**EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM**
**TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

# INTERPOLÁCIÓ ÉS DERIVÁLTAK NUMERIKUS KÖZELÍTÉSE

BSc Szakdolgozat

Készítette: *Solymosi Orsolya*

Matematika BSc
Matematikai elemző szakirány

Témavezető: *Faragó István*
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

**BUDAPEST, 2022**

# Tartalomjegyzék

# Köszönetnyílvánítás

*Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Faragó Istvánnak, akinek mérhetetlen embersége, türelme, precizitása és szakérteleme nélkül ez a dolgozat nem születhetett volna meg. Külön hálás vagyok neki, hiszen annak ellenére, hogy egyetemi órák keretein belül nem ismerhettük meg egymást, elvállalta a közös munkát.*

*Rengeteg köszönettel tartozom a családomnak és barátaimnak, akik az évek során végig támogattak és mellettem álltak. Kiemelve Kincses Eszter Ritát, szaktársamat és barátomat, aki nélkül nem jutottam volna el idáig, Eszter csodálatos egyéniségével és odaadásával a mindennapok nehézségeit szinte érezhetetlenné tette számomra és ezért nem lehetek neki elég hálás.*

# NYILATKOZAT

**Név:** Solymosi Orsolya

**ELTE Természettudományi Kar, szak:** Matematika BSc

**NEPTUN azonosító:** ZP71D2

**Szakdolgozat címe:**
Interpoláció és deriváltak numerikus közelítése

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. május 11.

*a hallgató aláírása*

# 1. Bevezetés

Numerikus deriválás során az a célunk, hogy egy függvény deriváltjait közelítsük bizonyos pontokban a függvényértékek felhasználásával.

A numerikus deriválást leggyakrabban interpolációs polinomok segítségével hajtunk végre. Ezért érdemes néhány alapkifejezést erre vonatkozóan bevezetnünk.

Tegyük fel, hogy egy $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ függvénynek ismerjük az értéket $n+1$ pontban. Ezek legyenek adottak $(x_i,f_i),(i=0,\ldots,n)$ alakban, ahol $x_i\neq x_j$, ha $i\neq j$. Az $x_i$ pontokat alappontoknak nevezzük. Továbbá vezessük be az $I=[x_{min},x_{max}]$ jelölést.

**1.1. Definíció.** Az interpoláció egy olyan eljárás, amely során az ismeretlen függvény $I$ alappontoktól eltérő pontjaiban a függvényértékeket az interpolációs függvény helyettesítési értékeivel közelítjük.

Dolgozatomban kitérek a klasszikus numerikus deriválás különböző módszereire, interpolációs eljárásokra, a numerikus deriválás köztesérték vizsgálatra, illetve többváltozós függvények deriválására. Mindenek előtt azonban egy kis történelmi összefoglalót adok a téma jelentőségéről, az ókortól egészen napjainkig.

Az interpoláció jelensége egészen az ókori Görögországba, illetve Babilóniába nyúlik vissza. Nem meglepő, hogy naptári számításokkal és asztronómiával kapcsolatos alkalmazásokat találunk. Fontos jelentőséggel bírt már akkor is, hiszen többek között a mezőgazdasági munkák szervezését is ezen számításokra alapozták. Egy korai példa Hipparkhosz, a csillagászat atyjának (Kr.e. 190-120) munkássága, aki lineáris interpolációt használt különböző égitestek helyzetének meghatározására.

Az első ismert ember, aki másodfokú interpolációt használt, Liú Zhuó kínai csillagász volt 600 körül, a Nap és Hold helyzetének meghatározására, ebből naptárat is készített.

Nyugati országokban azonban csak később kezdték használni ezen ismereteket. Copernicus, majd Kepler és Galileo tudományos munkássága a csillagászat és fizika területén adta meg a kezdő lendületet az interpoláció vizsgálatának és használatának.

Bár régóta ismert, jelentősége nem csökkent ennek a témakörnek napjainkban sem. Rengeteg gyakorlati példát tudunk hozni, melyek interpoláción alapszanak. Például a képinterpoláció jelensége, mely általában akkor merül fel, ha nagyítunk, elferdítünk vagy forgatunk. Egy speciális esete a mozaiktalanítás. Amikor egy képet felnagyítunk, akkor az újonnan bekerülő pixelek RGB (additív színmodell, vörös, zöld és kék alapszínekkel) értékeit/színeit a szomszédos színértékekből tudjuk meghatározni.

Sokszor rendkívűl drágák a mérések egy-egy kőolajlelőhely feltérképezésénél vagy különböző kémiai anyagok (például sók, kálium vizekben található koncentrációjának) vizsgálatakor. Ebben az esetben is fontos és hasznos az interpoláció, hiszen eredményességünkön és költségvetésünkön sokat tud segíteni. Jó példák a GPS műholdak is, hiszen csak adott időközönként küldenek jelet a pozíciójukról, így a köztes időpontokban helyzetüknek, sebességüknek, gyorsulásuknak meghatározására jó megoldás egy interpolációs becslés.

Dolgozatomban a felhasznált definíciókat és tételeket, Faragó István és Horváth Róbert Numerikus módszerek című kiadványából idézem. Az említett jegyzetben megtalálhatóak az említett tételek bizonyításai is. Amennyiben ettől eltérek, azt jelzem.

# 2. Klasszikus numerikus deriválási módszerek

**2.1. Definíció** (Derivált)**.** [1] Legyen $f$ egyváltozós valós függvény, $x_0$ az értelmezési tartományának egy belső pontja. Ekkor az $f$ függvény $x_0$-beli deriváltján vagy differenciálhányadosán a

$$f'(x) = \frac{\delta f(x)}{\delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket értjük, ha ez létezik és véges (azaz valós) szám.

Általánosan az $f$ függvény $k$-szor deriválható $x$-ben, ha $(k-1)$-szer deriválható $x$ egy környezetében és a $(k-1)$-edik deriváltfüggvény deriválható $x$-ben. Ekkor a $k$-adik derivált jele és definíciója:

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x).$$

Tegyük fel, hogy $x_0, x_0 \pm h, x_0 \pm 2h, \ldots, x_0 \pm kh \in \mathbb{R}$ $(h > 0, k \in \mathbb{N})$ pontokban ismerjük egy $f$ kellően sokszor differenciálható függvény függvényértékeit. Ezeket a függvényértékeket jelöljük rendre $f_0, f_{\pm 1}, f_{\pm 2}, \ldots, f_{\pm k}$.

Hogyan közelíthetjük az $f$ függvény $x_0$ pontban vett első, második stb. deriváltjait az ismert adatok segítségével? Erre a kérdésre ad választ a következő rész.

## 2.1. Deriváltak közelítése differenciálhányadosokkal

Mivel egy függvény deriváltját a differenciálhányados határértékeként definiáltuk, a deriváltat a differenciálhányados értékeivel is közelíthetjük.

### 2.1.1. Az első deriváltak közelítése

**2.2. Definíció** (Normált tér)**.** A $(V, ||\cdot||)$ párt normált térnek hívjuk, ha $V$ egy vektortér, és $||\cdot|| : V \to R$ egy adott függvény, ún. norma, az alábbi tulajdonságokkal:

1. $\forall x \in V, ||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||, \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in R$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad \forall x, y \in V$

**2.3. Definíció** (Rend)**.** Azt mondjuk, hogy a $\nu(h)$, $h$ pozitív valós paramétertől függő közelítése egy $\nu \in (V, ||\cdot||)$ elemnek (legalább) $r \geq 1$-edrendű közelítés, ha $\forall h$-ra $\nu(h) \in V$, és emelett $||\nu(h) - \nu|| = \mathcal{O}(h^r)$, $(h \to 0)$.

[1] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: Thomas-féle kalkulus 1., Typotex kiadó (2006)

Három egyszerű eset:

**1.** Haladó (forward) differencia:

Ebben a módszerben az $x$ értékek növekedési irányába, azaz az $x$-től jobbra eső alappontot használjuk. Hasznos közönséges differenciálegyenletek egylépéses jósló-javító módszeres megoldásában, például Euler-módszer, Runge-Kutta- módszer.

Képlete:

$$\Delta f_+ = \frac{f_1 - f_0}{h}.$$

**2.** Retrográd (backward) differencia

Ebben a módszerben az $x$ értékek csökkenési irányába, azaz az $x$-től balra eső alappontot használjuk. Hasznos azon deriváltak esetében, ahol az adatok egy része még nem elérhető illetve a korábbi, már meglévő adatokból számított deriváltak értékétől függhetnek, például irányítási problémák esetén.

Képlete:

$$\Delta f_- = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}.$$

**2.4. Tétel.** *A haladó és retrográd differencia is elsőrendű közelítése adott pontban $f$ függvény deriváltjának, ha $f \in C^2$ az adott pont egy környezetében.*

**3.** Központi (centrális) differencia:

A haladó és retrográd differenciák átlaga. Hasznos eszköz a közönséges és parciális differenciálegyenletek megoldására. Amennyiben adataink mind a „múltban", mind a „jövőben" elérhetőek, központi differenciával közelítsük a deriváltat.

Képlete:

$$\Delta f_c = \frac{\Delta f_+ + \Delta f_-}{2} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

**2.5. Tétel.** *A központi differencia másodrendű közelítése egy $f \in C^3$ függvény első deriváltjának.*

### 2.1.2. A második deriváltak közelítése

Képlete:

$$\Delta^2 f_c = \frac{\Delta f_+ - \Delta f_-}{h} = \frac{f_1 - f_0 - f_0 + f_{-1}}{h^2} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}.$$

**2.6. Tétel.** *A másodrendű központi differencia másodrendű közelítése egy $f \in C^4$ függvény második deriváltjának.*

## 2.2. Lépésköz dilemma és a Richardson-extrapoláció

### 2.2.1. Lépésköz dilemma

A deriváltak közelítése tart a pontos deriváltértékhez, amennyiben a lépéstávolság tart a nullához. Így elméletben várhatnánk azt, hogy minél kisebb értéket választunk a lépéstávolságnak, annál pontosabb közelítést kapunk. A gyakorlat azonban mást mutat.

**2.1. Példa.** Nézzük a $sin'(\frac{\pi}{4})$ függvény közelítését haladó differenciával!

A pontos érték: $sin'(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}) \approx 0.70710678118$.

| $h :=$ lépésköz | $\lvert$közelítés $- sin'(\frac{\pi}{4})\rvert$ |
|---|---|
| $h = 0.000001$ | 0.00000035345 |
| $h = 0.0000001$ | 0.00000003582 |
| $h = 0.0000001$ | 0.00000000304 |
| $h = 0.00000001$ | 0.00000003635 |
| $h = 0.000000001$ | 0.00000092453 |

Látható, hogy $h = 10^{-7}$-ig csökken a hiba, azonban, ha tovább csökkentjük a lépéstávolságot a pontos és becsült érték közötti különbség nőni fog.

Mi lehet ennek az oka? Erre adunk magyarázatot a továbbiakban.

Legyenek $x_1, x_2$ pontok és $f(x_1), f(x_2)$ a hozzájuk tartozó pontos függvényértékek. A dolgozatom elején említettek alapján:

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Mivel, mi nem a pontos adatokkal dolgozunk, például mérési hiábák miatt, a hibával terhelt, mért adatokat jelölje $(x_1, \widetilde{f}(x_1))$ illetve $(x_2, \widetilde{f}(x_2))$, így:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}(x_1) = f(x_1) + \delta_1 \\
&\widetilde{f}(x_2) = f(x_2) + \delta_2 \\
&|\delta_1|, |\delta_2| \leq |\delta| \text{ valamilyen } \delta\text{-ra.}
\end{aligned}$$

Ahol $\delta$ a pontos és mért adatok közti különbséget, a hibát jelöli, továbbá a lépésközt jelölje innentől: $h$.

Ekkor:

$$\frac{\widetilde{f}(x_2)-\widetilde{f}(x_1)}{h}=\frac{f(x_2)+\delta_2-f(x_1)-\delta_1}{h}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}+\frac{\delta_2-\delta_1}{h}$$

Taylor-sorfejtést alkalmazunk:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=\frac{f(x_1)+f'(x_1)h+\frac{f''(\theta)}{2!}h^2-f(x_1)}{h}=f'(x_1)+\frac{f''(\theta)}{2!}h$$

Így, $\dfrac{\widetilde{f}(x_2)-\widetilde{f}(x_1)}{h}=f'(x_1)+\dfrac{f''(\theta)}{2!}h+\dfrac{\delta_2-\delta_1}{h}$, azaz

$$\left|\frac{\widetilde{f}(x_2)-\widetilde{f}(x_1)}{h}-f'(x_1)\right|=\left|\frac{f''(\theta)}{2!}h+\frac{\delta_2-\delta_1}{h}\right|\le\frac{M_2}{2!}h+\left|\frac{\delta_2-\delta_1}{h}\right|,$$

ahol $M_2:=\max\limits_{[a,b]}|f''|$, az $f$ függvény abszolút értékben vett második deriváltjának egy felső becslése.

Mivel $\left|\dfrac{\delta_2-\delta_1}{h}\right|\le\dfrac{2\delta}{h}$, ahol $|\delta_1|,|\delta_2|\le\delta$ ezért, a hibára a következő becslést kapjuk:

$$\text{hiba}\le\frac{M_2h}{2!}+\frac{2\delta}{h}\equiv g(h) \tag{2.1}$$

Látható, hogy $\lim\limits_{h\to 0}g(h)=\infty$ és $\lim\limits_{h\to\infty}g(h)=\infty$.

Ez alapján helytálló, hogy akkor lesz minimális a hibánk, ha $h$ se nem túl nagy, se nem túl kicsi.

Amennyiben tovább számolunk $(2.1)$ egyenlőtlenségből, megkaphatjuk az optimális lépésközt.
Ehhez meg kell határoznunk, hogy a $g(h)$ függvényünk deriváltja, hol veszi fel a 0 értéket.
Legyen $\min g(h)=g(h_{OPT})$. Ezt az értéket könnyen meghatározhatjuk, ugyanis

$$g'(h)=\frac{M_2}{2}-\frac{2\delta}{h}=0.$$

Innen a keresett $h_{OPT}$ értéke:

$$h=\frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{M_2}}=2\sqrt{\delta M_2},$$

amely a minimumra az alábbi értéket adja:

$$g(h_{OPT})=\frac{M_2}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}+\frac{2\delta}{2\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{M_2}}}=2\sqrt{\delta M_2}.$$

Tehát így megkaptuk az optimális lépéstávolságot.

Ezt az előző példán alkalmazva, $M_2=1$ és $\delta=10^{-14}$ választással

$g(h_{OPT})=0.0000002$ kapunk. Ami megegyezik a $(2.1)$ példában kapott optimális $h$-val.

### 2.2.2. Richardson-extrapoláció

Az extrapoláció és interpoláció alapjaiban különbözik egymástól. Amíg az interpolációnál a köztes pontok értékei érdekelnek minket, addig az extrapolációnál $[x_1, x_n]$ intervallumon kívül eső pontok értékeire vagyunk kíváncsiak. Az extrapoláció során tehát az alappontokra egy interpolációs polinomot illesztünk, és azt értelmezzük az alappontokon kívüli tartományban lévő pontokon.

Közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldásainak pontosságát tudjuk növelni, ha a Richardson-extrapolációt és különféle numerikus módszereket együtt alkalmazunk. Richardson-extrapoláció során adott numerikus eljárással két különböző lépésközzel is kiszámoljuk a közelítő megoldást, majd ezek megfelelő lineáris kombinációjából adunk egy eggyel magasabb rendű közelítést, így az eredetinél magasabb rendben pontosabb megoldáshoz jutunk. Tehát nem azzal pontosít, hogy csökkenti a lépéstávolságot, ami az előbbiek alapján a hiba növekedéséhez vezethet.

Nézzük meg az elméleti hátterét, ahol $P$ jelölje a függvény deriváltjának pontos értékét, $B$ a centrális differencia módszerével megbecsült értéket, $E$ pedig a numerikus becslés hibáját. A két lépésköz legyen $h$ és $\frac{h}{2}$.

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$
$$E \cong \mathcal{O}(h^2) \quad \Rightarrow \quad E \cong C \cdot h^2$$
$$E = P - B$$
$$P = B + E$$
$$P \cong B_h + C \cdot h^2 \tag{2.2}$$
$$P \cong B_{\frac{h}{2}} + C \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \tag{2.3}$$

Ezek után, hogy megkapjuk az ismeretlen $P$ és $C$ értékeket meg kell oldanunk az egyenletrendszert.

$$(2.1) - (2.2) \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad -3P \cong B_h - 4B_{\frac{h}{2}} \quad \Rightarrow \quad P \cong B_{\frac{h}{2}} + \frac{B_{\frac{h}{2}} - B_h}{3}$$

**2.2. Példa.** Nézzük $f(x) = 5xe^{-2x}$ függvényt.

Keressük $f'(0.35)$ értékének megfelelő közelítést.

A pontos érték: $f'(x) = (10x-5)e^{-2x} \Rightarrow f'(0.35) = 0.74488$

A lépésköz legyen $h = 0.25$.

Nézzük a központi differenciát:

**1.** $h = 0.25$

$$f'(0.35) \cong \frac{f(0.35+0.25)-f(0.35-0.25)}{2\cdot 0.25} = \frac{0.9035-0.4094}{0.5} = 0.9880$$

**2.** $\frac{h}{2} = 0.125$

$$f'(0.35) \cong \frac{f(0.35+0.125)-f(0.35-0.125)}{2\cdot 0.125} = \frac{0.9185-0.7175}{0.25} = 0.8040$$

**3.** $h, \frac{h}{2}$-ből Richardson-extrapoláció

$$P \cong B_{\frac{h}{2}} + \frac{B_{\frac{h}{2}} - B_h}{3} \Rightarrow P \cong 0.8040 + \frac{0.8040-0.9880}{3} = 0.7427$$

**4.** $\frac{h}{4} = 0.0625$

$$f'(0.35) \cong \frac{f(0.35+0.0625)-f(0.35-0.0625)}{2\cdot 0.0625} = \frac{0.9039-0.8089}{0.125} = 0.76$$

| Mivel közelítünk? | $\lvert$közelítés $- f'(0.35)\rvert$ |
|---|---|
| $h = 0.25$ | 0.24312 |
| $\frac{h}{2} = 0.125$ | 0.05912 |
| $h, \frac{h}{2}$-ből Richardson-extrapoláció | 0.00218 |
| $\frac{h}{4} = 0.0625$ | 0.01512 |

Látjuk, hogy a pontos értéket a legnagyobb pontossággal a Richardson-extrapolációval tudjuk közelíten.

# 3. Interpolációs formulák

## 3.1. Általánosságban

Interpoláció során azt szeretnék elérni, hogy egy $f(x)$ függvényt minél pontosabban közelítsünk egy $g(x)$ függvénnyel vagy azok sorozatával úgy, hogy a $g(x)$ függvény is áthaladjon az adott alappontokon (tabulált pontokon). A módszer feltételezi a függvény bizonyos fokú simaságát, tehát, hogy $f(x)$ második deriváltjának abszolút értéke egy bizonyos értéket nem halad meg. Kétféleképpen is osztályozhatjuk az interpolációs módszereinket.

**1.** Közelítő függvények típusa szerint
   - Polinomiális: $n$ pontra egyértelműen illeszkedő $(n-1)$-ed fokú polinom, mely áthalad a tabulált pontokon.
   - Trigonometrikus: szinuszos illetve koszinuszos függvények segítségével közelítjük $f(x)$-et.
   - Racionális: két polinom hányadosával közelítünk.

**2.** Közelítő függvények tulajdonságai szerint
   - Lokális: $f(x)$ alakjára néhány $x$ körüli értékből következtetünk, ebben az esetben magasabb rendű deriváltaknál nem kapunk folytonos függvényt.
   - Globális: ebben az esetben az összes rendelkezésre álló pontot felhasználjuk.
   - Spline: hasznos, ha elvárjuk a közelítő függvény folytonosságát vagy biztosítani szeretnénk bizonyos rendű simaságát. Az interpoláló függvényt szakaszonként adjuk meg.

Lehetőségünk van arra is, hogy a keresett $f(x)$ függvény deriváltját úgy közelítsük, hogy az alappontokra illeszkedő interpolációs polinomot deriváljuk.

**3.1. Tétel.** *Az $(x_0, f_0), (x_0+h, f_1)$ pontokra illeszkedő elsőfokú interpolációs polinom deriváltja egybeesik a haladó differenciával. Az $(x_0-h, f_{-1}), (x_0, f_0)$ pontokra illeszkedő elsőfokú interpolációs polinom deriváltja egybeesik a retrográd differenciával.*

**3.2. Tétel.** *Az $(x_0-h, f-1), (x_0, f_0), (x_0+h, f_1)$ pontokra illeszkedő interpolációs polinom másodfokú deriváltja $x_0$-ban egybeesik a központi differenciával, második deriváltja pedig a másodrendű központi differenciával.*

**3.3. Tétel.** *Az $(x_0-h, f_{-1}), (x_0+h, f_1)$ pontokra illeszkedő harmadfokú spline interpolációs függvény $x_0$-pontbeli deriváltja egybeesik a központi differenciával.*

**3.4. Tétel** (Egzisztencia és unicitás)**.** *Minden rögzített $n+1$ darab ponthoz pontosan egy olyan legfeljebb n-edfokú $L_n$ polinom van, melyre*

$$L_n(x_i) = f_i \quad (i = 0, \ldots, n). \tag{3.1}$$

*Bizonyítás.* A keresett polinom legyen $L_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Ekkor az interpolációhoz a következő egyenlőségeknek kell teljesülnie $\forall i = 0, \ldots, n$-re:

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f_i.$$

Ennek az a lineáris egyenletrendszernek az együttható mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

egy Vandermonde-mátrix, amelyről tudjuk, hogy egyértelműen létezik megoldása, ha $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$, azaz a determinánsa nem 0. Ez a kezdeti feltételünk miatt teljesül. Ebből következik, hogy a polinom együtthatói egyértelműen meghatározottak. □

Megjegyzés: az unicitás belátható indirekt módon is.

*Bizonyítás.* ($P_n$ a legfeljebb $n$-edfokú polinomok halmaza.)

Tegyük fel, hogy léteznek $g, h \in P_n$ különböző polinomok, amelyek megoldásai a (3.1) egyenletnek. Tudjuk, hogy ebben az esetben $g - h \in P_n$ szintén igaz.

Definíció szerint $g(x_i) = f_i = h(x_i)$, ezért $p(x_i) = g(x_i) - h(x_i) = f_i - f_i = 0$.

Ebből következik, hogy $p$ polinomnak minden $x_i$ gyöke $(i = 0, \dots, n)$ esetén.

Az algebra alaptétele szerint egy legfeljeb $n$-ed fokú polinomnak legfeljebb $n$ darab különböző valós gyöke lehet.

Tehát $p \in P_n$-nek csak abban az esetben lehet $n+1$ darab különböző gyöke, ha $p(x)$ az azonosan nulla polinom. Ekkora viszont $p = g - h = 0$ egyenlőségből következik, hogy $g = h$. Így ellentmondásra jutottunk, mivel indirekt feltevésünk miatt g és h nem azonosak.

□

## 3.2. Lagrange-féle interpoláció (globális polinominterpoláció)

Megmutattuk, hogy létezik egyetlen interpolációs polinom. A továbbiakban megkonstruáljuk ezt a polinomot.

**3.5. Definíció** (Lagrange-féle alappolinom)**.** Adott $x_k, (k = 0, \dots, n)$ alappontok esetén az

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}$$

polinomot a $k$-adik alapponthoz tartozó Lagrange-féle alappolinomnak nevezzük.

**3.6. Definíció** (Alappontpolinom)**.**

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$$

$(n+1)$-ed fokú $w_{n+1}(x)$ polinomot, alappontpolinomnak nevezzük.

Alappontpolinom deriváltja a szorzat deriválási szabálya miatt:

$$w'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)$$

ezért

$$w'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j).$$

Az alappontpolinom deriváltjába $x_k$ alappontot helyettesítve, a Lagrange-féle alappolinom egy másik alakját kapjuk:

$$l_k(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_k) w'_{n+1}(x_k)}.$$

**3.7. Tétel.** *Az interpolációs polinom $(n+1)$ alappont esetén*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$$

*alakban írható.*

Hibája:

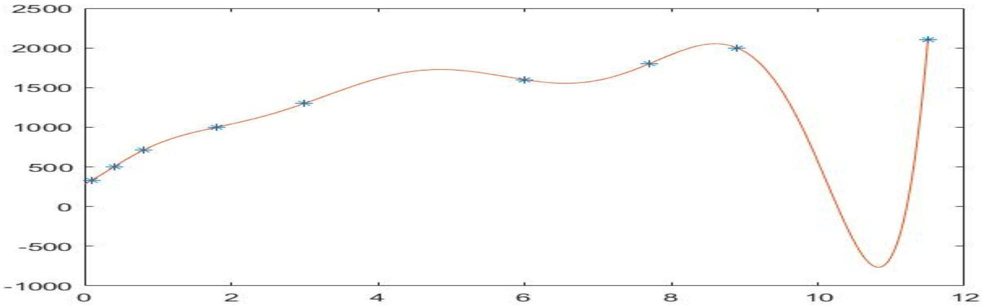
A Lagrange-féle interpoláció természetesen magasabb rendű konvergenciát biztosít, mint a lineáris interpoláció. A lineáris interpoláció a legegyszerűbb interpoláció, mely során az a durva feltételezésünk, hogy két pont közötti összefüggés egyenes arányossággal írható le. Másik előnye a lineáris interpolációval szemben, hogy deriváltjai folytonosak. A lineáris interpolációról bővebben írok a 3.6 fejezetben.

Hátrányának tudható be, hogy újra kell számolni minden olyan esetben, amikor új alappontot veszünk fel. Továbbá bizonyos esetekben, ha $f(x)$ közelítendő függvény nem polinomiális, erőteljes hullámzást láthatunk a Lagrange-féle interpolációs polinom grafikus képében két egymást követő pont között. A jelenség azzal magyarázható, hogy a közelítő polinom lokális minimumokat és maximumokat érint annak érdekében, hogy eleget tegyen az összes pont érintési követelményének.

Erre a hullámzásra, oszcillációs jelenségre vagy másnéven Runge jelenségre láthatunk példát az alábbi ábrán. A programnak a következő adatpontokat adtuk meg:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0.1 | 0.4 | 0.8 | 1.8 | 3 | 6 | 7.7 | 8.9 | 11.5 |
| y | 330 | 500 | 710 | 1000 | 1300 | 1600 | 1800 | 2000 | 2100 |

A kék csillagok a kiindulási adatainkat mutatja, a piros görbe pedig az erre adott interpolációt ábrázolja, egyértelmű, hogy ez nem lesz jó közelítés. A megadott függvényértékek nem adnak indokot $x = 8.9$ és $x = 11.5$ közötti, az ábrán is látható erőteljes csökkenésre majd gyors növekedésre, hullámzásra.



Shamir-féle titokmegosztás (SSS):

Ez egy olyan kriptográfiai algoritmus, amelynél a titok több részre van osztva, és minden „résztvevőnél” más titok darab található. Az eredeti titok felfedéséhez néhány vagy az összes titokrészletre szükség van. Könnyen beláthatjuk, hogy nem szerencsés az az eset, amikor az összes titok darab kell a megfejtéshez, gondoljunk csak a kalózokra. Amennyiben a kincsestérképet úgy vágják szét, hogy minden darabjára szükség van a kincs megtalálásához és egy valaki vízbe esik egy tengeri összecsapás során, máris oda a kincs. Azonban, ha úgy osztják szét például 6-an egymást közt, hogy 3 tetszőleges darab elég a kincs helyének meghatározására, 3 kalózt 'nyugodtan' elnyelhet a tenger, a kincs akkor is megtalálható.

Legyen a titok $S$, ezt $n$ részre osztják, $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Alapgondolata az, hogy bármely $k$ vagy több részlet ismeretében megtudható a titok, Azonban $k-1$ vagy kevesebb esetén meghatározhatatlan. Ezt a sémát $(k,n)$ tűréshatárnak nevezzük, ha $k = n$, akkor minden résztvevőre szükség van a titok megfejtéséhez. Továbbá feltesszük, hogy a titok maga egy szám, vagy azzá alakítható.

Lagrange-féle interpoláció gondolatán alapszik, hiszen itt is arról van szó, hogy $k$ pont elég, hogy egyedien meghatározzon egy $k-1$ vagy kisebb fokú polinomot.

Ahhoz, hogy $S$-t részekre bontsuk, felveszünk véletlenszerűen egy $(k-1)$-ed fokú $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}$ polinomot, ahol $a_0 = S$. Továbbá kiértékeljük ezt az $f(x)$ egyenletet az $S_1 = f(1), \ldots, S_n = f(n)$ pontokban. Ez alapján minden résztvevő kap egy pontot, egy bemenetiértéket és az arra az $f(x)$ polinommal kiszámolt értéket.

$S_i$ bármely $k$ részhalmazára ki tudjuk számolni $f(x)$ együtthatóit interpoláció útján, ezt követően pedig meg tudjuk határozni $S = f(0) = a_0$-t is, magát a teljes titkot. Azonban, ha csak $k-1$ méretű részhalmazát ismerjük, az nem lesz elegendő a titok felfedésére.

**3.1. Példa.** Legyen a titok egy széf 4 jegyű kódja, $S = 5396$. Szeretnénk ezt egy 7 tagú család tagjai között szétbontani, úgyhogy, hogy 4-en már fel tudják oldani a zárat. Így véletlenszerűen választunk egy $(k-1) = (4-1) = 3$-ad fokú polinomot. Legyen $f(x) = 5396 + 241x + 79x^2 + 590x^3$.

A létrehozott 7 pont a következő, amit a családtagok kapnak:

$$\begin{aligned}
\text{Anya} &: (1, f(1)) = (1, 6306) \\
\text{Apa} &: (2, f(2)) = (2, 10914) \\
\text{Bence} &: (3, f(3)) = (3, 22760) \\
\text{Dóra} &: (4, f(4)) = (4, 45384) \\
\text{Marci} &: (5, f(5)) = (5, 82326) \\
\text{Júlia} &: (6, f(6)) = (6, 137126) \\
\text{Panna} &: (7, f(7)) = (7, 213324)
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy apa, Bence, Dóra és Panna úgy döntenek kifosztják a családi széfet. Így tehát a Lagrange-polinomot: $(x_0, y_0) = (2, 10914), (x_1, y_1) = (3, 22760), (x_2, y_2) = (4, 45384)$, $(x_3, y_3) = (7, 213324)$ pontokból kell meghatározniuk.

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Először is $l_k(x)$ képletéből kell, kiszámolniuk $l_0, l_1, l_2$ és $l_3$ polinomokat.

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-3)(x-4)(x-7)}{(2-3)(2-4)(2-7)} = -\frac{(x^3-14x^2+61x-84)}{10}$$
$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(3-2)(3-4)(3-7)} = \frac{(x^3-13x^2+50x-56)}{4}$$
$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-7)}{(4-2)(4-3)(4-7)} = -\frac{(x^3-12x^2+41x-42)}{6}$$
$$l_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(7-2)(7-3)(7-4)} = \frac{(x^3-9x^2+26x-24)}{60}$$

Ezt követően pedig egy behelyettesítés választja el őket az interpolációs polinomtól és a kód felfedésétől.

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k l_k(x) = 590x^3 + 79x^2 + 241x + 5396$$

Ahonnan $f(0) = 5396$ könnyedén kiolvasható.

## 3.3. Baricentrikus interpolációs formula (globális polinominterpoláció)

A Lagrange-féle interpolációs polinomot, mint már említettük, minden alkalommal újra kell számolni, ha új alappont kerül felvételre. Azonban a formulát kicsit átalakítva egy sokkal jobban használható alakot nyerünk, az úgynevezett baricentrikus interpolációs formulát. Ebben a formulában, mint látni fogjuk, lényegesen kevesebb számolást igényel, ha új alapponttal bővítünk.

A baricentrikus interpolációban a Lagrange-féle alappolinomok főegyütthatói mint baricentrikus súlyok ($q_k$, $k = 0, \ldots, n$) szerepelnek.

$$q_k = \frac{1}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} = \frac{1}{w'_{n+1}(x_k)}$$

Ha ezt behelyettesítjük a Lagrange-féle előállításba, akkor

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k \frac{w_{n+1}(x)}{x-x_k} = w_{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k q_k}{x-x_k}$$

alakot kapjuk. Mivel ez a kapott alak nem más, mint az $(x_k, 1)$ pontokhoz tartozó interpolációs polinom, ami az interpolációs polinom egyértelműsége miatt nem lehet más, csak a konstans 1 polinom. Így helyes a következő ekvivalencia:

$$w_{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{x-x_k} \equiv 1.$$

Ezért fel tudjuk írni a baricentrikus interpolációs formulát.

$$L_n(x) = \frac{L_n(x)}{1} = \frac{w_{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f_k q_k}{x-x_k}}{w_{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{q_k}{x-x_k}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f_k q_k}{x-x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{q_k}{x-x_k}}$$

**3.2. Példa.** Vegyük fel a következő pontokat: $(0,5),(2,7),(5,2)$. Adjuk meg a hozzájuk tartozó interpolációs polinomot!

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{(-2)\cdot(-5)} = \frac{1}{10} \\ q_1 &= \frac{1}{(2)\cdot(-3)} = -\frac{1}{6} \\ q_2 &= \frac{1}{(5)\cdot(3)} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$L(x) = \frac{5\cdot\frac{1}{10(x-0)} - 7\cdot\frac{1}{6(x-2)} + 2\cdot\frac{1}{15(x-5)}}{\frac{1}{10(x-0)} - \frac{1}{6(x-2)} + \frac{1}{15(x-5)}} = \frac{-8x^2+31x+75}{15}$$

Most vegyük fel a $(4,8)$ alappontot.

$$\begin{aligned} \widetilde{q_0} &= q_0\cdot\frac{1}{-4} = -\frac{1}{40} \\ \widetilde{q_1} &= q_1\cdot\frac{1}{-2} = \frac{1}{12} \\ \widetilde{q_2} &= q_2\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{15} \\ \widetilde{q_3} &= \frac{1}{4\cdot 2\cdot(-1)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\widetilde{L(x)} = \frac{-5\cdot\frac{1}{40(x-0)} + 7\cdot\frac{1}{12(x-2)} + 2\cdot\frac{1}{15(x-5)} - 8\frac{1}{8(x-4)}}{-\frac{1}{40(x-0)} + \frac{1}{12(x-2)} + \frac{1}{15(x-5)} - \frac{1}{8(x-4)}} = \frac{-49x^3+279x^2-242x+600}{120}$$

Látjuk, hogy a bővítés során mindössze néhány plusz szorzásra volt szükségünk és nem kellett a számolást az elejéről kezdenünk.

## 3.4. Interpoláció Newton-féle osztott differenciákkal (globális polinominterpoláció)

A Newton-féle interpolációs polinomot a következő alakban keressük:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i w_i(x). \tag{3.2}$$

Nyilvánvalóan a tagokban szereplő polinomok lineárisan függetlenek, ebből következik, hogy minden, legalább $n$-ed fokú polinom egyértelműen felírható ebben az alakban. Tehát egyértelműen léteznek olyan $c_0, \ldots, c_n$ konstansok, hogy az (3.2) polinom, az interpolációs polinomot adja. Ezek a $c$ együtthatókat az interpolációs feltételekből határozzuk meg.

A kiszámítás módja a következő:

- $x = x_0$

$$\begin{aligned} f(x_0) = L_n(x_0) = c_0 + c_1(x_0 - x_0) + c_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \ldots &= c_0 \\ c_0 &= f(x_0) \end{aligned}$$

- $x = x_1$

$$\begin{aligned} f(x_1) = L_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \ldots \\ f(x_1) &= f(x_0) + c_1(x_1 - x_0) \\ c_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

(A $c_1$ együttható tulajdonképpen megegyezik az egyenes meredekségével $x_0$ pontban.)

Így meghatározható a többi $c$ konstansunk is, azonban az így kapott képletek egyre nehezebben lesznek értelmezhetők. Annak érdekében, hogy tetszőleges $k$-ra, $c_k$ együtthatót elő tudjunk állítani, definiáljuk az osztott differenciákat.

**3.8. Definíció** (Newton-féle osztott differencia)**.** Legyenek adva $(x_j, f_j), j = 1, \ldots, s$ pontok $(x_{j_1} \neq x_{j_2}$, ha $j_1 \neq j_2)$. Ekkor az

$$f[x_1, \ldots, x_s] = \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j}{(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_s)}$$

számot az $(x_1, f_1)\ldots(x_s, f_s)$ pontokhoz tartozó $(s-1)$-ed rendű Newton-féle osztott differenciának nevezzük. A nulladrendű osztott differenciát, ha csak egy adott pont szerepel, $f[x_i] = f_i$ módon értelmezzük.

| $x$ | $f(x)$ | Elsőrendű osztott differenciák | Másodrendű osztott differenciák | Harmadrendű osztott differenciák |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f[x_0]$ | | | |
| | | $f[x_1,x_0] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ | | |
| $x_1$ | $f[x_1]$ | | $\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$ | |
| | | $f[x_2,x_1] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$ | | $\frac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0}$ |
| $x_2$ | $f[x_2]$ | | $\frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$ | |
| | | $f[x_3,x_2] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_3}$ | | $\frac{f[x_4,x_3,x_2]-f[x_3,x_2,x_1]}{x_4-x_1}$ |
| $x_3$ | $f[x_3]$ | | $\frac{f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_4-x_2}$ | |
| | | $f[x_4,x_3] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$ | | $\frac{f[x_5,x_4,x_3]-f[x_4,x_3,x_2]}{x_5-x_2}$ |

1. táblázat. Differencia táblázat

**3.9. Definíció.**

- Elsőrendű osztott differencia:

$$c_1 = f[x_1,x_0] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

- Másodrendű osztott differencia:

$$c_2 = f[x_2,x_1,x_0] = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = \frac{f[x_1,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}.$$

- Megmutatható, hogy a $k$-adrendű osztott differencia:[2]

$$c_k = f[x_k,\dots,x_0] = \frac{f[x_k,\dots,x_1]-f[x_{k-1},\dots,x_0]}{x_k-x_0}.$$

**3.10. Tétel.** *Az interpolációs polinom (3.2) alakjában szereplő $c_k$ $(k=0,\dots,n)$ együtthatók a*

$$c_k = f[x_0,\dots,x_k]$$

*képlettel számíthatók ki.*

Így az interpolációs polinom Newton-féle alakja:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$
$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{k=0}^{j-1}(x-x_k)\Big)f[x_0,x_1,\dots,x_j].$$

**3.11. Tétel.** *Az osztott differencia értéke független az $y_j,(j=1,\dots,s)$ pontok sorrendjétől. Továbbá igaz a következő egyenlőség:*

$$f[y_1,\dots,y_s] = \frac{f[y_1,\dots,y_s]-f[y_1,\dots,y_{s-1}]}{y_s-y_1}.$$

[2] Bizonyítás: Faragó István, Horváth Róbert: Numerikus módszerek(155-156.oldal)

**3.3. Példa.** Nézzünk egy gyakorlati példát:

A növényi olaj termelése a következő módon lett feljegyezve:

| Év | $1990-91$ | $1992-93$ | $1994-95$ | $1996-97$ | $1998-99$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Termelt mennyiség (tonna) | 35.5 | 42.8 | 45.8 | 46.5 | 50.3 |

Becsüljük meg a termelést 1997 és 1998 között!

A lépéstávolság ($h$) egyértelműen 2.

$x$ legyen 1997 és $x_0 = 1990$ (, ha $x = 1998$ és $x_0 = 1991$ ugyanaz a kapott eredmény).

$$(x - x_0) = 1997 - 1990 = 7$$

A feladat differencia táblája:

| Év | Termelés | Első rendű osztott differencia | Másod rendű osztott differencia | Harmad rendű osztott differencia | Negyed rendű osztott differencia |
|---|---|---|---|---|---|
| 90-91 | 35.5 | 3.65 | -0.5375 | 0.04167 | 0.008854 |
| 92-93 | 42.8 | 1.5 | -0.2875 | 0.1125 | |
| 94-95 | 45.8 | 0.35 | 0.3875 | | |
| 96-97 | 46.5 | 1.9 | | | |
| 98-99 | 50.3 | | | | |

$$c_0 = 35.5$$
$$c_1 = 3.65$$
$$c_2 = -0.5375$$
$$c_3 = 0.04167$$
$$c_3 = 0.008854$$

Ahhoz, hogy megkapjuk $f(x)$ értékét, ki kell számolnunk az oszott differenciát. Newton-féle interpolációs formulát alkalmazva:

$$f(x) = 35.5 + (3.65)\cdot(7) + (-0.5375)\cdot(7)\cdot(5) + (0.04167)\cdot(7)\cdot(5)\cdot(3) + (0.008854)\cdot(7)\cdot(5)\cdot(3)\cdot(1)$$

$$f(x) = 35.5 + 25.55 - 18.8125 + 4.37535 + 0.92967 = 47.543$$

Így tehát:

Termelés $(1997-98) = 47.543$ tonna.

## 3.5. Hermite-interpoláció

Tegyük fel, hogy az $(n+1)$ alappontbeli függvényértékeken kívül ismerjük még bizonyos fokig az alappontbeli deriváltak értékeit is, $(f_k^0, f_k^1, \ldots, f_k^{m_k})$, tehát az eddigieken felül még $(m_k+1)$ darab számérték áll rendelkezésünkre. Keressünk olyan $H$ polinomot melyre

$$H^{(i)}(x_k) = f_k^{(i)} \quad (k = 0, \ldots, n \text{ és } i = 0, \ldots m_k).$$

Ez a Hermite-féle interpolációs eljárás. Amennyiben az első deriváltak ismertek, Hermite-Fejér interpolációnak nevezzük.

**3.12. Tétel.** *Egyértelműen létezik egy olyan $H_{N-1}$ legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinom, amely teljesíti a*

$$H_{N-1}^{(i)}(x_k) = f_k^{(i)} \quad (k = 0, \ldots, n \text{ és } i = 0, \ldots m_k)$$
$$N = m_0 + m_1 + + \ldots m_{n-1}$$

*feltételeket.*

Amennyiben $H_{N-1}(x_k) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{N-1} x^{N-1}$ alakú, az együtthatók meghatározásához a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{N-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (N-1)x_0^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (N-1)x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(0)} \\ f_0^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_1^{(0)} \\ f_1^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

## 3.6. Spline-féle interpoláció

Nem meglepő, hogy számíthatunk az oszcilláció jelenségére két pont között a keresett függvényünkben, és ha ezeket az interpoláló függvényünk nem „találja meg”, az nagy hibát okozhat. A Runge-hatás kiküszöbölésére jó megoldást jelenthetnek a Csebisev-csomópontok. (Runge-hatásnak nevezzük azt a jelenséget, amikor az intervallum szélein oszcillációt tapasztalunk a polinom interpolációnál.) Azonban, ha például mérünk, és rögzítettek azok a pontok, amiket ismerünk, a Csebisev-csomópontok nem lesznek segítségünkre. Erre a problémakörre adhat megoldást a szakaszonkénti polinomiális interpoláció, más néven a spline interpoláció. Alapgondolata, hogy két szomszédos alappontja közti szakaszon egy alacsony fokszámú polinommal közelít.

**1.** Szakaszonkénti lineáris interpoláció:

Egyenes szakaszokkal kapcsoljuk össze a szomszédos pontokat.

Képlete: ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ továbbá $f_0, \ldots, f_n$ a függvényértékeket jelöli)

$$s_k(x) = f_{k-1}\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f_k\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \quad \text{ahol:} \begin{cases} k = 1, \ldots, n \\ x \in [x_{k-1}, x_k] \end{cases}$$

Az így nyert függvény folytonos lesz, hiszen $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k) = f_k$. Viszont a kapott függvény nem lesz deriválható a teljes $[x_0, \ldots, x_n]$ intervallumon, a szakaszonkénti lineáris interpoláció deriváltja nem lesz folytonos.

**2.** Szakaszonként kvadratikus interpoláció:

- Legyen $d_0$ $s$ interpolációs függvény deriváltjának értéke $x_0$-ban.
- Az első $[x_0, x_1]$ szakaszon Hermite-interpolációt alkalmazzunk. Így egyértelműen kapunk egy olyan $s_1$ legfeljebb másodfokú polinomot, melyre $s_1(x_0) = f_0$, $s_1'(x_1) = d_0$ és $s_1(x_1) = f_1$.
- Legyen $d_1 = s_1'(x_1)$, és Hermite-interpolációt használjunk $[x_1, x_2]$ szakaszon. Ez meghatároz egy $s_2$ legfeljebb másodfokú polinomot az előzőhöz hasonlóan.
- Ezzel a sémával folytassuk végig az összes szakaszon, ekkor az így kapott függvény és annak deriváltja is folytonos lesz.

**3.** Köbös másodrendű spline:

A gyakorlatban nagyon sokszor találkozhatunk ezzel a módszerrel, amely során az egymást követő pontok harmadfokú polinomokkal vannak összekötve. Szükséges feltétele, hogy kétszer folytonosan deriválható legyen a függvény. Nézzük meg a levezetést az általános harmadfokú polinom képlete alapján.

Ebben az esetben úgy illesztünk polinomot két szomszédos pont közé, hogy a csatlakozási pontokban megegyezik a függvény első és második deriváltja is. Minden harmadfokú polinomnak 4 ismeretlen együtthatója van, $n$ pont esetén pedig $(n-1)$ szakaszunk van. Tehát összesen $4 \cdot (n-1) = 4n - 4$ ismeretlenünk van.

- Minden polinomnak át kell mennie a szakasz végpontján, abból $2 \cdot (n-1)$, szakaszonként 2 egyenlet írható fel $ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakban.
- A közbülső $(n-2)$ pontban megegyeznek az első deriváltak, erre $(n-2)$ egyenletet lehet felírni $3ax^2 + 2bx + c$ alakban.

- A közbülső $(n-2)$ pontban megegyeznek a második deriváltak is, erre is fel lehet írni $(n-2)$ darab $6ax+2b$ alakú egyenletet.
- Ez eddig $(4n-6)$ darab egyenlet, az utolsó 2 egyenlet felírására több lehetőségünk is van.
  (a) „Természetes köbös spline”:
  A végpontokban a második deriváltakat 0-nak vesszük. Ez azt fogja eredményezni, hogy az első és utolsó szakasz egyenes lesz.
  (b) „Nem csomópont”:
  $x_2$ és $x_{n-1}$ pontban a harmadik deriváltak is megegyeznek.Tehát az első három és az utolsó három pontra egy-egy polinomot illesztünk. A neve abból ered, hogy az első és utolsó előtti pontok nem igazi csomópontok. (Matlab beépített ’spline’ függvénye is ezt az elvet követi.)

Ez a módszer is folytonosan deriválható interpolációs függvényt ad. Belátható, hogy a $d_0,\dots,d_n$ deriváltértékek alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a másodrendű deriváltak is folytonosak legyenek.[3]

[3]Faragó István, Horváth Róbert: Numerikus módszerek (167-168.oldal)

# 4. Különböző interpolációs módszerek deriváltjainak köztes érték vizsgálata

Ebben a fejezetben különböző interpolációs poinomok deriváltjait vizsgáljuk kétféleképpen:

1. Az interpolációs polinomnak alappontként szolgáló adatok a függvény értékek közül lesznek kiválasztva. Majd az így kapott interpolációs polinomot deriváljuk.
2. Az interpolációs polinomnak alappontként szolgáló adatok a derivált függvény értékek közül lesznek kiválasztva.

Ezeket a kiszámított értékeket fogjuk összehasonlítani az eredeti függvény derivált értékeivel.

## 4.1. Mit várunk?

**4.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az $f \in C^{m+1}(I)$ függvényt interpoláljuk az $x_0, \ldots, x_n$ alappontokban, ahol $I = [x_{min}, x_{max}]$. Ekkor egy tetszőleges $x \in I$ pontban az interpolációs hiba az*

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

*alakban írható, ahol $\xi_x$, egy az $I$ inntervallum belsejébe eső megfelelő konstans (az $x$ index arra utal, hogy az érték függ az $x$ pont megválasztásától).*

Az interpolációs hiba viselkedése a két esetünknél:

1. Az első esetnél, (amikor az $L_n$ inteprolációs polinomnak alappontként a függvény értékek közül kiválasztott adatok szolgálnak, majd deriváljuk a kapott közelítő polinomot) az interpolációs hiba a következő:

$$f'(x) - L_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot w_{n+1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot w_{n+1}'.$$

   Probléma, hogy se $\xi_x$-t, se $\xi_x'$-et nem ismerjük, így ezt nehezn tudjuk becsülni.

2. A második esetnél, (amikor az $L_n$ interpolációs polinomnak a derivált függvény értékek közül kiválasztott adatok szolgálnak alapponként) az interpolációs hiba következő:

$$f'(x) - L_n(x)_{der} = \frac{f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot w_{n+1}(x).$$

   Ezt már felülről tudjuk becsülni a következő módon:

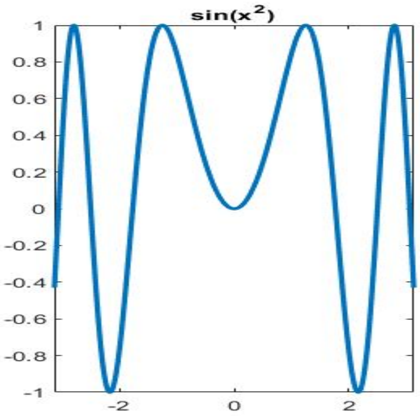
$$|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+2}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

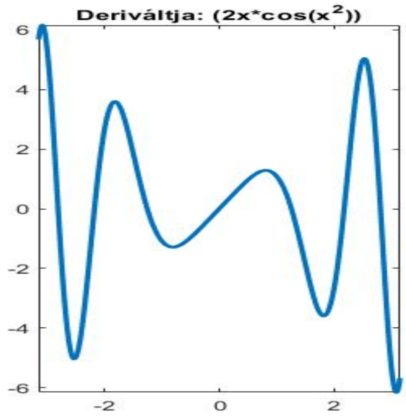
   $M_{n+2} := |f^{(n+2)}|$-nek a maximuma $[a,b]$-n.

Az a sejtésünk, hogy a második eset pontosabb eredményt fog adni, mivel nagyságrendileg $\sim c \cdot x^{n+1}$, ha $a \to b$, valamilyen $c$ konstansra. Nézzük meg egy konkrét példán mit tapasztalunk, melyik módszerrel sikerül pontosabb eredményt elérnünk.

**4.1. Példa.** Tekintsük a következő függvényt: $sin(x^2)$! Ennek első deriváltja: $2x \cdot cos(x^2)$.

Ezek gráfjai a következők:




## 4.2. Az interpolációs polinomnak alappontként szolgáló adatok a függvény értékek közül lesznek kiválasztva. Majd az így kapott interpolációs polinomot tovább deriváljuk.

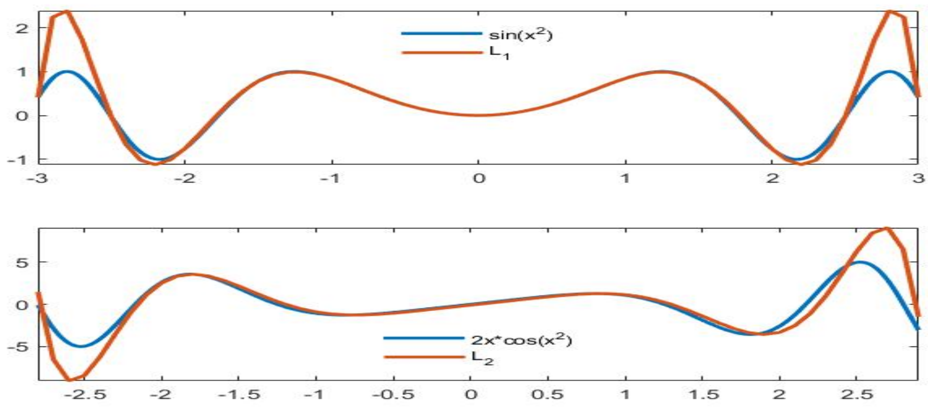
Az összes interpoláló függvénynek a következő adatokat adjuk meg:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | $-2.5$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | 0.5 | 0 |
| 0.412118 | $-0.0331792$ | $-0.756802$ | 0.778073 | 0.841471 | 0.247404 | 0 |
| 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | |
| 0.247404 | 0.841471 | 0.778073 | $-0.756802$ | $-0.0331792$ | 0.412118 | |

Felhasznált módszerek:

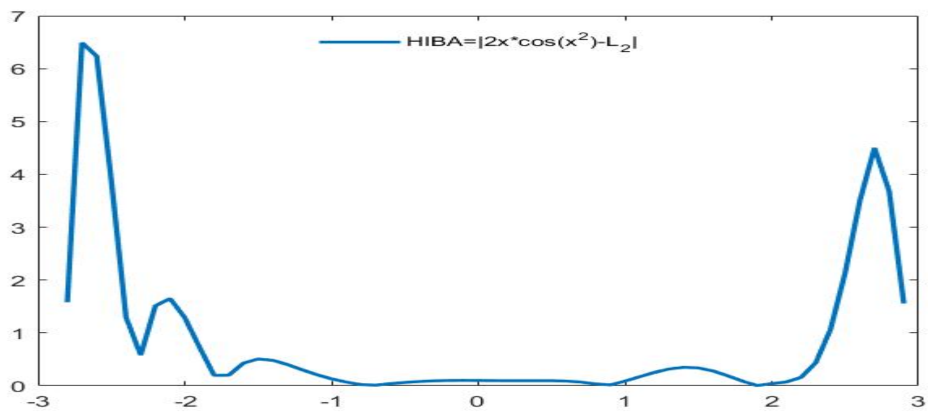
- Lagrange-féle interpoláció
- Newton-féle interpoláció
- Köbös spline interpoláció
- Haladó differencia
- Retrográd differencia
- Központi differencia

### 4.2.1. Lagrange-féle interpoláció




Az 1.ábrán a $sin(x^2)$-et (kékkel), illetve az alappontokra illesztett $L_1$, Lagrange-féle interpolációs polinomot (pirossal) láthatjuk. Míg a 2.ábrán a $2xcos(x^2)$-et (kékkel), illetve az $L_1$ polinom első deriváltját, $L_2$-t láthatjuk (pirossal).

A következő képen, pedig a pontos derivált és az interpolációs polinom deriváltjának különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

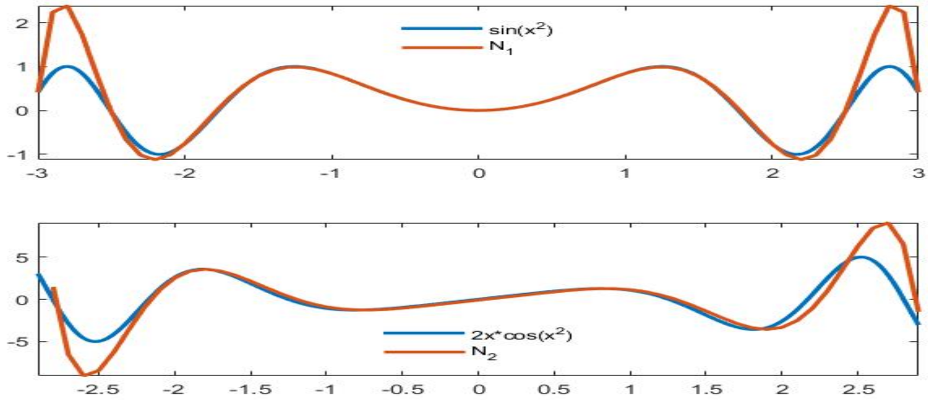



A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 6.4894.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 0.8405.

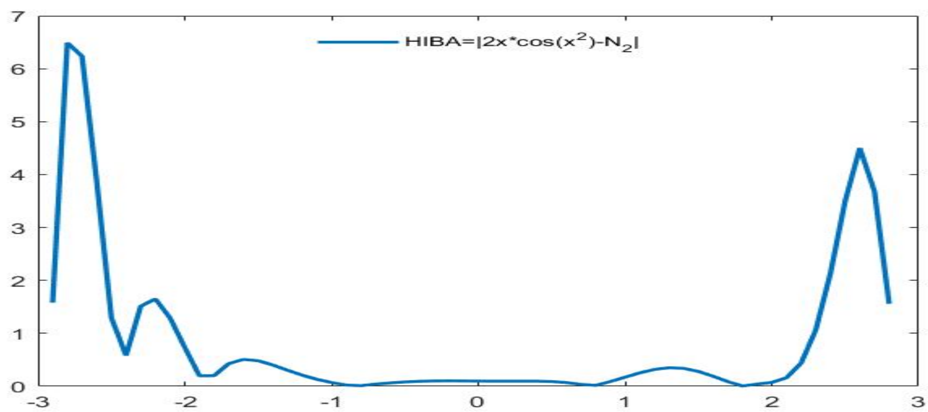
Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.1993.

#### 4.2.2. Newton-féle interpoláció




Az 1.ábrán a $sin(x^2)$-et (kékkel), illetve az alappontokra illesztett $N_1$, Newton-féle interpolációs polinomot (pirossal) láthatjuk. Míg a 2.ábrán a $2xcos(x^2)$-et (kékkel), illetve az $N_1$ polinom első deriváltját, $N_2$-t láthatjuk (pirossal).

A következő képen, pedig a pontos derivált és az interpolációs polinom deriváltjának különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

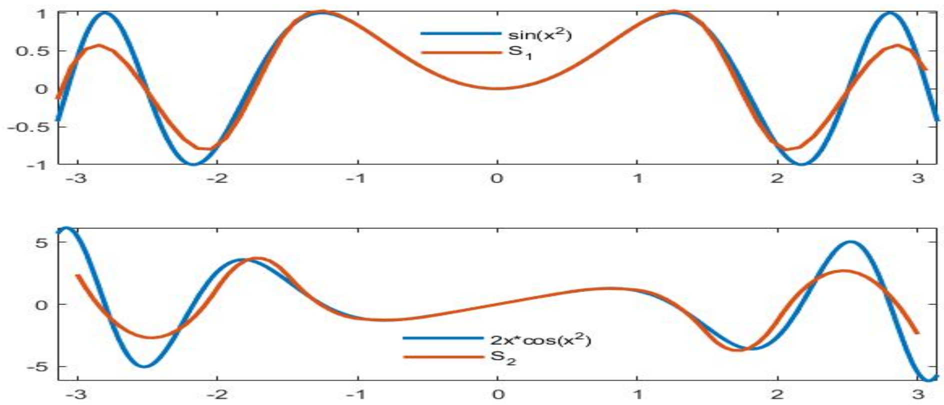



A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 6.4894.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 0.8405.

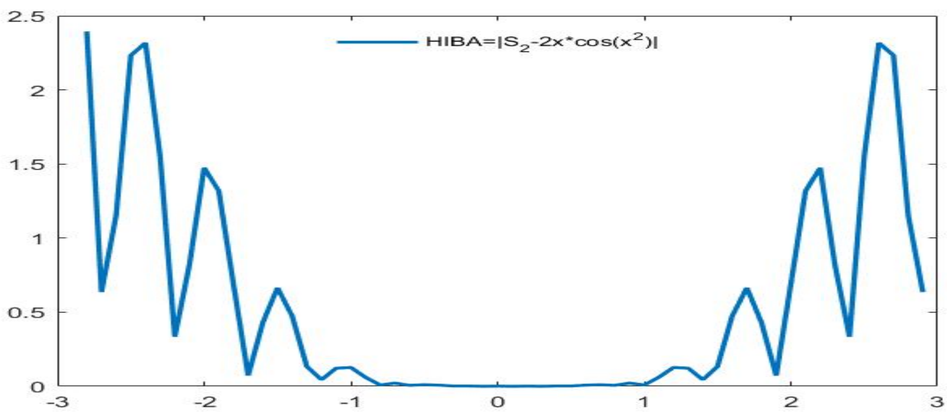
Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.1993.

#### 4.2.3. Köbös spline interpoláció




Az 1.ábrán a $sin(x^2)$-et (kékkel), illetve az alappontokra illesztett $S_1$, Spline-féle interpolációs polinomot (pirossal) láthatjuk. Míg a 2.ábrán a $2xcos(x^2)$-et (kékkel), illetve az $S_1$ polinom első deriváltját, $S_2$-t láthatjuk (pirossal)

A következő képen, pedig a pontos derivált és az interpolációs polinom deriváltjának különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

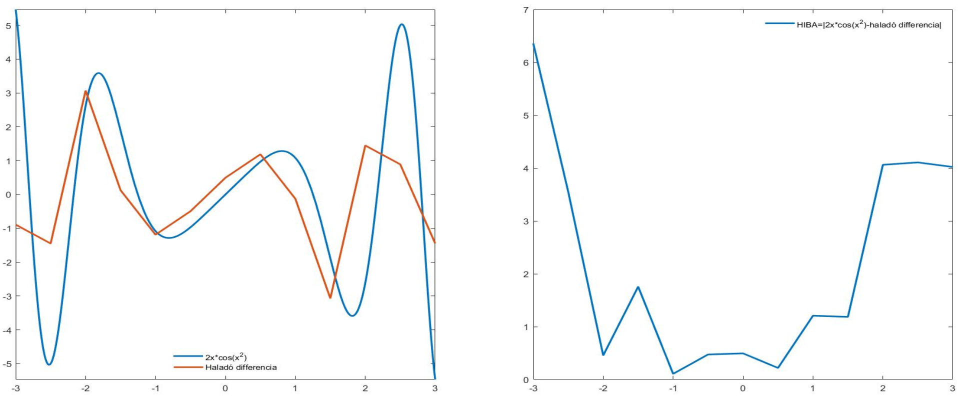



A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 0.5487.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 2.3943.

Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.1304.

### 4.2.4. Haladó differencia



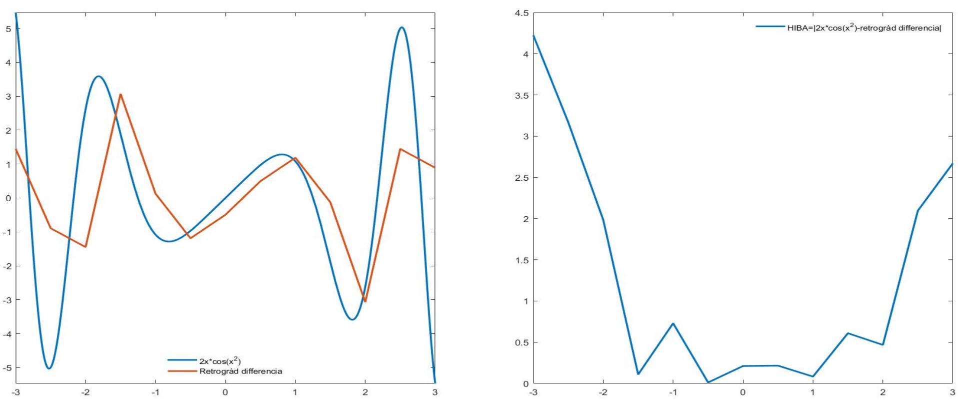

A bal oldali ábrán $sin(x^2)$-et (kékkel), illetve az alappontokra illesztett haladó differenciával kiszámított értékeket (pirossal) láthatjuk. A jobb oldali ábrán pedig a pontos derivált és a haladó differencia különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 6.3574.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 2.1536.

Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 1.2074.

### 4.2.5. Retrográd differencia



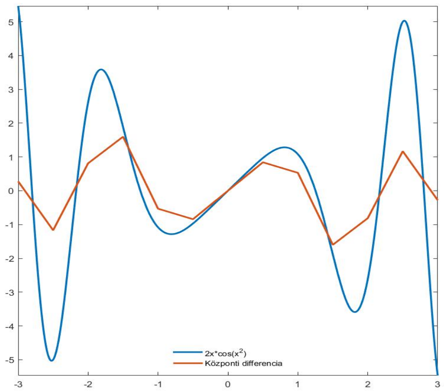

A bal oldali ábrán $sin(x^2)$-et (kékkel), illetve az alappontokra illesztett retrográd differenciával kiszámított értékeket (pirossal) láthatjuk. A jobb oldali ábrán pedig a pontos derivált és a retrográd differencia különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

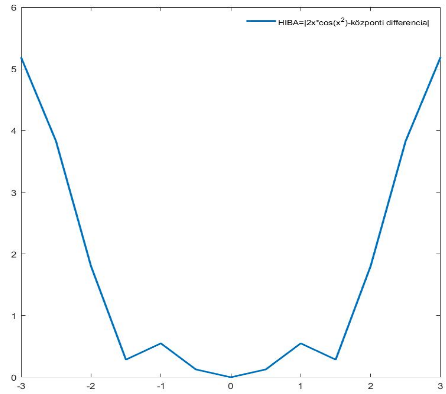
A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 4.2253.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 1.2756.

Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.6096.

### 4.2.6. Központi differencia




A bal oldali ábrán $sin(x^2)$-et (kékkel), illetve az alappontokra illesztett központi differenciával kiszámított értékeket (pirossal) láthatjuk. A jobb oldali ábrán pedig a pontos derivált és a központi differencia különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 5.1888.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 1.8129.

Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.5499.

## 4.3. Az interpolációs polinomnak alappontként szolgáló adatok a derivált függvény értékek közül lesznek kiválasztva.

Az összes interpoláló függvénynek a következő adatokat adjuk meg:

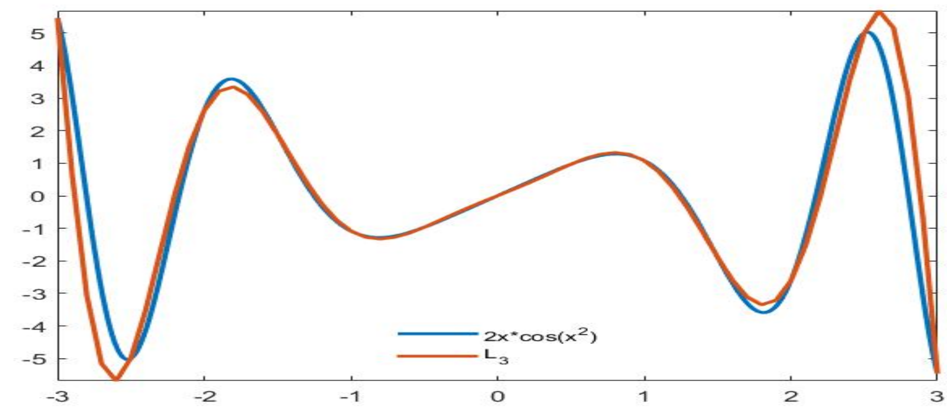
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | $-2.5$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $0.5$ | $0$ |
| $5.4668$ | $-4.9972$ | $2.6146$ | $1.8845$ | $-1.0806$ | $-0.9689$ | $0$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0.5$ | $1$ | $1.5$ | $2$ | $2.5$ | $3$ | |
| $0.9689$ | $1.0806$ | $-1.8845$ | $-2.6146$ | $4.9972$ | $-5.4668$ | |

Felhasznált interpolációs módszerek:

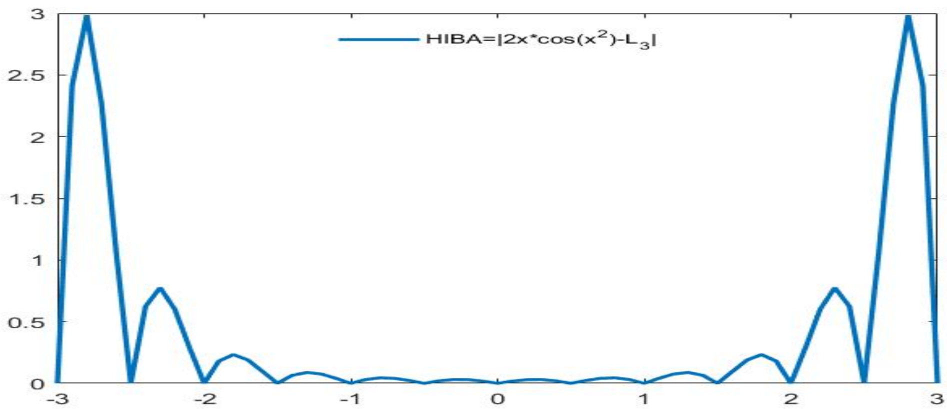
- Lagrange-féle interpoláció
- Newton-féle interpoláció
- Köbös spline interpoláció

#### 4.3.1. Lagrange-féle interpoláció




A fennti ábrán $2xcos(x^2)$-et (kékkel), illetve az új alappontokra illesztett $L_3$, Lagrange-féle interpolációs polinomot (pirossal) láthatjuk.

A következő képen, pedig a pontos derivált és az interpolációs polinom deriváltjának különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

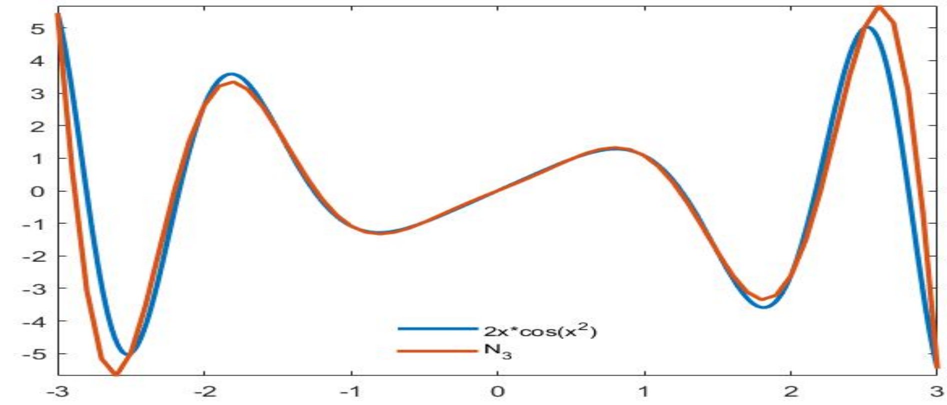



A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 2.9852.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 0.4008.

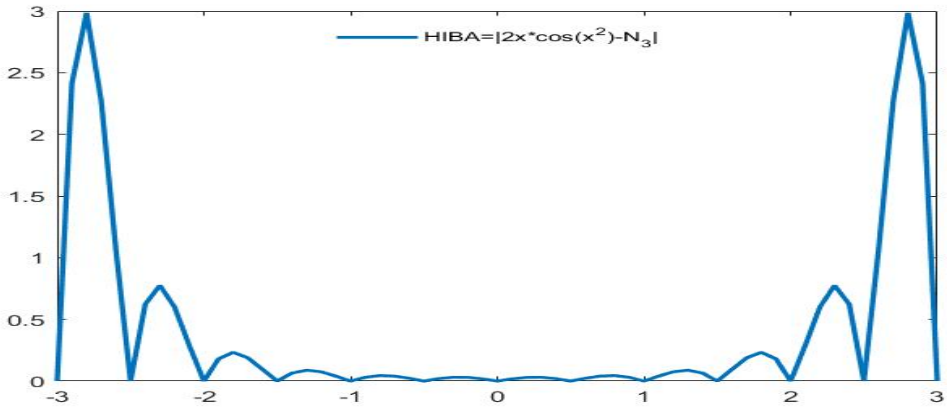
Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.0445.

### 4.3.2. Newton-féle interpoláció




A fenni ábrán $2xcos(x^2)$-et (kékkel), illetve az új alappontokra illesztett $N_3$, Newton-féle interpolációs polinomot (pirossal) láthatjuk.

A következő képen, pedig a pontos derivált és az interpolációs polinom deriváltjának különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.

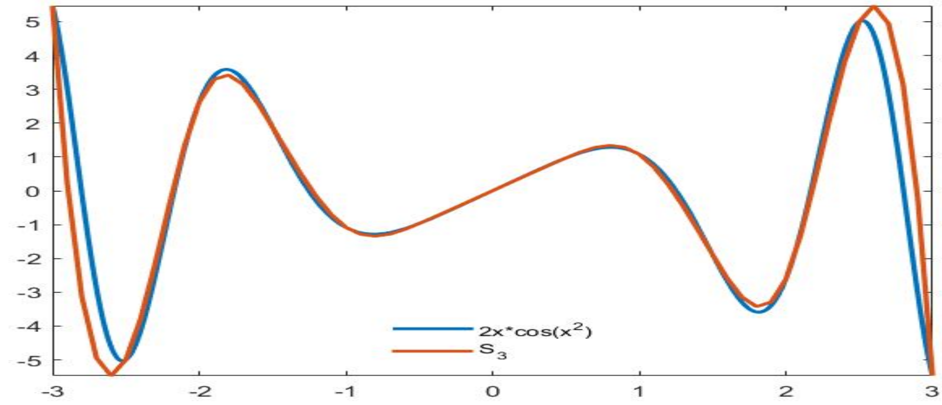



A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 2.9852.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 0.4008.

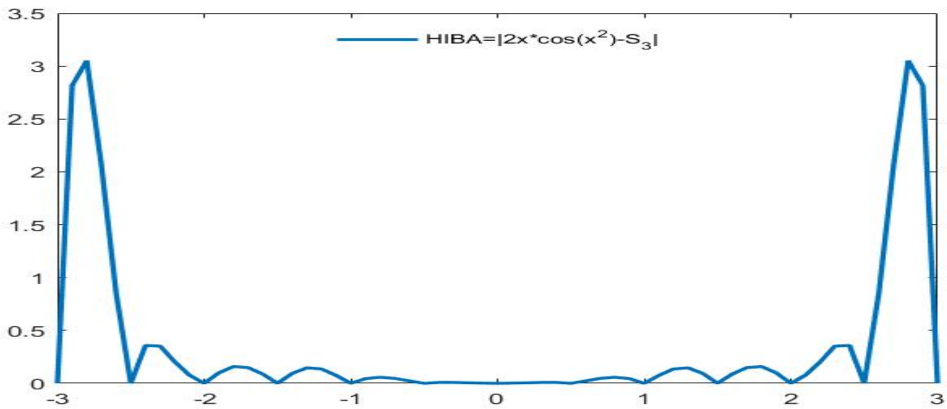
Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.0445.

#### 4.3.3. Köbös spline interpoláció




A fennti ábrán $2xcos(x^2)$-et (kékkel), illetve az új alappontokra illesztett $S_3$, Spline-féle interpolációs polinomot (pirossal) láthatjuk.

A következő képen, pedig a pontos derivált és az interpolációs polinom deriváltjának különbségét láthatjuk abszolút értékben, magát a hibát.




A legnagyobb abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 3.0521.

Az átlagos abszolút értékben vett eltérése a pontos értéktől: 0.3576.

Az abszolút értékben vett eltérések mediánja: 0.0745.

Összefoglaló táblázat:

| Alappontok | A közelítés módszere | A legnagyobb abszolút értékben vett eltérés a pontos értéktől | Az átlagos abszolút értékben vett eltérés a pontos értéktől | Az abszolút értékben vett eltérések mediánja |
|---|---|---|---|---|
| 4.1 | Lagrange-féle interpoláció | 6.4894 | 0.8405 | 0.1993 |
| 4.1 | Newton-féle interpoláció | 6.4894 | 0.8405 | 0.1993 |
| 4.1 | Köbös spline interpoláció | 0.5487 | 2.3943 | 0.1304 |
| 4.1 | Haladó differencia | 6.3574 | 2.1536 | 1.2074 |
| 4.1 | Retrográd differencia | 4.2253 | 1.2756 | 0.6096 |
| 4.1 | Központi differencia | 5.1888 | 1.8129 | 0.5499 |
| 4.2 | Lagrange-féle interpoláció | 2.9852 | 0.4008 | 0.0445 |
| 4.2 | Newton-féle interpoláció | 2.9852 | 0.4008 | 0.0445 |
| 4.2 | Köbös spline interpoláció | 3.0521 | 0.3576 | 0.0745 |

A táblázatból illetve az ábrákból könnyen kiolvashatjuk, hogy a sejtésünk beigazolódott. Tehát átlagosan kisebb a hiba, az eltérés a pontos és a becsült érték között, ha derivált értékeket adunk meg az interpoláló függvényünknek alappontokként. Átlagosan a legkisebb hibát a köbös spline intepoláció mellett ejtettük, amennyiben az alappontokat a pontos derivált értékek közül választottuk. Abszolút értékben a legkisebb hibát is a köbös spline módszer ejtette, azonban ezt abban az esetben, amikor a függvényértékeket vettük alapponttul. Továbbá az ábrákból az is kiderül, hogy szinte mindegyik módszer $[-3,-2],[2,3]$ intervallumokon ejt nagyobb hibákat.

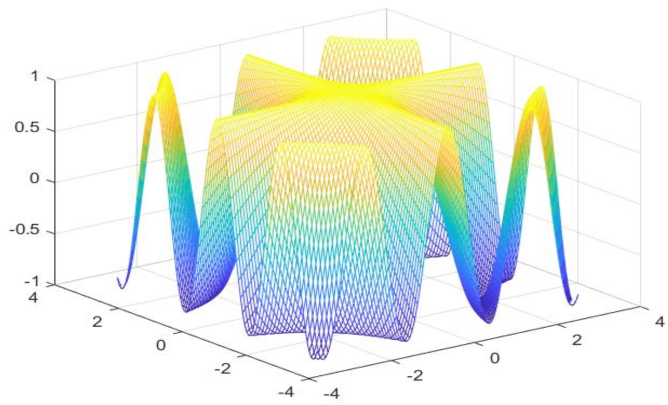
# 5. Többváltozós függvények deriválása

Eddig olyan eseteket néztünk, ahol a függvény egy változótól függ. Azonban mind a matematikában, mind a gyakorlatban bőségesen akadnak többváltozós függvények. Például a geográfiában használt domborzati térkép tekinthetők $R^2 \to R$-be képző kétváltozós függvényeknek.

## 5.1. Kétváltozós eset

### 5.1.1. Deriválás kétváltozós esetben

Az $z = f(x,y)$ kétváltozós függvényet felületként képzelhetjük el, ahol $f(x,y)$ adja a magasságot az $(x,y)$ síkbeli pont felett. Ilyen értelmezés mellett könnyen ábrázolhatjuk ezeket a függvényeket.




$cos(x \cdot y)$

**5.1. Definíció.** [4] Legyen az $f(x,y)$ kétváltozós függvény értelmezve a $P_0(x_0,y_0)$ pont egy környezetében.

Ha a

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

határérték létezik és véges, akkor az $f$ függvényt az $x$ változó szerint parciálisan differenciálhatónak nevezzük a $P_0$ pontban. A fenti határértéket az $f$ függvény $P_0$-beli $x$ szerinti parciális deriváltjának nevezzük. Amennyiben

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

határérték létezik és véges, akkor az $f$ függvényt az $y$ változó szerint parciálisan differenciálhatónak nevezzük a $P_0$ pontban. A fenti határértéket az $f$ függvény $P_0$-beli $y$ szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

[4] [10]

**5.2. Definíció** (Gradiens). [5] A gradiens a deriválás általánosítása többváltozós esetre. Egy függvény deriváltjának értéke abban az esetben, ha egy változónk van, skalárral lesz egyenlő. Több változó esetében már gradiensről beszélünk, amely egy vektort ad vissza. Kétváltozós esetben egy $f$ függvény gradiens vektora a következő:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \end{bmatrix}$$

Ugyanúgy, ahogy a derivált az érintő meredekségét adja meg, a gradiens a felület legnagyobb meredekségű irányába mutat, megadja az adott pontban a függvény legnagyobb megváltozásának irányát és értékét.

### 5.1.2. Numerikus deriválás kétváltozós esetben

Az említett módszerek, mind az egyváltozós numerikus deriválási módszerek kétváltozóra történő kiterjesztése.

Az alapvető probléma az, hogy numerikus közelítést találjunk a parciális deriváltakra. Mivel az első rendű parciákis deriváltaknál csak egy változó szerint deriválunk, így az egyváltozós eseteknél emlíett módszert használhatjuk a közelítésre.

**5.1. Példa.** Nézzük a következő függvényt:

$$f(x,y) = (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2) \cdot sin(y)$$

Tudjuk, hogy:

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2+x) \cdot sin(y) \\ (\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2) \cdot cos(y) \end{bmatrix}$$

Tekintsük meg az $\vec{x_0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{30\pi}{180} \end{bmatrix}$ pontot. Ebben az $\vec{x_0}$ pontban a függvény deriváltjának pontos értéke $\nabla f(\vec{x_0}) = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.144338 \end{bmatrix}$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy nem ismerjük a függvényünk ilyen alakú pontos leírását, csak értékpárjaink vannak.

Szükségünk lesz a következőkre, amiket az egyváltozós esetnél már megismert centrális differenciából származtatunk:

$$\frac{\delta f(\vec{x_0})}{\delta x} \approx \frac{f(\vec{x_+}) - f(\vec{x_-})}{2\Delta h_1} \quad \text{ahol} \quad \vec{x_+} = \begin{bmatrix} x+h_1 \\ y \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \vec{x_-} = \begin{bmatrix} x-h_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\delta f(\vec{x_0})}{\delta y} \approx \frac{f(\vec{y_+}) - f(\vec{y_-})}{2\Delta h_2} \quad \text{ahol} \quad \vec{y_+} = \begin{bmatrix} x \\ y+h_2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \vec{y_-} = \begin{bmatrix} x \\ y-h_2 \end{bmatrix}$$

[5] [9]

Továbbá ismerjük a következő értéket:

$$\begin{aligned} h_1, h_2 &= 0.1 \\ f(\vec{x_+}) &= 0.126 \\ f(\vec{x_-}) &= 0.050667 \\ f(\vec{y_+}) &= 0.097327 \\ f(\vec{y_-}) &= 0.068507 \end{aligned}$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{\delta f(\vec{x_0})}{\delta x} \approx \frac{f(\vec{x_+}) - f(\vec{x_-})}{2\Delta h_1} = \frac{0.126 - 0.050667}{2 \cdot 0.1} = 0.376665$$

$$\frac{\delta f(\vec{x_0})}{\delta y} \approx \frac{f(\vec{y_+}) - f(\vec{y_-})}{2\Delta h_2} = \frac{0.097327 - 0.068507}{2 \cdot 0.1} = 0.1441$$

Összevetve a pontos és a numerikus kapott értékeket látjuk, hogy precízen tudtuk közelíteni azt.

$$\begin{aligned} \text{Analitikus módon számított derivált } \vec{x_0} \text{ pontban:} \quad & \nabla f(\vec{x_0}) = \left[\begin{smallmatrix} 0.375 \\ 0.144338 \end{smallmatrix}\right] \\ \text{Numerikus módon számított derivált } \vec{x_0} \text{ pontban:} \quad & \nabla f(\vec{x_0}) = \left[\begin{smallmatrix} 0.376665 \\ 0.1441 \end{smallmatrix}\right] \end{aligned}$$

### 5.1.3. Numerikus deriválás többváltozós esetben

Amennyiben az $f$ függvényünk $n$ változós, azaz $f(x_1, x_1, \ldots, x_n)$. Numerikus deriválás során az előzőhöz rendíkvűl hasonlító:

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f(\vec{x_0})}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta f(\vec{x_0})}{\delta x_n} \end{bmatrix}$$

gradienst keressük. Az egyes parciális deriváltak kiszámítása is ismerősen, centrális módon történik:

$$\frac{\delta f(\vec{x_0})}{\delta x_j} \approx \frac{f(\vec{x_{j+}}) - f(\vec{x_{j-}})}{\Delta x_j} \quad \text{ahol} \quad j \in [1, \ldots, n], \quad \vec{x_{j+}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j + \Delta x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{x_{j-}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j - \Delta x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

és $\Delta x_j$ jelöli az $x_j$ változóhoz tartozó lépéstávolság.

# 6. Összefoglalás

A dolgozatomban először bemutattuk a klasszikus numerikus deriválás módszereit, a retrográd, haladó és központi differenciákat. Továbbá beláttuk, hogy a lépésköz csökkentésével nem csökken az interpolációs hiba, ezzel párhuzamban viszont Richardson-extrapoláció módszerével pontosabb közelítést kaphatunk.

Ismertettünk különböző interpolációs eljárásokat. A Lagrange-féle és Newton-féle interpolációs eljárásoknál láthattuk, hogy amennyiben új alappontot veszünk fel a Newton-féle interpolációs eljárás lesz kedvezőbb, azonban, ha már meglévő adatpont értéken szeretnék változtatni, javítani a Lagrange-féle interpoláció bizonyosul gyorsabbnak az új interpolációs polinom meghatározására. Megismerkedtünk a baricentrikus interpolációval, ami úgyszint könnyebben használható, ha új alappontokat veszünk fel. Továbbá részleteztük a Hermite-interpolációt, ahol feltesszük, hogy az alappontbeli függvényértékeken kívül ismerjük még bizonyos fokig az alappontbeli deriváltak értékeit is. Interpolációs eljárások közül végül a Spline-interpolációt vizsgáltuk, mely során szakaszonként illesztünk interpolációs polinomokat az alappontokra.

A szakdolgozatom következő részében empirikus tapasztalat alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy pontosabb eredményt kapunk, amennyiben az interpolációs polinomnak alappontokként a derivált függvény értékeit választjuk, mintha az alap függvény értékeket adjuk meg és ez után deriváljuk az interpolációs polinomot.

Végül pedig tárgyaltuk a többváltozós függvények deriválásának alapjait és módszereit.

# Irodalomjegyzék


[1] **Faragó István-Horváth Róbert: Numerikus módszerek, Typotex kiadó (2013)**

[2] *Interpoláció*

**Erik Meijering: A Chronology of Interpolation From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing (2002)**

[3] *Interpoláció*

**`https://hu.wikipedia.org/wiki/Interpoláció`**

[4] *Klasszikus numerikus deriválás*

**`https://dmpeli.math.mcmaster.ca/Matlab/Math4Q3/NumMethods/Lecture3-1.html`**

[5] *Numerikus módszerek MATLAB-ban*

**`https://edu.epito.bme.hu/local/coursepublicity/mod/resource/view.php?id=58079`**

[6] *Lagrange-féle polinom interpoláció MATLAB-ban*

**`https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/899-lagrange-polynomial-interpolation`**

[7] *Newton-féle polinom interpoláció MATLAB-ban*

**`https://www.youtube.com/watch?v=u__iOG9b6Fg`**

[8] *Többváltozós függvények deriválása*

**`https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT-INF1100/h07/undervisningsmateriale/kap7.pdf`**

[9] *Numerikus deriválás*

**`https://edu.epito.bme.hu/local/coursepublicity/mod/resource/view.php?id=58617`**

[10] *Kétváltozós függvények*

**`https://docplayer.hu/46338490-7-ketvaltozos-fuggvenyek.html`**

[11] *Richardson-extrapoláció*

**`https://www.youtube.com/watch?v=3S6CpBMcy_Y0`**

[12] *Interpoláció*

**Nemecskó István: Interpolációs módszerek és alkalmazásuk differenciálegyenletek numerikus megoldására (2017)**

[13] *Shamir-féle titokmegosztás*

**`https://hu.wikipedia.org/wiki/Shamir-féle_titokmegosztás`**

[14] *Spline interpoláció*

`https://hu.frwiki.wiki/wiki/Spline#Continuité_de_la_spline`

[15] *Newton-féle osztott differencia*

`https://www.emathzone.com/tutorials/basic-statistics/examples-of-newton-interpolation.html`

# Melléklet

- A Lagrange-féle interpoláció kódja a MATLAB programban:

```
function y=lagrange(x,pointx,pointy)
n=size(pointx,2);
L=ones(n,size(x,2));
if (size(pointx,2) =size(pointy,2))
fprintf(1,'ERROR!POINTX and POINTY must have the same number
of elements');
y=NaN;
else
for i=1:n
for j=1:n
if (i =j)
L(i,:)=L(i,:).*(x-pointx(j))/(pointx(i)-pointx(j));
end
end
end
y=0;
for i=1:n
y=y+pointy(i)*L(i,:);
end
end
end
```

- A Newton-féle interpoláció kódja a MATLAB programban:

```
function yint=newtoninterpolation2(x,y,xx)
n=length(x);
if length(y)  = n
error('x and y must be same length');
end
b=zeros(n,n);
b(:,1)=y(:);
for j = 2:n
for i=1:n-j+1
b(i,j) = (b(i+1,j-1)-b(i,j-1))/(x(i+j-1)-x(i));
end
end
xt=1;
yint=b(1,1);
for j = 1:n-1
xt=xt*(xx-x(j));
yint= yint+b(1,j+1)*xt
end
end
```