NYILATKOZAT

Név: Csáfordi József András

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematikai elemző

NEPTUN azonosító: L6VL4T

Szakdolgozat címe:
Nevezetes polinomok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.31

Csáfordi József

a hallgató aláírása

Nevezetes polinomok

Szakdolgozat

Szerző: *Csáfordi József András*

Matematika BSc

Elemző matematikus szakirány

Témavezető: *Dr. Ágoston István*

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Dolgozatom fő témája a Fibonacci- és Lucas-polinomoknak, összefüggéseiknek és egymással való kapcsolataiknak a bemutatása. Egy 21. századi értelmezésüket is ismertetem, ami a Távolsági Fibonacci- és Távolsági Lucas-polinomok nevet kapta.

Ezen két polinomcsalád történelme a 13. századig nyúlik vissza a Fibonacci-számok felfedezéséig. Leonardo di Pisa egy feladatra adott megoldásként írta le először ezt a sorozatot és innentől az ő nevét is viseli, de léteznek írásos feljegyzések, hogy indiai matematikusok is foglalkoztak már vele, amikor a szanszkrit költészet elméleti kérdéseit vizsgálták.Az évszázadok alatt számos alkalmazása jött létre ezeknek a Fibonacci-számoknak. A zenében mai napig használják hangolásra őket. A Zechendorf-tétel kimondja, hogy bármely pozitív egész szám felírható különböző Fibonacci-számok összegeként, és előjönnek az euklideszi algoritmus futásidejének elemzésében. Ugyanakkor a természetben is előfordulnak, hiszen a fenyőtoboz vagy a napraforgó magjai Fibonacci-spirálba rendeződnek, vagy a méhek n-generációs őseinek a száma is egy Fibonacci-szám lesz.

A Fibonacci-számokhoz kapcsolódó aranymetszést a modern tudomány számos területén kutatják mai napig. A fekete lyukak, a káoszelmélet vagy a fehérjék AB modelljei mind olyan területek, ahol felhasználják vagy kutatják a Fibonacci-számokat. Léteznek a Fibonaccihoz hasonló sorozatok, mint például a Lucas-számok, amik a kezdeti értékek megváltoztatásával, vagy a Pell-számok, amit az alaprekurzió módosításával, vagy a Narayana-számok, amit a sorozat tagja közötti távolság megváltoztatásával írunk le. Léteznek olyan általánosítások, amik egyszerre általánosítanak több rekurzív sorozatot is. Ilyen például a k-Fibonacci-számok, amik a Pell- és Fibonacci-számokat általánosítják.

Az első fejezetben pontos definíciót adok a polinomsorozatokra a Fibonacci- és Lucaspolinomokon keresztül, és bebizonyítok néhány hozzájuk kapcsolódó tételt illetve összefüggést a két polinomcsalád között.

Dolgozatom második felében egy olyan általánosítást mutatok be, ami a Fibonacci- és Narayana-polinomokat egyidejűleg általánosítja a gráfelmélet segítségével. Ezen polinomcsaládok együtthatóinak kombinatorikus értelmezést adunk, és megnézzük a kapcsolataikat a binomiális tétellel. Továbbá levezetjük a generátorfüggvényüket és generátormátrixukat is.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak a téma kiválasztásában nyújtott segítségét és, hogy elegyengette a szakdolgozat írása során felmerülő problémákat.

2. fejezet

Polinomiális sorozatok

Polinomsorozat alatt a $0, 1, 2, 3 \ldots$ nemnegatív egész számokkal indexelt polinomok sorozatát értjük, amelyben minden index megegyezik a hozzá tartozó polinom fokával. Ebben a dolgozatban csak a Fibonacci- és Lucas-polinomok sorozatával foglalkozunk.

2.1. Fibonacci-polinomok

A Fibonacci-polinomok olyan polinomsorozatok, amelyek a Fibonacci-számok általánosításának tekinthetőek.

1. Definíció. *A Fibonacci-polinomokat a következő rekurzióval definiáljuk: legyen $F_0(x) = 0$ és $F_1(x) = 1$, legyen továbbá minden $n \geq 2$-re:*

$$F_n(x) = x \cdot F_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \tag{2.1}$$

Az első néhány Fibonacci-polinom:

$$F_0(x) = 0$$
$$F_1(x) = 1$$
$$F_2(x) = x$$
$$F_3(x) = x^2 + 1$$
$$F_4(x) = x^3 + 2x$$
$$F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 3x$$

A Fibonacci-polinomokat továbbá negatív indexre is definiálhatjuk, úgymint:

$$F_{-n}(x) = (-1)^{n-1} F_n(x)$$

1. Tétel. *Ha f_n az n-edik Fibonacci-szám, akkor:*

$$F_n(1) = f_n \tag{2.2}$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el n-re.

n=1-re: $F_1(1) = 1 = f_1$.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $1, \ldots, n-1$-re. Ekkor:

$$F_{n-1}(1) = f_{n-1}, \quad F_{n-2}(1) = f_{n-2}$$

A Fibonacci-polinom rekurzióját(1) felhasználva:

$$F_n(1) = 1 \cdot F_{n-1}(1) + F_{n-2}(1) = 1f_{n-1} + f_{n-2} = f_n.$$

□

2. Tétel. *A Fibonacci-polinomok zárt alakja*

$$F_n(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}, \tag{2.3}$$

ahol

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik. A bizonyítás részleteiért (lásd: [3])

3. Tétel. *Minden $n \geq 2$-re teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$F_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} \tag{2.4}$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el n-re, és felhasználjuk a 1-es definíciót és átírjuk a binomiális tétel segítségével egy másik formába (lásd: [6]).

$n = 1$-re:

$$F_1(x) = \binom{1-0}{0} x^{1-2\cdot 0} = x.$$

Tegyük fel, hogy az állításunk teljesül n-re. Ekkor $n+1$-re:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= xF_n(x) + F_{n-1}(x) \\
&= x\left(\binom{n}{0}x^n + \binom{n-1}{1}x^{n-2} + \dots + \binom{n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}x^{n-2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\right) \\
&+ \binom{n-1}{0}x^{n-1} + \binom{n-2}{1}x^{n-3} + \dots + \binom{n-1-\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}x^{n-1-2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \\
&= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n}{1}x^{n-1} + \dots + \binom{n+1-\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}x^{n+1-2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}.
\end{aligned}$$

□

2.2. Lucas-polinomok

A Lucas-polinomok (hasonlóan a Fibonacci-polinomokhoz), olyan polinomsorozatok, amelyek a Lucas-számok általánosításának tekinthetőek. A rekurzió mindkét polinomcsalád esetében ugyanaz, csak a kezdő polinomokban térnek el egymástól.

2. Definíció. *Legyen $L_0(x) = 2$ és $L_1(x) = x$, legyen továbbá minden $n \geq 2$-re. A Lucas-polinomokat a következő rekurzióval definiáljuk:*

$$L_{n+2}(x) = x \cdot L_{n+1}(x) + L_n(x) \tag{2.5}$$

Az első néhány Lucas-polinom:

$$L_0(x) = 2$$
$$L_1(x) = x$$
$$L_2(x) = x^2 + 2$$
$$L_3(x) = x^3 + 3x$$
$$L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$$
$$L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x$$

A Lucas-polinomok is definiálhatók negatív indexekre:

$$L_{-n}(x) = (-1)^n L_n(x)$$

4. Tétel. *Ha l_n az n-edik Lucas-szám, akkor:*

$$L_n(1) = l_n \tag{2.6}$$

Bizonyítás. A bizonyítást hasonlóan végezzük el, mint az 1. tételben, teljes indukcióval n-re.

$n = 1$-re: $L_1(1) = x = l_1$

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden $1, \cdots, n-1$-re. Ekkor: $L_{n-1}(1) = l_{n-1}$ és $L_{n-2}(1) = l_{n-2}$. Így:

$$L_n(1) = 1 \cdot L_{n-1}(1) + L_{n-2}(1) = 1 \cdot l_{n-1} + l_{n-2} = l_n.$$

□

5. Tétel. *A Lucas-polinomok zárt alakja*

$$L_n(x) = \alpha(x)^n + \beta(x)^n, \tag{2.7}$$

ahol

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

Bizonyítás. A bizonyítás itt is teljes indukcióval elvégezhető. A bizonyítás levezetéséért lásd: [3].

6. Tétel. *Minden pozitív n egészre fennállnak a következő összefüggések:*

$$\int_0^x L_{2n}(y)\,dy = \frac{L_{2n+1}(x)}{2n+1} + \frac{L_{2n-1}(x)}{2n-1} \tag{2.8}$$

és

$$\int_0^x L_{2n+1}(y)\,dy = \frac{L_{2n+2}(x)}{2n+2} + \frac{L_{2n}(x)}{2n} - \frac{2n+1}{n(n+1)}. \tag{2.9}$$

Bizonyítás. A bizonyításokat együtt végezzük el, hiszen az első bizonyításból fog következni a második.

$$(x + \sqrt{x^2+4})' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$$

és

$$(x - \sqrt{x^2+4})' = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = -\frac{x - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}.$$

A Lucas- és Fibonacci-polinomok rekurzióját(1, 2) és zárt alakját (2, 5) felhasználva:

$$L'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n - \frac{n}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n = n \cdot F_{n-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x L_n(x)\,dy &= xL_n(x) - \int_0^x xL'_n(y)\,dy \\
&= xL_n(x) - n\int_0^x yF_{n-1}(y)\,dy \\
&= L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x) - n\int_0^x (F_n(y) - F_{n-2}(y))\,dy \\
&= L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x) - \frac{n}{n+1}(L_{n+1}(x) - L_{n+1}(0)) + \frac{n}{n-1}(L_{n-1}(x) - L_{n-1}(0)) \\
&= \frac{L_{n+1}(x)}{n+1} + \frac{L_{n-1}(x)}{n-1} + \frac{nL_{n+1}(0)}{n+1} + \frac{nL_{n-1}(0)}{n-1}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ha $n = 2k$, akkor a rekurzióból(2) könnyen látjuk, hogy $L_{2k+1}(0) = L_{2k-1}(0) = 0$. Így

$$\int_0^x L_{2k}(y)\,dy = \frac{L_{2k+1}(x)}{2k+1} + \frac{L_{2k-1}(x)}{2k-1}.$$

Ha $n = 2k+1$, akkor ismét a rekurzióból(2) adódik, hogy $L_{2k+2}(0) = L_{2k}(0) = 2$. Így

$$\int_0^x L_{2k+1}(y)\,dy = \frac{L_{2k+2}(x)}{2k+1} + \frac{L_{2k}(x)}{2k} - \frac{2k+1}{k(k+1)}.$$

7. Tétel. *Minden n pozitív és k nemnegatív egészre teljesül, hogy :*

$$L_n(L_{2k+1}(x)) = L_{n(2k+1)}(x). \tag{2.11}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ és $\beta = \dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$. A Lucas-polinom zárt alakjában(5) $L_{2k+1}(x)$-re cseréljük le x-et és jegyezzük meg, hogy $\alpha^{2k+1}\beta^{2k+1} = -1$, ekkor

$$\begin{aligned}
L_{2k+1}(x) + \sqrt{L^2_{2k+1}(x)+4} &= \alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1} + \sqrt{(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})^2+4} \\
&= \alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1} + \sqrt{\alpha^{4k+2}+\beta^{4k+2}-2+4} \\
&= \alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1} + \sqrt{(\alpha^{2k+1}-\beta^{2k+1})^2} = 2\alpha^{2k+1}
\end{aligned}$$

és

$$L_{2k+1}(x) - \sqrt{L^2_{2k+1}(x)+4} = \alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1} - \sqrt{(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})^2+4}$$
$$= \alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1} - \sqrt{(\alpha^{2k+1}-\beta^{2k+1})^2} = 2\beta^{2k+1}.$$

Az 2.7-s egyenletből megkapjuk, hogy:

$$L_n(L_{2k+1}(x) = \left(\frac{L_{2k+1} + \sqrt{L^2_{2k+1}+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{L_{2k+1} - \sqrt{L^2_{2k+1}+4}}{2}\right)^n$$
$$= \alpha^{n(2k+1)} + \beta^{n(2k+1)} = L_{n(2k+1)}(x).$$

8. Tétel. *Minden nem negatív n-re teljesül, hogy:*

$$x^{2n} = \frac{(-1)^n}{2}\binom{2n}{n}L_0(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n}{n-k}L_{2k}(x), \tag{2.12}$$

és

$$x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{n-k}L_{2k+1}(x) \tag{2.13}$$

Bizonyítás. A bizonyítás részletes lépéseiért lásd: [4].

2.3. Kapcsolat a két polinomcsalád között

9. Tétel. *Minden $n \geq 1$-re teljesül a következő egyenlőség:*

$$F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) = L_{2n}(x). \tag{2.14}$$

Bizonyítás. A bizonyítást végezzük teljes indukcióval n-re.

$n = 1$-re:

$$F_3(x) + F_1(x) = x^2 + 1 + 1 = X^2 + 2 = L_{2n}(x)$$

Tegyük fel, hogy $F_{2n}(x) + F_{2n-2}(x) = L_{2n-1}(x)$ teljesül.

A Fibonacci-polinom definícióját felhasználva elvégezzük a következő felbontást:

$$F_{2n+1}(x) = x \cdot F_{2n}(x) + F_{2n-1}(x) \quad \text{és} \quad F_{2n-1}(x) = x \cdot F_{2n-2}(x) + F_{2n-3}(x).$$

Ezekből a felbontásokból a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}F_{2n+1}(x) &= x \cdot F_{2n}(x) + F_{2n-1}(x) + x \cdot F_{2n-2}(x) + F_{2n-3} \\ &= x \cdot (F_{2n}(x) + F_{2n-2}(x)) + F_{2n-1}(x) + F_{2n-3}(x).\end{aligned}$$

A feltevésünk szerint a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$F_{2n}(x) + F_{2n-2}(x) = L_{2n-1} \quad \text{és} \quad F_{2n-1} + F_{2n-3}(x) = L_{2n-2}(x).$$

Ezt behelyettesítve az egyenletbe:

$$x \cdot L_{2n-1}(x) + L_{2n-2}(x) = L_{2n}(x).$$

□

10. Tétel. *Minden $n \geq 1$-re teljesül a következő egyenlőség:*

$$F_{2n+2}(x) + F_{2n}(x) = L_{2n+1}(x). \tag{2.15}$$

Bizonyítás. A bizonyítást hasonlóan végezzük el, mint a 2.14-es tételnél, teljes indukcióval n-re.

$n = 1$-re:

$F_4(x) + F_2(x) = x^3 + 2x + x = x^3 + 3x = L_3(x)$.

Tegyük fel, hogy $F_{2n-1}(x) + F_{2n+1} = L_{2n}$ teljesül.

$F_{2n+2}(x) = x \cdot F_{2n+1}(x) + F_{2n}(x)$ és $F_{2n} = x \cdot F_{2n-1}(x) + F_{2n-2}(x)$

Ezekből az egyenlőségekből:

$F_{2n+2}(x) + F_{2n}(x) = x \cdot F_{2n+1}(x) + F_{2n}(x) + x \cdot F_{2n-1}(x) + F_{2n-2}(x) = x \cdot (F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x)) + F_{2n}(x) + F_{2n-2}(x) = x \cdot L_{2n}(x) + L_{2n-1}(x) = L_{2n+1}(x)$. □

2.4. Polinomok gyökei

A polinomok gyökeinek megtalálására $n \geq 5$-nél már nem létezik egy általános képlet ami segítene, és n növekedésével egyre nehezebb is a gyököket megtalálni. Néhány polinomcsalád esetében viszont, köztük a Fibonacci-polinomok esetében is, a gyökök meghatározhatók a hiperbolikus trigonometrikus függvények segítségével.

3. Definíció.

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{2.16}$$

4. Definíció.

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1; \quad \cosh(iy) = \cos(y); \quad \sinh(iy) = i\sin(y) \tag{2.17}$$

11. Tétel.

$$F_n(x) = \frac{e^{zn} - (-1)^n e^{-nz}}{e^z + e^{-z}} \tag{2.18}$$

és

$$L_n(x) = e^{nz} + (-1)^n e^{-nz} \tag{2.19}$$

Bizonyítás. A 2.3 és 2.7 egyenletben szereplő x-et helyettesítsük $2\sinh(z)$-vel. Így $\sqrt{x^2+4} = 2\cosh(z)$. Ekkor:

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{e^{zn} - (-1)^n e^{-nz}}{e^z + e^{-z}}$$

és

$$L_n(x) = \alpha^n + \beta^n = e^{nz} + (-1)^n e^{-nz}$$

□

Legyen $F_{2m}(x)$ azon F_n-ek, ahol n páros, és legyen $F_{2m+1}(x)$ azon F_n-ek, ahol n páratlan. Hasonlóan legyen $L_{2m}(x)$, azon $L_n(x)$-ek, ahol n páros, és $L_{2m+1}(x)$, ahol n páratlan. Ha a 2.18 és 2.19 egyenletet eszerint felbonotom a következő 2 egyenlőséget kapjuk:

12. Tétel.

$$F_{2m}(x) = \frac{\sinh(2mz)}{\cosh(z)}; \quad F_{2m+1}(x) = \frac{\cosh((2m+1)z)}{\cosh(z)} \tag{2.20}$$

$$L_{2m}(x) = 2\cosh(2nz); \quad L_{2m+1}(x) = 2\sinh(2n+1)z. \tag{2.21}$$

Most már láthatjuk, hogy az egyenlet akkor lesz 0, ha a megfelelő hiperbolikus függvény eltűnik.

$z = x + iy$-re: $\quad |\sinh(z)|^2 = \sinh^2(x) + \sin^2(y) \quad$ és $\quad |\cosh(z)|^2 = \sinh^2(x) + \cos^2(y)$

Mivel az x értéke csak valós szám lehet, így $\sinh(x)$ akkor és csak akkor lehet 0, ha $x = 0$, így a $\sinh(z)$ és $\cosh(z)$ zérusai azok a $\sinh(iy)$ és $\cosh(iy)$ lesznek.

- $F_{2m+1}(x) = 0$, ha:

  $F_{2m+1}(x) = 0$ csak akkor lehetséges, ha $\cosh((2m+1)iy) = \cos((2m+1)y) = 0$ és $\cos(y) \neq 0$. Ebben az esetben $(2n+1)y = \frac{(2k+1)\pi}{(2m+1)2}$, tehát

$$x = \pm 2i \sin(\frac{2k+1}{2m+1}) \cdot \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, ..., m-1$$

- $F_{2m}(x) = 0$,ha:

$$x = \pm 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right), k = 0, 1, 2, ..., m-1.$$

- $L_{2m}(x) = 0$, ha:

$$x = \pm 2i \sin(\frac{2k+1}{2n}) \cdot \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, ..., m-1$$

- $L_{2m+1}(x) = 0$, ha:

$$x = \pm 2i \sin(\frac{k\pi}{2m+1}), k = 0, 1, 2, ..., m-1.$$

Próbáljuk meg átalakítani a gyököket "szebb" formába. Kezdjük el elölről az egészet úgy, hogy $x = 2\sinh(z)$ helyett kiindulásként $x = 2i\cosh(z)$-t vegyünk. Ekkor megkapjuk, hogy $\sqrt{x^2+4} = 2i\sinh(z)$ és $\alpha = ie^z$, $\beta = ie^{-z}$, így:

$$F_n(x) = i^{n-1}(\frac{e^{zn} - e^{-zn}}{e^z - e^{-z}}) = i^{n-1}\frac{\sinh(nz)}{\sinh(z)}$$

Így az $F_n = 0$ akkor teljesül, ha $\sinh(nz) = 0$ és $\sinh(z) \neq 0$. Ez csak akkor lehetséges, ha $\sin(ny) = 0$ vagy $z = iy$, ezért $ny = \pm k\pi$, tehát $z = \pm\frac{ik\pi}{n}$

Ebből végül megkapjuk x-re, hogy:

$$x = 2i\cosh(z) = 2i\cos(\frac{k\pi}{n}), k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Így megkapjuk a formulánk végső alakját:

$$F_n(x) = 0 : x = 2i\cos(\frac{k\pi}{n}), k = 1, 2, ..., n-1.$$
$$l_n(x) = 0 : x = 2i\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = 1, 2, ..., n-1$$

Példa. Nézzünk egy példát. Vegyük $F_8(x)$-et. A különböző k értékekre az alábbi eredményeket kapjuk:

k	x
1	$i\sqrt{2+\sqrt{2}}$
2	$i\sqrt{2}$
3	$i\sqrt{2-\sqrt{2}}$
4	0
5	$-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$
6	$-i\sqrt{2}$
7	$i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Ellenőrzés:

$$F_8(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x = x(x^2)(x^4 + 4x^2 + 2).$$

Elvégezve a gyökök keresését a szorzattényezőkben megkapjuk a felsorolt gyököket.

3. fejezet

Távolsági polinomok

Ebben a fejezetben bemutatom a Fibonacci- illetve Lucas-polinomok távolsági értelemben vett általánosítását. Forrásként Urszula Bednarz és Małgorzata Wołowiec-Musiał cikkeit ([1],[5],[2]) vettem alapul. Mielőtt gráfértelmezést adnánk a Távolsági Fibonacci-polinomoknak nézzünk néhány gráfelméleti magyarázatot:

$\mathbb{P}_n$ alatt egy n rendű utat értünk $V(\mathbb{P}_n)$ csúcshalmazzal. Tekintsünk egy $x \geq 1$ színhalmazt. A $V(\mathbb{P}_n)$ halmazt lefedjük a $\mathbb{P}_k$ és $\mathbb{P}_1$ részgráfokkal úgy, hogy a $\mathbb{P}_1$ csúcsával és x szín valamelyikével színezzük. Ezt az eljárást $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$ fedésnek nevezzük $x\mathbb{P}_1$ színezéssel. Az összes $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$ fedés számát $x\mathbb{P}_1$ színezéssel a $\mathbb{P}_n$ gráfon $\sigma(\mathbb{P}_n)$-el jelöljük. Szemléltetésképpen vegyük $\mathbb{P}_3$ gráfon a $(\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_1)$ fedést $x\mathbb{P}_1$ színezéssel. Ekkor 3 lehetőségünk van $\mathbb{P}_3$-at lefedni $\mathbb{P}_1$ és $\mathbb{P}_2$-vel:

- Az út minden csúcsát $\mathbb{P}_1$-el fedem le. 3 darab $\mathbb{P}_1$ fedésem lesz és x bármely színét használhatom színezésre.

- A másik két lehetőség hasonló egymáshoz. Az út két csúcsát $\mathbb{P}_2$-vel, egy csúcsát $\mathbb{P}_1$-el fedem le. Ezt kétféleképpen tehetem meg attól függően, hogy $\mathbb{P}_1$ az út elején vagy végén van. Itt x bármely színét csak egyszer használhatom, mert $\mathbb{P}_1$-t is csak egyszer használtuk fedésre.

Összeadva a 3 lehetőséget $\sigma(\mathbb{P}_n) = x^3 + x + x = x^3 + 2x$-et kapunk eredményül, ha $k = 2$.

3.1. Távolsági Fibonacci-polinomok

5. Definíció. *Legyen $k \geq 2$ és $n \geq 0$ egész számok. A távolsági Fibonacci-polinomot ($f_n(k, x)$) a következő rekurzióval definiáljuk:*

$$f_n(k, x) = x \cdot f_{n-1}(k, x) + f_{n-2}(k, x), n \geq k-ra, \tag{3.1}$$

$f_n(k, x) = x^n$ kezdeti feltétellel minden $n = 0, 1, \ldots, k-1$-re.

Az első néhány távolsági Fibonacci-polinom különböző k és n értékek mellett:

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$f_0(k,x)$	1	1	1	1
$f_1(k,x)$	x	x	x	x
$f_2(k,x)$	x^2+1	x^2	x^2	x^2
$f_3(k,x)$	x^3+2x	x^3+1	x^3	x^3
$f_4(k,x)$	x^4+3x^2+1	x^4+2x	x^4+1	x^4
$f_5(k,x)$	x^5+4x^3+3x	x^5+3x^2	x^5+2x	x^5+1

Megjegyzés. $k = 2$ esetén $f_{n+1}(x)$-et kapunk, továbbá $f_n(2, 1) = F_{n+1}$, míg $f_n(2, 2) = P_{n+1}$, ahol P_{n+1} a Pell-számok. $k = 3$ esetén $N_{n+1}(x)$-et kapunk így, ebből következik, hogy $f_n(3, 1) = N_{n+1}$, ahol $N_{n+1}(x)$ a Narayana-polinomok és N_{n+1} a Narayana-számok.

13. Tétel. *Legyen $k \geq 2$, $n \geq 1$ és $x \geq 1$ egész számok. Ekkor $\sigma(\mathbb{P}_n) = f_n(k, x)$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{P}_n$ egy n-ed rendű út $V(\mathbb{P}_n) = (t_1, t_2, \cdots t_n)$ csúcshalmazzal. Továbbá legyen $k \geq 2$, $n \geq 1$ és $x \geq 1$ egész számok. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el n-re.

Ha $n = 1, \cdots, k-1$, akkor a csúcsokat a $\mathbb{P}_1$ részgráffal fedjük le x szín valamelyikével színezve. Így $\sigma(\mathbb{P}_n) = x^n$ $n = 1, \cdots k-1$-re. Ha $n = k$, akkor a $\mathbb{P}_k$ út csúcsait k darab $\mathbb{P}_1$ részgráffal fedhetjük le, amelyek az x színek valamelyikével vannak színezve, vagy lefedhetünk egy ilyen gráfot egy $\mathbb{P}_k$ útvonallal. Így $\sigma(\mathbb{P}_k) = x^k + 1$.
Tegyük fel, hogy $n \leq k+1$ és a tétel teljesül minden n-nél kisebb egész számra. A cél, hogy bebizonyítsuk, hogy n-re is igaz lesz. Két lehetőséget kell megvizsgálnunk:
1. $t_n \in V(\mathbb{P}_1)$.
Ekkor a t_n csúcsot az x szín egyikével lehet színezni. Legyen $\sigma_1(\mathbb{P}_n)$ a $\mathbb{P}_n$ gráf összes $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$

fedésének a száma $x\mathbb{P}_1$ színezéssel, ahol t_n a $\mathbb{P}_1$-hez tartozik. Így $\sigma_1(\mathbb{P}_n) = x \cdot \sigma(\mathbb{P}_{n-1})$.

2. $t_n \in V(\mathbb{P}_k)$.

Ekkor a $t_{n-1} \cdots t_{n-k+1}$ csúcsok is a $V(\mathbb{P}_k)$-ban lesznek benne. Legyen $\sigma_k(\mathbb{P}_n)$ a $\mathbb{P}_n$ gráf összes $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$ fedésének a száma $x\mathbb{P}_1$ színezéssel, ahol t_n a $\mathbb{P}_k$-hoz tartozik. Így $\sigma_k(\mathbb{P}_n) = \sigma(\mathbb{P}_{n-k}$.

Mind a két esetet, mind az indukciós feltevést figyelembe véve megkapjuk, hogy
$\sigma(\mathbb{P}_n) = \sigma_1(\mathbb{P}_n) + \sigma_k\mathbb{P}_n = x \cdot f_{n-1}(k, x) + f_{n-k}(k, x) = f_n(k, x)$. □

14. Tétel. *Legyen* $k \geq 2, n \geq 3$ *és* $x \geq 1$ *egészek. Ekkor* $\sigma(\mathbb{C}_n) = xf_{n-1}(k, x) + kf_{n-k}(k, x)$, *ahol* $\sigma(\mathbb{C}_n)$ *egy* n *csúcsú ciklus* $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$*-fedésének száma* $x\mathbb{P}_1$ *színezéssel.*

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük n-re. Legyen $\mathbb{C}_n$ csúcshalmaza $V(\mathbb{C}_n) = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Ha $n = 3, \cdots, k-1$; $k \geq 4$-re, akkor a csúcsokat le tudjuk fedni $\mathbb{P}_1$ részgráffal x színek valamelyikével színezve. Ezért $\sigma(\mathbb{C}_n) = x^n$ minden $n = 3 \cdots, k-1$-re, ha $k \geq 4$. Ha $n = k$ és $k \geq 3$, akkor lefedhető a $\mathbb{C}_n$, k darab $\mathbb{P}_1$ részgráffal x színek valamelyikével vagy $\mathbb{P}_k$ úttal, amit k féle képpen választhatok ki. $\sigma(\mathbb{C}_n) = x^k + k$.

Tegyük fel, hogy $n \geq k+1$ minden $k \geq 2$-re és a tételünk teljesül minden n-nél kisebb egészre. Ekkor két lehetőségünk van:

1. $t_n \in V(\mathbb{P}_1)$.

Ekkor a t_n csúcsot x szín egyikével tudom színezni. $\sigma_1(\mathbb{C}_n)$ alatt azt a $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$-fedést értjük $x\mathbb{P}_1$ színezéssel a $\mathbb{C}_n$ gráfon, ahol t_n a P_1-hez tartozik. Ekkor:
$\sigma_1(\mathbb{C}_n) = x\sigma(\mathbb{P}_{n-1}$.

2. $t_n \in V(\mathbb{P}_1)$.

$\sigma_k(\mathbb{C}_n)$ alatt azt a $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$-fedést értjük $x\mathbb{P}_1$ színezéssel a $\mathbb{C}_n$ gráfon, ahol t_n a $\mathbb{P}_k$-hoz tartozik. Mivel k ilyen utunk van, így $\sigma_k(\mathbb{C}_n) = k\sigma(\mathbb{P}_{n-k})$.
$\sigma(\mathbb{C}_n) = \sigma_1(\mathbb{C}_n) + \sigma_k(\mathbb{C}_n) = x\sigma(\mathbb{P}_{n-1}) + k\sigma(\mathbb{P}_{n-k}) = xf_{n-1}(k, x) + kf_{n-k}(k, x)$ felhasználva a 13-ös tételt. □

15. Tétel. *Legyen* $k \geq 2$, $n \geq 1$ *és* $x \geq 1$ *egész számok. Ekkor:*

$$f_n(k, x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \binom{n-(k-1)j}{j} \cdot x^{n-kj}. \tag{3.2}$$

Bizonyítás. Ha $n \leq k-1$, akkor $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = 0$ és

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \binom{n-(k-1)j}{j} \cdot x^{n-kj} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} = \binom{n-(k-1)\cdot 0}{0} \cdot x^{n-k\cdot 0} = x^n$$

Tegyük fel, hogy $n \geq k$ és vegyünk egy $\mathbb{P}_n$ utat és egy x színkészletet, $n, x \geq 1$. A 13-os tételből a $\mathbb{P}_n$ gráf összes $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$ fedésének a száma $x\mathbb{P}_1$ színezéssel egyenlő $f_n(k,x)$-el. Minden egyes $(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_1)$ fedés j darab $\mathbb{P}_k$ részgráfból áll és $n-kj$ darab $\mathbb{P}_1$ csúcsból, ahol $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Továbbá rögzített j mellett $\binom{n-(k-1)j}{j}$ lehetőségünk van lefedni a $\mathbb{P}_n$ utat $\mathbb{P}_k$ részgráffal. Mindegyik $n-kj$ darab $\mathbb{P}_1$ csúcsot ki lehet színezni az x valamely színével. Így:

$$f_n(k,x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \binom{n-(k-1)j}{j} \cdot x^{n-kj}.$$

□

3.2. Távolsági Lucas-polinomok

6. Definíció. *Legyen $k \geq 2$ és $n \geq 0$ egész számok. A távolsági Lucas-polinomot $(l_n(k,x))$ a következő rekurzióval definiáljuk:*

$$l_n(k,x) = xl_{n-1}(k,x) + l_{n-k}(k,x) \tag{3.3}$$

minden $n \geq k$-ra, és $l_0(k,x) = k$, $l_n(k,x) = x^n$ kezdeti feltételekkel minden $n = 0, 1, \cdots, k-$ 1-re.

A következő táblázatban látható az első néhány távolsági Lucas-polinom:

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$l_0(k,x)$	2	3	4	5
$l_1(k,x)$	x	x	x	x
$l_2(k,x)$	x^2+2	x^2	x^2	x^2
$l_3(k,x)$	x^3+3x	x^3+3	x^3	x^3
$l_4(k,x)$	x^4+4x^2+2	x^4+4x	x^4+4	x^4
$l_5(k,x)$	x^5+5x^3+5x	x^5+5x^2	x^5+5x	x^5+5

16. Tétel. *Legyen $k \geq 2$, $n \geq 3$ és $x \geq 1$ egész számok. Ekkor:*

$$l_n(k,x) = xl_{n-1}(k,x) + l_{n-k}(k,x). \tag{3.4}$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el n-re.

Ha $n = 3$ és $k = 2$, akkor

$$l_3(2,x) = xl_2(2,x) + l_1(2,x) = xf_2(2,x) + 2f_1(2,x) = x(x^2+1) + 2x = x^3 + 3x,$$

ami a Lucas-polinomok táblázatából kiolvasható, hogy teljesül.

Ha $n = 3$ és $k = 3$, akkor

$$l_3(3,x) = xl_2(3,x) + l_1(3,x) = xf_2(3,x) + 3f_0(3,x) = x^3 + 3,$$

ami ugyancsak a Lucas-polinomok táblázatából kiolvasható, hogy teljesül.

Tegyük fel, hogy a tételünk teljesül minden $1, \cdots, n$-re. Ekkor:

$$\begin{aligned}
l_{n+1}(k,x) &= xf_n(k,x) + kf_{n-k+1}(k,x) \\
&= x(xf_{n-1}(k,x) + f_{n-k}(k,x)) + k(xf_{n-k}(k,x) + f_{n-2k+1}(k,x)) \\
&= x(xf_{n-1}(k,x) + kf_{n-k}(k,x)) + xf_{n-k}(k,x) + kf_{n-2k+1}(k,x) \\
&= xl_n(k,x) + l_{n-k+1}(k,x).
\end{aligned}$$

□

3.3. Generátorfüggvények és generátormátrixok

7. Definíció. *Az $r_0, r_1 \ldots, r_n, \ldots$ sorozat generátorfüggvénye alatt az $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ hatványsort értjük.*

17. Tétel. *Legyen $n \geq 0$ és $k \geq 2$ egész számok. Akkor a generátorfüggvénye a Távolsági Fibonacci-polinomoknak(3.1):*

$$g(t) = \frac{1}{1 - xt - t^k}. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. Legyen $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n$. A Távolsági Fibonacci-polinom definíciójából

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f_0(k,x) + f_1(k,x)t + \cdots + f_{k-1}(k,x)t^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} f_n(k,x)t^n \\
&= 1 + xt + \cdots + x^{k-1}t^{k-1} + xt\textstyle\sum_{n=k}^{\infty}[xf_{n-1}(k,x) + t^k \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k}(k,x)]t^n \\
&= 1 + xt + \cdots + x^{k-1}t^{k-1} + xt \sum_{n=k-1}^{\infty} f_n(k,x)t^n + t^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n \\
&= 1 + xt + \cdots + x^{k-1}t^{k-1} + xt(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n - 1 - xt - \cdots - x^{k-2}t^{k-2} + t^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n \\
&= 1 + xt \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n + t^n \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n = 1 + xtg(t) + t^k g(t).
\end{aligned}
$$

Ebből:

$$g(t) = \frac{1}{1 - xt - t^k}.$$

□

18. Tétel. *Legyen $n \geq 0$ és $k \geq 2$ egész számok. Ekkor a generátorfüggvénye a távolsági Lucas-polinomoknak:*

$$h(t) = \frac{k + (1-k)xt}{1 - xt - t^k}. \tag{3.6}$$

Bizonyítás. Legyen $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(k,x)t^n$. A rekurziót felhasználva:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= l_0(k,x) + l_1(k,x)t + \cdots + l_{k-1}(k,x)t^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} l_n(k,x)t^n \\
&= k + xt + \cdots + x^{k-1}t^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} (xl_{n-1}(k,x) + l_{n-k}(k,x))t^n \\
&= k + xt + \cdots + x^{k-1}t^{k-1} + xt \sum_{n=k}^{\infty} l_{n-1}(k,x)t^{n-1} + t^k \sum_{n=k}^{\infty} l_{n-k}(k,x)t^{n-k} \\
&= k + xt + \cdots + x^{k-1}t^{k-1} + xt \sum_{n=k-1}^{\infty} l_n(k,x)t^n + t^k \sum_{n=0}^{\infty} l_n(k,x)t^n \\
&= k + xt + \cdots + x^{k-1}t^{k-1} + xt(\sum_{n=0}^{\infty} l_n(k,x)t^n - k - xt - \cdots - x^{k-2}t^{k-2}) + t^k \sum_{n=0}^{\infty} l_n(k,x)t^n \\
&= k + (1-k)xt + xt \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n + t^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k,x)t^n \\
&= k + (1-k)xt + xth(t) + t^k h(t).
\end{aligned}
$$

Ezért:

$$h(t) = \frac{k + (1-k)xt}{1 - xt - t^k}.$$

$\square$

8. Definíció. *A generátormátrix olyan mátrix, amelynek minden sora lineárisan független, azaz egyetlen sora sem fejezhető ki a többi sorral.*

A Távolsági Fibonacci-polinom(3.1) definíciója alapján tekintsük a következő $k \times k$ mátrixot:

- Ha $i = 1$ és $j = 1, 2 \cdots, k$, akkor a q_{1j} eleme a $Q_k(x)$ mátrixnak egyenlő a (3.1) definícióban szereplő egyenlet jobb oldalán lévő $f_{n-j}(k,x)$ együtthatójával.

- Ha $i = 2, 3 \cdots, k$ és $j = 1, 2 \cdots, k$, akkor $q_{ij} = 1$, ha $i = j + 1$, különben 0.

A mátrixunk k-ra a következő alakú:

$$Q_k(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Megjegyzés. Észrevehetjük, hogy $Q_2(x)$ esetén megkapjuk a már ismert generátormátrixát a Fibonacci-polinomnak. Továbbá, ha a $Q_2(1)$ mátrixot nézzük megkapjuk a generátormátrixát a Fibonacci-számoknak. $Q_3(x)$ a Narayana-polinomok generátormátrixa.

$$Q_3(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2(x) \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Definíció. *Definiáljunk egy k rendű $A_k(x)$ mátrixot rögzített $k \geq 2$ egészekre az aláb-*

biak szerint:

$$\begin{bmatrix} f_{2k-2}(k,x) & f_{2k-3}(x) & \dots & f_k(k,x) & f_{k-1}(x) \\ f_{2k-3}(k,x) & f_{2k-4}(x) & \dots & f_{k-1}(k,x) & f_{k-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_k(k,x) & f_{k-1}(x) & \dots & f_2(k,x) & f_1(x) \\ f_{k-1}(k,x) & f_{k-2}(x) & \dots & f_1(k,x) & f_0(x) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

19. Tétel. *Legyen $n \geq 1$ és $k \geq 2$ egész számok. Ekkor:*

$$Q_k^n(x)A_k(x) = \begin{bmatrix} f_{n+2k-2}(k,x) & f_{n+2k-3}(k,x) & \dots & f_{n+k}(k,x) & f_{n+k-1}(k,x) \\ f_{n+2k-3}(k,x) & f_{n+2k-4}(k,x) & \dots & f_{n+k-1}(k,x) & f_{n+k-2}(k,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n+k}(k,x) & f_{n+k-1}(k,x) & \dots & f_{n+2}(k,x) & f_{n+1}(k,x) \\ f_{n+k-1}(k,x) & f_{n+k-2}(k,x) & \dots & f_{n-1}(k,x) & f_n(k,x) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el. Ha $n = 1$, akkor egyszerű számításokkal a Távolsági Fibonacci-polinom rekurzióját(3.1) felhasználva megkapjuk a tételt $n = 1$-re. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $1, \cdots, n$-re.

$n + 1$-re:

$Q_k^{n+1}(x)A_k(x) = Q_k(x)Q_k^n(x)A_k(x)$. A feltevésünket és a rekurzív sorozatot felhasználva:

$$Q_k^{n+1}A_k(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+2k-2}(k,x) & \dots & f_{n+k-1}(k,x) \\ f_{n+2k-3}(k,x) & \dots & f_{n+k-2}(k,x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+k}(k,x) & \dots & f_{n+1}(k,x) \\ f_{n+k-1}(k,x) & \dots & f_n(k,x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xf_{n+2k-2}(k,x) + f_{n+k-1}(k,x) & \dots & xf_{n+k-1}(k,x) + f_n(k,x) \\ f_{n+2k-2}(k,x) & \dots & f_{n+k-1}(k,x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+k-1}(k,x) & \dots & f_{n+2}(k,x) \\ f_{n+k}(k,x) & \dots & f_{n+1}(k,x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{n+2k-1}(k,x) & f_{n+2k-2}(k,x) & \dots & f_{n+k+1}(k,x) & f_{n+k}(k,x) \\ f_{n+2k-2}(k,x) & f_{n+2k-3}(k,x) & \dots & f_{n+k}(k,x) & f_{n+k-1}(k,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n+k+1}(k,x) & f_{n+k}(k,x) & \dots & f_{n+3}(k,x) & f_{n+2}(k,x) \\ f_{n+k}(k,x) & f_{n+k-1}(k,x) & \dots & f_{n+2}(k,x) & f_{n+1}(k,x) \end{bmatrix}$$

□

20. Tétel. *Legyen $k \geq 2$ és $n \geq 1$ egész számok. Ekkor:*

$$det(A_k(x)) = (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \tag{3.9}$$

Bizonyítás. Bizonyításunk során felhasználjuk a következő összefüggést:

$$f_{k+i}(k,x) = x^{k+i} + (i+1)x^i \tag{3.10}$$

Ezt az egyenlőséget ebben a dolgozatban nem bizonyítjuk. A bizonyításhoz lásd: [1].

$$det(A_k(x)) = \begin{vmatrix} x^{2k-2} + kx^{k-1} & x^{2k-3} + (k-1)x^{k-2} & \dots & x^k + 1 & k_{k-1} \\ x^{2k-3} + (k-1)x^{k-2} & x^{2k-4} + (k-2)x^{k-3} & \dots & x^{k-1} & k_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^k + 1 & x^{k-1} & \vdots & x^2 & x \\ x^{k-1} & x^{k-2} & \vdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

Most szorozzuk be a determináns utolsó oszlopát rendre $x^{k-1}, x^{k-2} \cdots, x$-el, majd az így kapott oszlopot vonjuk ki az első $k-1$ oszlopból. Ekkor a következő determinánst kapjuk:

$$\begin{vmatrix} kx^{k-1} & (k-1)x^{k-2} & \cdots & 1 & x^{k-1} \\ (k-1)x^{k-2} & (k-2)x^{k-3} & \cdots & 0 & x^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & x \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Az utolsó sor mentén kifejtve a determinánst, majd $\lfloor k/2 \rfloor$ oszlopokat helyenként felcserélve:

$$(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \begin{vmatrix} 1 & 2x & \dots & (k-1)x^{k-2} & kx^{k-1} \\ 0 & 1 & \dots & (k-2)x^{k-3} & (k-1)x^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Kaptunk egy felső háromszögmátrixot, amiben a főátlóban csupa 1-es szerepel, így annak a determinánsa 1 lesz. Így:

$$det(A_k(x)) = (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}$$

□

10. Definíció. *Definiáljunk egy k rendű $B_k(x)$ mátrixot rögzített $k \geq 2$ egészekre az alábbiak szerint:*

$$\begin{bmatrix} l_{k-1}(k,x) & l_{k-2}(k,x) & \dots & l_1(k,x) & l_0(k,x) \\ l_{k-2}(k,x) & l_{k-3}(k,x) & \dots & l_0(k,x) & l_{-1}(k,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_1(k,x) & l_0(k,x) & \dots & l_{-k+3}(k,x) & l_{-k+2}(k,x) \\ l_0(k,x) & l_{-1}(k,x) & \dots & l_{-k+2}(k,x) & l_{-k+1}(k,x) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

21. Tétel. *Legyen $k \geq 2$ és $n \geq 1$ egész számok. Ekkor:*

$$B_k(x)Q_k^n(x) = \begin{bmatrix} l_{n+k-1}(k,x) & l_{n+k-2}(k,x) & \dots & l_{n+1}(k,x) & l_n(k,x) \\ l_{n+k-2}(k,x) & l_{n+k-3}(k,x) & \dots & l_n(k,x) & l_{n-1}(k,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n+1}(k,x) & l_n(k,x) & \dots & l_{n-k+3}(k,x) & l_{n-k+2}(k,x) \\ l_n(k,x) & l_{n-1}(k,x) & \dots & l_{n-k+2}(k,x) & l_{n-k+1}(k,x) \end{bmatrix}. \qquad (3.12)$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el n-re.

Ha $n = 1$, akkor egyszerű számításokkal a távolsági Lucas-polinom rekurzióját(3.3) felhasználva megkapjuk a tételt. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $1, \cdots, n$-re. $B_k(x)Q_k^{n+1}(x) = B_k(x)Q_k^n(x)Q_k(x)$. A feltevésünket és a rekurzív sorozatot felhasználva:

$$B_k(x)Q_k^{n+1}(x) = \begin{bmatrix} l_{n+k-1}(k,x) & l_{n+k-2}(k,x) & \dots & l_{n+1}(k,x) & l_n(k,x) \\ l_{n+k-2}(k,x) & l_{n+k-3}(k,x) & \dots & l_n(k,x) & l_{n-1}(k,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n+1}(k,x) & l_n(k,x) & \dots & l_{n-k+3}(k,x) & l_{n-k+2}(k,x) \\ l_n(k,x) & l_{n-1}(k,x) & \dots & l_{n-k+2}(k,x) & l_{n-k+1}(k,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xl_{n+k-1}(k,x) + l_n(k,x) & l_{n+k-1}(k,x) & \cdots & l_{n+1}(k,x) \\ xl_{n+k-2}(k,x) + l_{n-1}(k,x) & l_{n+k-2}(k,x) & \cdots & l_n(k,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ xl_{n+1}(k,x) + l_{n-k+2}(k,x) & l_{n+1}(k,x) & \cdots & l_{n-k+3}(k,x) \\ xl_n(k,x) + l_{n-k+1}(k,x) & l_n(k,x) & \cdots & l_{n-k+2}(k,x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{n+k}(k,x) & l_{n+k-1}(k,x) & \cdots & l_{n+2}(k,x) & l_{n+1}(k,x) \\ l_{n+k-1}(k,x) & l_{n+k-2}(k,x) & \cdots & l_{n+1}(k,x) & l_n(k,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n+2}(k,x) & l_{n+1}(k,x) & \cdots & l_{n-k+4}(k,x) & l_{n-k+3}(k,x) \\ l_{n+1}(k,x) & l_n(k,x) & \cdots & l_{n-k+3}(k,x) & l_{n-k+2}(k,x) \end{bmatrix}.$$

□

22. Tétel. *Legyen $k \geq 2$ és $n \geq 1$ egészek. Ekkor:*

$$det(B_k(x)) = (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}((k-1)^{k-1}x^k + x^k). \qquad (3.13)$$

Bizonyítás. $B_k(x)$ mátrix definíciójából(3.11), a kezdeti feltételből és a Távolsági Lucas-polinom rekurziójából(3.3):

$$B_k(x) = \begin{bmatrix} x^{k-1} & x^{k-2} & \cdots & x & k \\ x^{k-2} & x^{k-3} & \cdots & k & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & k & \cdots & 0 & 0 \\ k & 0 & \cdots & 0 & (1-k)x \end{bmatrix}$$

A determináns kiszámításához átírjuk a mátrixot a következő formába:

$$det_{B_k(x)} = (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \begin{vmatrix} k & x & \cdots & x^{k-2} & x^{k-1} \\ 0 & k & \cdots & x^{k-3} & x^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & x \\ (1-k)x & 0 & \cdots & 0 & k \end{vmatrix}$$

További számításokkal és a determináns tulajdonságainak köszönhetően végül megkapjuk a (3.13)-as egyenlőséget. A hosszabb bizonyításért lásd: Hivatkozás [2] □

Megjegyzés. Legyen $k \geq 2$ és $n \geq 1$ egész számok. Ekkor:

$$det(B_k(x)Q_k^n(x)) = (-1)^{n(k+1)+\lfloor k/2 \rfloor}((k-1)^{k-1}x^k + k^k). \tag{3.14}$$

3.4. Kapcsolatuk a binomiális tétellel

A távolsági polinomok felépíthetőek a binomiális tétel segítségével. Egy rögzített k egész szám esetén $k-1$ magasságú lépésekben fogunk haladni a Pascal-háromszögben. Ezt az eljárást lépés módszernek hívjuk. $k = 2$ esetén a Fibonacci-polinomokra vonatkozó diagonálisban haladást kapjuk meg. Nézzük meg $k = 3$-ra és $k = 4$-re hogyan működik ez:

$k = 3:$

n	$(x+1)^n$						
0	1						
1	x	1					
2	x^2	$2x$	1				
3	x^3	$3x^2$	$3x$	1			
4	x^4	$4x^3$	$6x^2$	$4x$	1		
5	x^5	$5x^4$	$10x^3$	$10x^2$	$5x$	1	
6	x^6	$6x^5$	$15x^4$	$20x^3$	$15x^2$	$6x$	1

Legyen $n = 1$. Induljunk ki a táblázatban látható módon 1-ből. A lépés módszer segítségével lépjünk 1-et balra és $k - 1 = 2$-t lefele. Ekkor eljutunk x^3-hoz és megállunk. A két érték összegéből $x^3 + 1$ megkaptuk az $f_3(3, x)$ távolsági Fibonacci-polinomot. Most induljunk ki $n = 2$-ben lévő 1 együtthatóból. Itt kétszer megismételhető a lépés módszer, aminek a segítségével eljutunk először $4x^3$-ba, majd x^6-ba. Összeadva őket $x^6 + 4x^3 + 1$-et kapunk, ami az $f_6(3, x)$ távolsági Fibonacci-polinom.

$k = 4:$

n	$(x+1)^n$								
0	1								
1	x	1							
2	x^2	$2x$	1						
3	x^3	$3x^2$	$3x$	1					
4	x^4	$4x^3$	$6x^2$	$4x$	1				
5	x^5	$5x^4$	$10x^3$	$10x^2$	$5x$	1			
6	x^6	$6x^5$	$15x^4$	$20x^3$	$15x^2$	$6x$	1		
7	x^7	$7x^6$	$21x^5$	$35x^4$	$35x^3$	$21x^2$	$7x$	1	
8	x^8	$8x^7$	$29x^6$	$56x^5$	$70x^4$	$50x^3$	$29x^2$	$8x$	1

$k = 4$-re is látható, hogy megkaptuk $f_4(4, x)$-et és $f_8(4, x)$-et.

Tudjuk, hogyha a Fibonacci-polinomok együtthatóit növekvő sorba rendezzük a kitevők szerint, akkor az elemek az átlóban minden $2n$ sorban 0. A távolsági Fibonacci-polinom együtthatóit, úgy mint a Fibonacci-polinomét, is össze lehet hasonlítani a Pascal-háromszöggel. Rögzített k érték esetén $n = 0$-tól indulva úgy, mint a már bemutatott lépés módszerrel, mindig $k - 1$ lépést teszek meg, akkor a Pascal háromszögben szereplő együtthatókat kapjuk meg. Szemléltetésképpen nézzük meg $k = 3$-ra hogyan működik:

$k = 3:$

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
0	1									
1	0	1								
2	0	0	1							
3	1	0	0	1						
4	0	2	0	0	1					
5	0	0	3	0	0	1				
6	1	0	0	4	0	0	1			
7	0	3	0	0	5	0	0	1		
8	0	0	6	0	0	6	0	0	1	
9	1	0	0	10	0	0	7	0	0	1

Ez a módszer nem csak a távolsági Fibonacci-polinomokra teljesül, hanem a Lucas-polinomokra is.

$k = 3:$

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
0	3									
1	0	1								
2	0	0	1							
3	3	0	0	1						
4	0	4	0	0	1					
5	0	0	5	0	0	1				
6	3	0	0	6	0	0	1			
7	0	7	0	0	7	0	0	1		
8	0	0	12	0	0	8	0	0	1	
9	3	0	0	18	0	0	9	0	0	1

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
0	4									
1	0	1								
2	0	0	1							
3	0	0	0	1						
4	4	0	0	0	1					
5	0	5	0	0	0	1				
6	0	0	6	0	0	0	1			
7	0	0	0	7	0	0	0	1		
8	4	0	0	0	8	0	0	0	1	
9	0	9	0	0	0	9	0	0	0	1

$k = 4:$

3.5. Összefüggések

Ebben a fejezetben néhány összefüggést, tételt mondok ki, amik nem kerültek bizonyításra. További hasonló tételek és ezek bizonyítása megtalálható: Hivatkozás [1], Hivatkozás [2], Hivatkozás [5].

23. Tétel. *Legyen $n \geq 0$ és $k \geq 2$ egész számok. Ekkor:*

1. $x \sum_{i=0}^{n} f_i(k,x) = \sum_{i=n+2-k}^{n+1} f_i(k,x) - 1$
2. $x \sum_{i=1}^{n} f_{ik-1}(k,x) = f_{nk}(k,x) - 1$
3. $x \sum_{i=0}^{n} f_{ik}(k,x) = f_{nk+1}(k,x)$
4. $f_n(k,x) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i f_{n-k-i}(k,x) + x^k f_{n-k}(k,x)$
5. $x f_n(k,x) = x^2 f_{n-1}(k,x) + f_{n-k+1}(k,x) - f_{n-2k+1}(k,x)$ *minden* $n \leq 2k-1$*.re.*

   A további tételekben $n \geq 1$ legyen:

6. $x \sum_{i=1}^{n} f_{-ik}(k,x) = -f_{-nk-k+1}(k,x)$
7. $x \sum_{i=1}^{n} f_{-i}(k,x) = -\sum_{i=-n-k+1}^{-n} f_i(k,x) + 1$
8. $x \sum_{i=1}^{n} f_{-2i}(k,x) = -f_{-2n}(k,x) + 1$
9. $x \sum_{i=1}^{n} f_{-ik+1}(k,x) = -f_{-nk-k+2}(k,x)$ *minden* $k \geq 3$*-ra.*

24. Tétel. *Legyen $k \geq 2$ és $n \geq 1$ egész számok. Ekkor:*

1. $x \sum_{i=1}^{n} l_{ik-1}(k,x) = l_{nk}(k,x) - l_0(k,x)$

2. $x \sum_{i=0}^{n} l_{ik}(k,x) = l_{nk+1}(k,x) + (k-1)x$

3. $x \sum_{i=0}^{n} l_i(k,x) = \sum_{i=n+2-k}^{n+1} l_i(k,x) + (k-1)x - k$ *minden* $nk-2$*-re.*

4. $l_n(k,x) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i l_{n-k-i}(k,x) + x^k l_{n-k}(k,x)$

5. $xl_n(k,x) = x^2 l_{n-1}(k,x) + l_{n-k+1}(k,x) - l_{n-2k+1}(k,x)$ *minden* $n \geq 2k-1$*-re.*

6. $l_n(k,x) = f_n(k,x) + (k-1)f_{n-k}(k,x)$

7. $x \sum_{i=1}^{n} l_{-ik}(k,x) = -l_{-nk-k+1}(k,x) - (k-1)x$

8. $x \sum_{i=1}^{n} l_{-i}(k,x) = -\sum_{i=-n-k+1}^{-n} l_i(k,x) - (k-1)x + k$

9. $x \sum_{i=1}^{n} l_{-ik+1}(k,x) = -l_{-nk-k+2}(k,x)$ *minden* $k \geq 3$*-ra.*

Irodalom

[1] Urszula Bednarz és Małgorzata Wołowiec-Musiał. “Distance Fibonacci Polynomials”. *Symmetry* 12.9 (2020), 1540. old.

[2] Urszula Bednarz és Małgorzata Wołowiec-Musiał. “Distance Fibonacci Polynomials—Part II”. *Symmetry* 13.9 (2021), 1723. old.

[3] Verner E Hoggatt Jr és Marjorie Bicknell. “Roots of Fibonacci polynomials”. *The Fibonacci Quarterly* 11.3 (1973), 271–274. old.

[4] Zhang Jin. “On the Lucas polynomials and some of their new identities”. *Advances in Difference Equations* 2018.1 (2018), 1–8. old.

[5] Dominik Strzałka, Sławomir Wolski és Andrzej Włoch. “Distance Fibonacci Polynomials by Graph Methods”. *Symmetry* 13.11 (2021), 2075. old.

[6] Wang Tingting és Zhang Wenpeng. “Some identities involving Fibonacci, Lucas polynomials and their applications”. *Bulletin mathématique de la société des sciences mathématiques de Roumanie* (2012), 95–103. old.