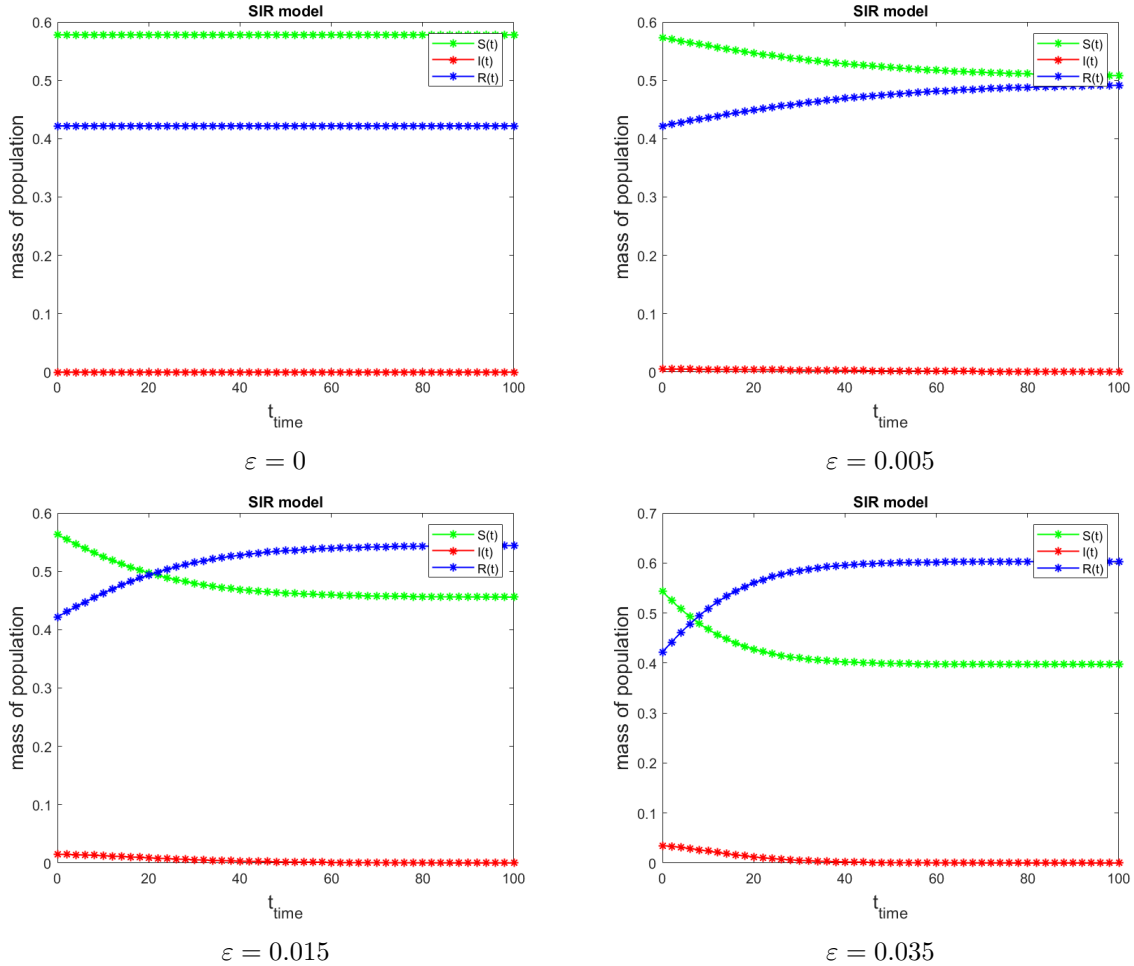
3.c. ábra. SIR: $t \in [0, 4]$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $\tau = 0.25$, $\varepsilon \in \{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$

Kicsit általánosabban is vizsgálva a $(S^*, 0, N - S^*)$ helyzetet $S^* \neq 0$ esetén úgy, hogy a $\lambda_3 = \alpha S^* - \beta < 0$ teljesüljön továbbra is, a perturbáció után hasonló eredményhez jutunk, mint az előző esetben. A 3.c jobb ábráján láthatóak az eredmények. Az $(S^* - \varepsilon, \varepsilon, N - S^*)$ során az ε folyamatos növelésével, a kísérlet alapján állíthatom, hogy a rendszer itt is valami közeli ponthoz fog tartani lokálisan, a $\lambda_3 < 0$ feltételhez való ragaszkodás miatt, de továbbra se mondhatjuk, hogy a rendszer stabil lenne, mert λ_3 -on kívül a többi sajátérték továbbra is nulla.

A $Re(\lambda_3) = 0$ eset:

Legyen az új egyensúlyi helyzet amit vizsgálunk a $\left(\frac{\beta}{\alpha}, 0, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ pont. A (3.4) Jacobi-mátrixba beírva, (3.5) A sajátértékei ebben az esetben a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = \alpha \frac{\beta}{\alpha} - \beta = 0$. A 2.1.12 megjegyzése alapján tudjuk, hogy erről se mondhatunk többet, ami miatt mégis érdekes az a $\frac{\beta}{\alpha}$ és ρ viszonya, mert ha $\rho < 1$ abból következik, hogy $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ és ha tartjuk magunkat az $N = 1$ -hez, akkor $N - \frac{\beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{\alpha} < 0$ lesz, aminek a feladat szempontjából

nincs értelme. Vizsgáljuk a $\left(\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon, \varepsilon, 1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ különböző $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mellett. A 3.d négy ábrája a rendszer viselkedését mutatja, a kezdeti $\varepsilon = 0$ esetben ahonnan indult oda tart, de amint ezt egy kicsit is növeljük, ezzel a rendszert kibillentve, a két $S(t)$ és $R(t)$ görbe egyre jobban távolodik a kezdeti értéktől, míg az $I(t)$ tart nullához, azaz az egész rendszer szintén valami $(S^*, 0, N - S^*)$ helyzetbe tart.



3.d. ábra. SIR: $t \in [0, 100], y(t_0) = (0.578 - \varepsilon, \varepsilon, 1 - 0.578), \alpha = 0.5, \beta = 0.289, \tau = 2$

3.2. Az anyai eredetű immunitás

A következőkben az előző alfejezetben taglalt SIR modell egy olyan módosítását fogom ismertetni, melynek fő újítása az anyai eredetű immunitás, másszóval a veleszületett immunitás behozása a képbe.

Itt arról van szó, hogy a gyakorlatban bizonyos betegségek esetén az újszülöttek nem egyből fertőzhetőként születnek, hanem kezdetben egy átmeneti védettséggel rendelkeznek, amit az anyától kapnak, ezután ők is veszélyeztetetté válnak. Ezért a modellünk ki fog egészülni a *Maternally-derived immunity*, azaz az anyai eredetű immunitással rendelkező

egyedek osztályával, az összes többi osztály változatlan, továbbá a független változónk az idő marad, de emellé a korábbi két mértékhez, fertőzés és gyógyulás, csatlakozik a passzív immunitást elvesztésének a mértékét leíró konstans.

Most is célszerű a klasszisokat úgy kezelni, hogy a populáció nagysága helyett a tömeg változását fogják közölni, tehát

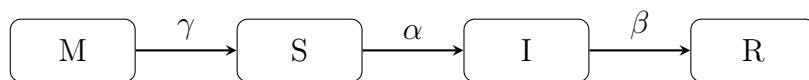
- $M(t)$ - passzív immunitással rendelkező egyedek tömege a t . időpillanatban,
- $S(t)$ - fertőzhetőek tömege a t . időpillanatban,
- $I(t)$ - fertőzöttek tömege a t . időpillanatban,
- $R(t)$ - gyógyultak tömege a t . időpillanatban,

továbbá α a fertőzés, β a gyógyulás és γ az anyai immunitás elvesztésének a mértéke.

3.2.1. Modell felépítése

A modellt a 3.e ábra szemlélteti, az észrevételek és feltételek nem sokban térnek el, egy új pontot leszámítva:

- Az M osztályból γM újszülött lép ki időegységenként.
- Mindenki egyenlő módon interaktál a másikkal és egységnyi idő alatt a populáció egy fertőzött tagja αN másik taggal érintkezik.
- Az I osztályt időegységként βI egyed hagyja el.
- Nem veszünk figyelembe születést és természetes halálozást.



3.e. ábra. MSIR model folyamábrája

Felhasználva (i)-t és az SIR modellt (3.1), az alábbi módosított differenciálegyenlet rendszert kapjuk, amire inentől kezdve csak MSIR modellként fogok hivatkozni:

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = -\gamma M(t) \\ \dot{S}(t) = -\alpha S(t)I(t) + \gamma M(t) \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ \dot{R}(t) = \beta I(t) \end{cases} \quad \forall t > t_0 \quad (3.6)$$

ahol t_0 pillanatban $(M_0, S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$ kezdeti értékek adottak, továbbá $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Ahogy az SIR modellnél, így az MSIR esetében is $M_0 + S_0 + I_0 + R_0 = N$, de itt is megmutatható, hogy ez időben állandó marad, mert

$$\begin{aligned}\dot{M}(t) + \dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) &= -\gamma M(t) - \alpha S(t)I(t) + \gamma M(t) + \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) + \beta I(t) \\ \dot{M}(t) + \dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) &= 0\end{aligned}$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$M(t) + S(t) + I(t) + R(t) = \text{konstans} = N, \quad (3.7)$$

minden $t \geq t_0$ pillanatban.

3.2.2. Egyensúlyi helyzetek és ezek stabilitásai

Legyen most $\dot{y}(t) = f(y(t)) = \begin{bmatrix} \dot{M}(t) \\ \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \\ \dot{R}(t) \end{bmatrix}$, ahol $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, ezek mellett

$y^* = (M^*, S^*, I^*, R^*) \in \mathbb{R}^4$ az egyensúlyi helyzet.

Nézzük $\dot{y}(t) = 0$ -t:

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) = \begin{bmatrix} \dot{M}(t) \\ \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \\ \dot{R}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma M(t) \\ -\alpha S(t)I(t) + \gamma M(t) \\ \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ \beta I(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ez alapján az alábbi egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{cases} -\gamma M(t) = 0 \\ -\alpha S(t)I(t) + \gamma M(t) = 0 \\ \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = 0 \\ \beta I(t) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

melybe behelyettesítve az y^* egyensúlyi helyzetet kijön, hogy M^* és I^* nem lehet más mint nulla, emiatt $S^*, R^* \geq 0$ tetszőlegesen, de (3.7) miatt $S^* + R^* = N \Rightarrow R^* = N - S^*$, így $y^* = (0, S^*, 0, N - S^*)$ alakú.

Stabilitás vizsgálatához írjuk fel a Jacobi-mátrixot (2.1.11)

$$\dot{f}(M(t), S(t), I(t), R(t)) = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -\alpha I(t) & -\alpha S(t) & 0 \\ 0 & \alpha I(t) & \alpha S(t) - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

és nézzük meg az y^* egyensúlyi pontban

$$\dot{f}(0, S^*, 0, N - S^*) = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & -\alpha S^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha S^* - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} =: B, \quad (3.10)$$

majd B karakterisztikus polinomjával a sajátértékeket megkeressük (2.2.5, 2.2.6)

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\gamma - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -\lambda & -\alpha S^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha S^* - \beta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-\gamma - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha S^* & 0 \\ 0 & \alpha S^* - \beta - \lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-\gamma - \lambda) \lambda^2 (\alpha S^* - \beta - \lambda) = 0, \end{aligned}$$

ebből kapjuk, hogy $\lambda_1 = -\gamma$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ és $\lambda_4 = \alpha S^* - \beta$. Tehát y^* stabilitása csak $Re(\lambda_4)$ -től függ, ha ez pozitív akkor biztosan instabil, de minden más esetben a 2.1.12 tétel és megjegyzése alapján nem tudjuk eldönteni a helyzet stabilitását.

3.2.3. Numerikus megoldás

Ebben a részben is a negyedrendű Runge–Kutta-módszert fogom használni egzakttsága miatt. Nagyjából minden ugyan úgy fog zajlani, mint SIR esetében, csak kiegészülve az M osztállyal, így a köztes pontokból is többet fogunk számolni. Ekkor a (3.6)-os rendszer (2.3) alapján felírt numerikus alakja egy tetszőleges $y(t_0) = (M_0, S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$ kezdeti értékkel:

$$\begin{bmatrix} M_{n+1} \\ S_{n+1} \\ I_{n+1} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_n \\ S_n \\ I_n \\ R_n \end{bmatrix} + \frac{\tau}{6} \left(\begin{bmatrix} k_1^M \\ k_1^S \\ k_1^I \\ k_1^R \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_2^M \\ k_2^S \\ k_2^I \\ k_2^R \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_3^M \\ k_3^S \\ k_3^I \\ k_3^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_4^M \\ k_4^S \\ k_4^I \\ k_4^R \end{bmatrix} \right),$$

ahol $k_j^M, k_j^S, k_j^I, k_j^R$ ($j = 1, 2, 3, 4$) az alábbiak:

$$k_1^M = f_M(t_n, M_n, S_n, I_n, R_n) = -\gamma M_n$$

$$k_1^S = f_S(t_n, M_n, S_n, I_n, R_n) = -\alpha S_n I_n + \gamma M_n$$

$$k_1^I = f_I(t_n, M_n, S_n, I_n, R_n) = \alpha S_n I_n - \beta I_n$$

$$k_1^R = f_R(t_n, M_n, S_n, I_n, R_n) = \beta I_n$$

$$k_2^M = f_M\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_1^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_1^R \tau}{2}\right)$$

$$k_2^S = f_S\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_1^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_1^R \tau}{2}\right)$$

$$k_2^I = f_I\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_1^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_1^R \tau}{2}\right)$$

$$k_2^R = f_R\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_1^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_1^R \tau}{2}\right)$$

$$k_3^M = f_M\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_2^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_2^R \tau}{2}\right)$$

$$k_3^S = f_S\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_2^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_2^R \tau}{2}\right)$$

$$k_3^I = f_I\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_2^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_2^R \tau}{2}\right)$$

$$k_3^R = f_R\left(t_n + \frac{\tau}{2}, M_n + \frac{k_2^M \tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}, R_n + \frac{k_2^R \tau}{2}\right)$$

$$k_4^M = f_M(t_n + \tau, M_n + k_3^M \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau, R_n + k_3^R \tau)$$

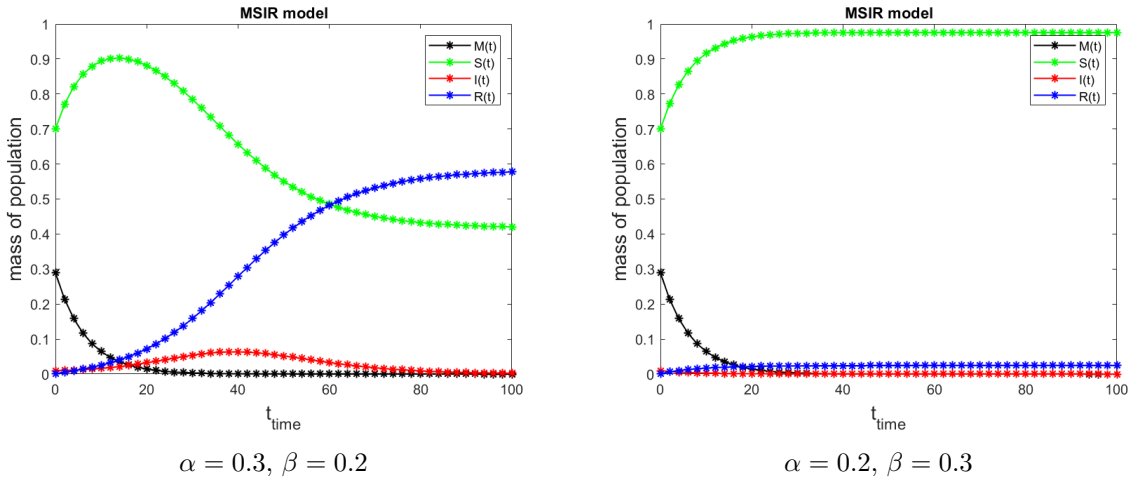
$$k_4^S = f_S(t_n + \tau, M_n + k_3^M \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau, R_n + k_3^R \tau)$$

$$k_4^I = f_I(t_n + \tau, M_n + k_3^M \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau, R_n + k_3^R \tau)$$

$$k_4^R = f_R(t_n + \tau, M_n + k_3^M \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau, R_n + k_3^R \tau)$$

Az MSIR modell ezen változata is normált, azaz $M(t) + S(t) + I(t) + R(t) = N = 1$ minden t -re, így valós adatok helyett a populáció eredeti méretével leosztott kezdőértékeket fogunk megadni. Hasonlóan a rendszer nem linearitása miatt az egyensúlyi helyzetek vizsgálata lokálisan fog zajlani. A kezdeti értékek újrátöltése fog szerepelni az ábráknál, illetve az RK4 kiszámolt pontjai is vizualizálva lesznek. A stabilitást tekintve a $Re(\lambda_4) > 0$ esetet biztosan mondhatom instabilnak, így külön nem foglalkozok vele.

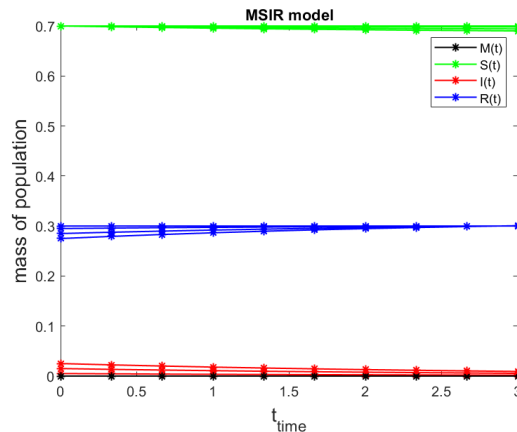
Általános eset:



3.f. ábra. MSIR: $t \in [0, 100]$, $y(t_0) = (0.289, 0.7, 0.01, 0.001)$, $\gamma = 0.15$, $\tau = 2$

Nézzük a 3.f két ábráját. A $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ reprodukciós ráta ennél a modellnél is szerepet kap, ennek függvényében változik a $\lambda_4 = \alpha S^* - \beta$ sajátérték előjele is, így határozva meg, hogy instabil esetet kapunk, ez a baloldali ábra, vagy valami stabilnak látszó, de valójában nem megmondható dolgot (2.1.12 tétel és hozzá tartozó megjegyzés). Mind a két esetben látszódik, amit korábban ki is számoltunk, hogy a rendszer mindig valami $(0, S^*, 0, N - S^*)$ ponthoz tart, ami jobban beegondolva érthető, mert az M osztály, ha nincs bent a születés mint tényező, a kiürülésre van ítélve, így az I is, mert egy idő után elfogynak a fertőzhető egyedek.

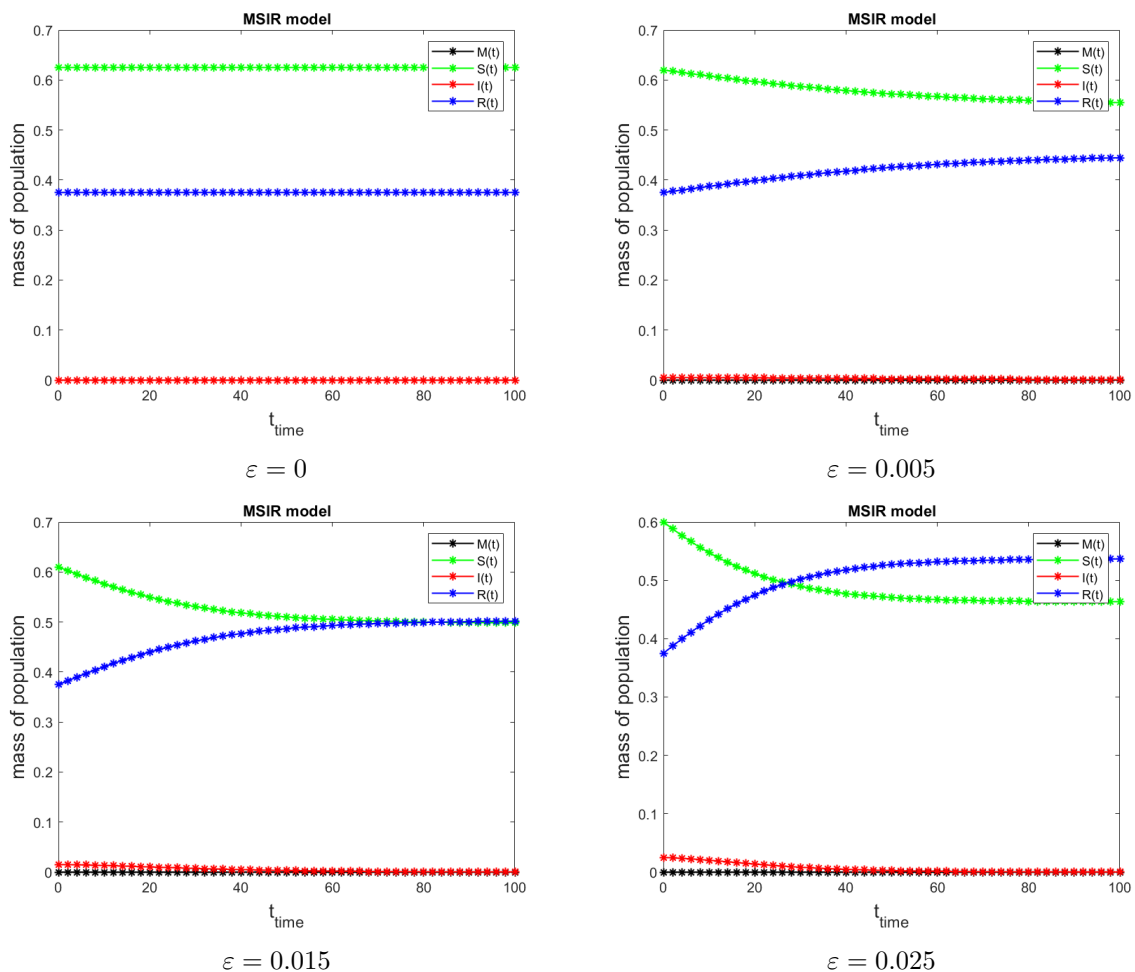
A $Re(\lambda_4) < 0$ eset:



3.g. ábra. MSIR: $t \in [0, 3]$, $y(t_0) = (0, 0.7, \varepsilon, 0.3 - \varepsilon)$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.54$,
 $\gamma = 0.01$, $\tau = \frac{1}{3}$, $\varepsilon \in \{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$

Vegyünk olyan α -t és β -t, hogy $\lambda_4 = \alpha S^* - \beta < 0$ mindig teljesüljön. Ekkor a két $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sajátérték mellett lesz két negatív is, ugyanis $\lambda_1 = -\gamma < 0$ tetszőleges $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ mellett mindig igaz. Ez a rendszer szintén rendelkezik ilyenkor egy speciálisabb egyensúlyi helyzettel $(0, 0, 0, N)$, azaz amikor mindenki rezisztens és nincs kit fertőzni, ami esetében nem kell megkövetelni, hogy $\lambda_4 < 0$ legyen, mert $S^* = 0$ miatt $\lambda_4 = -\beta < 0$ mindig fennáll. Ennél az általánosabb $(0, S^*, 0, N - S^*)$ -ot nézzük, ahol feltevésünk megint az, hogy valami stabilnak vehető dolgot kapunk, mert a fertőzöttek osztálya nulla, így nincs ki fertőzőn, tehát nincs mozgás a klasszisok közt, de a két nulla sajátérték miatt ez nem megállapítható (2.1.12 és megjegyzése), ezért perturbálunk egy pontot és az alapján fogunk következtetni, ez látható a 3.g ábrán. Azt tapasztaljuk a linearizáció és a kísérletek során, hogy kimozdítva a rendszert egy kicsi ε -nal a görbék egy közeli ponthoz fognak tartani lokálisan, azaz stabilnak látszanak.

A $Re(\lambda_4) = 0$ eset:



3.h. ábra. MSIR: $t \in [0, 100]$, $y(t_0) = (0, 0.625 - \varepsilon, \varepsilon, 1 - 0.625)$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.25$, $\tau = 2$

Tekintsük az alábbi egyensúlyi helyzetet $\left(0, \frac{\beta}{\alpha}, 0, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Ekkor a (3.10) mátrixba beírva kapjuk a $\lambda_1 = -\gamma$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sajátértékek mellé a $\lambda_4 = \alpha \frac{\beta}{\alpha} - \beta = 0$ -t. Ezen helyzet stabilitása továbbra sem mondható meg (2.1.12 és megjegyzése), így egy tetszőleges $\left(0, \frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon, \varepsilon, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ pontból indított rendszer viselkedését kell megint nézni kicsi ε -okra. A 3.h ábráin látható az eredmény. Ahogy SIR esetében, így itt is azt tapasztaljuk, hogy a linearizáció során az általunk végzett kísérletben az ε folyamatos finom növelésével a rendszer két görbéje, $S(t)$ és $R(t)$ eltart a kiindulási ponttól, míg az $I(t)$ ismét tart nullához.

3.3. Immunitás hiánya

Végezetül, a modell egy olyan egyszerűbb variánsát szeretném ismertetni, ami azon esetekben fog hasznossá válni, ahol a kór lefolyása után, gondolhatunk itt egy egyszerű megfázásra, nem alakul ki tartós immunitás.

Az alapja az egésznek, hogy az SIR *recovered* osztályát kivesszük a képből, és azon egyedek, akik átestek a fertőzésen visszakerülnek a fertőzhetők közé. Tehát marad a *susceptible* és az *infected* csoport, illetve a két mérték, a gyógyulás és fertőzés mértéke, mindezek mellett továbbra is az idő marad a független változónk.

A klasszisokat szintén úgy fogjuk kezelni, hogy a populáció tömegét fogják közölni, azaz

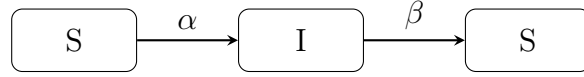
- $S(t)$ fertőzhetők tömege a t . időpillanatban,
- $I(t)$ fertőzöttek tömege a t . időpillanatban,

és jelölje ismét α a fertőzés, β a gyógyulás mértékét.

3.3.1. Modell felépítése

A modellt a 3.i ábra szemlélteti. Az észrevételek és feltételek ugyan azok, mint SIR esetében:

- (i) Mindenki egyenlő módon interaktál a másikkal és egységnyi idő alatt a populáció egy fertőzött tagja αN másik taggal érintkezik.
- (ii) Az I osztályt időegységként βI egyed hagyja el.
- (iii) Nem veszünk figyelembe születést és természetes halálozást.



3.i. ábra. SIS model folyamábrája

Az SIR modellnél (3.1) elmondottak alapján építjük fel a differenciálegyenlet rendszert, azzal a módosítással, hogy az R osztály hiányában azon βI egyedek, akik eddig R-be mentek, most visszakerülnek S-be, innen jön az SIS elnevezés is, melyet a későbbiekben is használni fogok:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha S(t)I(t) + \beta I(t) \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \end{cases} \quad \forall t > t_0 \quad (3.11)$$

ahol t_0 pillanatban $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ kezdeti értékek adottak, továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$. Ahogy a korábbiakban, így itt is $S_0 + I_0 = N$, de szintén megmutatható, hogy időben állandó marad a populáció mérete, mert

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) = -\alpha S(t)I(t) + \beta I(t) + \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = 0$$

amiből kapjuk, hogy

$$S(t) + I(t) = \text{konstans} = N, \quad (3.12)$$

minden $t \geq t_0$ időpillanatban.

3.3.2. Egyensúlyi helyzetek és ezek stabilitásai

Legyen $\dot{y}(t) = f(y(t)) = \begin{bmatrix} \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \end{bmatrix}$, ahol $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, mindemelett $y^* = (S^*, I^*) \in \mathbb{R}^2$ az egyensúlyi helyzet.

Nézzük $\dot{y}(t) = 0$ -t:

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) = \begin{bmatrix} \dot{S}(t) \\ \dot{I}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha S(t)I(t) + \beta I(t) \\ \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

ami alapján az alábbi egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{cases} -\alpha S(t)I(t) + \beta I(t) = 0 \\ \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

melybe behelyettesítve az y^* egyensúlyi helyzetet

$$\begin{cases} -\alpha S^* I^* + \beta I^* = 0 \\ \alpha S^* I^* - \beta I^* = 0 \Rightarrow I^*(\alpha S^* - \beta) = 0 \end{cases}$$

amiből jön, hogy $I^* = 0$ vagy $S^* = \frac{\beta}{\alpha}$, amik kielégítik a (3.13)-as egyenletrendszert. Az egyensúlyi pontok tehát ezen rendszer megoldásai $y_1^* = (S^*, 0)$ és $y_2^* = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$.

A helyzetek stabilitásához írjuk fel (3.1) Jacobi-mátrixát (2.1.11)

$$\dot{f}(S(t), I(t)) = \begin{bmatrix} -\alpha I(t) & -\alpha S(t) + \beta \\ \alpha I(t) & \alpha S(t) - \beta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

y_1^* eset:

$$\dot{f}(S^*, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha S^* + \beta \\ 0 & \alpha S^* - \beta \end{bmatrix} =: C_1 \quad (3.15)$$

ennek sajátértékei a karakterisztikus polinomjával (2.2.5, 2.2.6)

$$\det(C_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha S^* + \beta \\ 0 & \alpha S^* - \beta - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\alpha S^* - \beta - \lambda) = 0$$

melyből kapjuk, hogy $\lambda_1^{C_1} = 0$ és $\lambda_2^{C_1} = \alpha S^* - \beta$.

y_2^* eset:

$$\dot{f}\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \begin{bmatrix} -\alpha \left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) & -\alpha \frac{\beta}{\alpha} + \beta \\ \alpha \left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) & \alpha \frac{\beta}{\alpha} - \beta \end{bmatrix} =: C_2 \quad (3.16)$$

ennek sajátértékei a karakterisztikus polinomjával (2.2.5, 2.2.6)

$$\det(C_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\alpha N + \beta - \lambda & 0 \\ \alpha N - \beta & -\lambda \end{vmatrix} = (-\alpha N + \beta - \lambda)(-\lambda) = 0$$

melyből kapjuk, hogy $\lambda_1^{C_2} = 0$ és $\lambda_2^{C_2} = -\alpha N + \beta$.

Mindkét egyensúlyi helyzet esetében, ha a paramétereket úgy adom meg, akkor elérhető, hogy instabil helyezetet kapjak, azaz $Re(\lambda_2^{C_i}) > 0$ legyen ($i = 1, 2$). Minden más esetben a 2.1.12 tétel és megjegyzése értelmében nem megállapítható.

3.3.3. Numerikus megoldás

Utoljára ezen differenciálegyenlet rendszerünket is megnézzük a negyedrendű Runge–Kutta-módszer segítségével. Szinte teljesen ugyan az lesz a menet, mint a korábbiakban, azaz (3.11)-es rendszer alapján felírjuk a numerikus alakot (2.3), ahol $y(t_0) = (S_0, I_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ kezdeti érték adott:

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n \\ I_n \end{bmatrix} + \frac{\tau}{6} \left(\begin{bmatrix} k_1^S \\ k_1^I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_2^S \\ k_2^I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_3^S \\ k_3^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_4^S \\ k_4^I \end{bmatrix} \right),$$

ahol k_j^S, k_j^I ($j = 1, 2$) az alábbiak:

$$k_1^S = f_S(t_n, S_n, I_n) = -\alpha S_n I_n + \beta I_n$$

$$k_1^I = f_I(t_n, S_n, I_n) = \alpha S_n I_n - \beta I_n$$

$$k_2^S = f_S\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}\right)$$

$$k_2^I = f_I\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_1^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_1^I \tau}{2}\right)$$

$$k_3^S = f_S\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}\right)$$

$$k_3^I = f_I\left(t_n + \frac{\tau}{2}, S_n + \frac{k_2^S \tau}{2}, I_n + \frac{k_2^I \tau}{2}\right)$$

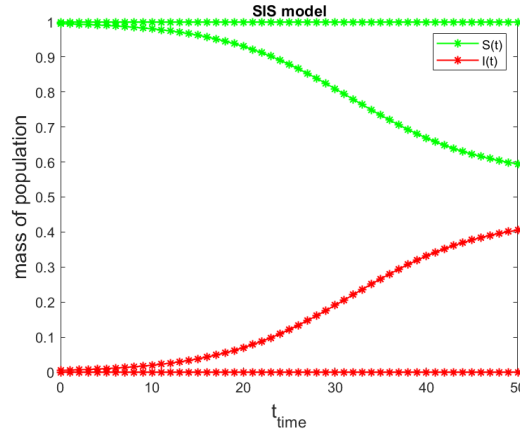
$$k_4^S = f_S(t_n + \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau)$$

$$k_4^I = f_I(t_n + \tau, S_n + k_3^S \tau, I_n + k_3^I \tau)$$

A SIS modellünk valójában egy normalizált változat, mint ahogy a többi modellünk is az volt, azaz $S(t) + I(t) = N = 1$ minden t -re, így valós adatok helyett a populáció eredeti méretével leosztott kezdő értékeket fogunk megadni. Ez a rendszer sem lineáris, így itt is csak lokálisan beszélhetünk az egyensúlyi helyzetekről. A két egyensúlyi helyzet miatt, a korábbiakhoz eltérően ezeket külön-külön nézem a $\lambda_2^{C_i}$ variánsaira.

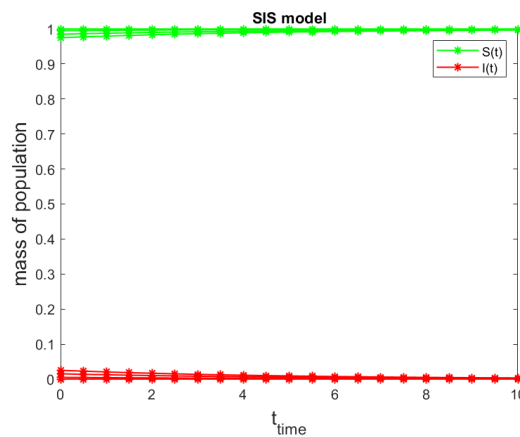
$y_1^* = (S^*, 0)$ esete:

A korábban megjegyzett $S(t) + I(t) = 1$ miatt, csak $S^* = 1$ lehet, tehát (3.15) C_1 mátrix második sajátértéke $\lambda_2^{C_1} = \alpha - \beta$ lesz. Előjele a már többször is taglalt $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ reprodukciós rátától fog függeni, ugyanis, ha $\lambda_2^{C_1} > 0$, akkor $\alpha > \beta$, de $\rho > 1$ -ből is következik, hogy $\alpha > \beta$, ez esetben instabil helyzetről van szó, hiába $I^* = 0$, kis ε választással az $(1 - \varepsilon, \varepsilon)$ már eltart a kiindulási ponttól (3.j ábra).



3.j. ábra. SIS: $t \in [0, 50]$, $y(t_0) = (1 - \varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha = 0.32$, $\beta = 0.18$, $\tau = 1$,
 $\varepsilon \in \{0, 0.005\}$

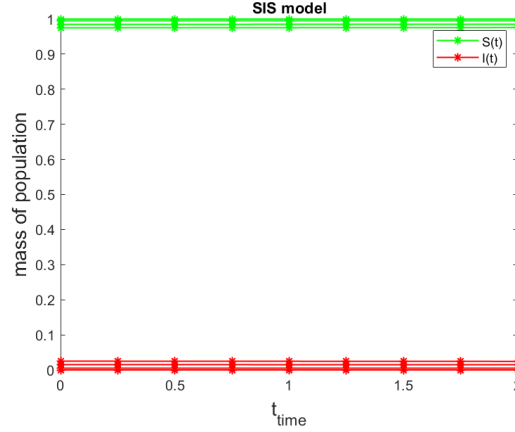
Ellenkező esetben, ha $\rho < 1$, akkor $\alpha < \beta$, amiből jön, hogy $\lambda_2^{C_1} < 0$, amiről nem tudunk semmit (2.1.12 tétel és megjegyzése). Az y_1^* pont perturbálásával képet kapunk a helyzet viselkedéséről, ahol minden esetben az $S(t)$ és $I(t)$ görbe az $(1, 0)$ ponthoz fog tartani (3.k ábra).



3.k. ábra. SIS: $t \in [0, 10]$, $y(t_0) = (1 - \varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.5$, $\tau = 0.5$,
 $\varepsilon \in \{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$

Ha pedig $\rho = 1$, akkor $\alpha = \beta$, így $\lambda_2^{C_1} = 0$, erről megint nem tudunk mit megállapítani (2.1.12 tétel és megjegyzése). Meggondolható, hogy ha $\alpha = \beta$, akkor mindegy honnan

indítom a rendszert, amennyi kerül az I osztályba, annyi kerül S-be is, így olyan állandó görbéket kapva, melyek minden időpillanatban ugyan azt az értéket adják vissza, ez a kísérlet során is látszódott (3.1 ábra).

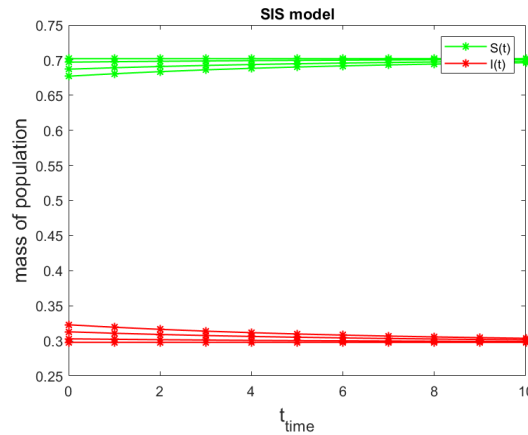


3.1. ábra. SIS: $t \in [0, 2]$, $y(t_0) = (1 - \varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\tau = 0.25$,
 $\varepsilon \in \{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$

$y_2^* = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ esete:

Ennél az esetnél is valójában $y_2^* = \left(\frac{\beta}{\alpha}, 1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$, az $S(t) + I(t) = 1$ miatt, emellett a (3.16) C_2 mátrix második sajátértéke $\lambda_2^{C_2} = -\alpha + \beta$ lesz. Előjele ennek is a ρ -tól fog függeni, ugyanis, ha $\lambda_2^{C_2} > 0$, akkor $\beta > \alpha$ lesz, ami $\rho < 1$ -ből is következik, de ekkor $1 - \frac{\beta}{\alpha} < 0$ lesz, aminek a feladat szempontjából nincs értelme.

A $\rho > 1$ esetnél viszont $\beta < \alpha$, tehát $\lambda_2^{C_2} < 0$, amely esetben a stabilitás nem ismert (2.1.12 tétel és megjegyzése). A y_2^* pont perturbálásával azt figyelhetjük meg, hogy a kísérlet során $S(t)$ és $I(t)$ görbe is közel marad a kiindulási ponthoz, azaz stabilnak látszik.



3.m. ábra. SIS: $t \in [0, 10]$, $y(t_0) = (0.7021 - \varepsilon, 1 - 0.7021 + \varepsilon)$, $\alpha = 0.47$, $\beta = 0.33$, $\tau = 1$
 $\varepsilon \in \{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$

Ha pedig $\rho = 1$, akkor $\alpha = \beta$, de ezesetben $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, azaz $y_2^* = (1, 1 - 1) = (1, 0)$ lesz, ami ugyan az, mint y_1^* egyensúlyi helyzet $\lambda_2^{C_1} = 0$ esete, ahol a kísérlet során azt tapasztalhattuk, hogy a görbék semmilyen módon nem tartanak el a kiindulási ponttól, mindegy milyen ε -nal billentem ki az $(1, 0)$ pontot.

4. fejezet

Zárszó

A szakdolgozatom megírása közben a modellezés és modellek egy olyan világába tudtam elmélyedni, amely mindig képes megújulni, ezek mellett aktualitása sosem vesz el.

Az alap SIR modell mellett további kettő variánsát, MSIR és SIS, mutattam be, de ezeknél sokkal bonyolultabb is lehet a helyzet. Minden modell bővíthető és alakítható egy tetszőleges szituáció lekövetésére. Az általam bemutatottak a legalapabbak voltak, tehát az idő múlásával nem kerültek be vagy ki természetes születés vagy halálozás által az egyedek, illetve a különböző mértékek is állandóak voltak, nem pedig időben változóak.

Bővíthetőségét tekintve hozzáadhatunk az eddigiekhez a már taglalt születés-halálozási tényezőkön kívül, új klasszisokat, mint például SEIR esetében, ahol az E azon egyedek osztálya lesz, akikben még lappang a kór, vagy az SIRV és SIRD, ahol a SIRV esetében az S osztályból nem csak a fertőzöttek I osztályába kerülhet az egyed, hanem az oltottak V osztályába, még az SIRD esetében az I-ből nem csak R-be de a halottak D osztályába is van mozgás. Ezeken kívül minden kombinálható mindennel, azaz az MSIR és SEIR modellből megalkothatjuk az MSEIR modellt, vagy az immunitást elhagyva, illetve azt feltételezve, hogy nem állandó, az eddigiekből új változat alkotható, ilyen például SEIS vagy MSEIRS, ahol utóbbi esetben a rezisztencia nem végleges.

Átalakítást nézve, az eddigiek mind azt feltételezték, hogy mindenki mindenkivel ugyan úgy interaktál illetve, hogy a mértékek mind állandóak, de módosítható a dolog aképpen, ha az egyedek ismeretségi gráfjára ereszttem rá a modellt, ahol nem mindenki interaktál a másikkal egyformán. Előfordulhat olyan helyzet is, ahol a kór során különböző karanténokat alkothatunk, melyen megint másként hatnának az eddigiek, például karantén övezeten belül terjedhet másképp a fertőzés vagy fordítva.

Összegezve tehát az eddigieket, az alap modell és két variánsán kívül messzemenőleg nem sikerült eleget bemutatnom ebből a témakörből, mert a mindennapok változó világa mindig más és más helyzetbe hozhatja társadalmunk ismert járványainak útját.

Irodalomjegyzék

- [1] Járvány fogalma. <https://www.webmd.com/cold-and-flu/what-are-epidemics-pandemics-outbreaks>. Medically Reviewed by Jennifer Robinson, MD on April 02, 2020.
- [2] Fred Brauer. Compartmental models in epidemiology. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7122373/pdf/978-3-540-78911-6_Chapter_2.pdf. Második fejezet.
- [3] Lucinda Hampton. Bacterial infections. https://www.physio-pedia.com/Bacterial_Infections.
- [4] Lucinda Hampton. Viral infections. https://www.physio-pedia.com/Viral_Infections.
- [5] Valencia Higuera. How are diseases transmitted? <https://www.healthline.com/health/disease-transmission>.
- [6] Ashis Menon, Nithin K Rajendran, Anish Chandrachud, and Girish Setlur. Modelling and simulation of covid-19 propagation in a large population with specific reference to india. <https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.04.30.20086306v1.full.pdf>, 2020.04.30.
- [7] Csomós Petra. *Alkalmazott Analízis 2 előadás jegyzet*. 2021/22 1. félév.
- [8] Tóth János & Simon L. Péter. *Differenciálegyenletek*. TYPOT_EX, 2004.
- [9] Freud Róbert. *Lineáris Algebra*. ELTE Eötvös Kiadó, 2006. Ötödik, változatlan utánnomás.
- [10] Pfeil Tamás. *Differenciálegyenletek előadás jegyzet*. 2020/21 2.félév.
- [11] Valkó Éva. *Folytonos modellezés Jegyzet*. 2021.

Ábrák jegyzéke

2.a.	Butcher tabló általános alakja	9
2.b.	RK4 Butcher tablója	9
3.a.	SIR model folyamábrája	11
3.b.	SIR: $t \in [0, 50]$, $y(t_0) = (0.823, 0.177, 0)$, $\tau = 1$	14
3.c.	SIR: $t \in [0, 4]$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $\tau = 0.25$, $\varepsilon \in \{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$	15
3.d.	SIR: $t \in [0, 100]$, $y(t_0) = (0.578 - \varepsilon, \varepsilon, 1 - 0.578)$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.289$, $\tau = 2$	16
3.e.	MSIR model folyamábrája	17
3.f.	MSIR: $t \in [0, 100]$, $y(t_0) = (0.289, 0.7, 0.01, 0.001)$, $\gamma = 0.15$, $\tau = 2$	21
3.g.	MSIR: $t \in [0, 3]$, $y(t_0) = (0, 0.7, \varepsilon, 0.3 - \varepsilon)$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.54$, $\gamma = 0.01$, $\tau = \frac{1}{3}$, $\varepsilon \in \{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$	21
3.h.	MSIR: $t \in [0, 100]$, $y(t_0) = (0, 0.625 - \varepsilon, \varepsilon, 1 - 0.625)$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.25$, $\tau = 2$	22
3.i.	SIS model folyamábrája	24
3.j.	SIS: $t \in [0, 50]$, $y(t_0) = (1 - \varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha = 0.32$, $\beta = 0.18$, $\tau = 1$, $\varepsilon \in \{0, 0.005\}$	27
3.k.	SIS: $t \in [0, 10]$, $y(t_0) = (1 - \varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.5$, $\tau = 0.5$, $\varepsilon \in$ $\{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$	27
3.l.	SIS: $t \in [0, 2]$, $y(t_0) = (1 - \varepsilon, \varepsilon)$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\tau = 0.25$, $\varepsilon \in$ $\{0, 0.005, 0.015, 0.025\}$	28
3.m.	SIS: $t \in [0, 10]$, $y(t_0) = (0.7021 - \varepsilon, 1 - 0.7021 + \varepsilon)$, $\alpha = 0.47$, $\beta = 0.33$, $\tau = 1$	28

Matlab kódok

A következőkben az általam írt MATLAB kódok szerepelnek, melyek a görbék vizualizációját segítették elő.

sir_rk4.m

```
1 function [Y] = sir_rk4(s0, i0, r0, alpha, beta, a, b, M)
2     h = (b-a)/M;
3     T = a:h:b;
4
5     dS = @(t,s,i,r) -alpha*s*i;
6     dI = @(t,s,i,r) alpha*s*i - beta*i;
7     dR = @(t,s,i,r) beta*i;
8
9     SIR = zeros(3, M+1);
10    SIR(1,1) = s0;
11    SIR(2,1) = i0;
12    SIR(3,1) = r0;
13
14    for j = 1:M
15        kS1 = dS(T(j), SIR(1,j), SIR(2,j), SIR(3,j));
16        kI1 = dI(T(j), SIR(1,j), SIR(2,j), SIR(3,j));
17        kR1 = dR(T(j), SIR(1,j), SIR(2,j), SIR(3,j));
18
19        kS2 = dS(T(j)+0.5*h, SIR(1,j)+kS1*0.5*h, SIR(2,j)+kI1*0.5*h, SIR(3,
20            j)+kR1*0.5*h);
21        kI2 = dI(T(j)+0.5*h, SIR(1,j)+kS1*0.5*h, SIR(2,j)+kI1*0.5*h, SIR(3,
22            j)+kR1*0.5*h);
23        kR2 = dR(T(j)+0.5*h, SIR(1,j)+kS1*0.5*h, SIR(2,j)+kI1*0.5*h, SIR(3,
24            j)+kR1*0.5*h);
25
26        kS3 = dS(T(j)+0.5*h, SIR(1,j)+kS2*0.5*h, SIR(2,j)+kI2*0.5*h, SIR(3,
27            j)+kR2*0.5*h);
28        kI3 = dI(T(j)+0.5*h, SIR(1,j)+kS2*0.5*h, SIR(2,j)+kI2*0.5*h, SIR(3,
29            j)+kR2*0.5*h);
30        kR3 = dR(T(j)+0.5*h, SIR(1,j)+kS2*0.5*h, SIR(2,j)+kI2*0.5*h, SIR(3,
31            j)+kR2*0.5*h);
32
33        SIR(1,j+1) = SIR(1,j) + h*(kS1 + kS2 + kS3);
34        SIR(2,j+1) = SIR(2,j) + h*(kI1 + kI2 + kI3);
35        SIR(3,j+1) = SIR(3,j) + h*(kR1 + kR2 + kR3);
36    end
37    Y = SIR;
```

```

25     kR3 = dR(T(j)+0.5*h, SIR(1,j)+kS2*0.5*h, SIR(2,j)+kI2*0.5*h, SIR(3,
        j)+kR2*0.5*h);
26
27     kS4 = dS(T(j)+h, SIR(1,j)+kS3*h, SIR(2,j)+kI3*h, SIR(3,j)+kR3*h);
28     kI4 = dI(T(j)+h, SIR(1,j)+kS3*h, SIR(2,j)+kI3*h, SIR(3,j)+kR3*h);
29     kR4 = dR(T(j)+h, SIR(1,j)+kS3*h, SIR(2,j)+kI3*h, SIR(3,j)+kR3*h);
30
31     SIR(1,j+1) = SIR(1,j) + (1/6)*(kS1+2*kS2+2*kS3+kS4)*h;
32     SIR(2,j+1) = SIR(2,j) + (1/6)*(kI1+2*kI2+2*kI3+kI4)*h;
33     SIR(3,j+1) = SIR(3,j) + (1/6)*(kR1+2*kR2+2*kR3+kR4)*h;
34 end
35
36 plot(T,SIR(1,:), 'g-*', 'LineWidth', 1)
37 hold on
38 plot(T,SIR(2,:), 'r-*', 'LineWidth', 1)
39 hold on
40 plot(T,SIR(3,:), 'b-*', 'LineWidth', 1)
41
42 legend('S(t)', 'I(t)', 'R(t)')
43 title('SIR model')
44 xlabel('t_{time}', 'FontSize',14)
45 ylabel('mass of population', 'FontSize',14)
46 end

```

msir_rk4.m

```
1 function [Y] = msir_rk4(m0, s0, i0, r0, alpha, beta, gamma, a, b, M)
2     h = (b-a)/M;
3     T = a:h:b;
4
5     dM = @(t,m,s,i,r) -gamma*m;
6     dS = @(t,m,s,i,r) -alpha*s*i + gamma*m;
7     dI = @(t,m,s,i,r) alpha*s*i - beta*i;
8     dR = @(t,m,s,i,r) beta*i;
9
10    MSIR = zeros(4, M+1);
11    MSIR(1,1) = m0;
12    MSIR(2,1) = s0;
13    MSIR(3,1) = i0;
14    MSIR(4,1) = r0;
15
16    for j = 1:M
17        kM1 = dM(T(j), MSIR(1,j), MSIR(2,j), MSIR(3,j), MSIR(4,j));
18        kS1 = dS(T(j), MSIR(1,j), MSIR(2,j), MSIR(3,j), MSIR(4,j));
19        kI1 = dI(T(j), MSIR(1,j), MSIR(2,j), MSIR(3,j), MSIR(4,j));
20        kR1 = dR(T(j), MSIR(1,j), MSIR(2,j), MSIR(3,j), MSIR(4,j));
21
22        kM2 = dM(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM1*0.5*h, MSIR(2,j)+kS1*0.5*h, MSIR
23            (3,j)+kI1*0.5*h, MSIR(4,j)+kR1*0.5*h);
24        kS2 = dS(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM1*0.5*h, MSIR(2,j)+kS1*0.5*h, MSIR
25            (3,j)+kI1*0.5*h, MSIR(4,j)+kR1*0.5*h);
26        kI2 = dI(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM1*0.5*h, MSIR(2,j)+kS1*0.5*h, MSIR
27            (3,j)+kI1*0.5*h, MSIR(4,j)+kR1*0.5*h);
28        kR2 = dR(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM1*0.5*h, MSIR(2,j)+kS1*0.5*h, MSIR
29            (3,j)+kI1*0.5*h, MSIR(4,j)+kR1*0.5*h);
30
31        kM3 = dM(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM2*0.5*h, MSIR(2,j)+kS2*0.5*h, MSIR
32            (3,j)+kI2*0.5*h, MSIR(4,j)+kR2*0.5*h);
33        kS3 = dS(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM2*0.5*h, MSIR(2,j)+kS2*0.5*h, MSIR
34            (3,j)+kI2*0.5*h, MSIR(4,j)+kR2*0.5*h);
35        kI3 = dI(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM2*0.5*h, MSIR(2,j)+kS2*0.5*h, MSIR
36            (3,j)+kI2*0.5*h, MSIR(4,j)+kR2*0.5*h);
37        kR3 = dR(T(j)+0.5*h, MSIR(1,j)+kM2*0.5*h, MSIR(2,j)+kS2*0.5*h, MSIR
38            (3,j)+kI2*0.5*h, MSIR(4,j)+kR2*0.5*h);
39
40        kM4 = dM(T(j)+h, MSIR(1,j)+kM3*h, MSIR(2,j)+kS3*h, MSIR(3,j)+kI3*h,
41            MSIR(4,j)+kR3*h);
42        kS4 = dS(T(j)+h, MSIR(1,j)+kM3*h, MSIR(2,j)+kS3*h, MSIR(3,j)+kI3*h,
43            MSIR(4,j)+kR3*h);
```

```

34     kI4 = dI(T(j)+h, MSIR(1,j)+kM3*h, MSIR(2,j)+kS3*h, MSIR(3,j)+kI3*h,
        MSIR(4,j)+kR3*h);
35     kR4 = dR(T(j)+h, MSIR(1,j)+kM3*h, MSIR(2,j)+kS3*h, MSIR(3,j)+kI3*h,
        MSIR(4,j)+kR3*h);
36
37     MSIR(1,j+1) = MSIR(1,j) + (1/6)*(kM1+2*kM2+2*kM3+kM4)*h;
38     MSIR(2,j+1) = MSIR(2,j) + (1/6)*(kS1+2*kS2+2*kS3+kS4)*h;
39     MSIR(3,j+1) = MSIR(3,j) + (1/6)*(kI1+2*kI2+2*kI3+kI4)*h;
40     MSIR(4,j+1) = MSIR(4,j) + (1/6)*(kR1+2*kR2+2*kR3+kR4)*h;
41     end
42
43     plot(T, MSIR(1,:), 'k-*', 'LineWidth', 1)
44     hold on
45     plot(T, MSIR(2,:), 'g-*', 'LineWidth', 1)
46     hold on
47     plot(T, MSIR(3,:), 'r-*', 'LineWidth', 1)
48     hold on
49     plot(T, MSIR(4,:), 'b-*', 'LineWidth', 1)
50
51     legend('M(t)', 'S(t)', 'I(t)', 'R(t)')
52     title('MSIR model')
53     xlabel('t_{time}', 'FontSize',14)
54     ylabel('mass of population', 'FontSize',14)
55     end

```


sis_rk4.m

```
1 function [Y] = sis_rk4(s0, i0, alpha, beta, a, b, M)
2     h = (b-a)/M;
3     T = a:h:b;
4
5     dS = @(t,s,i) -alpha*s*i + beta*i;
6     dI = @(t,s,i) alpha*s*i - beta*i;
7
8     SIS = zeros(2, M+1);
9     SIS(1,1) = s0;
10    SIS(2,1) = i0;
11
12    for j = 1:M
13        kS1 = dS(T(j), SIS(1,j), SIS(2,j));
14        kI1 = dI(T(j), SIS(1,j), SIS(2,j));
15
16        kS2 = dS(T(j)+0.5*h, SIS(1,j)+kS1*0.5*h, SIS(2,j)+kI1*0.5*h);
17        kI2 = dI(T(j)+0.5*h, SIS(1,j)+kS1*0.5*h, SIS(2,j)+kI1*0.5*h);
18
19        kS3 = dS(T(j)+0.5*h, SIS(1,j)+kS2*0.5*h, SIS(2,j)+kI2*0.5*h);
20        kI3 = dI(T(j)+0.5*h, SIS(1,j)+kS2*0.5*h, SIS(2,j)+kI2*0.5*h);
21
22        kS4 = dS(T(j)+h, SIS(1,j)+kS3*h, SIS(2,j)+kI3*h);
23        kI4 = dI(T(j)+h, SIS(1,j)+kS3*h, SIS(2,j)+kI3*h);
24
25        SIS(1,j+1) = SIS(1,j) + (1/6)*(kS1+2*kS2+2*kS3+kS4)*h;
26        SIS(2,j+1) = SIS(2,j) + (1/6)*(kI1+2*kI2+2*kI3+kI4)*h;
27    end
28
29    plot(T, SIS(1,:), 'g-*', 'LineWidth', 1)
30    hold on
31    plot(T, SIS(2,:), 'r-*', 'LineWidth', 1)
32
33    legend('S(t)', 'I(t)')
34    title('SIS model')
35    xlabel('t_{time}', 'FontSize', 14)
36    ylabel('mass of population', 'FontSize', 14)
37 end
```