

NYILATKOZAT

Név: Bede Ábel Márk

ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

NEPTUN azonosító: F80VQH

Diplomamunka címe:

Frakcionális Brown-mozgásra épülő volatilitásmodellek

A **diplomamunka** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. május 30



a hallgató aláírása

Frakcionális Brown-mozgásra épülő volatilitásmodellek

MSc szakdolgozat

2022. május

Bede Ábel Márk

Biztosítási és pénzügyi matematika szak

Kvantitatív pénzügyek specializáció

Témavezető:

Dr. Backhausz Ágnes, adjunktus

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Dr. Backhausz Ágnesnek, aki felkeltette az érdeklődésemet a téma iránt és akihez fordulhattam a felmerülő kérdéseimmel. Köszönettel tartozom az időért és energiáért amit rám és a munkámra fordított. Iránymutatása és hasznos tanácsai tették lehetővé, hogy a dolgozat a jelenlegi formájában megvalósulhasson.

Hálás vagyok a feleségemnek, hogy támogatott ebben a kihívásokkal teli időszakban. Köszönöm a Názáreti Jézus Krisztusnak, akinek kegyelméből létrejöhett a dolgozatom. Erőt adott a nehézségek közepette, és mindig támaszkodhattam rá.

”Mert az Úr ad bölcsességet, az ő szájából tudomány és értelem származik.”

(Példabeszédek 2:6)

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Az érdes volatilitás	2
1.1. Az implikált volatilitás felület	2
1.2. A frakcionális Brown-mozgás	5
1.3. A historikus volatilitás	13
1.4. A kapcsolódó programkód magyarázata	15
2. Érdes volatilitáson alapuló modellek	21
2.1. RFSV-modell	21
2.2. Derivatíva-árazás, érdes Bergomi-modell	28
2.3. A kapcsolódó programkód magyarázata	34
2.4. Érdes Heston-modell	40
3. Érdes volatilitás gépi tanulással	43
3.1. Neurális hálók	43
3.2. Modellkalibráció neurális hálókkal	47
Függelék	53
1. fejezethez írt programkód	53
2. fejezethez írt programkód	57
3. fejezethez írt programkód	61
Irodalomjegyzék	63

Bevezetés

Az utóbbi években jelentős előrelépések történtek a piacot állapotában és dinamikájában is konzisztensen leíró pénzügyi modellek kifejlesztése terén. E folyamatban az egyik legfontosabb mérföldkő a fracionális Brown-mozgás volatilitást meghajtó sztochasztikus folyamatként való alkalmazása volt. Az Itô-kalkulus kereteiből kilépve lehetőség nyílik arra is, hogy a modellezett sztochasztikus volatilitás a historikusan megfigyelttel sok tekintetben egyező matematikai tulajdonságokat mutasson. A dolgozatban e témát járjuk körül, bemutatva a szakirodalom téma iránti érdeklődésének okait és a legfontosabb alapvető eredményeket.

Az első fejezetben motiváljuk a fracionális Brown-mozgás meghajtó folyamatként való használatát és részletesen tárgyaljuk a modellek vizsgálatához szükséges elméleti megalapozást. Az itt összefoglaltakat saját R-program segítségével is ellenőrizzük. Ezen kívül létrehozunk egy eljárást arra is, hogy historikus volatilitás idősorból azonosítsuk az azt meghajtó fracionális Brown-mozgást a Hurst-paraméter meghatározásán keresztül.

A második fejezetben az ezen elméleten alapuló pénzügyi modellek közül mutatjuk be a legismertebbeket. Először megvizsgáljuk a témakörhöz kapcsolódóan elsőként javasolt *RFSV-modellt*, és megmutatjuk ennek konzisztenciáját a historikusan megfigyelhető adatsorokkal. Ezután belátjuk, hogy derivatívák árazásához szükségszerűen további feltételezéseket kell tennünk, melyekkel eljutunk az *érdes Bergomi-modellhez*. Megmutatjuk, hogyan árazható be tetszőleges származtatott termék a modell keretein belül, szimuláció segítségével. Az árazásra és a modellparaméterek becslésére saját R-programot is implementálunk. Végül röviden bemutatjuk az *érdes Heston-modellt*, és hozzá egy lehetséges módszert európai opciók árazására.

A harmadik fejezetben megmutatjuk, hogyan lehet általánosan pénzügyi modellek kalibrációját felgyorsítani neurális hálózatok használatával. Ezt először kontextusba helyezzük a tárgyalt árazási technikák gyorsításának szükségességével, valamint felelevenítjük a neurális hálózatok elméletét. Végül bemutatjuk, implementáljuk és teszteljük is az egyik hatékony kalibrációs eljárást, a *Levenberg–Marquardt-algoritmust*.

1. fejezet

Az érdes volatilitás

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a pénzügyi modellezés egyik legfontosabb fogalmát, az implikált volatilitást. Ezen keresztül röviden bemutatjuk a frakcionális Brown-mozgás által meghajtott sztochasztikus volatilitással történő pénzügyi modellezés motivációját. Ezután tárgyaljuk a frakcionális Brown-mozgás fogalmát és legfontosabb tulajdonságait. Végül összevetjük ezeket a historikus volatilitás jellemzőivel.

1.1. Az implikált volatilitás felület

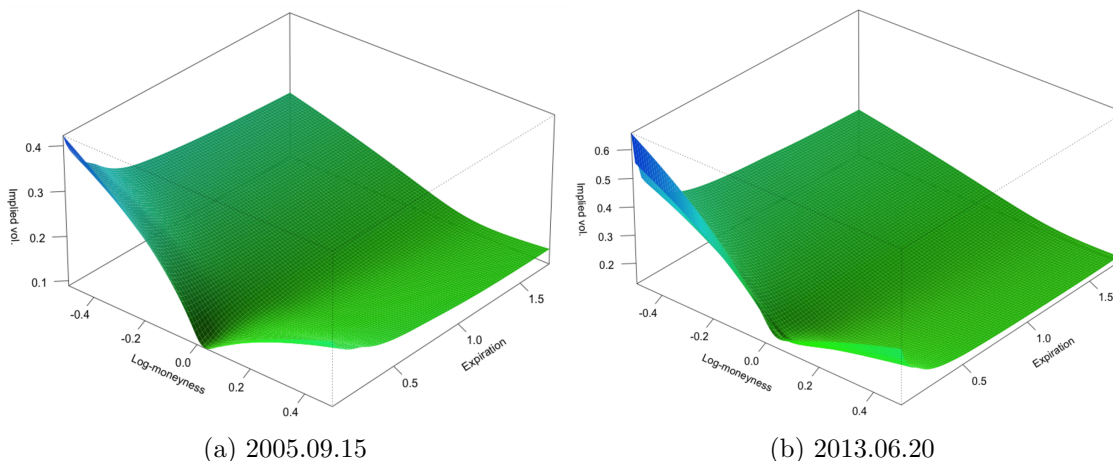
Vegyük a hagyományos Black–Scholes-modellt, vagyis ahol a vizsgált alaptermék árfolyamáról feltételezzük, hogy konstans diffúziós együtthatójú geometriai Brown-mozgás. Tekintsünk egy európai call opciót: rögzített jövőbeni T időpontban jogunk van arra, hogy meghatározott K árfolyamon vásároljunk egy adott terméket (pl. részvényt) a szerződéses partnertől. A megvásárolható terméket nevezzük *alaptermék*nek. Az opció ennek a származtatott terméke, vagy *derivatívája*. A modell feltételezései mellett az opció t időpontbeli $V(t)$ árára egyszerű explicit képletet kapunk, ez a Black–Scholes-képlet:

$$V(t) = \text{BS}(S(t), K, \tau, r, \sigma) = S(t)\Phi(d_+) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-); \quad d_{\pm} = \frac{\log \frac{S(t)}{K} + \tau \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Itt a BS függvény argumentumában szereplő paraméterek rendre az alaptermék t -beli árfolyama ($S(t)$), a kötési árfolyam (K), a lejáratig hátralevő időtartam ($\tau = T - t$), a kockázatmentes kamatláb (r), illetve a volatilitás (σ), vagyis az alaptermék árfolyamatot meghajtó sztochasztikus differenciálegyenlet konstans diffúziós együtthatója. Az első négy paraméter vagy a termék egy jellemzője, vagy megfigyelhető a piacon. Ezeket rögzítettnek tekintve a képlet σ függvényében szigorúan monoton növekedő függvényt eredményez, amely tehát invertálható. Gyakorlatban egy európai opció esetén nem is

az árat szokás tekinteni, hanem a piacon szintén megfigyelhető árból ezen inverz függvény alkalmazásával kapott volatilitás értéket, amit az ár által *implikált volatilitásnak* nevezünk. Ez azért történik, mert az implikált volatilitás robusztusabb mutatószáma a terméknek, mint az ára, hiszen kevésbé függ például az alaptermék árfolyamától.

Ha a Black–Scholes-modell feltételei teljesülnének, akkor egy adott alaptermék esetén bármilyen lejáratú és kötési árfolyamú opció piaci árát tekintenénk, ugyanazt az implikált volatilitás értéket kapnánk. A piacon megfigyelhető árak esetében azonban azt tapasztaljuk, hogy adott időpillanatban különböző K és τ értékek mellett különböző implikált volatilitás értéket kapunk. Vagyis az implikált volatilitás e két változó függvényeként egy nem vízszintes felület. Gyakorlatban K helyett az úgynevezett *log-moneyness*, $\kappa = \log \frac{S(t)}{K}$ függvényében szokás vizsgálni a volatilitást, hiszen ez kevésbé változik időben. Az ennek segítségével felírt $\sigma_{BS}(\kappa, \tau)$ függvényt nevezzük *implikált volatilitás felületnek*. Időben ez a felület sem állandó, ugyanis változik a szintje és iránya, azonban az alakja általában változatlan, ahogy az 1.1.1 ábrán is látható. Adott rövid lejáratra a keresztmetszete jellemzően mosoly alakú (*smile*), míg hosszú lejáratra ferde (*skew*).



1.1.1. ábra. S&P 500 index implikált volatilitás felülete különböző időpontokban [1], [2]

Egy adott pénzügyi modell feltételezései alapján számolt opcióárakból ugyanúgy visszszámolható a (Black–Scholes- képlet szerinti) implikált volatilitás felület, mint a piacon megfigyelt árakból. Ezt nevezzük adott modellhez tartozó *modell implikált volatilitás felületnek*. A Black–Scholes-modellhez tehát a vízszintes modell implikált volatilitás felület tartozik, amely nem esik egybe a piacon megfigyelt árakból számolttal, így a modell ilyen értelemben nem jó. A cél a pénzügyi modellezésnél éppen az, hogy a modell implikált volatilitás felület reprodukálja mind az implikált volatilitás felületet, mind annak az időbeli dinamikáját.

Dupire lokális volatilitás modelljében a diffúziós együttható az idő és a részvényárfolyam determinisztikus függvénye. A függvényt úgy választjuk meg, hogy a modell implikált volatilitás felülete éppen visszaadja a piacit. Ez a modell azonban azt feltételezi, hogy a felület mai formája meghatározza az összes jövőbeni formáját, ami a valóságban nem teljesül. A modell nem is tudja visszaadni a felület empirikusan megfigyelt dinamikáját, így jelentősen félreárazhat egyes egzotikus termékeket.

Ennek orvoslására születtek a sztochasztikus volatilitás modellek, mint például a Heston-modell. Itt az alaptermék diffúziós együtthatója maga is egy sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása, vagyis szemimartingál. Az ezt meghajtó Brown-mozgás nem feltétlen független az alapterméket meghajtótól. Ezek tehát (legalább) kétfaktoros modellek, melyekben a véletlennek több forrása van, és általában nem teljes piacot eredményeznek. A modell implikált volatilitás felület dinamikája itt realiztikusabb, azonban a sztochasztikus volatilitás modellek jellemzően nem találják el a kezdeti felületet.

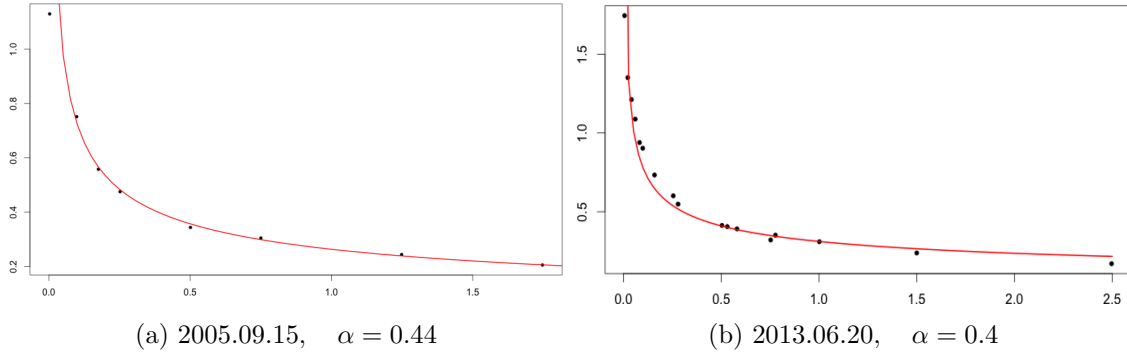
Adott lejáratra vett keresztmetszet (mosoly) alapján nem sok következtetés vonható le a generáló folyamatra vonatkozóan. Ezzel szemben a mosoly lejáratától való függése már szoros kapcsolatban áll a generáló folyamat dinamikájával. Az, hogy hogyan függ az időtől az implikált volatilitás *ATM*-nél vett ferdesége, vagyis a

$$\psi(\tau) := \left. \frac{\partial}{\partial \kappa} \sigma_{BS}(\kappa, \tau) \right|_{\kappa=0}$$

függvény, különösen érzékeny a volatilitásfolyamat megválasztására. Itt az *ATM* az angol szóhasználatban jellemző "At The Money" kifejezés rövidítése. Használatosak még az *OTM* (Out of The Money) és *ITM* (In The Money) rövidítések is. Az opciókat csoportosíthatjuk az alapján, hogy (hipotetikus) azonnali lehívás esetén értékesek-e a tulajdonos számára. Amennyiben igen, *ITM* opcióról beszélünk. Ekkor vételi opció esetében $S(t) > K$, vagyis $\kappa > 0$. A $\kappa < 0$ esetben az opció *OTM*. A két csoport határán vannak az *ATM* opciók, melyekre $\kappa = 0$. A piaci implikált volatilitás felületre [1] alapján

$$\psi(\tau) \approx \frac{1}{\tau^\alpha}, \quad \alpha \in (0.3, 0.5)$$

teljesül. A hagyományos sztochasztikus volatilitás modellek által generált $\psi(\tau)$ függvények e tulajdonságot jellemzően nem reprodukálják. Ezek $\tau \rightarrow 0$ esetén általában konstans értékűek a kívánt polinomiális jellegű végtelenbe tartó határérték helyett. Tekintsünk ezzel szemben egy H Hurst-paraméterű frakcionális Brown-mozgás által meghajtott sztochasztikus volatilitás modellt. A modell által generált *ATM* ferdeség közelítőleg $\tau^{H-1/2}$ alakú, amely tehát $H \approx 0.1$ választás mellett megfelelőbb az előbbieknél. Ez az egyik legfontosabb motivációja a frakcionális Brown-mozgás használatának.



1.1.2. ábra. S&P 500 index felület ATM -nél vett ferdesége a lejárat függvényében.

Ráillesztve pirossal a $\psi(\tau) = A\tau^{-\alpha}$ polinom. [1], [2]

1.2. A frakcionális Brown-mozgás

Jöjjön először egy rövid emlékeztető a sztochasztikus folyamatok kurzuson szerepelt tananyagáról. A dolgozat további részében az állításokat és definíciókat egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mező felett értjük, melyre nézve a folyamatok progresszíven mérhetőek, még ha ezt nem is hangsúlyozzuk ki külön.

1.2.1 Definíció. $B = (B_t)_{t \geq 0}$ sztochasztikus folyamat Brown-mozgás (vagy Wiener-folyamat), ha 1-valószínűséggel nullából induló, folytonos trajektóriájú és független növekményű folyamat, melyre $B_t - B_s \sim N(0, |t - s|)$ minden $s, t \geq 0$ -ra.

1.2.2 Állítás. B Brown-mozgás akkor és csak akkor, ha 1-valószínűséggel folytonos trajektóriájú Gauss-folyamat 0 várható értékkel és $\text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$ kovarianciafüggvénnel.

Ezek után definiáljuk a frakcionális Brown-mozgás fogalmát és ismertetjük alapvető tulajdonságait [3] nyomán. A bizonyításokat önállóan dolgozzuk ki.

1.2.3 Definíció. $0 < H < 1$ esetén B^H frakcionális Brown-mozgás, ha 1-valószínűséggel folytonos trajektóriájú Gauss-folyamat, melynek várható értéke 0 és kovarianciafüggvénye $\text{Cov}(B_s^H, B_t^H) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H})$. A H paramétert Hurst-exponensnek nevezzük.

A kovarianciafüggvény jóldefiniált, ugyanis pozitív szemidefinit. Erre található egy meglehetősen technikai bizonyítás a [4] könyvben (Proposition 2.2). Ezért a folyamat eloszlásban jóldefiniált, ugyanis egy Gauss-folyamatot meghatároz a várható érték és kovarianciafüggvénye. De még nem tudjuk, hogy létezik-e ilyen. Hogy ezt belássuk, szükséges a folyamat néhány további tulajdonságát is tárgyalnunk.

1.2.4 Állítás. Ha B^H frakcionális Brown-mozgás, akkor $\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = |t - s|^{2H}$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] &= \text{Cov}[B_t^H - B_s^H, B_t^H - B_s^H] = \text{Cov}[B_t^H, B_t^H] + \text{Cov}[B_s^H, B_s^H] - \\ &- 2\text{Cov}[B_t^H, B_s^H] = |t|^{2H} + |s|^{2H} - 2\frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) = |t - s|^{2H}. \end{aligned}$$

□

1.2.5 Következmény. A frakcionális Brown-mozgás növekménye centrált normális változó:

$$B_t^H - B_s^H \sim N(0, |t - s|^{2H}),$$

tehát

$$\mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^q] = K_q |t - s|^{qH},$$

ahol K_q a standard normális eloszlás q -adik abszolút momentuma.

1.2.6 Következmény. A frakcionális Brown-mozgás stacionárius növekményű.

Ez nyilvánvaló, hiszen $B_t^H - B_s^H \stackrel{d}{=} B_{t-s}^H \sim N(0, |t - s|^{2H})$.

A következő közismert tételek bizonyítással együtt megtalálhatóak például az [5] munkában.

1.2.7 Tétel. (Kolmogorov-féle folytonossági tétel, Kolmogorov–Csencov-tétel)

Ha az X folyamat $\alpha > 0$ -adik momentuma egyenletesen β -Hölder-folytonos $\beta > 1$ kitevővel, akkor a folyamatnak létezik folytonos trajektóriájú modifikációja. E folyamat trajektóriái lokálisan γ -Hölder-folytonosak minden $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ kitevővel. Másképp tegyük fel, hogy

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t - s|^\beta, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Ekkor létezik $\tilde{X} : \mathbb{P}(\tilde{X} = X) = 1$ folyamat, melynek minden trajektóriája folytonos, és minden $T > 0$ esetén létezik hozzá $C_T > 0$ konstans, hogy

$$\forall \omega \in \Omega : \left| \tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega) \right| \leq C_T |t - s|^\gamma, \quad \forall t, s \leq T.$$

1.2.8 Következmény. A frakcionális Brown-mozgás létezik, és trajektóriái lokálisan γ -Hölder-folytonosak minden $\gamma \in (0, H)$ kitevőre.

Ez 1.2.5 következménye a tétel alkalmazásával, ahol például $\alpha = 2, \beta = 2H$. A Hurst-paraméter valójában a folyamat trajektóriáinak simaságát szabályozza, ahogy látható az 1.2.3 ábrán is.

1.2.9 Állítás. A frakcionális Brown-mozgás $H \neq 1/2$ mellett nem szemimartingál.

Bizonyítás. Tekintsük a folyamat q -rendű variációját valamely $[0, T]$ intervallumon adott, finomodó $\Pi_n := \{t_k^n = \frac{kT}{n} : 0 \leq k \leq n\}$ felosztássorozat esetén:

$$V_q := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left| B_{t_{k+1}^n}^H - B_{t_k^n}^H \right|^q \implies \mathbb{E}[V_q] = K_q \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n|^{qH} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } qH < 1, \\ K_q \cdot T, & \text{ha } qH = 1, \\ 0, & \text{ha } qH > 1. \end{cases}$$

A középső eset nyilvánvaló. Legyen $\delta := qH - 1$, ekkor $qH > 1$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n|^{qH} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_l |t_{l+1}^n - t_l^n|^\delta \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n| = 0 \cdot T = 0.$$

Hasonlóan $qH < 1$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n|^{qH} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_l |t_{l+1}^n - t_l^n|^\delta \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n| = \infty \cdot T = \infty.$$

Most ha $H < 1/2$, vagyis $2H < 1$, akkor a frakcionális Brown-mozgás kvadratikus variációjának várható értéke végtelen, tehát nem lehet szemimartingál. Ha pedig $H > 1/2$, vagyis $2H > 1$, akkor a frakcionális Brown-mozgás kvadratikus variációja 1-valószínűséggel 0, hiszen $\mathbb{P}(V_2 \geq 0) = 1$, valamint $\mathbb{E}[V_2] = 0$. Tehát csak korlátos változású folyamat lehet, feltéve, hogy szemimartingál. A totális variációjának várható értéke azonban $H < 1$ miatt végtelen, tehát ez sem szemimartingál. \square

Az állításból következik, hogy a frakcionális Brown-mozgásra nem alkalmazható az Itô-kalkulus. Ez nagyban megnehezíti az elméletet.

1.2.10 Állítás. $X_t := |a|^H B_{\frac{t}{a}}^H$ esetén az X folyamat is frakcionális Brown-mozgás lesz. Ezért azt mondjuk, hogy a frakcionális Brown-mozgás önhasonló.

Bizonyítás. Ellenőrizhetők a Gauss-folyamat karakterizáció feltételei:

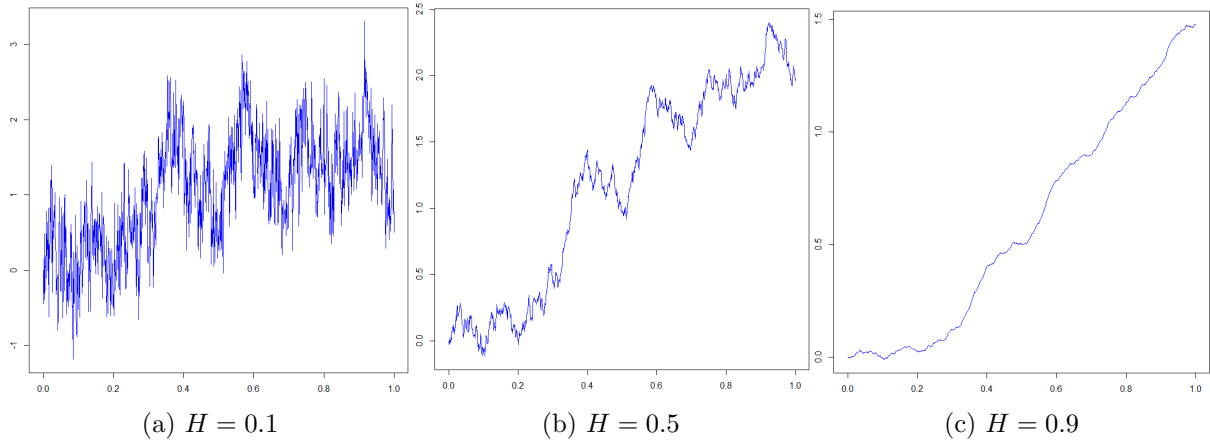
- X majdnem mindenütt folytonos trajektóriájú, mert B^H az.
- $t_1 < \dots < t_r$ esetén $(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$ a $(B_{\frac{t_1}{a}}^H, \dots, B_{\frac{t_r}{a}}^H)$ vektorváltozó lineáris függvénye, tehát normális eloszlású, vagyis X Gauss-folyamat.
- $\mathbb{E}(X_t) = |a|^H \mathbb{E}\left(B_{\frac{t}{a}}^H\right) = 0$.
- $\text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}\left(|a|^H B_{\frac{s}{a}}^H, |a|^H B_{\frac{t}{a}}^H\right) = |a|^{2H} \text{Cov}\left(B_{\frac{s}{a}}^H, B_{\frac{t}{a}}^H\right) = |a|^{2H} \frac{1}{2} \left(\left|\frac{t}{a}\right|^{2H} + \left|\frac{s}{a}\right|^{2H} - \left|\frac{t-s}{a}\right|^{2H} \right) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$.

\square

Az 1.2.10 állítás mutatja, hogy a frakcionális Brown-mozgás is fraktáltulajdonságú.

1.2.11 Állítás. *A frakcionális Brown-mozgás*

- *klasszikus Brown-mozgás $H = \frac{1}{2}$ esetén,*
- *növekményei pozitívan korreláltak $H > \frac{1}{2}$ esetén,*
- *növekményei negatívan korreláltak $H < \frac{1}{2}$ esetén.*



1.2.3. ábra. Saját programkód segítségével generált FBM trajektóriák különböző Hurst-együtthatók használata mellett.

Bizonyítás. Az első pont például a hagyományos és frakcionális Brown Gauss-karakterizációk összevetésével rögtön látható. Legyen $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$, ekkor

$$\begin{aligned}
 \text{Cov} [\Delta B_s^H, \Delta B_t^H] &:= \text{Cov} [B_{s_2}^H - B_{s_1}^H, B_{t_2}^H - B_{t_1}^H] = \\
 &= \text{Cov} [B_{s_2}^H, B_{t_2}^H] + \text{Cov} [B_{s_1}^H, B_{t_1}^H] - \text{Cov} [B_{s_2}^H, B_{t_1}^H] - \text{Cov} [B_{s_1}^H, B_{t_2}^H] = \\
 &= \frac{1}{2} (|s_2|^{2H} + |t_2|^{2H} + |s_1|^{2H} + |t_1|^{2H} - |s_2|^{2H} - |t_1|^{2H} - |s_1|^{2H} - |t_2|^{2H} - \\
 &\quad - (t_2 - s_2)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} + (t_1 - s_2)^{2H} + (t_2 - s_1)^{2H}) \stackrel{?}{<} 0.
 \end{aligned}$$

Legyen

$$\Delta_s := s_2 - s_1, \quad \Delta_t := t_2 - t_1, \quad \Delta_{st} := t_1 - s_2.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
 \text{Cov} [\Delta B_s^H, \Delta B_t^H] < 0 &\iff (t_1 - s_2)^{2H} + (t_2 - s_1)^{2H} - (t_2 - s_2)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} < 0 \\
 &\iff (\Delta_{st})^{2H} + (\Delta_s + \Delta_{st} + \Delta_t)^{2H} - (\Delta_{st} + \Delta_t)^{2H} - (\Delta_s + \Delta_{st})^{2H} < 0 \iff 2H < 1,
 \end{aligned}$$

mert az x^n , ($x \in \mathbb{R}^+$) függvény pontosan akkor konkáv, ha $n < 1$. Tehát a növekmények pontosan akkor korreláltak negatívan, ha $H < \frac{1}{2}$, és pozitívan, ha $H > \frac{1}{2}$. \square

1.2.12 Következmény. *A frakcionális Brown-mozgás $H \neq 1/2$ esetén nem Markov-folyamat.*

Most következzen a frakcionális Brown-mozgás egy lehetséges konstruktív előállítás. Ehhez szükségesek további definíciók és megfontolások. Tekintsük $0 < H < 1$ mellett a következő Brown-mozgás szerinti integrált, ahol B klasszikus Brown-mozgás :

$$I_t := \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s. \quad (1.2.1)$$

Első ránézésre korábbi tanulmányok alapján a következő (hibás) gondolatmenet logikusnak tűnik: az integrandus determinisztikus, ezért nyilván progresszíven mérhető. Ugyanezért az idő szerinti négyzetes integrál várható értéke maga az integrál, amely véges minden t esetén, tehát az integrandus \mathcal{S} -beli. Így az integrálás eredménye négyzetesen integrálható martingál. Nem vettük azonban figyelembe, hogy az integrandus függ az integrálási tartomány végpontjaitól, amely a hagyományos Itô-kalkulusban nincs megengedve, és így az integrandus nem is \mathcal{S} -beli. Valóban, ilyen integrált korábban nem definiáltunk, és az is belátható, hogy az integrálás eredménye nem szemimartingál. Az ilyen integrandusokat a szakirodalom *Volterra-magfüggvényeknek* nevezi, míg az integrált *Volterra-folyamatnak*. Az integrált a [6] cikk trajektóriánkénti Riemann–Stieltjes-integrálként definiálja a részletek kifejtése nélkül. Belátjuk, hogy ez megtehető a következő két állítás alkalmazásával:

1.2.13 Állítás. *Az $\int_a^b f(x)dg(x)$ Riemann–Stieltjes-integrál létezik, ha f folytonos, és g korlátos változású $[a, b]$ -n.*

Az állítás bizonyításáért lásd a [7] könyvben a 10.36.2.–10.36.4. részeket. A következő állítás nem más, mint a közismert parciális integrálás elve Riemann–Stieltjes-integrálokra:

1.2.14 Állítás. *Ha az $\int_a^b f(x)dg(x)$ Riemann–Stieltjes-integrál létezik, akkor $\int_a^b g(x)df(x)$ is létezik, és $\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = [f \cdot g]_a^b$.*

Valóban, az 1.2.1 kifejezés értelmezhető trajektóriánkénti Riemann–Stieltjes-integrálként, hiszen B folytonos, és az integrandus korlátos változású.

1.2.15 Definíció. *$B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ folyamat kétoldalú Brown-mozgás, ha $(B_{-t})_{t \geq 0}$ és $(B_t)_{t \geq 0}$ független Brown-mozgások.*

1.2.16 Állítás. *Legyen $0 < H < 1$, és $B^H = (B_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ sztochasztikus folyamat a következő egyenlet által definiált:*

$$B_t^H = C_H \left(\int_{-\infty}^0 \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right),$$

ahol B kétoldalú Brown-mozgás, valamint

$$\begin{aligned} C_H &= \left(\frac{1}{2H} + \int_0^\infty \left((x+1)^{H-\frac{1}{2}} - x^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}}{\Gamma(H+1/2)} = \sqrt{\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)}}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

és $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ Gamma függvény. Ekkor B^H frakcionális Brown-mozgás.

A frakcionális Brown-mozgás ilyen módon történő előállítását a [6] cikk szerzője után Mandelbrot-reprezentációnak nevezzük. Erre az állításra nem találtunk részletekre kiterjedő bizonyítást a szakirodalomban, így kidolgozunk egyet önállóan. Ehhez szükségünk van néhány további megfontolásra.

1.2.17 Megjegyzés. Az improprius integrált definiáljuk úgy, mint az integrálási küszöbben határértéket véve a kifejezés gyenge limesze, vagyis I , ahol $k \rightarrow \infty$ esetén

$$I_t^{(k)} := \int_{-k}^0 \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s, \quad I_t^{(k)} \xrightarrow{d} I_t.$$

1.2.18 Lemma. Legyen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós, és $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitív valós számsorozat, melyekre $n \rightarrow \infty$ esetén $\mu_n \rightarrow \mu$, valamint $\sigma_n \rightarrow \sigma > 0$. Legyen $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$. Ekkor $X_n \xrightarrow{d} X$, ahol $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Bizonyítás. A karakterisztikus függvények felírásából rögtön következik a folytonossági tétel alkalmazásával:

$$\exp \left\{ i\mu_n t - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2} \right\} \longrightarrow \exp \left\{ i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

1.2.19 Lemma. Legyen X 1-valószínűséggel folytonos trajektóriájú centrált Gauss-folyamat

$$\mathbb{E} [(X_t - X_s)^2] = |t - s|^{2H}$$

növekményvarianciával, melyre $X_0 = 0$. Ekkor X frakcionális Brown-mozgás H paraméterrel.

Bizonyítás. Csak azt kell belátni, hogy a kovarianciafüggvény megfelelő alakú.

$$\mathbb{E} [X_t X_s] = \frac{1}{2} (\mathbb{E} [X_t^2] + \mathbb{E} [X_s^2] - \mathbb{E} [(X_t - X_s)^2]) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

□

1.2.20 Állítás. Itô-izometria (Emlékeztető)

Ha $\varphi_s, \xi_s \in \mathcal{S}$, azaz progresszíven mérhetőek és $\mathbb{E}[\int_0^t \varphi_s^2 ds], \mathbb{E}[\int_0^t \xi_s^2 ds] < \infty$ minden t -re, akkor

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_s dB_s \cdot \int_0^t \xi_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_s \xi_s ds \right).$$

1.2.21 Lemma. Korlátos változású, determinisztikus Volterra-magfüggvények integráljaira érvényes az Itô-izometria, vagyis ha $\int_0^t \varphi_{t,s}^2 ds, \int_0^t \xi_{t,s}^2 ds < \infty$ minden t -re, akkor

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_{t,s} dB_s \cdot \int_0^t \xi_{t,s} dB_s \right) = \int_0^t \varphi_{t,s} \xi_{t,s} ds. \quad (1.2.3)$$

Később erre az egyértelműség kedvéért egyszerűen izometriaként hivatkozunk.

Bizonyítás. Az integrandusok korlátos változásúak, így az integrál trajektóriánként megegyezik a Riemann–Stieltjes-közelítőösszegek limeszével, tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_{t,s} dB_s \cdot \int_0^t \xi_{t,s} dB_s \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right) \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right) \right) = \\ \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right)^2 \right) &\stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \mathbb{E} \left(\left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right)^2 \right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \left(\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right) &= \int_0^t \varphi_{t,s} \xi_{t,s} ds. \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\left| \int_0^t \varphi_{t,s} \xi_{t,s} ds \right|^2 \leq \int_0^t \varphi_{t,s}^2 ds \cdot \int_0^t \xi_{t,s}^2 ds < \infty.$$

A (*) jelölésű egyenlőségénél felhasználtuk a függvények determinisztikus jellegét, valamint a Lebesgue-féle dominált konvergenciátételt. Ez helyénvaló, mert

$$\sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \left(B_{\frac{j+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{j}{n}}(\omega) \right)^2 \leq \sup_{s \in [0, t]} |\xi_{t,s} \cdot \varphi_{t,s}| \cdot \frac{1}{n} Z_n(\omega),$$

ahol $Z_n := \sum_{j=0}^{nt-1} \left(\sqrt{n} B_{\frac{j+1}{n}} - \sqrt{n} B_{\frac{j}{n}} \right)^2$ khí-négyzet eloszlású változó nt szabadságfokkal.

Ezért

$$\sup_{s \in [0, t]} |\xi_{t,s} \cdot \varphi_{t,s}| \cdot \frac{1}{n} \mathbb{E}[Z_n] \leq \sup_{s \in [0, t]} |\xi_{t,s} \cdot \varphi_{t,s}| \cdot t < \infty.$$

□

1.2.22 Megjegyzés. A determinisztikus integrandus feltételét feloldhatnánk, és hasonló elvű bizonyítás úgy is működne. Erre azonban nem lesz szükségünk. Az integrandus ellenben korlátos változású kell legyen, különben nem értelmeztük az integrált.

1.2.23 Megjegyzés. Az állítás bizonyításához szükségünk lesz arra, hogy az izometria impropius értelemben is érvényes maradjon. Ez viszont a dominált konvergenciátételből már nem következik, ugyanis annak a feltétele $t \rightarrow \infty$ esetén sérül. Ez a bizonyításban nem is oldható fel, amennyiben $|\xi_{t,s} \cdot \varphi_{t,s}| \neq o(1/t)$. Azonban használhatjuk helyette a Beppo-Levi-tételt (monoton konvergenciátétel), amennyiben $\xi_{t,s} \cdot \varphi_{t,s} > 0$ minden $s \in [0, t]$ -re. A következő bizonyításban ez a plusz feltétel is teljesül.

1.2.24 Megjegyzés. Az Itô-formula is érvényes marad ilyen típusú integrálok esetén, sőt folyamatok egy sokkal bővebb osztályára is, melyre a jelenlegi integrál definíciónk nem terjed ki, lásd [8] (Theorem 2.5). Ezt a dolgot nem bizonyítjuk.

Most következhet az 1.2.16 állítás bizonyítása.

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy a folyamat 1-valószínűséggel folytonos trajektóriájú centrált Gauss-folyamat. Látható a definícióból, hogy $B_0^H = 0$, mert az összeg első tagjában az integrandus 0, míg a másodikban az integrálási tartomány üres. Felírva az integrálok trajektóriánkénti Riemann-Stieltjes közelítőösszegét

$$B_t^H = C_H \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-nk+1}^0 \left(\left(t - \frac{j-1}{n} \right)^{H-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{j-1}{n} \right)^{H-\frac{1}{2}} \right) \left(B_{\frac{j}{n}} - B_{\frac{j-1}{n}} \right) + C_H \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \left(t - \frac{j}{n} \right)^{H-\frac{1}{2}} \left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right).$$

Itt az összeadandók független normális eloszlású valószínűségi változók, mert a Brown-mozgás növekményeinek determinisztikus együtthatós skalárszorosai. Így a limeszek belüli kifejezések szintén normális eloszlásúak. Az 1.2.18 lemmából kiindulva B_t^H is normális eloszlású, ha ezen változók várható értéke és varianciája konvergál. A várható érték a változó sorozat minden tagjára 0. A variancia konvergenciáját a folyamat növekményeire látjuk be kicsit később. Az érvelés az $I_{t_i}(t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N})$ változók tetszőleges lineáris kombinációjára is érvényes marad, vagyis a véges dimenziós peremeloszlások együttesen többdimenziós normális eloszlásúak. A trajektóriák folytonos jellegét a folyamat megörökli határátmenetben a meghajtó Brown-mozgástól. Ez korlátos változású integrandus esetén a hagyományos Itô-folyamatok folytonosságára adható bizonyítással analóg módon belátható. Ekkor tehát az integrál valóban majdnem mindenütt folytonos trajektóriájú centrált Gauss-folyamat lesz. A gondolatmenet használható általában is annak belátására, hogy a dolgozatban előkerülő összes Volterra-magfüggvény Brown-mozgás szerinti integrálja majdnem mindenütt folytonos trajektóriájú centrált Gauss-folyamat. Már csak azt kell belátni, hogy az integrál kovarianciafüggvénye megegyezik a frakcionális Brown-mozgásával. Az 1.2.19 lemma alapján elég a növekmények varianciáját ellenőrizni, amely

a gyenge konvergenciához szintén szükséges. Ehhez felhasználhatjuk a [3] cikkben megtalálható számításvázlatot. Legyen $v \geq u$, ekkor az impropius izometriát felhasználva

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[(B_v^H - B_u^H)^2 \right] &\stackrel{\text{izometria}}{=} C_H^2 \int_{\mathbb{R}} \left((v-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (u-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds = \\
&= C_H^2 \int_{\mathbb{R}} \left((v-u + (u-s))_+^{H-\frac{1}{2}} - (u-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds \stackrel{s=u-x(v-u)}{=} \\
&= C_H^2 (v-u)^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left((x+1)_+^{H-\frac{1}{2}} - x_+^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \\
&= C_H^2 (v-u)^{2H} \left(\int_{-1}^0 (x+1)^{2H-1} dx + \int_0^\infty \left((x+1)^{H-\frac{1}{2}} - x^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dx \right) = \\
&\left(\frac{1}{2H} + \int_0^\infty \left((x+1)^{H-\frac{1}{2}} - x^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dx \right)^{-1} (v-u)^{2H} \left(\frac{1}{2H} + \int_0^\infty \left((x+1)^{H-\frac{1}{2}} - x^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dx \right) \\
&= (v-u)^{2H}.
\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk a normáló C_H konstansra adott 1.2.2 képletet. A képletben található explicit formula bizonyításáért lásd a [9] könyv 363–364. oldalait. Látható, hogy a konstans éppen úgy került megválasztásra, hogy a kovarianciafüggvényre vonatkozó feltétel teljesüljön. \square

1.3. A historikus volatilitás

Az eddigiekben a volatilitásfolyamat megválasztásánál praktikus okokból csak az implikált volatilitás felület tulajdonságait vettük figyelembe. Azonban a döntésben támaszkodhatunk az adott árfolyam szórásának, mint pénzügyi idősornak tulajdonságaira is. Ez az idősor a *historikus volatilitás*. A historikus volatilitás természetesen többféle módon is definiálható illetve számolható, de mindig csak egy diszkrét közelítése lesz a volatilitásfolyamat realizálódott trajektóriájának egy múltbeli szeletének. Viszont könnyen kiszámolható a piacon közvetlenül is megfigyelhető adatokból, ami miatt jól kezelhető.

A historikus volatilitás trajektória tulajdonságait megvizsgálva könnyen információt szerezhetünk arról, hogy azt modellezve milyen meghajtó folyamatot érdemes alkalmazni. Különösen az 1.2.5-ben tárgyalt tulajdonság az, ami karakterizálja a meghajtó folyamatot, és amely jól elkülöníti a frakcionálist a klasszikus Brown-mozgástól. Mivel a volatilitásfolyamat nemnegatív, szükséges egy nemnegatív transzformáció az azt meghajtó nem korlátos folyamatra. Mi most az exponenciális transzformációt tekintjük, vagyis a továbbiakban a historikus volatilitás logaritmusát vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy Δ lépésközű diszkrét megfigyelésekkel rendelkezünk a volatilitásfolyamatról a $[0, T]$ intervallumon:

$$\sigma_0, \sigma_\Delta, \dots, \sigma_{k\Delta}, \dots; \quad \text{ahol } k \in \{0, 1, \dots, N\}; \quad N := \left\lfloor \frac{T}{\Delta} \right\rfloor.$$

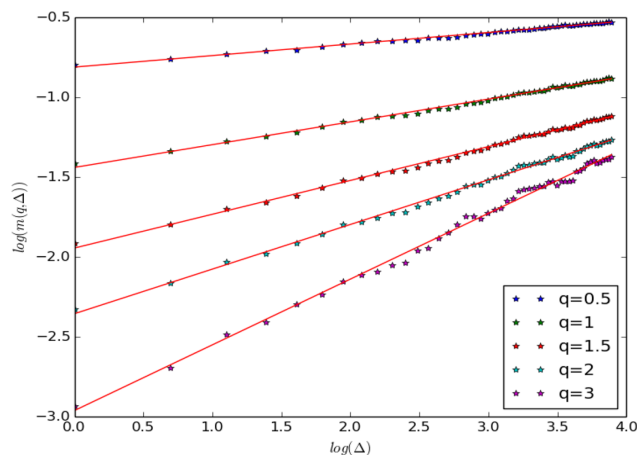
A logvolatilitásfolyamat növekményeloszlását stacionáriusnak feltételezve legyen a növekményminta q -adik tapasztalati abszolút momentuma $q > 0$ mellett:

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{k\Delta}) - \log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q \approx \mathbb{E}[|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0)|^q].$$

A volatilitásfolyamatot a [2] cikk naponkénti közelítéssel tekinti számos részvényindexre több különböző módon is kiszámítva. Minden esetben hasonló következtetések vonhatók le $m(q, \Delta)$ -ra vonatkozóan. Ennek logaritmusa $\log(\Delta)$ függvényében ábrázolva (1.3.4 ábra) különböző egyeneseken fekszik az egyes q értékekre, ami azt jelenti, hogy $m(q, \Delta)$ polinomiálisan függ Δ -tól. Továbbá stilizált tény, hogy a logvolatilitás növekményeloszlása közel normális. Tehát

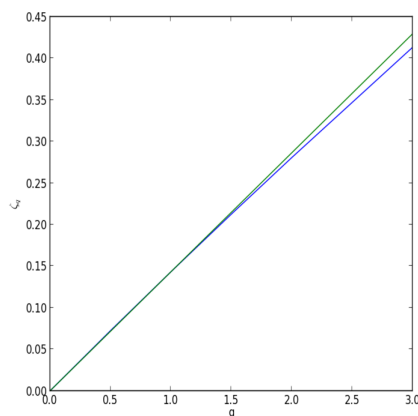
$$\mathbb{E}[|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0)|^q] = K_q \Delta^{\zeta_q},$$

ahol K_q továbbra is a standard normális eloszlás q -adik abszolút momentumát jelöli.



1.3.4. ábra. $\log(m(q, \Delta))$ ábrázolva $\log(\Delta)$ függvényében az S&P 500 indexre. [2]

Az előbbi egyenesek meredekségét, vagyis a ζ_q kifejezést q függvényében ábrázolva (1.3.5 ábra) szintén közel egyenest kapunk, vagyis $\zeta_q \approx Hq$, ahol $H \approx 0.1$ az összes vizsgált index esetében. Összevetve az 1.2.5-ben látott kifejezést kapjuk vissza. Tehát historikusan a logvolatilitás úgy viselkedik, mint egy frakcionális Brown-mozgás $H \approx 0.1$ Hurst-együtthatóval, ami egybevág az 1.1 részben tárgyaltakkal. Az ehhez hasonlóan kicsi



1.3.5. ábra. ζ_q ábrázolva q függvényében az S&P 500 indexre. [2]

Zölden a $0.142 \cdot q$ illesztett egyenes

Hurst-együtthatón alapuló folyamatokat nevezzük *érdesnek*. A kicsi Hurst-együtthatóból fakadóan a logvolatilitás növekményei negatívan korreláltak, amely tükrözi azt a stilizált tényt, hogy a volatilitásfolyamat általában csökken, ha magas az értéke, és általában nő, ha alacsony. Ezt a tulajdonságot gyakran nevezik (helytelenül) átlaghoz visszahúzásnak.

1.4. A kapcsolódó programkód magyarázata

Az előző elemzés szerint a historikus volatilitás gyakorlatban egy érdes folyamat, ezért ebből a szempontból nem célszerű azt klasszikus Brown-mozgás segítségével modellezni. Ezt ellenőrizni fogjuk egy R-ben megírt saját programmal is. A fejezethez írt programhoz tartozó [függvények](#), valamint a [szkript](#) megtalálható a dolgozat végén a [függelékben](#). A kódban magenta színnel emeljük ki az önállóan írt függvényeket és kézzel a kulcsszavakat, valamint az alapértelmezett elérhető, vagy behivatkozott függvényeket.

A vizsgálathoz szükséges először is egy forrás, ahonnan historikus volatilitás adatokat tudunk szerezni. Egy nyilvánosan elérhető adatbázissal ([Oxford-Man Institute's realized library](#)) dolgozunk. Itt a nagyobb részvényindexek historikus volatilitásfolyamatára napi frissítéssel elérhető számos lehetséges mérőszám. Az első saját függvénnyel kigyűjtjük egy választott részvényindexhez tartozó releváns adatokat xts formátumban az adatbázisból. A programban a Dow Jones Ipari Átlag index 5 percenként mintavételezett idősorához tartozó négyzetes hozamainak összegét használjuk napi bontásban. Ez az indexnek az ún. realizált napi varianciafolyamata, amely jó közelítése a realizált volatilitás négyzetének.

A következő lépés a frakcionális Brown-mozgás trajektória szimulációja. Ezt a Cholesky-dekompozíció segítségével valósítjuk meg. Az 1.2.3 definícióból a frakcionális Brown-mozgás egy adott (R) autokovariancia-mátrixú centrált Gauss-folyamat. Ezért, ha \mathbf{x} független standard normális eloszlású vektor, és Σ alsóháromszög-mátrixra $R = \Sigma\Sigma^T$, akkor $\mathbf{y} = \Sigma\mathbf{x}$ éppen R autokovariancia-mátrixú centrált Gauss-folyamat lesz:

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}]\mathbb{E}[\mathbf{y}^T] = \mathbb{E}[\Sigma\mathbf{x}]\mathbb{E}[(\Sigma\mathbf{x})^T] = \Sigma (\mathbb{E}[\mathbf{x}]\mathbb{E}[\mathbf{x}^T]) \Sigma^T = \Sigma I \Sigma^T = R. \quad (1.4.4)$$

A Σ mátrix előállítható Cholesky-dekompozíció segítségével $\mathcal{O}(n^3)$ időben. Ehhez szükséges a Hurst-paraméter, a szimulált folyamat hossza és a közelítés finomsága. Valójában az 1.2.10 állítás miatt az utolsó két paraméterből elég csak az egyiket megadni, és így a másikat rögzítettnek tekintve a szimulált folyamat átskálázásával már elérhető a választott paraméterezés. A mátrix előállítása után viszont már csak független standard normális eloszlás generálását és egy $\mathcal{O}(n)$ időben elvégezhető vektor–alsóháromszög-mátrix szorzást kell végrehajtanunk. A Σ mátrix újraszámolására csak akkor van szükség, ha módosítani akarjuk az előállításhoz szükséges paramétereket. Ezért a két lépést felbontjuk két külön függvényre, hogy nagy mennyiségű trajektóriát viszonylag gyorsan tudjunk szimulálni a mátrix előállítása után, amire gyakorlati alkalmazások során gyakran szükség van. Ezt oldjuk meg a második, harmadik és negyedik függvények segítségével.

A későbbiekben szükséges lesz a Σ mátrixból visszaállítani a paramétereket, melyek segítségével azt létrehoztuk. Ezt valósítjuk meg $\mathcal{O}(1)$ időben az ötödik függvényben. Tudjuk, hogy $R = \Sigma\Sigma^T$, valamint δ finomságú lépésköz esetén

$$R_{ij} = \frac{1}{2} ((i\delta)^{2H} + (j\delta)^{2H} - |(j-i)\delta|^{2H}).$$

Innen pedig

$$R_{11} = \delta^{2H}, \quad R_{22} = (2\delta)^{2H} \implies \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{R_{22}}{R_{11}} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{(2\delta)^{2H}}{\delta^{2H}} \right) = \frac{1}{2} \log_2(2^{2H}) = H.$$

Továbbá $\delta = \sqrt[2H]{R_{11}}$, és a folyamat hossza pedig $n\delta$, ahol n a Σ mátrix sorainak száma. Mivel $R_{1:2,1:2} = \Sigma_{1:2,1:2} \Sigma_{1:2,1:2}^T$, ahol az index a mátrix megfelelő méretű szeletét jelöli, ez valóban megtehető konstans lépésben.

Most kidolgozunk egy saját eljárást a következő feladatra. Tegyük fel, hogy adott egy n hosszú idősor, melyről feltételezzük, hogy skálázott frakcionális Brown-mozgás ismeretlen Hurst-együtthatóval és skálaparaméterrel. Ennek becsüljük meg a H paraméterét $\mathcal{O}(n)$ idő alatt. Ehhez szükséges a korábban bevezetett $m(q, \Delta)$ kiszámítása egy adott idősorra.

Ezt a hatodik függvénybe foglaltuk $\Delta = 1$ esetre. Az 1.2.5 megjegyzés és a feltételezésünk mellett a nagy számok erős törvénye miatt aszimptotikusan

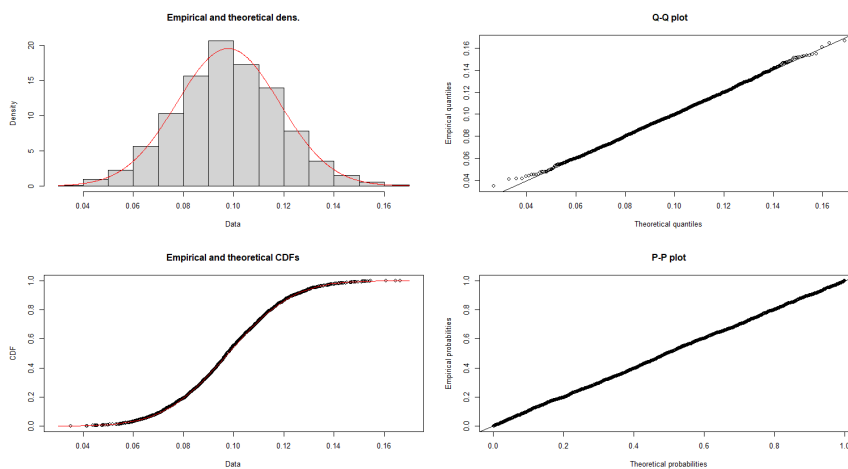
$$m(q, \Delta_S) := m(q, S\Delta) \approx K_q \nu^q (\Delta_S)^{qH} = C(q) (\Delta_S)^{qH},$$

ahol ν a frakcionális Brown-mozgás, S pedig a lépésköz ismeretlen skálaparamétere, így a kifejezés maga is skálafüggő. Mi azonban skálafüggetlen becslést szeretnénk H értékére. Ismeretlen Δ_S mellett ki tudjuk számítani $m(q, \Delta_S)$ értékét a folyamat differenciálásával. Továbbá kiszámítható $m(q, s\Delta_S)$ is az idősor minden s -edik elemének megtartásával és differenciázással. Innen adódik a megoldás:

$$\frac{1}{q} \log_s \left(\frac{m(q, s\Delta_S)}{m(q, \Delta_S)} \right) = \frac{1}{q} \log_s \left(\frac{C(q)(s\Delta_S)^{qH}}{C(q)\Delta_S^{qH}} \right) = \frac{1}{q} \log_s (s^{qH}) = H.$$

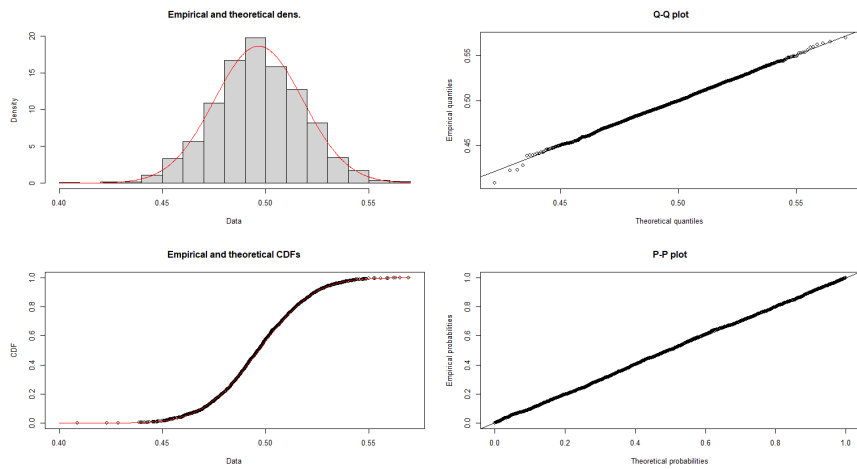
Ezt a kifejezést számítjuk ki a hetedik függvényben adott q és s paraméterek mellett. Mivel az első egyenlőség csak aszimptotikusan teljesül, így a kifejezést a nyolcadik függvényben több q és s érték mellett is kiszámítjuk, és az eredmények átlagolásával adunk végső becslést H értékére.

A kilencedik függvényben megvizsgáljuk az előző becslés eloszlását adott H érték mellett. Először is szimulálunk 2000 darab 1000 hosszú adott H paraméterű frakcionális Brown-mozgás trajektóriát, majd ezekre visszabecslüljük az előző eljárással a paraméter értékét. Ezután kiíratjuk a becslések átlagát, szórását valamint 5% és 95%-os kvantiliseit, majd ráillesztünk egy megfelelően paraméterezett normális eloszlást. Megvizsgáljuk az illesztés minőségét ábrákkal és Jarque-Bera teszttel is. A függvényt lefuttatjuk 0.1, 0.5 és 0.9 Hurst-paraméter értékekre is.



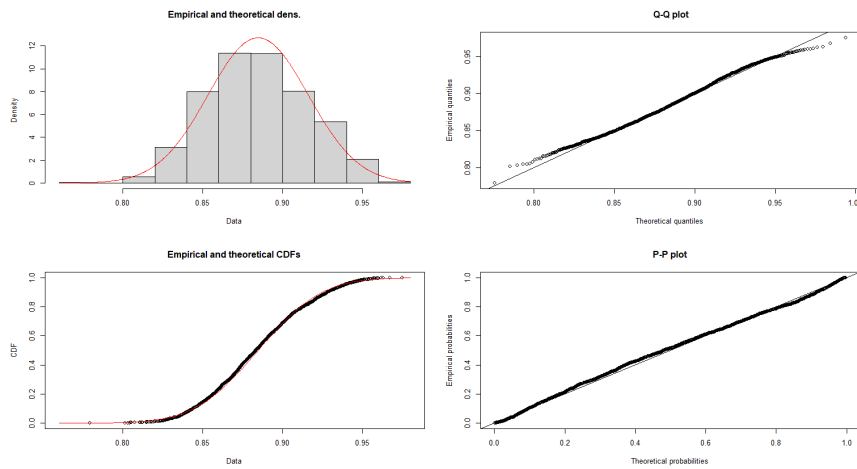
1.4.6. ábra. $H = 0.1$ paraméter becslésének eloszlásvizsgálata

$H = 0.1$ mellett láthatóan jól illeszkedik az eloszlás a normálisra (1.4.6 ábra). Ezért a Jarque-Bera teszt alapján a normalitást nem utasítjuk el 0.51-es p -érték mellett.



1.4.7. ábra. $H = 0.5$ paraméter becslésének eloszlásvizsgálata

$H = 0.5$ mellett is hasonló megfigyeléseink vannak, a teszt alapján a normalitást ekkor sem elutasítjuk el 0.6-os p -értékkel (1.4.7 ábra).

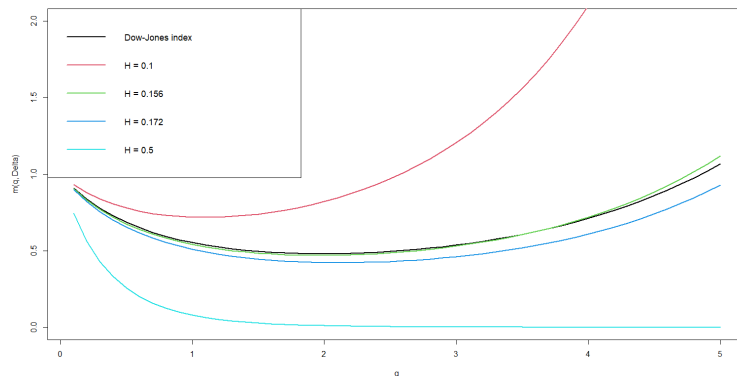


1.4.8. ábra. $H = 0.9$ paraméter becslésének eloszlásvizsgálata

$H = 0.9$ mellett az eloszlás enyhén ferde balra, valamint keskenyebb farokeloszlású, így a normalitást elutasítjuk nagyon kicsi p -értékkel (1.4.8 ábra). Nem találjuk el pontosan az elméleti 0.9 várható értéket sem. Azonban ez a paraméterezés az előző részekből kifolyólag nem érdekes számunkra, így nem foglalkozunk vele a továbbiakban. A becslésátlagok, szórásaik és a kvantilisek a következő táblázatban ábrázolt módon alakultak a mintafuttatásnál:

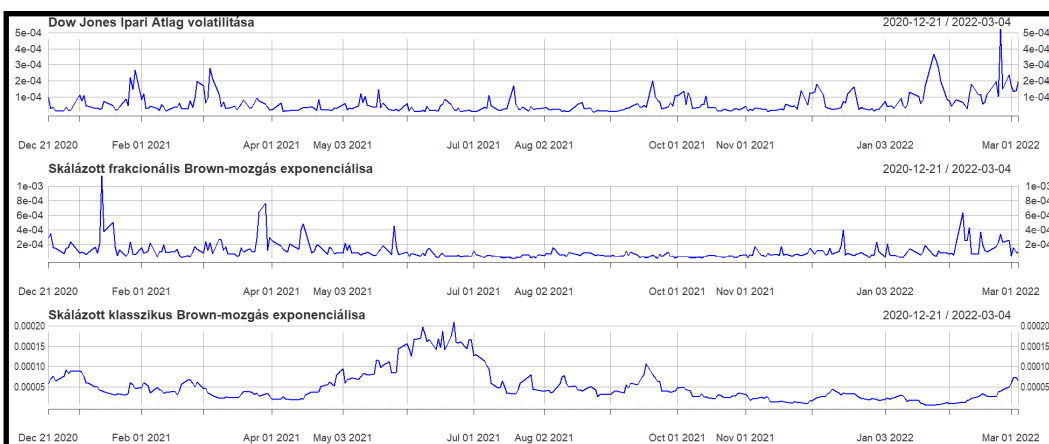
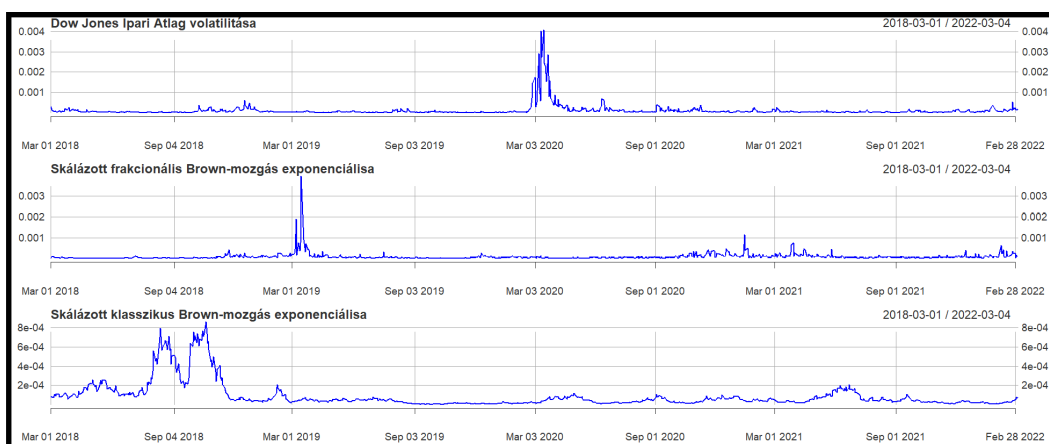
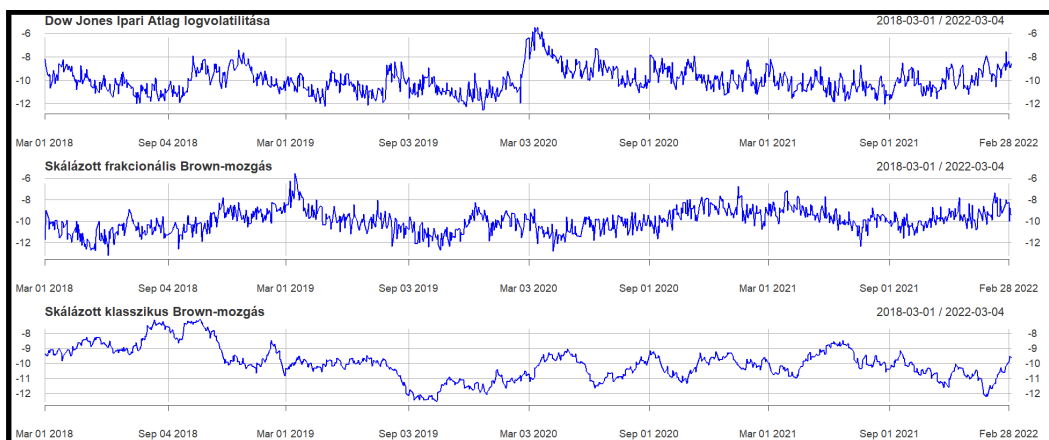
H	0.1	0.5	0.9
átlag	0.098	0.497	0.885
szórás	0.021	0.021	0.031
5%, 95%-os kvantilisek	0.064, 0.131	0.462, 0.535	0.837, 0.938

Összegezve tehát a becslésünk eloszlását normálisnak tekinthetjük, melynek várható értéke a paraméter valódi értéke, szórása pedig 0.021. Használjuk most a függvényt arra, hogy megbecsüljük a Dow Jones index realizált varianciafolyamatának elmúlt 1000 nap hosszú szeletéhez tartozó Hurst-együtthatóját. Az eredmény 0.172, amelynek nagyságrendje egybevág az eddigi elmélettel. Ennek a pontosságát azonban le is kell tesztelnünk valamely módon. A szkript harmadik részében a tizedik és tizenegyedik függvények segítségével kiszámítjuk $m(q, \Delta = 1 \text{ nap})$ értékét, ahol $q = \{0.1, 0.2, \dots, 5\}$ az indexre, valamint 100 – 100 darab megfelelő hosszúságú frakcionális Brown-mozgás szimulációra, $H = 0.1, H = 0.156, H = 0.172, H = 0.5$ paraméterekkel. A szimulációkat úgy skálázzuk, hogy azonos szórásúak és átlagúak legyenek, mint az indexfolyamat. Az eredmények összehasonlításából látható, hogy a $H = 0.156$ választás jobban illeszkedő görbét eredményez (ezt az értéket próbálkozásokkal könnyen meg lehet találni). Ezt tekintve a H valódi értékének látható, hogy az eljárás nem teljesen pontos, azonban a vétett hiba (0.016) a korábban számolt szórásnyi (0.021) tartományon belül van.



1.4.9. ábra. $m(q, \Delta)$ különböző H értékek mellett, valamint az indexfolyamat esetén

Most generáljunk egy-egy 1000 hosszúságú frakcionális és klasszikus Brown-mozgás trajektóriát. Ezeket megfelelő lineáris transzformáció segítségével ismét úgy alakítjuk, hogy a realizált variancia logaritmusával azonos átlagúak és szórásúak legyenek. Ezután egy ábrán rendre összehasonlítjuk ezeket, majd exponenciálisukat, végül pedig az exponenciális utolsó 300 hosszú szeletét a megfelelő index idősor szelettel együtt. Az eredmények szemmel látható módon alátámasztják a korábban tárgyaltakat.



1.4.10. ábra. Skálázott $H = 0.1$ és $H = 0.5$ paraméterű FBM trajektória összehasonlítva a Dow Jones index historikus volatilitásfolyamatával.

2. fejezet

Érdes volatilitáson alapuló modellek

Az előző fejezetben bemutattuk a frakcionális Brown-mozgás használatának motivációját sztochasztikus volatilitással történő pénzügyi modellezés esetén. A következőekben ilyen típusú modellre vizsgáljuk meg a legismertebb példákat, először [2] javaslatát.

2.1. RFSV-modell

A korábban tárgyaltak szerint a logvolatilitás $H \approx 0.1$ paraméterű frakcionális Brown-mozgáshoz hasonló tulajdonságokkal rendelkezik. Logikus tehát a modellezésnél

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dZ_t, \quad \sigma_t = \sigma \exp(\nu B_t^H), \quad t \in [0, T].$$

feltevést használni, mint az előbbi vizsgálatnál is tettük. Itt $\sigma > 0, \nu$ konstansok, S pedig az alaptermék diszkontált árfolyamata. Ennek jelentése az Itô-formula alapján

$$S_t = S_0 \mathcal{E} \left(\int_0^t \sigma_u dZ_u \right) = S_0 \mathcal{E} \left(\sigma \int_0^t \exp(\nu B_u^H) dZ_u \right).$$

2.1.1 Megjegyzés. Ha $X \sim N(0, \cdot)$, akkor $\mathcal{E}(X) = \exp\left(X - \frac{1}{2}\mathbb{E}|X|^2\right)$ az ún. Wick-exponenciális. Adott Z folyamat esetén a sztochasztikus exponenciális folyamat $\mathcal{E}(Z_t) := \exp(Z_t - Z_0 - \frac{1}{2}[Z]_t)$. Ha Z Gauss-folyamat, akkor a növekménye esetében egybeesik a két fogalom, például Volterra-integrálok esetén. Ha Z lokális martingál, akkor $\mathcal{E}(Z)$ szintén az. Ha Z teljesíti a Novikov- vagy a Kazamaki-feltételt, akkor $\mathcal{E}(Z)$ martingál.

Itt álljunk meg, és gondoljuk végig, hogy a képletben található integrál egyáltalán értelmes-e, hiszen az integrandus nem szemimartingál. Ez azonban nem probléma, hiszen az Itô-integrálokat minden \mathcal{L} -beli folyamatra értelmeztük, ahol

$$\mathcal{L} = \left\{ \varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető, és minden } t \geq 0\text{-ra } \mathbb{P} \left(\int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \right) = 1 \right\}.$$

Ezeket a frakcionális Brown-mozgás exponenciálisa teljesíti, amely progresszíven mérhető, pontonként lognormális eloszlású. Sőt, az integrandus valójában \mathcal{S} -beli (definícióért lásd 1.2.20). Ehhez a nemnegatív integrandusra vonatkozó Fubini-tételt felhasználva

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \exp(\nu B_u^H)^2 du \right) = \int_0^t \mathbb{E} (\exp(2\nu B_u^H)) du = \int_0^t \exp \left(\frac{4\nu^2 |u|^{2H}}{2} \right) du < \infty.$$

Tehát az integrál négyzetesen integrálható martingál, vagyis az árfolyamat lokális martingál (lásd 2.1.1). Azt azonban nem tudjuk, hogy ez valódi martingál is-e. Meggondolható, hogy a Novikov-feltétel ebben az esetben nem teljesül. Később látni fogjuk, hogy nem minden esetben martingál. Ez attól is függ, mekkora a korreláció a frakcionális Brown-mozgás Mandelbrot-reprezentációjában (1.2.16) szereplő integrátor Brown-mozgás és a részvényárfolyamatot meghajtó Brown-mozgás között.

A modell ilyen formájában azonban nem ad stacionárius megoldást, hiszen az 1.2.5 megjegyzés szerint σ_t így lognormális eloszlású lesz $(0, |t|^{2H})$ paraméterekkel. A stacionaritás szükséges, hogy a folyamat hosszú távú modellezésnél is használható maradjon, ezért módosítjuk.

2.1.2 Definíció. *Frakcionális Ornstein–Uhlenbeck-folyamatnak nevezzük a következő sztochasztikus differenciálegyenlet stacionárius megoldását:*

$$dX_t = \nu dB_t^H - \alpha(X_t - m)dt, \quad (2.1.1)$$

ahol B^H frakcionális Brown-mozgás, valamint $\alpha, \nu > 0, m \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Megjegyzés. *Az előbbi egy elterjedt jelölés a szakirodalomban, és a következő sztochasztikus differenciálegyenletet értjük alatta:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \nu dB_s^H - \int_0^t \alpha(X_s - m)ds = X_0 + \nu B_t^H + \alpha mt - \alpha \int_0^t X_s ds.$$

Az előbbi jelölés az egyenlet differenciálalakja, utóbbi pedig ennek integrálalakja.

2.1.4 Állítás. *Az előző egyenletnek [10] szerint létezik trajektóriánként egyértelmű, 1-valószínűséggel folytonos trajektóriájú megoldása a következő alakban:*

$$X_t = e^{-\alpha t} X_0 + (1 - e^{-\alpha t}) m + \nu \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s^H.$$

Az utóbbi integrált is értelmezhetjük trajektóriánkénti Riemann–Stieltjes-integrálként, mivel az integrandus korlátos változású, B^H pedig majdnem mindenütt folytonos trajektóriájú (lásd 1.2.13, 1.2.14). Ha a kezdeti feltétel

$$X_0 = m + \nu \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha s} dB_s^H$$

alakú, akkor

$$\begin{aligned} X_t &= e^{-\alpha t} \left(m + \nu \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha s} dB_s^H \right) + (1 - e^{-\alpha t}) m + \nu \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s^H = \\ &= \nu \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s^H + m, \end{aligned}$$

és a megoldás (másodrendben gyengén) stacionárius is:

$$\mathbb{E}(X_t) = m, \quad \mathbb{D}^2(X_t) = \nu^2 \alpha^{-2H} H \Gamma(2H). \quad (2.1.2)$$

2.1.5 Megjegyzés. Az előző alakot átírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} X_t &= \nu \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s^H + m = \nu [B_s^H e^{-\alpha(t-s)}]_{-\infty}^t + m - \nu \int_{-\infty}^t B_s^H d(e^{-\alpha(t-s)}) \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} \nu B_t^H - 0 + m - \nu \int_{-\infty}^t B_s^H d(e^{-\alpha(t-s)}) = \nu B_t^H + m - \nu \int_{-\infty}^t B_s^H \alpha e^{-\alpha(t-s)} ds \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Itt trajektóriánként alkalmaztuk a parciális integrálási elvet, a folytonosan differenciálható függvény szerinti integrálási képletet, valamint, hogy

$$B_s^H e^{-\alpha(t-s)} \sim N(0, e^{-2\alpha(t-s)} |s|^{2H}) \xrightarrow{d} 0, \quad \text{ha } s \rightarrow -\infty.$$

A 2.1.3 egyenlet átírható a Riemann-integrál közelítőösszegére a következő módon:

$$X_t = m + \nu \left(\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-ns}^{nt-1} B_{\frac{j}{n}}^H \alpha e^{-\alpha(t-\frac{j}{n})} \left(\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right) + B_t^H \right).$$

Mivel B^H Gauss-folyamat, alkalmazható az 1.2.16 állítás bizonyításában elmondott érvelés, így az X folyamat nemcsak stacionárius, hanem Gauss-folyamat is.

Használjuk ezt az immár stacionárius Gauss-folyamatot a logvolatilitás modellezéséhez:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dZ_t, \quad \sigma_t = \exp(X_t), \quad t \in [0, T].$$

Ezt a megközelítést nevezzük "érdes frakcionális sztochasztikus volatilitásmodellnek", vagy röviden RFSV-modellnek (*Rough Fractional Stochastic Volatility*). A definícióból látszik, hogy $\alpha = 0$ választással visszkapjuk a skálázott frakcionális Brown-mozgást. Általánosabban formalizálható, hogy az X folyamat "kicsi" α ($\alpha \ll 1/T$) választás mellett (jelölje X^α) lokálisan ($[0, T]$ időintervallumon) frakcionális Brown-mozgásként viselkedik:

2.1.6 Állítás. $\alpha \rightarrow 0$ esetén

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^\alpha - X_0^\alpha - \nu B_t^H| \right] \rightarrow 0.$$

Így a folyamatnak megmaradnak a korábban vizsgált kedvező tapasztalati tulajdonságai a hosszú távú kezelhetőséghez szükséges stacionaritással együtt.

Bizonyítás. A bizonyítást [2] alapján, a részleteket kifejtve dolgozzuk ki. A 2.1.3 egyenletből láttuk, hogy

$$X_t^\alpha = \nu B_t^H + m - \nu \int_{-\infty}^t B_s^H \alpha e^{-\alpha(t-s)} ds,$$

így

$$(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu B_t^H = - \int_0^t B_s^H \nu \alpha e^{-\alpha(t-s)} ds - \int_{-\infty}^0 B_s^H \nu \alpha (e^{-\alpha(t-s)} - e^{\alpha s}) ds,$$

ahonnan $\hat{B}_t^H = \sup_{s \in [0, t]} |B_s^H|$ jelöléssel

$$\sup_{t \in [0, T]} |(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu B_t^H| \leq \nu \alpha T \hat{B}_T^H + \int_{-\infty}^0 \hat{B}_s^H \nu \alpha (e^{\alpha s} - e^{-\alpha(T-s)}) ds.$$

Amennyiben teljesül, hogy

$$\mathbb{E}(\hat{B}_t^H) \leq c |t|^H, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.1.4)$$

valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a fenti egyenlőtlenség várható értékét véve kapjuk, hogy

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu B_t^H| \right] \leq c \left(\nu \alpha T T^H + \int_{-\infty}^0 |s|^H \nu \alpha (e^{\alpha s} - e^{-\alpha(T-s)}) ds \right).$$

Itt már a jobb oldali kifejezés 0-hoz tart $\alpha \rightarrow 0$ esetén. Az összeg első tagjára ez nyilvánvaló, az integrált átírva és a Gamma eloszlás sűrűségfüggvényének alakját felhasználva pedig

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^H \nu \alpha (e^{-\alpha s} - e^{-\alpha(T+s)}) ds &= \nu \alpha (1 - e^{-\alpha T}) \int_0^\infty s^H e^{-\alpha s} ds = \\ &= \nu \alpha (1 - e^{-\alpha T}) \frac{\Gamma(H+1)}{\alpha^{H+1}} \int_0^\infty \frac{\alpha^{H+1} s^H e^{-\alpha s}}{\Gamma(H+1)} ds = \nu (1 - e^{-\alpha T}) \frac{\Gamma(H+1)}{\alpha^H}, \end{aligned}$$

melyre már szintén látható. Maradt tehát a 2.1.4 egyenlőtlenség bizonyítása, melyhez a [2] forrás a [11] cikkben bizonyított 1.2-es tétel egyenlőtlenségét használja fel. Azonban a tétel feltétele, mely szerint $H > 0.5$, valójában nem teljesül, ezért más utat választunk. A frakcionális Brown-mozgás önhasonlósága (1.2.10) nyomán

$$\mathbb{E}(\hat{B}_t^H) = |t|^H \mathbb{E}(\hat{B}_1^H) \leq c |t|^H \iff \mathbb{E}(\hat{B}_1^H) \leq c$$

valamely c konstansra, vagyis elég ha $\mathbb{E}(\hat{B}_1^H) < \infty$. Tudjuk, hogy \hat{B}^H Gauss-folyamat, valamint 1-valószínűséggel folytonos trajektóriájú, hiszen a frakcionális Brown-mozgás

folytonos trajektóriáihoz a maximumfolyamatnak is folytonos trajektóriája tartozik. Az is nyilvánvaló, hogy $\mathbb{P}(\hat{B}_1^H < \infty) \neq 0$. Ebből pedig [12] alapján teljesül, hogy \hat{B}_1^H -nak létezik véges exponenciális abszolút momentuma, vagyis első abszolút momentuma is véges. \square

2.1.7 Következmény. $q > 0, t > 0, \Delta > 0, \alpha \rightarrow 0$ esetén

$$\mathbb{E}[|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q] \rightarrow \nu^q K_q \Delta^{qH}$$

Ez mutatja, hogy megfelelő α választás mellett a folyamat növekmény skálázódása is a tapasztalati megfigyeltekhez (és a frakcionális Brown-mozgáshoz) hasonló marad (lásd 1.2.5 megjegyzés).

Bizonyítás. Szintén [2] alapján, részletezve. A [13] cikk 2.4-es megjegyzésének 2.2-es egyenlete szerint teljesül a

$$\text{Cov}[X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha] = K \int_{\mathbb{R}} e^{i\Delta x} \frac{|x|^{1-2H}}{\alpha^2 + x^2}$$

egyenlőség $K = \nu^2 \Gamma(2H + 1) \sin(\pi H) / (2\pi)$ jelöléssel. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2] &= \mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha)^2] + \mathbb{E}[(X_t^\alpha)^2] - 2\mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha] = \\ &= 2(\mathbb{E}[(X_t^\alpha)^2] - \mathbb{E}^2[X_t^\alpha]) - (2\mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha] - \mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha] \mathbb{E}[X_t^\alpha]) = \\ &= 2\text{Cov}(X_t^\alpha, X_t^\alpha) - 2\text{Cov}(X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

ugyanis X^α másodrendben stacionárius folyamat, és így $\mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha] = \mathbb{E}[X_t^\alpha]$, valamint $\mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha)^2] = \mathbb{E}[(X_t^\alpha)^2]$. Összevetve

$$\mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2] = 2K \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\Delta x}) \frac{|x|^{1-2H}}{\alpha^2 + x^2} \leq 2K \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\Delta x}) \frac{|x|^{1-2H}}{x^2},$$

ezért az

$$\alpha \mapsto \mathbb{E}[|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^2]$$

függvény egyenletesen korlátos. Ráadásul az $X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha$ változó normális eloszlású, így minden q -ra egyenletesen korlátos az

$$\alpha \mapsto \mathbb{E}[|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^{q+1}]$$

függvény is. Következtetésképpen a

$$\{|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$$

valószínűségi változó család egyenletesen integrálható. A 2.1.6 állításból $\alpha \rightarrow 0$ esetén:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |(X_t^\alpha - X_0^\alpha - \nu B_t^H)| \right] \rightarrow 0 &\implies X_t^\alpha - X_0^\alpha \xrightarrow{L_1} \nu B_t^H, \quad \forall t \in [0, T] \implies \\ \implies (X_{t+\Delta}^\alpha - X_0^\alpha) - (X_t^\alpha - X_0^\alpha) &\xrightarrow{L_1} \nu(B_{t+\Delta}^H - B_t^H) \implies |X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q \xrightarrow{d} \nu^q |B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q. \end{aligned}$$

A [2] cikk állítása szerint, mivel a valószínűségi változó sorozat gyengén konvergál és egyenletesen integrálható, a várható értékek is konvergálnak, így a bizonyítandó állítást kapjuk meg. Ez azonban az eddigi tanulmányaink alapján még nem következik. Elég lenne viszont megmutatni, hogy az utolsó konvergencia 1 valószínűségű is, mivel az egyenletes integrálhatóság feltétele mellett ez L_1 -beli konvergenciát eredményez egy korábban tanult tétel alapján. Ebből már következne a várható értékek konvergenciája:

$$|\mathbb{E} [|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q] - \mathbb{E} [\nu^q |B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q]| \leq \mathbb{E} [||X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q - \nu^q |B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q|] \rightarrow 0.$$

Az 1 valószínűségű konvergencia bizonyításához felhasználjuk a [14] cikkben is megtalálható tételt:

2.1.8 Tétel. (Skorokhod reprezentációs tétel)

Legyen adott (S, d) teljes szeparábilis metrikus tér. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}_n, (n = 1, 2, \dots)$ és \mathbb{P} valószínűségi mértékek (S, \mathcal{B}) -n úgy, hogy $\mathbb{P}_n \xrightarrow{d} \mathbb{P}$ (itt \mathcal{B} az S Borel σ -algebráját jelöli). Ekkor létezik $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, melyen léteznek X és $X_n, (n = 1, 2, \dots)$ S -értékű valószínűségi változók rendre \mathbb{P} és $\mathbb{P}_n, (n = 1, 2, \dots)$ eloszlással úgy, hogy $X_n \rightarrow X$ majdnem mindenütt.

Alkalmazzuk a tételt $S = \mathbb{R}, d = |\cdot|_{\text{Eukl.}}, \mathbb{P}_n = \mathcal{L}(|X_{t+\Delta}^{\frac{1}{n}} - X_t^{\frac{1}{n}}|^q), \mathbb{P} = \mathcal{L}(\nu^q |B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q)$ választásokkal, ahol $\mathcal{L}(X)$ az X valószínűségi változó eloszlását jelöli. Ebből tudjuk, hogy létezik egy absztrakt valószínűségi mező és azon egy valószínűségiváltozó-sorozat úgy, hogy $\alpha \rightarrow 0$ mellett

$$|\tilde{X}_{t+\Delta}^\alpha - \tilde{X}_t^\alpha|^q \xrightarrow{\text{m.m.}} \nu^q |\tilde{B}_{t+\Delta}^H - \tilde{B}_t^H|^q,$$

ahol

$$|\tilde{X}_{t+\Delta}^\alpha - \tilde{X}_t^\alpha|^q \stackrel{d}{=} |X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q, \quad \nu^q |\tilde{B}_{t+\Delta}^H - \tilde{B}_t^H|^q \stackrel{d}{=} \nu^q |B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q,$$

tehát ezen változók is egyenletesen integrálhatóak. A fentiekből pedig

$$\mathbb{E} [|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q] = \mathbb{E} [|\tilde{X}_{t+\Delta}^\alpha - \tilde{X}_t^\alpha|^q] \rightarrow \mathbb{E} [\nu^q |\tilde{B}_{t+\Delta}^H - \tilde{B}_t^H|^q] = \nu^q K_q \Delta^{qH}.$$

Látható, hogy ugyanez az érvelés általánosan is használható a [2] cikk megkérdőjelezett állításának bizonyítására. \square

2.1.9 Következmény. $t > 0, \Delta > 0, \alpha \rightarrow 0$ esetén

$$\text{Cov} [X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha] = \mathbb{D}^2[X_t^\alpha] - \frac{1}{2}\nu^2\Delta^{2H} + o(1).$$

Az állítás szerint a modellben a logvolatilitás autokovariancia-függvénye lineárisan csökkenő Δ^{2H} -ban.

Bizonyítás. A 2.1.7 következmény szerint $q = 2$ esetben

$$\mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2] = \mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha)^2] + \mathbb{E}[(X_t^\alpha)^2] - 2\mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha] \rightarrow \nu^2 K_2 \Delta^{2H} = \nu^2 \Delta^{2H},$$

melyet átrendezve

$$\mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha] \rightarrow \frac{1}{2} (\mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha)^2] + \mathbb{E}[(X_t^\alpha)^2] - \nu^2 \Delta^{2H}).$$

Az X^α folyamat stacionaritásából és 2.1.6-ból következik, hogy

$$\mathbb{E}[X_t^\alpha] = \mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha] \rightarrow 0, \quad \mathbb{E}[(X_t^\alpha)^2] = \mathbb{E}[(X_{t+\Delta}^\alpha)^2] \rightarrow \mathbb{D}^2[X_t^\alpha].$$

Összegezve kapjuk, hogy

$$\text{Cov} [X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha] = \mathbb{E}[X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha] + o(1) = \mathbb{D}^2[X_t^\alpha] - \frac{1}{2}\nu^2\Delta^{2H} + o(1).$$

□

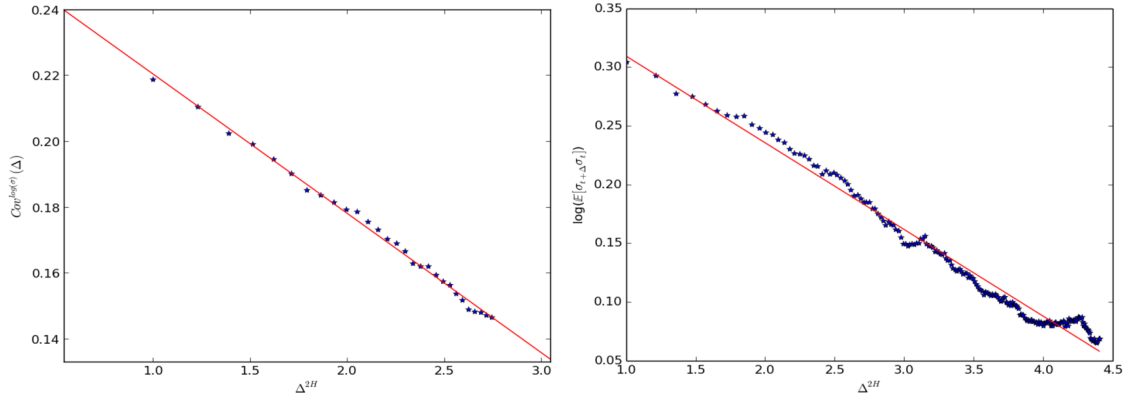
Vizsgáljuk meg most a volatilitás autokovariancia-függvényét is. Tudjuk, hogy $\log(\sigma_t) = X_t^\alpha \sim N(m, s_\alpha)$, ahol $s_\alpha = \nu^2 \alpha^{-2H} H\Gamma(2H)$ a 2.1.2 képlet alapján, ezért

$$\mathbb{E}(\sigma_t) = \mathbb{E}(e^{X_t^\alpha}) = e^{m + \frac{s_\alpha}{2}}.$$

Továbbá X^α Gauss-folyamat, így $(X_{t+\Delta}^\alpha + X_t^\alpha) \sim N(2m, 2s_\alpha + 2\text{Cov}[X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha])$, és

$$\mathbb{E}(\sigma_{t+\Delta}\sigma_t) = \mathbb{E}(e^{X_{t+\Delta}^\alpha + X_t^\alpha}) = e^{2m + s_\alpha + \text{Cov}[X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha]} \approx e^{2m + 2s_\alpha} e^{-\frac{1}{2}\nu^2\Delta^{2H}}$$

a 2.1.9 következmény miatt, ha α értéke kicsi. Eszerint tehát az autokovariancia-függvény exponenciális sebességgel lecsengő. A [2] munka vizsgálatai alapján mind a két autokovariancia-függvény tulajdonságai megfigyelhetőek az adatokból számolt megfelelő tapasztalati függvényeken, ami további fontos érv a modell mellett. Ez azért is érdekes eredmény, mert a volatilitásfolyamat ún. hosszú emlékezetű tulajdonságát jelenthetné a polinomiális lecsengés, de ezt a megfigyelés cáfolja.



(a) $\log(\sigma_t)$ autokovariancia-függvénye (b) σ_t autokovariancia-függvényének logaritmusa

2.1.1. ábra. A [2] cikk vizsgálatai szerinti tapasztalati autokovariancia-függvények.

2.2. Derivátiva-árazás, érdekes Bergomi-modell

Látni fogjuk [15]-öt követve, hogy a frakcionális Brown-mozgás nem markovi jellege miatt további megfontolásokra van szükség ahhoz, hogy a hagyományos árazási elvet alkalmazhassuk. Vegyük az RFSV-modell speciális $\alpha = 0$ választás melletti, nem stacionárius alakját:

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \nu (B_{t+\Delta}^H - B_t^H).$$

Az előző egyenletet a historikus \mathbb{P} mérték alatt értjük a historikus volatilitás korábban vizsgált tulajdonságai miatt. A $v_t = \sigma_t^2$ jelöléssel a varianciafolyamat fejlődésére az 1.2.16 állításból $u \geq t$ mellett a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \log v_u - \log v_t &= 2(\log \sigma_u - \log \sigma_t) = \\ &= 2\nu C_H \int_{-\infty}^0 \left((u-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) - \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s + \\ &+ 2\nu C_H \left\{ \int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s - \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right\} = \\ &= 2\nu C_H \left\{ \int_{-\infty}^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} - (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s + \int_t^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right\} = \\ &=: 2\nu C_H \{ Z_t(u) + M_t(u) \}, \end{aligned}$$

ahol B (kétoldalú) Brown-mozgás a historikus \mathbb{P} mérték alatt. Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\log v_u | \mathcal{F}_t] &= \log v_t + 2\nu C_H \{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_t(u) | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t(u) | \mathcal{F}_t] \} = \\ &= \log v_t + 2\nu C_H Z_t(u), \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

ugyanis $Z_t(u)$ \mathcal{F}_t -mérhető, valamint $M_t(u)$ független \mathcal{F}_t -től a Brown-mozgás markovitása miatt. Sőt, mivel az integrandus determinisztikus Volterra-magfüggvény, így $M_t(u)$ Volterra-folyamat, és az 1.2.16 állítás bizonyításánál megmondottak alapján 0 várható értékű normális eloszlású változó, melynek varianciája

$$\mathbb{D}^2[M_t(u)] = \mathbb{E}[M_t^2(u)] \stackrel{\text{izometria}}{=} \int_t^u (u-s)^{2H-1} ds = \left[-\frac{(u-s)^{2H}}{2H} \right]_{s=t}^u = \frac{(u-t)^{2H}}{2H}.$$

A 2.2.6 egyenletből láthatóan felmerül egy probléma. Nevezetesen, hogy a volatilitás-folyamat markovitásának hiányában látszólag szükséges az azt meghajtó Brown-mozgás teljes múltjának ismerete is a feltételes várható érték számításához, vagyis az opcióárazáshoz is. Továbbá ez nem csak erre a speciális modellre igaz, hanem általános jelenség a frakcionális Brown-mozgás, mint meghajtó folyamat választása esetén. Legyen most

$$\tilde{B}_t(u) := \sqrt{2H} \cdot M_t(u) = \sqrt{2H} \int_t^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \sim N(0, (u-t)^{2H}),$$

Gauss-folyamat, valamint

$$\eta := 2\nu \frac{C_H}{\sqrt{2H}} \implies 2\nu C_H M_t(u) = \eta \tilde{B}_t(u). \quad (2.2.7)$$

Ilyen jelölésekkel a korábbiakból

$$v_u = v_t \exp \left\{ \eta \tilde{B}_t(u) + 2\nu C_H Z_t(u) \right\} \Rightarrow \frac{(v_u | \mathcal{F}_t)}{v_t} \sim \log N \left(2\nu C_H Z_t(u), \nu^2 \mathbb{E} \left| \tilde{B}_t(u) \right|^2 \right),$$

ezért a lognormális eloszlás ismert várható érték képlete miatt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] = v_t \exp \left\{ 2\nu C_H Z_t(u) + \frac{1}{2} \nu^2 \mathbb{E} \left| \tilde{B}_t(u) \right|^2 \right\}.$$

Az előző kettőt összevetve

$$\begin{aligned} v_u &= v_t \exp \left\{ 2\nu C_H Z_t(u) + \frac{1}{2} \nu^2 \mathbb{E} \left| \tilde{B}_t(u) \right|^2 + \eta \tilde{B}_t(u) - \frac{1}{2} \nu^2 \mathbb{E} \left| \tilde{B}_t(u) \right|^2 \right\} = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_t(u) \right), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

ahol \mathcal{E} a Wick-exponenciális (lásd 2.1.1). A 2.2.8 képlet alapján tehát nem szükséges a meghajtó Brown-mozgás múltjának ismerete, mivel a v_u változó feltételes eloszlása az \mathcal{F}_t σ -algebrától csak az $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t]$ kifejezésen, vagyis a variancia előrejelzéseken keresztül függ.

A korábbiak alapján tehát a historikus mérték alatt a 2.2.8 képlet alapján megadott, lognormális varianciamodell visszaadja a megfigyelt variancia idősorok tulajdonságait. Továbbá az $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t]$ folyamat adaptált a B (a kétoldalú Brown-mozgás integrátor) által

generált filtrációra is. Feltételezzük, hogy ez egybeesik a $B^{\mathbb{Q}}$ által generált filtrációval, ahol $B^{\mathbb{Q}}$ Brown-mozgás a \mathbb{Q} kockázatsemleges mérték alatt. Tekintsük általánosan a mértékcsereét:

$$dB_s = dB_s^{\mathbb{Q}} + \lambda_s ds,$$

ahol $\{\lambda_s : s > t\}$ interpretálható, mint a *volatilitáskockázat piaci ára*. A 2.2.8 továbbírható

$$\begin{aligned} v_u &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_t(u) \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \mathcal{E} \left(\eta \sqrt{2H} \int_t^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right) = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \exp \left\{ \eta \sqrt{2H} \int_t^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s - \frac{\eta^2}{2} (u-t)^{2H} \right\} = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \exp \left\{ \eta \sqrt{2H} \int_t^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} (dB_s^{\mathbb{Q}} + \lambda_s ds) - \frac{\eta^2}{2} (u-t)^{2H} \right\} = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \exp \left\{ \eta \sqrt{2H} \int_t^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s^{\mathbb{Q}} - \frac{\eta^2}{2} (u-t)^{2H} + \eta \sqrt{2H} \int_t^u \lambda_s (u-s)^{H-\frac{1}{2}} ds \right\} = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_t^{\mathbb{Q}}(u) \right) \exp \left\{ \eta \sqrt{2H} \int_t^u \lambda_s (u-s)^{H-\frac{1}{2}} ds \right\} \end{aligned}$$

módon, ahol a korábbihoz hasonlóan

$$\tilde{B}_t^{\mathbb{Q}}(u) := \sqrt{2H} \int_t^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s^{\mathbb{Q}} \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} N(0, (u-t)^{2H}). \quad (2.2.9)$$

Látható, hogy \mathbb{Q} alatt v_u általában már nem lognormális eloszlású az utolsó tag miatt, de az marad például determinisztikus λ esetén. Tegyük fel, hogy λ determinisztikus, ekkor

$$v_u = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_t^{\mathbb{Q}}(u) \right) \exp \left\{ \eta \sqrt{2H} \int_t^u \lambda_s (u-s)^{H-\frac{1}{2}} ds \right\} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_u | \mathcal{F}_t] \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_t^{\mathbb{Q}}(u) \right),$$

mert a 2.2.8 képlethez vezető gondolatmenet alkalmazható a \mathbb{Q} mérték alatt is. Ezért

$$\xi_t(u) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_u | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[v_u | \mathcal{F}_t] \exp \left\{ \eta \sqrt{2H} \int_t^u \lambda_s (u-s)^{H-\frac{1}{2}} ds \right\}, \quad u \geq t$$

alakú lesz az ún. *forwardvariancia-görbe*, amely így két tag szorzata: az egyik a meghajtó Brown-mozgás múltjától függő sztochasztikus-, a másik pedig a kockázat piaci árától függő determinisztikus mennyiség.

2.2.1 Megjegyzés. *A volatilitáskockázat a mögöttes pénzügyi eszköz árfolyamatának volatilitásában beálló hirtelen, előre nem látható megváltozásból származó veszteség kockázata. A volatilitáskockázat piaci ára alatt általában azt szokás érteni, hogy a befektetők mekkora kockázati prémiumot várnak el a volatilitáskockázat egységnyi növekedéséért. A volatilitás ma már piacon kereskedhető mennyiség, ezért az előbbi is jól számszerűsíthető.*

Ugyanezért a jelenbeni forwardvariancia-görbe megfigyelhető piaci adatokból. Ehhez gyakorlatban általában a likviden kereskedett variancia swapok árait használják. Egy adott alaptermékre vonatkozó variancia swap lényegében egy olyan forward ügylet, mely esetében a kötési ár (vagy inkább kötési érték) és a kifizetés viszonyítási alapját az alaptermék árfolyamat lejáratig realizált varianciája adja a konkrét árfolyam helyett. Részletesebb leírásért lásd például a [16] munkát. A feltevésünk, hogy λ determinisztikus, mögöttes tartalmában azt jelenti, hogy az ilyen jellegű befektetői preferenciákat gondoljuk időben determinisztikusan változónak. A feltevés jogossága megkérdőjelezhető, azonban ebben az esetben tudunk (viszonylag) könnyen állítást megfogalmazni a variancia eloszlására vonatkozóan.

A korábbiakból

$$v_u = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_u | \mathcal{F}_0] \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_0^{\mathbb{Q}}(u) \right) = \xi_0 \mathcal{E} \left(\eta \sqrt{2H} \int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s^{\mathbb{Q}} \right),$$

ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_u | \mathcal{F}_t] &= \xi_0(u) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{E} \left(\eta \sqrt{2H} \int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s^{\mathbb{Q}} \right) \mid \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta \sqrt{2H} \int_0^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s^{\mathbb{Q}} \right) = \xi_t(u). \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a forwardvariancia-folyamat nem markov tulajdonságú, vagyis $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_u | \mathcal{F}_t] \neq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_u | v_t]$. Eljutottunk tehát a következő modellhez (\mathbb{Q} jelölés elhagyásával):

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sqrt{\xi_t(t)} dZ_t, \quad \xi_t(u) = \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta \sqrt{2H} \int_0^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right), \quad (2.2.10)$$

ahol $dZ_t = \rho dB_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t^{\perp}$, ρ korreláció paraméter, és B, B^{\perp} független Brown-mozgások. Itt tipikusan $\rho < 0$, mivel a volatilitás és az árfolyam tapasztalatilag gyakran mozdul ellentétes irányban.

A modell jelenlegi alakjában az 1 faktoros Bergomi-modell nem markovi általánosításának tekinthető. Az 1 faktoros Bergomi-modell megtalálható a [17] cikkben:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \sqrt{\xi_t(t)} dZ_t, \\ \xi_t(u) &= \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta \int_0^t e^{-\kappa(u-s)} dB_s \right) = \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta e^{-\kappa(u-t)} \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dB_s \right) = \\ &= \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta e^{-\kappa(u-t)} Y_t \right) = \xi_0(u) \exp \left\{ \eta e^{-\kappa(u-t)} Y_t - \frac{1}{2} \eta^2 e^{-2\kappa(u-t)} \mathbb{E}[Y_t]^2 \right\}, \end{aligned}$$

ahol Y klasszikus Ornstein–Uhlenbeck-folyamat, pénzügyi folyamatok tárgyából is tanult explicit képlettel:

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + dB_t \quad \implies \quad Y_t = \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dB_s.$$

Látható, hogy valójában a sztochasztikus exponenciális argumentumában szereplő exponenciális magfüggvényt cseréltük le Volterra-magfüggvényre:

$$\eta \int_0^t e^{-\kappa(u-s)} dB_s \longrightarrow \eta \sqrt{2H} \int_0^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s. \quad (2.2.11)$$

Ezért a modell az *érides Bergomi (rough Bergomi)*, vagy röviden *rBergomi* nevet kapta. A modell feltételei melletti szimulációhoz 2.2.10-ből az Itô-formula szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \mathcal{E} \left(\int_0^t \sqrt{v_u} dZ_u \right) \\ v_u &= \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta \sqrt{2H} \int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right) = \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_0(u) \right). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Itt $\tilde{B} := \tilde{B}_0$ Volterra-folyamat. Ez a folyamat a frakcionális Brown-mozgáshoz hasonlóan skálázódik (1.2.5 megjegyzés, 2.2.9 képlet), valamint utóbbiból $\mathbb{D}^2[\tilde{B}_u] = u^{2H}$. Az összefüggési struktúrája azonban eltérő, hiszen $v \geq u$ mellett az 1.2.21 izometria miatt

$$\begin{aligned} \text{Cov} [\tilde{B}_v, \tilde{B}_u] &= \mathbb{E} [\tilde{B}_v \tilde{B}_u] = 2H \mathbb{E} \left[\int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \int_0^v (v-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right] = \\ &2H \left(\mathbb{E} \left[\int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \int_0^u (v-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \int_u^v (v-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right] \right) \\ &\stackrel{\text{izometria}}{=} 2H \int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} (v-s)^{H-\frac{1}{2}} ds + 0 \stackrel{s=ut}{=} u^{2H} 2H \int_0^1 (1-t)^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{u} - t \right)^{H-\frac{1}{2}} dt = \\ &= u^{2H} 2H \left(\frac{v}{u} \right)^{H-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-t)^{H-\frac{1}{2}} \left(1 - t \frac{u}{v} \right)^{H-\frac{1}{2}} dt \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} u^{2H} 2H \left(\frac{v}{u} \right)^{H-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1)\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\Gamma(H+\frac{3}{2})} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - H, 1, \frac{3}{2} + H, \frac{u}{v} \right) = \\ &= u^{2H} 2H \left(\frac{v}{u} \right)^{H-\frac{1}{2}} \frac{1}{H+\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left(1, \frac{1}{2} - H, \frac{3}{2} + H, \frac{u}{v} \right), \end{aligned}$$

ahol ${}_2F_1$ az úgynevezett (*Gauss*) *hipergeometrikus függvény*. A (*) jelű egyenlőség a hipergeometrikus függvény Euler-integrálreprezentációjából következik:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (c > b > 0).$$

Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $\Gamma(1) = 1, \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, valamint

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = {}_2F_1(b, a, c, z), \quad \text{ahol } (q)_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \\ \prod_{i=0}^{n-1} (q+i), & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

A hipergeometrikus függvénnyel kapcsolatos további részletekért lásd pl. a [18] cikket.

A Z Brown-mozgás és a Volterra-folyamat kovarianciája $v \geq u$ mellett

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\tilde{B}_v Z_u \right] &= \sqrt{2H} \mathbb{E} \left[\int_0^v (v-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \left(\int_0^u \rho dB_s + \int_0^u \sqrt{1-\rho^2} dB_s^\perp \right) \right] = \\ &= \rho \sqrt{2H} \mathbb{E} \left[\int_0^u (v-s)^{H-\frac{1}{2}} d[B]_s \right] + 0 = \frac{\rho \sqrt{2H}}{H + \frac{1}{2}} \left[-(v-s)^{H+\frac{1}{2}} \right]_{s=0}^u = \\ &= \frac{\rho \sqrt{2H}}{H + \frac{1}{2}} \left(v^{H+\frac{1}{2}} - (v-u)^{H+\frac{1}{2}} \right),\end{aligned}$$

valamint hasonlóan

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\tilde{B}_u Z_v \right] &= \sqrt{2H} \mathbb{E} \left[\int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \left(\int_0^v \rho dB_s + \int_0^v \sqrt{1-\rho^2} dB_s^\perp \right) \right] = \\ &= \rho \sqrt{2H} \mathbb{E} \left[\int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} d[B]_s \right] + 0 = \frac{\rho \sqrt{2H}}{H + \frac{1}{2}} u^{H+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Összevetve

$$\mathbb{E} \left[\tilde{B}_v Z_u \right] = \frac{\rho \sqrt{2H}}{H + \frac{1}{2}} \left(v^{H+\frac{1}{2}} - (v - \min(u, v))^{H+\frac{1}{2}} \right).$$

Végül Z Brown-mozgás voltából fakadóan $\mathbb{E}[Z_v Z_u] = \min(u, v)$. Mivel Z és \tilde{B} Gauss-folyamatok, melyeknek ismert az együttes kovarianciamátrixa, lehetséges a modell feltételezései melletti Monte Carlo-szimuláció. A folyamatok trajektóriáinak összefűzésével kapott vektor is többdimenziós normális eloszlású, így előállíthatóak lehetséges trajektóriák az együttes kovarianciamátrix Cholesky-dekompozíciójának segítségével (lásd újra 1.4.4). Itt n darab m hosszú trajektória szimulálása esetén az együttes kovarianciamátrix $(2m \times 2m)$ dimenziós, melyet egy $(2m \times n)$ dimenziós véletlen normális mátrixszal kell szorozni. Minden új trajektória generálásához szükséges egy alsóháromszög-mátrix és egy vektor szorzása, így ez az eljárás sajnos meglehetősen lassú. A \tilde{B} trajektóriáinak ismeretében előállítható v a 2.2.10 képlet alapján, és így megkapható Z és v segítségével S közelítése is, például az Euler–Maruyama-módszer alkalmazásával. S trajektóriáit használva kiszámítható a megadott derivatíva kifizetésfüggvényének \mathbb{Q} mérték melletti tapasztalati diszkontált várható értéke, így lehetséges az árazás. Mindazonáltal a modell ilyen elven történő kalibrációja nem célszerű a hosszú futási idő miatt. Modellkalibráció alatt azt szokás érteni, hogy az implikált volatilitás felület és a modell implikált volatilitás felület valamilyen metrika szerinti távolságát minimalizáljuk a modell paraméterein. Tulajdonképpen a piac állapotát legjobban leíró modellparaméterezést akarjuk ekkor megtalálni. Ennek futási ideje akár 20-ad részére is csökkenthető például varianciacsökkentési módszerek segítségével, mint feltételes Monte Carlo-szimuláció, illetve kontroll-, és antitetikus változók használata (lásd [19]-ben).

Alternatív megközelítésként használhatjuk, hogy a mértékcsere során a varianciafolyamat diffúziós együtthatója, valamint a Hurst-paraméter nem változik meg, vagyis ugyanaz η és H értéke a \mathbb{P} és \mathbb{Q} mértékek alatt. Továbbá 2.2.7 és 1.2.2 képletek alapján

$$\eta = 2\nu \frac{C_H}{\sqrt{2H}} = 2\nu \sqrt{\frac{\Gamma(3/2 - H)}{\Gamma(H + 1/2)\Gamma(2 - 2H)}}, \quad (2.2.13)$$

és a H, ν paraméterek becsülhetőek a historikus varianciafolyamat alapján is. A forward-variancia-görbe megfigyelhető piaci adatokból (lásd megint 2.2.1). Mivel a modell paraméterként fogadja a forwardvariancia-görbét ($\xi_0(t), t \geq 0$), így alkalmas választással a modell és a piaci implikált volatilitás felületek ATM-nél vett keresztmetszete pontosan megegyezik. Ezen előzetesen becslések segítségével elegendő lehet a fennmaradó ρ paraméter szerint kalibrálni a modellt. A [15] munka szerzői megvizsgálták a felületek illeszkedését előzetes megfontolások alapján megtippelt paraméterekkel az S&P 500 index esetében két múltbeli időpontra. Eredményeik alapján jobb illeszkedés érhető el az rBergomi, mint a hagyományos sztochasztikus volatilitás modellek használatával.

2.3. A kapcsolódó programkód magyarázata

A második fejezethez tartozó [programkód](#) kiemelési az első rész színkódját követik. A program első részében a fejezethez [implementált függvények](#) segítségével röviden a 2.1.1 képlet által definiált frakcionális Ornstein–Uhlenbeck-folyamat paraméterbecslésével foglalkozunk. Tegyük fel ismét, hogy a megfigyelt idősorunk az 1.3 szekcióban leírtaknak megfelelő, de ismeretlen Δ_S időskálával, valamint hogy a logvolatilitás frakcionális Ornstein–Uhlenbeck-folyamatot követ. A fejezetben leírtak alapján azt is feltételezzük, hogy $0 \leq \alpha \ll 1/T$. A Hurst-paraméter becslésére megfigyelt logvolatilitás idősorból már adtunk egy lehetséges egyszerű módszert. Ez ebben az esetben is használható marad a 2.1.7 következmény miatt. Hasonlóan egyszerű elven szeretnénk becsülni a ν, α, m paramétereket is. A 2.1.6 állítás miatt a logvolatilitásra teljesül az 1.2.10 önhasonlósági tulajdonság. Ekkor nyilván tekinthetjük úgy, hogy a megfigyelt idősor skálája 1 egység (például nap), hiszen az idő átskálázása ekvivalens a folyamat átskálázásával:

$$(X_{t\Delta_S}^\alpha)_{t \in \mathbb{R}^+} \stackrel{d}{=} |\Delta_S|^H (X_t^\alpha)_{t \in \mathbb{R}^+}.$$

Ez egyenértékű azzal, ha a folyamat ν és α paramétereit skálázzuk át ugyanígy. A ν paraméter becsléséhez használhatjuk a 2.1.7 következményben szereplő explicit formulát a növekmények q -adik momentumára ($m(q, 1)$). Ekkor tehát

$$m(q, 1) \approx K_q \nu^q 1^{qH} \implies \hat{\nu} := \sqrt[q]{\frac{m(q, 1)}{K_q}}$$

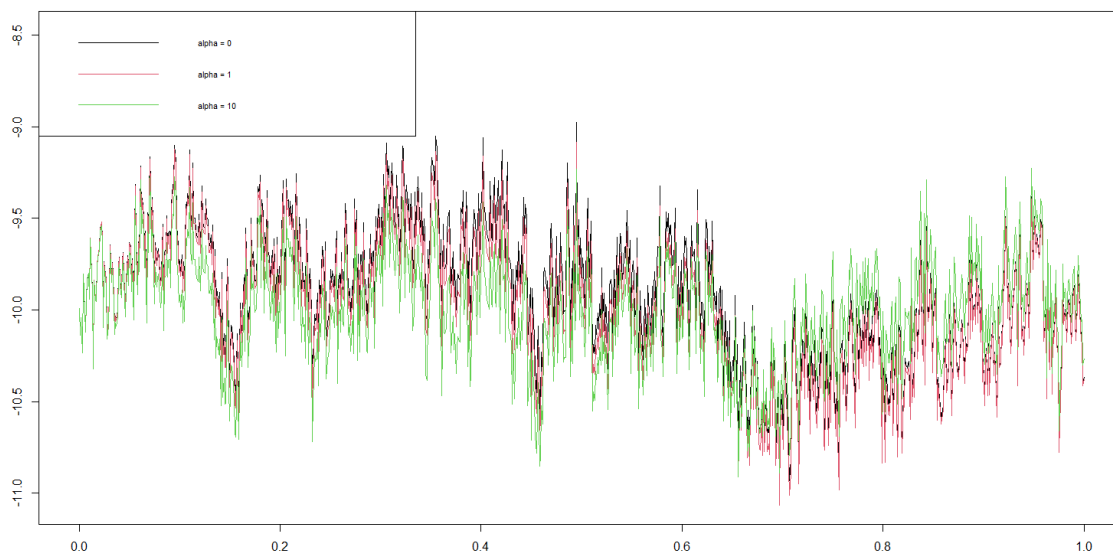
egy lehetséges becslés a feltételezések mellett. Tapasztalatilag különböző q értékekre nagyon közeli eredményt kapunk, de ezt is több lehetséges q értékre átlagolva számítjuk ki. Ebből az rBergomi-modell becsült $\hat{\eta}$ paramétere is kiszámolható a 2.2.13 képlet szerint. Ha a logvolatilitásról feltételezzük a stacionaritást (vagyis $\alpha > 0$), akkor a 2.1.2 képlet alapján használhatjuk, hogy

$$s_N^*(\log(\sigma_t)) \approx \nu^2 \alpha^{-2H} H \Gamma(2H) \implies \hat{\alpha} := \sqrt[2H]{\frac{\hat{\nu}^2 \hat{H} \Gamma(2\hat{H})}{s_N^*(\log(\sigma_t))}},$$

ahol s_N^* a minta korrigált tapasztalati szórása, valamint

$$\hat{m} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log(\sigma_{k\Delta_S}) \approx \mathbb{E}[\log(\sigma_t)].$$

Az α paraméter becslésénél két ellentétes szempontot kell figyelembe venni. Ha az értéke túl kicsi, nem érvényesül lokálisan a stacionaritás, ha pedig túl nagy, akkor a folyamatnak lokálisan eltérő tulajdonságai lesznek a frakcionális Brown-mozgás skálázottjától. Ezért itt némileg egymásnak ellentmondó feltételezéseket tettünk, ami megjelenhet következetesen fennálló hibákban a becsléseknél. Ennél nyilván léteznek sokkal szofisztikáltabb módszerek is, melyekre most nem térünk ki (lásd például [20]).

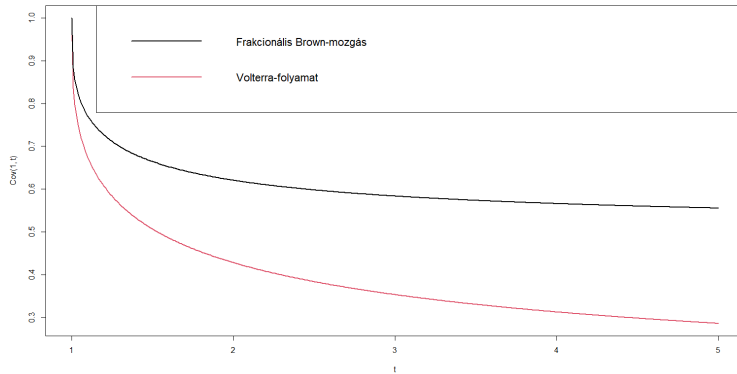


2.3.2. ábra. Dow Jones logvolatilitásra illesztett paraméterezésű frakcionális Ornstein-Uhlenbeck-folyamatok [szimulációja](#) különböző α értékek mellett.

Érdekes, hogy a paraméterbecsléseket a Dow Jones index logaritmusára kiszámítva kapjuk, hogy $\hat{\alpha} < 0.006$. A 2.3.2 ábrán is látható, hogy az indexből becsült paraméterek mellett ez az érték jelentéktelen, hiszen még az $\alpha = 10$ paraméter sem változtatja meg

jelentős mértékben a szimulált idősor struktúráját, vagyis $\alpha \approx 0$. Ez is azt mutatja, hogy a historikus logvolatilitás inkább az egyszerű skálázott frakcionális Brown-mozgás tulajdonságait mutatja, mintsem a frakcionális Ornstein–Uhlenbeck-folyamatét. Emiatt az α és m paraméterek becslései pontatlanok lehetnek a feltételezések hibái miatt, de ebben az esetben nem is számítanak. Továbbá észszerű az rBergomi-modellben használt $\alpha = 0$ feltevés is.

A második részben az rBergomi-modell 2.2.10 képlet szerinti szimulációját valósítjuk meg. Ehhez először külön implementáltuk a szükséges kovarianciafüggvényeket. Érdekes vetni egy pillantást a variancia egyenletében használt \tilde{B} Volterra-folyamat és a frakcionális Brown-mozgás kovarianciafüggvénye közötti különbségre. Ahogy látható a 2.3.3 ábrán, előbbi gyorsabban esik és 0-ba húz, míg a másik $y = \frac{1}{2}s^{2H} = \frac{1}{2}$ egyenesre simul rá.



2.3.3. ábra. $\text{Cov}(1, t), t \in [1, 5]$ a \tilde{B} és frakcionális Brown-mozgás folyamatokra

Az együttes kovarianciamátrix kiszámítását is külön függvénybe szerveztük, így a költséges Cholesky-dekompozíciót nem kell szimulációnként végrehajtani. A szimulációhoz szükséges

$$\mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_t \right) = \exp \left(\eta \tilde{B}_t - \frac{1}{2} \left[\eta \tilde{B} \right]_t \right)$$

kiszámítása, viszont nem tudjuk, hogy érvényes marad-e az Itô-kalkulusból megismert Brown-mozgás szerinti integrálokra vonatkozó kvadratikus kovariáció képlete.

2.3.1 Állítás. *Determinisztikus, korlátos változású integrandusokra általánosítható az Itô-kalkulus kvadratikus kovariáció képlete:*

$$\left[\int_0^t \varphi_{t,s} dB_s, \int_0^t \xi_{t,s} dB_s \right] = \int_0^t \varphi_{t,s} \xi_{t,s} ds.$$

Bizonyítás. Az 1.2.21 lemma bizonyításának érvelését felhasználva

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\left[\int_0^t \varphi_{t,s} dB_s, \int_0^t \xi_{t,s} dB_s \right] \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right) \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right) \right) = \\ \mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_{t,s} dB_s \cdot \int_0^t \xi_{t,s} dB_s \right) &= \int_0^t \varphi_{t,s} \xi_{t,s} ds,\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2 \left(\left[\int_0^t \varphi_{t,s} dB_s, \int_0^t \xi_{t,s} dB_s \right] \right) &= \mathbb{D}^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right)^2 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} \mathbb{D}^2 \left(\left(B_{\frac{j+1}{n}} - B_{\frac{j}{n}} \right)^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{nt-1} \varphi_{t, \frac{j}{n}} \cdot \xi_{t, \frac{j}{n}} 2 \left(\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right)^2 \leq \\ &\leq \sup_{s \in [0,t]} |\varphi_{t,s} \cdot \xi_{t,s}| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{nt-1} \left(\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right) = \sup_{s \in [0,t]} |\varphi_{t,s} \cdot \xi_{t,s}| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2t}{n} = 0.\end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy $X \sim N(0, \sigma^2)$ esetén a normális eloszlás momentumaira vonatkozó képletből

$$\mathbb{D}^2(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^2)^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

□

Ez is általánosítható nem determinisztikus esetre, korlátos változású integrandus mellett, de erre nincs szükségünk. A formulát felhasználva

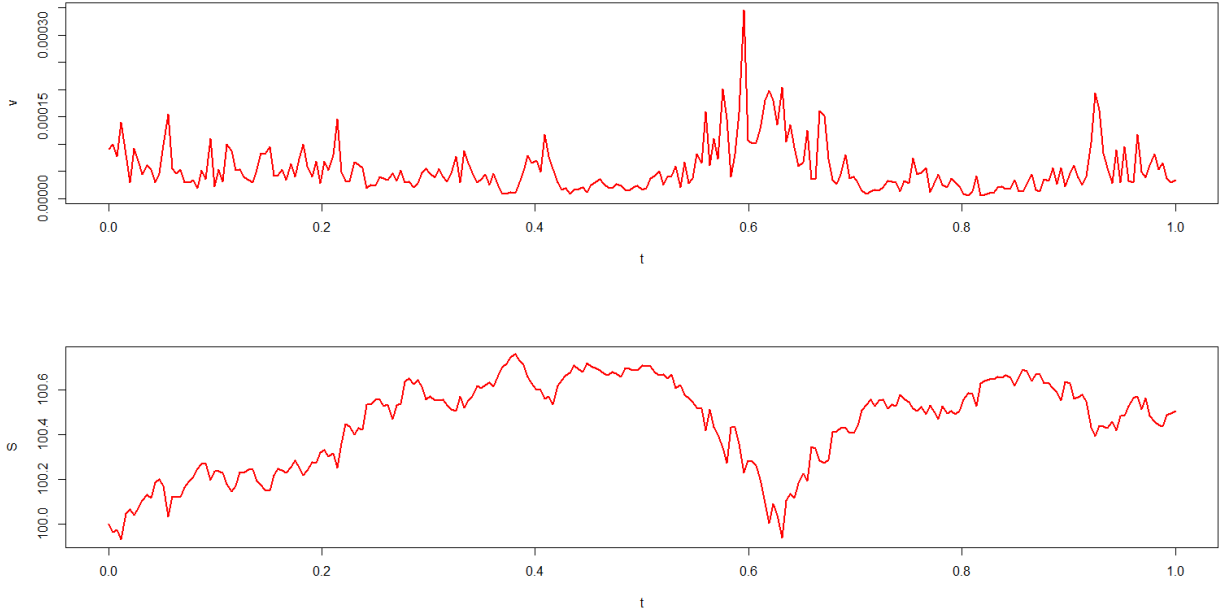
$$\begin{aligned}[\eta \tilde{B}]_t &= \left[\eta \sqrt{2H} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right] = 2H\eta^2 \int_0^t (t-s)^{2H-1} ds = \\ &= 2H\eta^2 \left[-\frac{(t-s)^{2H}}{2H} \right]_{s=0}^t = \eta^2 t^{2H},\end{aligned}$$

vagyis

$$v_t = \xi_0(t) \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_t \right) = \xi_0(t) \exp \left(\eta \tilde{B}_t - \frac{1}{2} \eta^2 t^{2H} \right),$$

és így minden adott a trajektóriák szimulációjához. Ezt a 11. függvényben valósítjuk meg, melyet a 12. általános szimulációs árazási függvényben felhasználhatunk tetszőleges (akár trajektóriafüggő) derivatíva árazására.

A szimulált trajektóriát a 2.3.4 ábrán szemügyre véve hihetőnek tűnik, hogy az árfolyamat martingál, hiszen nem látunk egyértelmű trendet a trajektórián. Továbbá a szimuláció során az alapterméket meghajtó egyenletben nem használunk idő szerinti integrált. Használjuk a martingál tulajdonság tapasztalati ellenőrzésére az implementált általános szimulációs árazó függvényt. Ekkor $S_0 = 100, \rho = -0.9$ paraméterekkel, lapos



2.3.4. ábra. [Saját kóddal](#) generált variancia és árfolyamat trajektória $\rho = -0.9$ mellett.

forwardvariancia-görbét feltételezve a beárazandó kifizetésfüggvény S_T (most S_1). Erre 10 000 szimulációt végrehajtva az eredmény 99.997. Ez tehát megerősíti a sejtésünket, hiszen martingál várható értéke a kezdeti érték. Azonban egyáltalán nem nyilvánvaló a martingál tulajdonság csak abból kiindulva, hogy az alaptermék árfolyamatában nem szerepel drift. Valóban, már a hagyományos sztochasztikus volatilitás modellek esetében is körültekintően kell eljárni az ekvivalens mérték kiválasztásánál, mert az erre alkalmazott bevett módszerek gyakran szigorúan lokális martingálmértéket eredményeznek (lásd például [21]). Ez esetben viszont létezik $T > 0$, melyre $\mathbb{E}[S_T] < S_0$. Sőt, a korrelációra is megkötéseket kell tenni, hogy létezzen a modellnek bizonyos általános elvárásoknak megfelelő megoldása (lásd [22]). Az könnyen belátható, hogy az árfolyamat lokális martingál, ugyanis tudjuk, hogy

$$v_u = \xi_0(u) \mathcal{E} \left(\eta \tilde{B}_u \right) = \xi_0(u) \exp \left(\eta \tilde{B}_u - \frac{1}{2} \eta^2 u^{2H} \right) \sim \xi_0(u) \cdot \log N \left(-\frac{1}{2} \eta^2 u^{2H}, \eta^2 u^{2H} \right).$$

Továbbá 2.2.12 alapján

$$S_t = S_0 \mathcal{E} \left(\int_0^t \sqrt{v_u} dZ_u \right).$$

Itt az integrandusról belátjuk, hogy \mathcal{S} -beli (definícióért lásd 1.2.20). Ismét a nemnegatív integrandusra vonatkozó Fubini-tételből

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t v_u du\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \xi_0(u) \exp\left(\eta \tilde{B}_u - \frac{1}{2}\eta^2 u^{2H}\right) du\right) = \\ &= \int_0^t \xi_0(u) \mathbb{E}\left(\exp\left(\eta \tilde{B}_u - \frac{1}{2}\eta^2 u^{2H}\right)\right) du = \int_0^t \xi_0(u) du < \infty,\end{aligned}$$

ha például a forwardvariancia-görbe folytonos. Vagyis az árfolyamat valóban lokális martingál, lásd megint 2.1.1. Ehhez egyébként az integrandus \mathcal{L} -belisége is elég, ami szükséges is az integrál értelmezéséhez. Azonban az is ellenőrizhető, hogy az integrál nem teljesíti a Novikov-feltételt, így még mindig nem tudjuk, hogy valódi martingál-e. A [23] cikk bizonyítja a jelenleginél általánosabb esetben, hogy ez akkor és csak akkor igaz, ha a ρ paraméter, vagyis a B és Z Brown-mozgások közötti korreláció nempozitív (ahol $\tilde{B}_u = \sqrt{2H} \int_0^u (u-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s$). Már korábban említettük, hogy a gyakorlatban megfigyelteknek megfelelően a korreláció jellemzően erősen negatív. Ez azonban a historikus mérték alatt igaz, de a mértékváltás során éppen a korreláció paraméter változik meg. Az eredményből tudjuk, hogy ez a \mathbb{Q} mérték alatt sem lesz pozitív. Sőt többet is tudunk, mert ezek szerint létezik \mathbb{Q} martingálmérték, így az eszközárzás első alaptétele miatt a modell arbitrázsmentes piacot eredményez. Továbbmenve minden $\rho \leq 0$ -hoz tartozik \mathbb{Q}_ρ martingálmérték, így a modell szerinti piac nem teljes az eszközárzás második alaptétele következtében. Ez azt jelenti, hogy nem minden kifizetésfüggvény állítható elő önfinanszírozó replikáló portfólió segítségével. A teljesség hiánya egyébként viszonylag általános jellemzője a többfaktoros, így a sztochasztikus volatilitás modelleknek. A piacot megfelelően leíró martingálmérték megkeresése gyakorlatban a modell kalibrációjával oldható meg.

A fejezethez tartozó kód utolsó részében megmutatjuk mintaként az implementált árazó függvény használatát. A függvénnyel kiértékeljük 10 000 szimulációval egy $K = 100$ kötési árfolyamú európai vételi opció, valamint egy ázsiai opció értékét a martingál tulajdonság teszteléséhez használt paraméterezés mellett. Utóbbinál a kötési árfolyam a 3 – 9. hónapok napi eszközárfohamainak átlagaként van megállapítva. Ez demonstrálja a szimulációs módszer előnyét, ugyanis bármilyen exotikus derivátiva értékét meghatározhatjuk így rendkívül egyszerű implementáció mellett. A módszer korábban is említett hátránya, hogy modell kalibrációra nem jól alkalmazható a hosszú futási idő miatt.

2.4. Érdes Heston-modell

A (klasszikus) Heston-modell [24] egy sztochasztikus volatilitás modell, melyben a diszkontált árfolyamat (S) a következő dinamikával rendelkezik:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \sqrt{V_t} dW_t, \\ dV_t &= \lambda(\theta - V_t)dt + \lambda\nu \sqrt{V_t} dB_t, \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

ahol $\lambda, \theta, \nu > 0$ és $dW_t = \rho dB_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t^\perp$, vagy másképpen $[dW_t, dB_t] = \rho \cdot dt$. A modell mára ipari sztenderddé vált számos kedvező tulajdonsága miatt. Viszonylag jól reprodukálja az implikált volatilitás felületet és annak dinamikáját is, a volatilitás átlaghoz húzó, és az árazás könnyen implementálható. Vizsgáljuk meg [25] nyomán, milyen eredményre jutunk egy 2.2.11 képlethez hasonló jellegű változtatással ezen a modellen. Vagyis adjuk hozzá a 2.4.14 integrálalakjához szorzótényezőként egy Volterra-folyamat skalárszorosát. Legyen tehát $\alpha := H + 1/2$ jelölés mellett

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \sqrt{V_t} dW_t, \\ V_t &= V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(\theta - V_s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda\nu \sqrt{V_s} dB_s, \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

ahol $\lambda, \theta, \nu, V_0 > 0$, W és B Brown-mozgások ρ korreláció paraméterrel, valamint $\alpha = H + 1/2 \in (1/2, 1)$. A modellt *érdes Heston (rough Heston)* modellnek nevezzük, melyből $\alpha = 1$ esetben kapjuk vissza a klasszikus verziót.

Vegyük észre, hogy itt a Brown-mozgás szerinti integrált még nem értelmeztük. Az integrandus tartalmazza szorzótényezőként a volatilitást, vagyis nem korlátos változású folyamat. Ezt tehát nem definiálhatjuk trajektóriánkénti Riemann–Stieltjes-integrálként. Mivel Volterra-folyamatot is tartalmaz, az Itô-féle megközelítés sem alkalmazható közvetlenül. Megjegyzendő, hogy maga a [25] cikk nem utal rá, az integrált hogyan értelmezi. Ez persze nem jelenti, hogy azt nem lehet értelmes módon definiálni, azonban ennek precíz bevezetése meghaladja a dolgozat kereteit.

A sztochasztikus Volterra-integrálok, valamint a frakcionális Brown-mozgás szerinti integrálok kalkulusa több lehetséges módon is felépíthető. Az egyik kiindulásként az integrált egyszerű integrandusokra definiálja a szokásos módon trajektóriánkénti szorzatként, majd abból építi fel az elméletet (lásd pl. [26]). Ekkor az integrál a Stratonovich-féle megközelítéshez hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, amely a pénzügyi modellezés szempontjából kedvezőtlen. Egy másik megoldás a Malliavin-kalkulus [27] adta elmélet felhasználása (pl [28]). E megközelítéshez ígéretes eredmények kapcsolódnak, többek

között egy általános Itô-formula is levezethető [29]. Megjegyzendő, hogy a frakcionális Brown-mozgásnak létezik klasszikus Brown-mozgás szerinti Volterra-integrál reprezentációja is, vagyis

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dB_s,$$

ahol B klasszikus Brown-mozgás, K_H pedig alkalmas Volterra-integrandus, lásd a részletekért a [30] cikket. Ebből kifolyólag a Volterra-integrál a frakcionális Brown-mozgás szerinti integrál egyfajta általánosításának tekinthető.

A következőekben összefoglaljuk az érdekes Heston-moddal kapcsolatos legfontosabb eredményeket, mivel nagy érdeklődésre tart számot a szakirodalomban. Az állítások bizonyítására viszont az elméleti megalapozás hiánya miatt csak referenciát adunk és azok kidolgozását itt elhagyjuk. A klasszikus Heston-modellben zárt formula adható az árfolyam logaritmusának karakterisztikus függvényére. Ehhez a függvényre felírt Feynman–Kac-formula alkalmazásával adódó parciális differenciálegyenletet kell kifejtteni, majd az ebből adódó Ricatti-típusú differenciálegyenletet kell megoldani, lásd [24]. Ha a karakterisztikus függvényre ismert egy analitikus vagy szemianalitikus formula, akkor a tanult inverziós formula alapján egy abszolút folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye is számolható, mint a karakterisztikus függvény Fourier-transzformáltja. Gyakorlatban a Fourier-transzformáció elvégzésére gyors algoritmusok állnak rendelkezésre, melyeket a szakirodalom összefoglalóan gyors Fourier-transzformációnak (*Fast Fourier-transform*) nevez. Ezen algoritmusok közvetlen alkalmazása az opció árazási feladatra nehézségekbe ütközik, melyek megoldását a [31] cikk tárgyalja. Mindezek együttes használatával hatékonyan lehet a klasszikus modellt kalibrálni is.

A [25] cikk alapján a modell érdekes általánosítása esetében a klasszikus esettel analóg formula kapható a karakterisztikus függvényre. Ennek bizonyítása azonban alapjaiban különbözik a klasszikus esettől. A nehézséget újfent az jelenti, hogy karakterisztikus függvény várható értékében szereplő folyamat nem szemimartingál és nem is Markov-folyamat. Viszont a modell által definiált árfolyamat logaritmus megadható, mint egy alkalmasan összeállított folyamatsorozat limesze. A folyamatsorozat építőelemei két-dimenziós, ún. közel instabil Hawkes-folyamatok. A karakterisztikus függvény ezen folyamatsorozat karakterisztikus függvényeiből álló függvényt sorozat határértékeként adódik:

$$\mathbb{E} \left[e^{ia \log \frac{S_t}{S_0}} \right] = \exp(g_1(a, t) + V_0 g_2(a, t)),$$

ahol

$$g_1(a, t) = \theta \lambda \int_0^t h(a, s) ds, \quad g_2(a, t) = I^\alpha h(a, t).$$

Itt a h függvény a következő frakcionális Ricatti-differenciálegyenlet megoldása:

$$D^\alpha h(a, t) = \frac{1}{2}(-a^2 - ia) + \lambda(ia\rho\nu - 1)h(a, s) + \frac{(\lambda\nu)^2}{2}h^2(a, s), \quad I^\alpha h(a, 0) = 0,$$

ahol $\alpha \in [0, 1)$ esetén D^α, I^α rendre frakcionális differenciál-, és integráloperátorok:

$$I^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} f(s) ds,$$

$$D^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} f(s) ds,$$

amikor léteznek. A frakcionális Ricatti-differenciálegyenlet megoldása egyértelmű és folytonos, de nem adható meg explicit alakban. Léteznek viszont hatékony numerikus módszerek ilyenek kiszámítására, mint például a [32] cikk javaslatai. Így a karakterisztikus függvényre adott egy szemianalitikus képlet, mely lehetővé teszi az opcióárazást a klasszikus esethez hasonló logikával. Viszont a függvény kiszámítása a klasszikus esethez képest hosszabb futási idő alatt tehető csak meg.

3. fejezet

Érdes volatilitás gépi tanulással

Az előző fejezetben láttuk, hogy érdes volatilitással történő modellezés mellett az árazás többnyire nem túl gyors. Az rBergomi-modellben Monte–Carlo-szimulációs opcióárazásra szorulunk. Az érdes Heston-modellben numerikus módszerekkel szükséges közelítenünk az árfolyam logaritmusának karakterisztikus függvényét, majd abból jutunk el az árhoz Fourier-transzformáció segítségével. Vagyis már egy adott paraméterezés mellett is viszonylag lassú a teljes modell implikált volatilitás felület kiszámítása. Ezt ráadásul a kalibráció során nagyon sok különböző paraméterezés mellett meg kell tenni az implikált volatilitás felületek távolságának minimalizálásához. Emiatt az eljárás még az érdes Heston esetben is kifejezetten lassú lesz. Ez a korábban tárgyalt modellezési előnyök ellenére csak mérsékelten teszi vonzóvá az érdes volatilitást ipari felhasználás szempontjából. Ez a probléma azonban megkerülhető a [33] cikk érvelése alapján neurális hálóok alkalmazásával. Mielőtt az előbbi módszer mikéntjének részletezésére rátérnénk, jöjjön először egy rövid áttekintés a neurális hálóok elméletével kapcsolatosan.

3.1. Neurális hálók

A fejezetben neurális háló alatt annak egy speciális, legelterjedtebb változatát, a több-rétegű előrecsatolt neurális háló modellt értjük. Más modellekkel itt nem foglalkozunk.

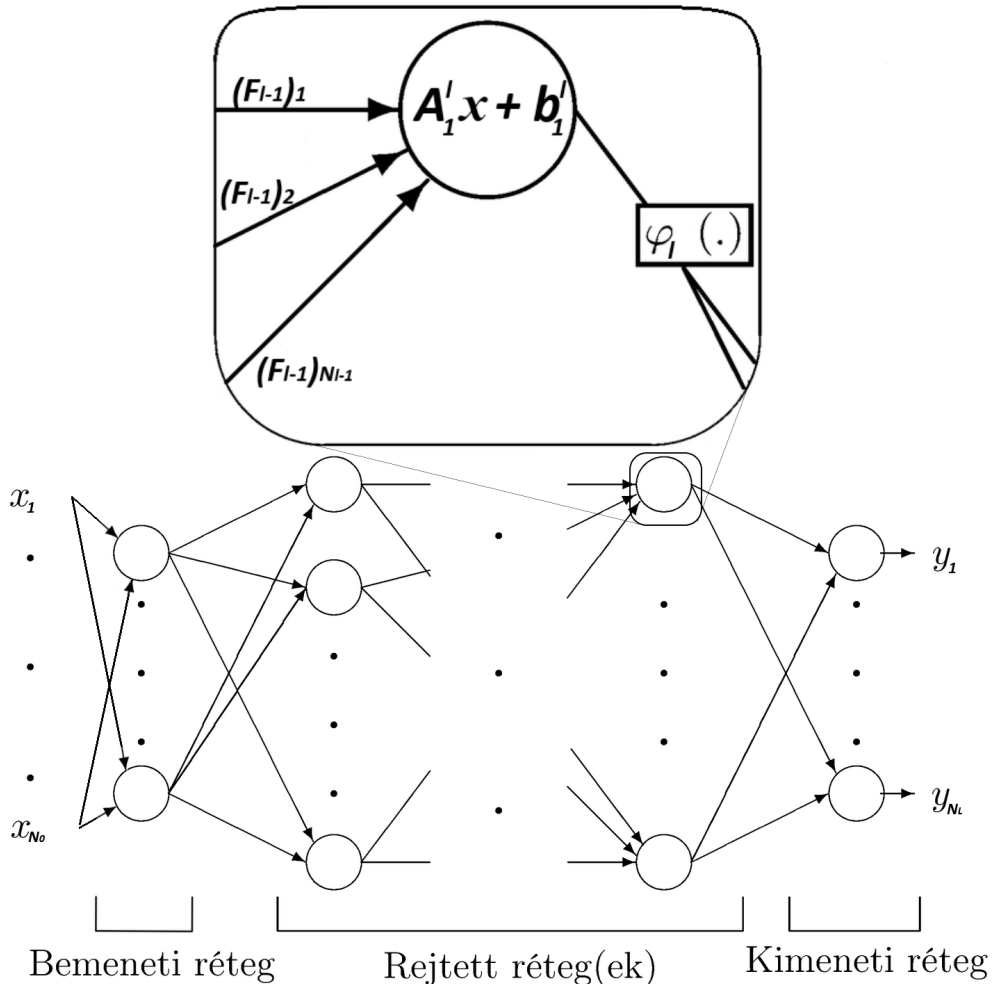
3.1.1 Definíció. (*Neurális háló*) Legyen $L \in \mathbb{N}$, valamint $(N_0, N_1, \dots, N_L) \in \mathbb{N}^{L+1}$. Legyen továbbá $A^l \in \mathbb{R}^{N_l \times N_{l-1}}$, $b^l \in \mathbb{R}^{N_l}$, valamint

$$w_l : \mathbb{R}^{N_{l-1}} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_l}, \quad x \longmapsto A^l x + b^l,$$

ahol $l = 1, 2, \dots, L$. Legyen $\varphi_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, és $F_l := \varphi_l \circ w_l$, ($l = 1, 2, \dots, L$), ahol a φ_l függvényt komponensenként alkalmazzuk. Ekkor az $F := F_L \circ \dots \circ F_1$ kompozíció leképezés neurális háló.

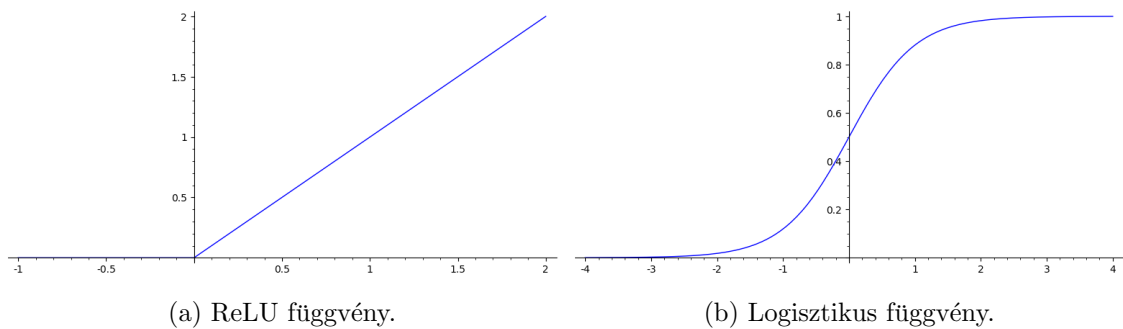
Elnevezések: Legyen $l \in \{1, 2, \dots, L\}$, ekkor

- L a háló rétegeinek száma.
- N_l az l -edik réteg neuronjainak, vagy csomópontjainak száma.
- Az A^l mátrix elemei az l -edik réteghez tartozó súlyok.
- A b^l vektor az l -edik réteghez tartozó torzítás.
- A φ_l függvény az l -edik réteg aktivációs függvénye.
- F_1 a háló bemeneti-, F_L a kimeneti-, F_2, \dots, F_{L-1} pedig a rejtett rétegei.
- $w := (w_1, w_2, \dots, w_L)$ a hálósúlyozás.



3.1.1. ábra. A neurális háló modellje. [34] ábrájának átdolgozott verziója.

A neurális háló tehát nem más, mint egy leképezés, melyet a bemeneten felváltva alkalmazott affin és aktivációs függvények alkalmazásával kapunk meg. Az aktivációs függvények jellemzően folytonosak, de nemlineárisak, mert a háló később tárgyalt alkalmazása szempontjából fontos, hogy a háló maga ne korlátozódjon affin leképezéssé. A szakirodalomban legtöbbször szigmoid típusú (S alakú grafikonnal rendelkező) eloszlásfüggvénynek, esetleg ilyen lineáris transzformáltjának választják. Példa ilyen függvényre a *logisztikus függvény*: $\varphi_l(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$. Jellemző választás még $\varphi_l(x) = \max(x, 0)$, melyet ReLU (*Rectified Linear Unit*) függvénynek nevezünk. A kimeneti rétegben gyakori a $\varphi_L = \text{id}$ választás.



3.1.2. ábra. Szakirodalomban gyakran alkalmazott aktivációs függvények.

Ha az aktivációs függvényeket előre rögzítettnek tekintjük, akkor a háló kimenete (a bemeneten kívül) csak a definícióban szereplő súlymátrixok és torzításvektorok elemeitől függ. Ezért a neurális háló jelölésében feltüntetjük a w hálósúlyozást is: $F(w, \cdot)$.

A neurális háló fő alkalmazási területei a regressziószámítás és a klasszifikáció. Utóbbival most nem foglalkozunk. Előbbi esetében valamilyen ismeretlen függvény hálóval történő közelítése a cél. Vagyis kicsit precízebben, jelölje $\mathcal{B}_{m,n}$ az $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ Borel-mérhető függvények terét. Legyen adott egy $\delta : \mathcal{B}_{N_0, N_L} \times \mathcal{B}_{N_0, N_L} \rightarrow \mathbb{R}$ metrika, melyet *kritériumfüggvénynek* nevezünk. Ekkor egy ismeretlen $f \in \mathcal{B}_{N_0, N_L}$ függvény esetén célunk a \hat{w} paraméterhalmaz megtalálása, melyre

$$\hat{w} := \operatorname{argmin}_w \delta(F(w), f).$$

Az f függvényről általában csak feketedoboz jellegű információ adott, vagyis ismerjük a függvény eredményét bizonyos meghatározott bemeneti halmazra. Ezen bemenet-kimenet $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ vektorpárokból álló halmazt nevezük *tanítóhalmaznak*. A kritériumfüggvény ennek megfelelően csak ezen ismert értékek függvényeként kerülhet meghatározásra. Továbbá célszerű azt w szerint parciálisan differenciálható függvényként

megválasztani. Ekkor az optimális \hat{w} súlyozás megtalálható valamilyen többdimenziós szélsőérték-kereső eljárással, mondjuk legmeredekebb gradiens szerinti ereszkedéssel (*gradiens-módszer*). Ezt nevezik a hálózat (*ellenőrzött*) *betanításának*. Egyes aktivációs függvény választással (pl. szigmoid), a hálózat szerkezetének speciális jellegét kihasználva a gradiens rétegenként visszafelé haladva egyszerű iteratív eljárással számolható, ezt nevezzük *hiba-visszaterjesztésnek* (*error backpropagation*). A hálótanítás során általánosan felmerülő jelenség, hogy a hálózat (kritériumfüggvény minimalizálási értelemben) nagyon jól teljesít a tanítóhalmazon, azonban abba nem tartozó vektorok esetén egyáltalán nem. Ezt a jelenséget *túltanulásnak*, vagy *túlillesztésnek* nevezzük. Intuitívan ekkor a háló megtanulja a tanítóhalmazra kizárólagosan jellemző speciális összefüggési jellemzőket is, és emiatt nem, vagy csak rosszul képes általánosítani. Ennek megkerülésére célszerű az adathalmazt 3 részre bontani: tanító-, validációs- és teszhalmazra. A tanítóhalmaz elemeit használjuk közvetlenül minimalizálásra a tanítás során. Eközben a kritériumfüggvényt a validációs halmazra is kiszámítjuk, és megállunk, ha az ezen vétett hiba (a kritériumfüggvény értéke) meghalad egy küszöbértéket. A tanítás lezárultával a teszhalmazt használjuk a hálózat teljesítményének (tanítási algoritmusnál használt mintától független) ellenőrzésére. A tanítás megállítására további tolerancia jellegű feltételekre is szükség lehet, hogy az eljárás futási ideje észszerű maradjon. Célszerű lehet az adathalmazt előzetesen egy adott intervallumba transzformálni, hogy a probléma numerikusan jól kezelhetővé váljon. Alkalmazhatunk előzetes kikötéseket egyes súly-, vagy torzítás értékekre vonatkozóan. Például a hálózat "ritkítása" általában javít a hálózat teljesítményén. Ez azt jelenti, hogy megköveteljük a súlyok adott halmazának eltűnését a hálózatban. A neurális hálózatok átfogóbb áttekintéséért lásd például a [34] könyvet.

Neurális háló illesztése előtt tehát meghatározandó a rétegek száma, az aktivációs függvények halmaza, a betanítási eljárás, a tanító-/validációs-/teszhalmaz méretek aránya, a kritériumfüggvény, a megállási feltételek, az adattranszformációk, a paraméterkikötések, valamint a bemeneti és rejtett rétegek kimeneti dimenziója. Ez utóbbi a kikötésekkel együtt azt is meghatározza, hány szabad paraméterrel rendelkezik a háló, vagyis mekkora a közelítés szabadsági foka. Ezen döntéseket összefoglalóan *hálózatspecifikációnak* nevezzük. Nincsen általános kőbe vésett szabály arra, hogyan érdemes hálózatot specifikálni, ez nagyban függ a megoldandó problémától. Azonban a fontos, hatékonyságot szolgáló általános elvek megtalálhatóak szakirodalomban. Külön-külön mindegyik szempontra számos forrás fellelhető. Előzetes feltételezések nélkül érdemes több különböző specifikációval kipróbálni a hálózat tanítását, mert az eredmény nagyon erősen függhet a probléma szempontjából helyes specifikáció megtalálásától.

Most következzen két fontos eredmény, amely alátámasztja a neurális hálózatok relevanciáját regressziószámítás szempontjából. A bizonyítások megtalálhatóak rendre a [35] és a [36] cikkekben.

3.1.2 Tétel. *Legyen \mathcal{NN}_{d_0, d_1} azon neurális hálók halmaza, melyek aktivációs függvénye minden rétegben adott $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, valamint bemeneti dimenziója $d_0 \in \mathbb{N}$, és kimeneti dimenziója $d_1 \in \mathbb{N}$. Ekkor ha σ nemkonstans folytonos függvény, akkor \mathcal{NN}_{d_0, d_1} sűrű $L^p(\mu)$ -ben minden véges μ mértékre.*

A tétel miatt azt mondjuk, hogy a neurális háló *univerzális approximátor*. Továbbmenve az is belátható, hogy bármely $f \in \mathcal{C}^n$, $f : \mathbb{R}^{d_0} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $\sigma \in \mathcal{C}^n$ nemkonstans aktivációs függvény esetén az egyetlen rejtett rétegű neurális hálók halmaza tetszőlegesen közelíti f -et és minden legfeljebb n -ed rendű deriváltját is. A célfüggvény deriváltjainak közelítéséhez tehát szükséges megfelelően sima aktivációs függvényt választani. A korábban említett ReLU-függvény például nem alkalmas e célra. Látni fogjuk, hogy ez a most következő gyakorlati alkalmazás szempontjából kifejezetten fontos tulajdonság.

3.2. Modellkalibráció neurális hálókkal

A neurális háló tehát egy hatékony eszköze a függvényközelítésnek. A [33] cikk ötlete alapján általánosan arra is használható, hogy a pénzügyi modellek hosszadalmas kalibrációját felgyorsítsuk. Ehhez viszont meggondolandó, egyáltalán milyen (determinisztikus!) függvényt tudunk egy pénzügyi modell esetében hálóval közelíteni? Feltesszük, hogy adott egy \mathcal{M} arbitrásmentes pénzügyi modell $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ paraméterhalmazzal, valamint egy $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény, mely tulajdonképpen a beárazandó pénzügyi termékek kifizetésfüggvényeiből áll vektorba rendezve. Itt tehát $n \in \mathbb{N}$ a modell paramétereinek száma, $m \in \mathbb{N}$ pedig a vizsgált termékek száma. Ekkor a vizsgált modellhez tartozó *árazási függvény (pricing map)* a

$$P_{\mathcal{M}} : \Theta \times (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

függvény, melyre $\theta \in \Theta$ esetén $P_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta)$ értéke éppen a ζ által meghatározott m darab pénzügyi termék arbitrásmentes ára az \mathcal{M} modell θ paraméterezése mellett. Ez egy determinisztikus függvény, így a fenti kérdésre a válasz természetesen éppen ez lesz. Általános ζ mellett ez persze ilyen formában végtelen dimenziós probléma, mely megoldására a neurális háló nem alkalmas. Gondoljuk meg tehát ismét, mit is értünk modellkalibráció alatt. Meg akarjuk keresni a modellnek a piacot legjobban leíró paraméterezését.

Pontosítva, ismerjük bizonyos likvid ζ pénzügyi termékek $\mathcal{P}(\zeta) \in \mathbb{R}^m$ piacon kereskedett árfolyamait. Ekkor egy választott δ metrikával a korábbi jelölések mellett keresünk egy $\hat{\theta} \in \Theta$ paraméterezést, melyre

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \delta(P_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta), \mathcal{P}(\zeta)). \quad (3.2.1)$$

Ez tehát ismét egy többdimenziós függvényen történő szélsőérték-keresési eljárás. Gyakorlatban viszont természetesen nem tetszőleges ζ függvény esetére kalibrálunk, hanem éppen az implikált volatilitás felületet használjuk fel, és a modellt annak egy diszkrétizált rácsára illesztjük rá. Vagyis ζ minden koordinátájában európai vételi opció n_τ különböző likvid lejáratra és n_κ különböző likvid relatív kötési árra, és $m = n_\tau \cdot n_\kappa$. Ebből viszont már adódik az ötlet, miszerint elegendő ezen ζ európai opciók esetében vett $P_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta)$ árazási függvényt "megtanulni" egy $F_{\mathcal{M}, \zeta} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^m$ neurális hálóval. Ha már rendelkezünk ilyen hálózattal, ez használható arra, hogy a 3.2.1 kalibrációs feladatot sokkal gyorsabban megoldhassuk a modell konkrét használata nélkül:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \delta(F_{\mathcal{M}, \zeta}(\theta), \mathcal{P}(\zeta)). \quad (3.2.2)$$

A két probléma közötti fontos különbség, hogy az $F_{\mathcal{M}, \zeta}$ háló kiértékelése jellemzően nagyságrendekkel gyorsabban megtehető, mint a $P_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta)$ függvényé. Az $F_{\mathcal{M}, \zeta}$ determinisztikus függvényen történő kalibráció gyakorlatilag pillanatok alatt megtehető, mely a módszert még az egyébként viszonylag hatékony árazási eljárással rendelkező érdes Heston-modell esetében is vonzóvá teszi. Különösen akkor jelentős a különbség, ha az árazásnál Monte Carlo-szimulációra szorulunk, mint az érdes Bergomi-modell esetében is. Ez esetben persze a hálózat betanítása is hosszabb időt vehet igénybe a tanítóhalmaz létrehozásának plusz költsége miatt, azonban ez egy "offline" és csak egyszer megoldandó feladat, vagyis nem szükséges közvetlenül a kalibrációval és árazással egyidejűleg elvégezni. A megközelítés fontos előnye, hogy bármilyen arbitrázatmentes pénzügyi modell esetében jól működik, hiszen annak tulajdonságaiból semmit sem használtunk ki. További előny hálózatépítési szempontból, hogy a tanítóhalmaz elméletben akármekkora bővíthető, így mindig elérhető a szükséges (a probléma bonyolultságával arányos) mintaelemszám. Új minta generálásához nincs szükség piaci adatokra, csak további θ értékek melletti árazásra, ami minden további nélkül megtehető. A megközelítés mellett szól az is, hogy a neurális háló tanításával implicit figyelembe vesszük a diszkrétizált implikált volatilitás felület rács jellegű struktúráját. Hiszen speciális logikát feltételezhetünk abban, hogy a modellparaméterezés eltolása milyen hatású a rácson szomszédos implikált volatilitás értékek közötti relációra. A hálótanítási folyamat viszont e logikának megtanulását automatikusan magába foglalja. Ez jelentősen növeli a módszer hatékonyságát

ahhoz képest, mintha a τ és κ paraméterek külön részei lennének a háló bemenetének. Továbbá a rács jellegű célfüggvény miatt az árazási függvény nagyobb valószínűséggel lesz injektív, ami a tanítás hatékonyságához szintén kívánatos. Meggondolható az is, hogy a használt rács finomságának esetlegesen szükséges növelése még akkor sem költséges, ha az árazási függvény kiértékelése csak szimulációs árazás segítségével tehető meg. Ehhez mindössze kell lementenünk az egyes paraméterezések mellett generált szimulációkhoz tartozó árfolyamat végállapotokat. Mivel az európai opció T -termék, ebből bármilyen τ és κ esetén azonnal adódnak az átlagolandó kifizetésfüggvény-realizációk. Így nincs szükség interpolációra vagy extrapolációra a felhasznált rácsponatokon túl.

A [33] cikk vizsgálatai alapján a hálózatbetanítási eljárás jól általánosít tanítóhalmazba nem tartozó θ modellparaméterezésekre. Ez igaz legalábbis megfelelő hálózatspecifikáció mellett, ennek fontossága a forrásban is kihangsúlyozott. Vagyis elérhető cél, hogy a közelítés hibája ilyen θ esetén ugyanolyan nagyságrendű legyen, mint a betanítási eljárásnál az árazási függvény kiértékeléséhez használt numerikus módszeré. Másképp megfogalmazva e numerikus módszerrel kapott ($\hat{P}_{\mathcal{M}}$) árazási függvény közelítésre

$$\hat{P}_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta) = P_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta) + \mathcal{O}(\varepsilon) \implies F_{\mathcal{M}, \zeta}(\theta) = \hat{P}_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

A numerikus teljesítményvizsgálatok részletei, valamint az alkalmazott hálószerkezetek összehasonlítása szintén megtalálhatóak a cikkben. Ezek az 1-faktoros Bergomi-, az érdes Bergomi- és a klasszikus Heston-modellekre terjednek ki. Az érdes Bergomi esetében természetesen szükséges a forwardvariancia-görbét lépcsős függvénnyel közelíteni, hogy a modell véges sok paraméterrel rendelkezzen. A cikk szerzői a Python programnyelv közkedvelt *Keras* és *NumPy* csomagjait használták fel a hálózatspecifikáció implementálásához. Ennek köszönhetően a githubon ([NN-StochVol-Calibrations](#)) elérhető programkód rövid és jól értelmezhető. Eredményeik alapján az eljárás mindhárom modell esetében kiváló eredményt nyújt. Hasonló vizsgálat elérhető a szakirodalomban [37] az érdes Heston-modell némileg tovább javított változatára is. A módszer erre a modellre is hatékonyan alkalmazható.

Az eredeti ötletet a szerzők a [38] cikkben tárgyalták tovább. Itt összefoglalják az eljárás előnyeit a szakirodalomban vizsgált másik, neurális hálózattal történő kalibrációs módszerrel szemben. Ez utóbbi az egylépcsős megközelítés, ahol közvetlenül a piaci implikált volatilitás felület és a kalibrált modellparaméterek közötti leképezést tanulja meg a háló. Az általunk is közölt módszer kétlépcsős, hiszen a kalibráció a neurális hálózat betanítása után történik második lépésként. A korábban felsorolt előnyök mellett a

kétlépcsős eljárás lehetővé teszi a hatékony piaci- és modellkockázat-kezelést, valamint fedezeti portfóliók létrehozását. A hálózat kimenete jól értelmezhető, mint a megfelelő modellparaméterek melletti opcióárak halmaza. Ez tesztelhető ugyanazon eszközökkel (például elvártnak megfelelő paraméterfüggés vizsgálatával), melyekkel az eredeti modell ellenőrzését végeznénk. Továbbá az előző részben említettek értelmében az árazási függvény egyes modellparaméterek szerinti parciális deriváltjai is tetszőlegesen jól közelelíthetők hálózattal. A parciális deriváltakra többek között a *fedezeti*-, vagy más néven *hedge portfólió* létrehozásakor is szükség van. A pénzügyi intézetek számára gyakorlatban nem elegendő meghatározni a kereskedett termékek árát. Ezen felül a biztonságos működés érdekében jól felfogott érdekük és regulátori kötelezettségük is a pozícióikból eredő piaci kockázatok számszerűsítése és fedezése. A számszerűsítés általában éppen a modellparaméterek szerinti parciális deriváltak segítségével történik. Ezek közvetve megmutatják, hogyan változik a portfólió vagy pénzügyi eszköz értéke egyes piaci jellemzők elmozdulása esetén. A feltárt kockázatok fedezhetők ellentétes előjelű kockázattal rendelkező termékek portfólióba vonásával.

A hálózatok derivált approximációs tulajdonsága egyszersmind lehetőséget nyújt a kalibráció szélsőérték-keresési eljárásához általában szükséges Jacobi-mátrix jó közelítésének előállítására is. Egyébként léteznek a Jacobi-mátrix közvetlen felhasználását mellőző optimalizálási technikák is, azonban az azon alapuló algoritmusok jellemzően gyorsabban eredményre vezetnek. Egy ilyen, széleskörű ipari felhasználással rendelkező algoritmus rövid bemutatására fog sor kerülni a dolgozat utolsó részében. Az árazó függvényről tehát feltesszük, hogy már rendelkezésre áll gyorsan kiértékelhető formában, pontos Jacobi-mátrix közelítéssel együtt, például egy előzőek szerint betanított neurális hálózat formájában. A megoldandó probléma mindössze egy többdimenziós függvényen történő lokális szélsőérték-keresés. Az itt bemutatott eljárás a [38] cikk által is specifikált és alkalmazott *Levenberg–Marquardt-algoritmus*, vagy röviden *LM-algoritmus*. Az eredetileg [39] és [40] cikkekből származó eljárás alkalmas választás, ha a volatilitás felületek súlyozott négyzetes eltérését választjuk kalibrációs metrikának, vagyis súlyozott legkisebb négyzetes közelítést keresünk.

3.2.1 Algoritmus. (*Levenberg–Marquardt*)

Bemenetek:

- $\mathcal{P}(\zeta)$ piaci implikált volatilitás felület,
- $\hat{P}_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta)$ európai opciók megfelelő halmazára vonatkozó árazási függvény közelítése.

Kimenet:

- $\hat{\theta}$ kalibrált modellparaméter-halmaz, melyre $\hat{\theta} \approx \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left\| W \left(\mathcal{P}(\zeta) - \hat{P}_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta) \right) \right\|_F$.

Egyéb paraméterek:

- $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ kiinduló paraméterhalmaz,
- $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ kiindulási Lagrange multiplikátor érték,
- $W = \operatorname{diag}(w_\zeta) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a pénzügyi termékek súlyait tartalmazó diagonális mátrix,
- $n_{\max} \in \mathbb{N}$ maximális iterációs szám,
- $\varepsilon_{\min} \in \mathbb{R}^+$ lépés minimális normája,
- $\beta \in \mathbb{R} \cap (0, 1)$ döntési küszöbszám,
- $\nu \in \mathbb{R} \cap (1, \infty)$ Lagrange multiplikátor szorzótényező.

Eljárás:

Legyen $R(\theta) := \mathcal{P}(\zeta) - \hat{P}_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta)$ a reziduális függvény, valamint legyen $n := 0$, $\theta := \theta_0$, $\lambda := \lambda_0$ és $\Delta\theta$ olyan, hogy $\|\Delta\theta\|_2 > \varepsilon_{\min}$.

Amíg $n < n_{\max}$ és $\|\Delta\theta\|_2 > \varepsilon_{\min}$:

Legyen $n := n + 1$, és $J := \frac{\partial \hat{P}_{\mathcal{M}}(\theta, \zeta)}{\partial \theta}$ Jacobi-mátrix.

Legyen $\Delta\theta$ a $[J^T W J + \lambda I] \Delta\theta = J^T W R(\theta)$ normálegyenlet-rendszer megoldása.

Legyen $c_\theta := \frac{\|R(\theta)\|_2 - \|R(\theta + \Delta\theta)\|_2}{\|R(\theta)\|_2 - \|R(\theta) - J\Delta\theta\|_2}$ lineáris modellhez képesti relatív javítás.

Ha $c_\theta \leq \beta$:

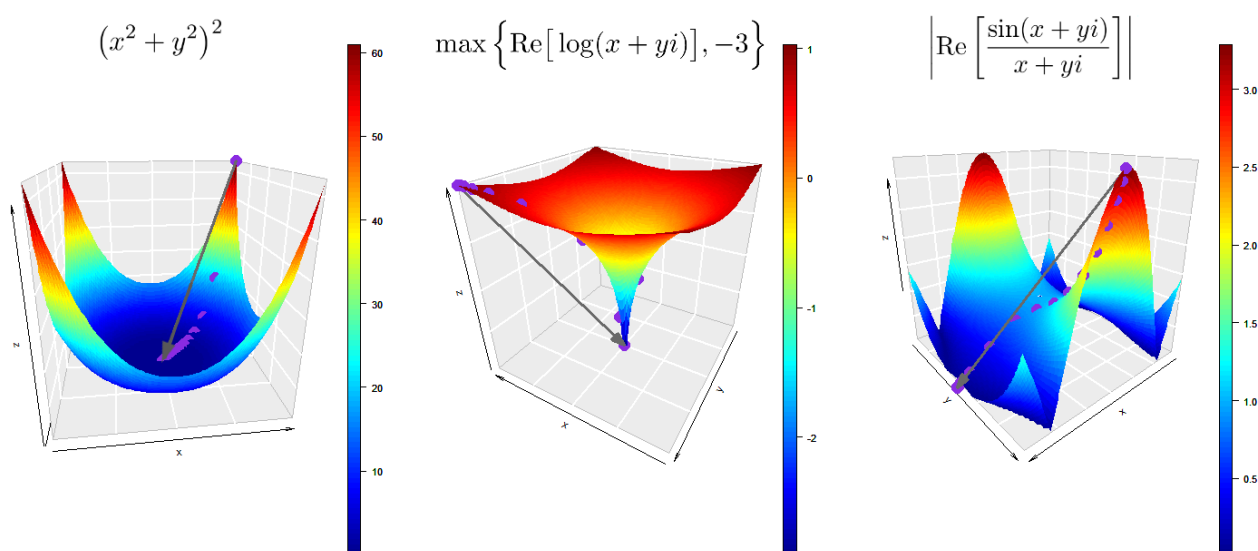
$\Delta\theta$ értéket elutasítjuk, legyen $\lambda := \lambda \cdot \nu$.

Különben:

$\Delta\theta$ értéket elfogadjuk, legyen $\lambda := \frac{\lambda}{\nu}$ és $\theta := \theta + \Delta\theta$.

Visszatér: θ .

Az eljárás R-ben írt saját [programkódja](#) megtalálható a függelékben a korábbiakhoz hasonló színekkel kiemelve. A program tesztelésére külön függvényt hoztunk létre, mely háromdimenziós (kétváltozós valós értékű) függvény esetében grafikusan is ábrázolja az algoritmus lépéseit. Ezen ellenőrző függvény használatára mellékelünk egy [szkriptet](#) is, melynek eredménye látható a [3.2.3](#) ábrán. A program az algoritmus által bejárt pontokat lila színnel jelöli meg az ábrán, míg a kezdeti- és végpontot szürke nyíllal köti össze. Az algoritmust itt arra használjuk, hogy ismert globális minimumértékkel rendelkező függvényeknek keressük meg egy globális minimumhelyét. A program kimenetéből és az ábrákból is látható, hogy az eljárás mindhárom esetben sikeresen megtalált egy globális minimumhelyet.



3.2.3. ábra. LM-algoritmus ellenőrzésére írt [saját szkript](#) tesztetési.

Ebből szemléletesen is látható tehát, hogy az eljárás jól szokott működni arra, hogy megtaláljuk egy többdimenziós függvénynek azt a paraméterezését, mely egy megadott értéket súlyozottan négyzetesen legjobban közelít. Vagyis az algoritmus alkalmas modellkalibrációra, sőt igen hatékony abban az esetben, ha az árazási függvény gyorsan kiértékelhető formában, pontos Jacobi-mátrix közelítéssel együtt rendelkezésre áll. Láttuk, hogy ez utóbbi szempontjából pedig a neurális hálózat alkalmazása megfelelő.

Összességében az érdekes sztochasztikus volatilitásmodellek, a neurális hálózatok és a Levenberg–Marquardt-algoritmus együttes felhasználása így olyan eszközt biztosít számunkra, mellyel a piacot talán minden eddig alkalmazott megoldásnál pontosabban leírhatjuk egy villámgyorsan kalibrálható modell segítségével.

Függelék

1. fejezethez írt programkód

```
1 ##### chapter1.R #####
2
3 library(dplyr)
4 library(xts)
5 library(fitdistrplus)
6 library(tsoutliers)
7
8 # 1. Volatilitás mérőszámok kigyűjtése az adatokból a megadott indexre xts objektumként
9 extractIndex = function(mydata, name){
10   myTs = filter(mydata, Symbol == name)
11   dates = as.Date(sapply(myTs$X, function(s) substring(s, 1, 10)), "%Y-%m-%d")
12   toRemove = c("X", "Symbol", "open_time", "close_time", "open_to_close",
13               "open_price", "close_price", "nobs")
14   ts_data = xts(myTs[, -which(names(myTs) %in% toRemove)], order.by = dates)
15   return(ts_data)
16 }
17
18 # 2. Adott Hurst-együtthatójú, lépésközű, és hosszúságú frakcionális
19 # Brown-mozgás autokovariancia-mátrixának kiszámítása
20 calcFbmSigma = function(H, stepSize, processLength = 1){
21   n = processLength / stepSize
22   rho = outer(1:n, 1:n, function(i, j)
23             ((i * stepSize)^(2 * H) + (j * stepSize)^(2 * H)
24              - abs((j - i) * stepSize)^(2 * H)) / 2)
25   return(t(chol(rho)))
26 }
27
28 # 3. Adott autokovariancia-mátrixú frakcionális Brown-mozgás szimulációja
29 simulateFbmWith = function(sigma) {
30   v=rnorm(nrow(sigma))
31   u = c(0, sigma %*% v)
32   return(u)
33 }
34
35 # 4. Adott Hurst-együtthatójú, lépésközű, és hosszúságú
36 # frakcionális Brown-mozgás szimulációja
37 simulateFbm = function(H, stepSize, processLength = 1){
38   simulateFbmWith(calcFbmSigma(H, stepSize, processLength))
39 }
```

```

40
41 # 5. H, lépésköz, és folyamathossz visszaállítása autokovariancia-mátrixból
42 retrieveParamsFrom = function(sigma){
43   rho = sigma[1:2, 1:2] %*% t(sigma[1:2, 1:2])
44   H = log(rho[2, 2] / rho[1, 1], 2) / 2
45   stepSize = rho[1, 1]^(1 / (2 * H))
46   processLength = nrow(sigma) * stepSize
47   return(list(H = H, processLength = processLength, stepSize = stepSize))
48 }
49
50 # 6. m(q, Delta = 1) kiszámítása a megadott folyamatra adott q értékekre
51 calcM = function(process, qs)
52   sapply(qs, function(q) 1 / (length(process) - 1) *
53     sum((abs(diff(process)))^q, na.rm = T))
54
55 # 7. Hurst-együttható becslése adott q és s értékekre
56 estimateHFrom = function(process, q = 1, s = 2){
57   eps = 0.001; n = length(process)
58   m_1 = calcM(process, q)
59   hs = sapply(1:s, function(x){
60     m_2 = calcM(process[seq(x, n, s)], q)
61     max(min(log(m_2 / m_1, s) / q, 1 - eps), eps)
62   })
63   return(mean(hs))
64 }
65
66 # 8. Hurst-együttható átlagos becslése adott q és s értékekre
67 estimateH = function(process, qs = 1:5, ss = c(2, 3, 5)) {
68   ests = outer(qs, ss, Vectorize(estimateHFrom, c("q", "s")), process = process)
69   return(sum(ests) / length(ests))
70 }
71
72 # 9. Ismert Hurst-együttható becslés eloszlásának vizsgálata szimulációval
73 distOfHEstimate =
74   function(H, sigma = calcFbmSigma(H, stepSize), stepSize = 0.001, sim = 2000,
75     quantiles = c(0.05, 0.95)) {
76     hs = sapply(1:sim, function(i){
77       if(i %% (sim / 10) == 0) writeLines(paste("Elvégzett szimulációk:", i))
78       estimateH(simulateFbmWith(sigma))
79     })
80     writeLines("\n\nKvantilisek:")
81     print(quantile(hs, quantiles), quote = F)
82     writeLines(paste("\n\nÁtlag =", mean(hs), " Szórás =", sd(hs)))
83     print(JarqueBera.test(hs))
84     plot(fitdist(hs, "norm"))
85     return(hs)
86   }
87
88 # 10. Adott autokovariancia-mátrixú, megadott idősorral azonosan
89 # skálázott frakcionális Brown-mozgás szimulációja
90 scaledFbm = function(ts_data, sigma) {
91   n = min(length(ts_data) - 1, nrow(sigma))
92   ts_data = tail(ts_data, n + 1)
93   fbm = simulateFbmWith(sigma[1:n, 1:n])

```

```

94 fbm = xts(fbm, order.by = index(ts_data))
95 sd_scale = sd(ts_data) / sd(fbm)
96 mean_scale = mean(ts_data) - mean(fbm * sd_scale)
97 return(fbm * sd_scale + mean_scale)
98 }
99
100 # 11. Összehasonlításhoz használható m(q, Delta) ábrázoló függvény
101 # adott index folyamatra és adott H-kkal szimulált folyamatokra
102 compareHs = function(process, hs, sigmas, indexName, qs = seq(0.1, 5, 0.1)){
103   len = length(hs)
104   msIndex = calcM(process, qs)
105   plot(qs, msIndex, type = "l", ylim = c(0, 2),
106        xlab = "q", ylab = "m(q, Delta)", lwd = 2)
107   msHs = sapply(1:len, function(i){
108     sigma = sigmas[[i]]
109     msH = apply(sapply(1:100, function(j){
110       calcM(scaledFbm(process, sigma), qs)
111     }), 1, mean)
112     lines(qs, msH, col = i + 1, lwd = 2)
113     msH
114   })
115   legend("topleft", lwd = 2,
116         c(indexName, sapply(hs, function(H) (paste("H =", round(H, 3))))),
117         lty = rep(1, len + 1), col = 1 : (len + 1), cex = 1.1)
118 }
119
120 # 12. Összehasonlításhoz használható folyamat ábrázoló függvény
121 prettyPlots = function(process, fbm_1, fbm_2) {
122   par(mfrow=c(3, 1))
123   print(plot(exp(process), col = "blue", main =
124             "Dow Jones Ipari Átlag volatilitása", cex=0.9))
125   print(plot(exp(fbm_1), col = "blue", main =
126             "Skálázott frakcionális Brown-mozgás exponenciálisa", cex=0.9))
127   print(plot(exp(fbm_2), col = "blue", main =
128             "Skálázott klasszikus Brown-mozgás exponenciálisa", cex=0.9))
129
130   print(plot((process), col = "blue", main =
131             "Dow Jones Ipari Átlag logvolatilitása", cex=0.9))
132   print(plot((fbm_1), col = "blue", main =
133             "Skálázott frakcionális Brown-mozgás", cex=0.9))
134   print(plot((fbm_2), col = "blue", main =
135             "Skálázott klasszikus Brown-mozgás", cex=0.9))
136   par(mfrow=c(1, 1))
137 }

```

```

1 ##### chapter1Script.R #####
2
3 # 1. Adatok letöltése és feldolgozása
4 setwd("E:/Documents/BPM/4. félév/Szakedolgozat/R/")
5 source("chapter1.R")
6 url="https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/images/oxfordmanrealizedvolatilityindices.zip"
7 myfile = download.file(url, "mydata.zip")
8 unzip("mydata.zip")
9 mydata = read.csv("oxfordmanrealizedvolatilityindices.csv")

```

```

10
11 unique(mydata$Symbol)
12 n = 1000
13 myIndex = tail(extractIndex(mydata, ".DJI")$rv5, n + 1)
14 myIndex_log = log(myIndex)
15
16 #####
17 # 2. Különböző Hurst-paraméterek vizsgálata
18 stepSize = 1 / n
19 h_1 = 0.1; h_2 = 0.5; h_3 = 0.9
20 sigma_1 = calcFbmSigma(h_1, stepSize)
21 sigma_2 = calcFbmSigma(h_2, stepSize)
22 sigma_3 = calcFbmSigma(h_3, stepSize)
23 xs = seq(0, 1, stepSize)
24
25 tmp = sapply(list(sigma_1, sigma_2, sigma_3), function(sigma){
26   set.seed(2)
27   plot(xs, simulateFbmWith(sigma), type = "l", col = "blue", xlab = "", ylab = "")
28 })
29
30 set.seed(Sys.time())
31 hs_1 = distOfHEstimate(h_1, sigma_1)
32 hs_2 = distOfHEstimate(h_2, sigma_2)
33 hs_3 = distOfHEstimate(h_3, sigma_3)
34
35 #####
36 # 3. Hurst-paraméter becslés és hatékonyság vizsgálata
37 hInd = estimateH(myIndex_log)
38 sigmaInd = calcFbmSigma(hInd, stepSize)
39 hsInd = distOfHEstimate(hInd, sigmaInd)
40
41 hReal = 0.156; sigmaReal = calcFbmSigma(hReal, stepSize)
42 res = compareHs(myIndex_log, c(h_1, hReal, hInd, h_2),
43   list(sigma_1, sigmaReal, sigmaInd, sigma_2), "Dow-Jones index")
44
45 #####
46 # 4. Index összehasonlítása skálázott frakcionális és klasszikus Brown-mozgásokkal
47 fbm_1 = scaledFbm(myIndex_log, sigmaReal)
48 fbm_2 = scaledFbm(myIndex_log, sigma_2)
49 prettyPlots(myIndex_log, fbm_1, fbm_2)
50
51 fbm_1 = tail(fbm_1, 0.3 * n)
52 fbm_2 = tail(fbm_2, 0.3 * n)
53 prettyPlots(tail(myIndex_log, 0.3 * n), fbm_1, fbm_2)
54
55 #####
56 # 5. Globális környezet elmentése
57 save.image(file = "my_workspace.RData")

```

2. fejezethez írt programkód

```
1 ##### chapter2.R #####
2
3 source("chapter1.R")
4 library(hypergeo)
5
6 ##### Frakcionális Ornstein-Uhlenbeck szimulációja és paraméterbecslése #####
7 # 1. Adott paraméterezésű FOU folyamat szimulációja FBM-ből
8 simulateFouFrom = function(fbm, stepSize, alpha, m, nu){
9   n = length(fbm)
10  fou = rep(m, n)
11  for(i in 2:n) {
12    fou[i] = fou[i - 1] + nu * (fbm[i] - fbm[i - 1]) -
13      alpha * (fou[i - 1] - m) * stepSize
14  }
15  return(fou)
16 }
17
18 # 2. Adott paraméterezésű FOU folyamat szimulációja kovarianciamátrixból
19 simulateFouWith = function(sigma, alpha, m, nu){
20   fbm = simulateFbmWith(sigma)
21   stepSize = retrieveParamsFrom(sigma)$stepSize
22   return(simulateFouFrom(fbm, stepSize, alpha, m, nu))
23 }
24
25 # 3. Kq kiszámítása egész q esetére
26 calcK = function(qs){
27   sapply(qs, function(q){
28     multiplier = ifelse(q %% 2 == 1, sqrt(2 / pi), 1)
29     q = q - 1
30     semifactorial = 1
31     while(q > 1){
32       semifactorial = semifactorial * q
33       q = q - 2
34     }
35     return(semifactorial * multiplier)
36   })
37 }
38
39 # 4. nu FOU-paraméter becslése
40 estimateNu = function(process, qs = 1:5){
41   ms = calcM(process, qs)
42   ks = calcK(qs)
43   return(mean((ms / ks)^(1 / qs)))
44 }
45
46 # 5. m, alpha FOU-paraméterek becslése
47 estimateFouParams = function(process, nu, H){
48   m = mean(process)
49   alpha = ((nu^2 * H * gamma(2 * H)) / sd(process))^(1 / (2 * H))
50   list(m = m, alpha = alpha)
51 }
```

```

52
53 ##### rBergomi-modell szimulációja és árazás #####
54
55 # 6. Volterra-folyamat kovarianciafüggvénye
56 volterraCov = function(ti, tj, H){
57   u = min(ti, tj); v = max(ti, tj)
58   coef = u^(2 * H) * 2 * H * (v / u)^(H - 0.5) / (H + 0.5)
59   hyp = hypergeo(1, 0.5 - H, 1.5 + H, u / v)
60   if(!isTRUE(all.equal(Im(hyp), 0))) message("Complex solution!")
61   return(coef * Re(hyp))
62 }
63
64 # 7. Volterra és Brown folyamatok kovarianciafüggvénye
65 brownVolterraCov = function(Zu, Bv, H, rho){
66   gam = H + 0.5
67   return(rho * sqrt(2 * H) / gam * (Bv^gam - (Bv - min(Zu, Bv))^gam))
68 }
69
70 # 8. Adott Hurst-együtthatójú, korrelációjú, lépésközű és hosszúságú
71 # rBergomi trajektóriapárhoz tartozó autokovariancia-mátrix kiszámítása
72 calcRBergomiSigma = function(H, rho, stepSize, processLength = 1){
73   xs = seq(stepSize, processLength, stepSize)
74   getCov = function(covFun, ...)
75     outer(xs, xs, Vectorize(function(u, v) covFun(u, v, ...)))
76   RB = getCov(volterraCov, H)
77   RZB = getCov(brownVolterraCov, H, rho)
78   RZ = getCov(min)
79   RJoint = rbind(cbind(RZ, RZB), cbind(t(RZB), RB))
80   return(t(chol(RJoint)))
81 }
82
83 # 9. Paraméterek visszafejtése kovarianciamátrixból
84 retrieveParamsFromBergomi = function(sigma){
85   stepSize = sigma[1, 1]^2
86   processLength = ncol(sigma) / 2 * stepSize
87   return(list(stepSize = stepSize, processLength = processLength))
88 }
89
90 # 10. eta paraméter kiszámítása
91 calcEta = function(nu, H){
92   Ch = sqrt(gamma(1.5 - H) / (gamma(H + 0.5) * gamma(2 - 2 * H)))
93   return(2 * nu * Ch)
94 }
95
96 # 11. Adott autokovariancia-mátrixhoz tartozó rBergomi-modell szerinti
97 # variancia és árfolyamat trajektóriák szimulációja
98 simulateRBergomi = function(sigma, xi_0, S_0, nu, H) {
99   n = nrow(sigma) / 2
100   zb = sigma %%% rnorm(2 * n)
101   z = c(0, zb[1 : n]); b = c(0, zb[(n + 1) : (2 * n)])
102   pars = retrieveParamsFromBergomi(sigma)
103   tpow = sapply(seq(0, pars$processLength, pars$stepSize),
104     function(i) i^(2 * H))
105   eta = calcEta(nu, H)

```

```

106 v = xi_0 * exp(eta * b - 0.5 * eta^2 * tpow)
107 S = rep(S_0, n + 1)
108 for(i in 1:n) {
109   S[i + 1] = S[i] + S[i] * sqrt(v[i]) * (z[i + 1] - z[i])
110 }
111 return(list(S = S, v = v, z = z, b = b))
112 }
113
114 # 12. Generikus szimulációs árazási elv
115 priceBySimulation = function(payoffFun, simStochVolFun, sigma, simNum = 1000, ...){
116   payoffRealizations = sapply(1:simNum, function(i){
117     underlying = simStochVolFun(sigma, ...) $ S
118     payoffFun(underlying)
119   })
120   return(mean(payoffRealizations))
121 }

```

```

1 ##### chapter2Script.R #####
2
3 setwd("E:/Documents/BPM/4. félév/Szakdolgozat/R/")
4 load("my_workspace.RData")
5 source("chapter2.R")
6
7 #####
8 # 1. FOU paraméterek becslése és alpha értékek összehasonlítása
9
10 nu = estimateNu(myIndex_log)
11 fouPar = estimateFouParams(myIndex_log, nu, hReal)
12
13 set.seed(1)
14 fbm = simulateFbmWith(sigmaReal)
15 fou_0 = simulateFouFrom(fbm, stepSize, 0, fouPar$m, nu)
16 fou_1 = simulateFouFrom(fbm, stepSize, 1, fouPar$m, nu)
17 fou_10 = simulateFouFrom(fbm, stepSize, 10, fouPar$m, nu)
18
19 ylim = c(min(fou_0, fou_1, fou_10), max(fou_0, fou_1, fou_10) + 0.5)
20 plot(xs, fou_0, type = "l", col = 1, xlab = "", ylab = "", ylim = ylim)
21 lines(xs, fou_1, col = 2); lines(xs, fou_10, col = 3)
22 legend("topleft", c("alpha = 0", "alpha = 1", "alpha = 10"),
23       lty = rep(1, 3), col = 1:3, cex = 0.7)
24
25 #####
26 # 2. Kovarianciafüggvények, szimuláció és árazás rBergomi-modell szerint
27 tjs = seq(1, 5, 0.01)
28 plot(tjs, sapply(tjs, function(t) volterraCov(1, t, hReal)), type = "l",
29       xlab = "t", ylab = "Cov(1, t)", col = 2, lwd = 2)
30 lines(tjs, sapply(tjs, function(t) 0.5 * (1 + t^(2 * hReal) - (t - 1)^(2 * hReal))),
31       lwd = 2)
32 legend("topright", c("Frakcionális Brown-mozgás", "Volterra-folyamat"),
33       lty = rep(1, 2), col = 1:2, lwd = 2, cex = 1.4)
34
35 set.seed(1)
36 stepSize = 1 / 252
37 processLength = 1

```

```

38 sigmaB = calcRBergomiSigma(hReal, rho = -0.9, stepSize, processLength)
39 xs_2 = seq(0, processLength, stepSize)
40 xi_0 = rep(myIndex[1], processLength / stepSize + 1)
41 par(mfrow = c(2,1))
42 trajlist = simulateRBergomi(sigmaB, xi_0, S_0 = 100, nu, hReal)
43 plot(xs_2, trajlist$v, type = "l", xlab = "t", ylab = "v", col = "red", lwd = 2)
44 plot(xs_2, trajlist$S, type = "l", xlab = "t", ylab = "S", col = "red", lwd = 2)
45 par(mfrow = c(1,1))
46
47 equity = function(S) return(tail(S, 1))
48 vanillaCall = function(K) return(function(S) max(tail(S, 1) - K, 0))
49 asianCall = function(ti_1, ti_2) return(function(S)
50   max(tail(S, 1) - mean(S[ti_1:ti_2]), 0))
51
52 price_1 = priceBySimulation(equity, simulateRBergomi, sigmaB, simNum = 10000,
53   xi_0 = xi_0, S_0 = 100, nu = nu, H = hReal)
54 price_2 = priceBySimulation(vanillaCall(K = 100), simulateRBergomi, sigmaB,
55   simNum = 10000, xi_0 = xi_0, S_0 = 100, nu = nu, H = hReal)
56 price_3 = priceBySimulation(asianCall(ti_1 = 63, ti_2 = 189), simulateRBergomi, sigmaB,
57   simNum = 10000, xi_0 = xi_0, S_0 = 100, nu = nu, H = hReal)
58
59 save.image(file = "my_workspace.RData")

```


3. fejezethez írt programkód

```
1 ##### chapter3.R #####
2
3 library(numDeriv)
4 library(plot3D)
5
6 ##### A Levenberg-Marquardt-algoritmus #####
7
8 LmOptimizer = function(fun, x_0, y = rep(0, length(f(x_0))), lambda = 100,
9                       W = diag(length(y)) / length(y), maxIt = 50,
10                      minStep = 1e-5, threshold = 0.5, nu = 2, track = T) {
11
12   f = function(x) do.call(fun, as.list(x))
13   residual = function(x) y - f(x)
14   ps = c(x_0, f(x_0))
15   x = x_0
16   n = 0
17   deltaNorm = 1 + minStep
18
19   while(n < maxIt && deltaNorm > minStep) {
20     n = n + 1
21     if(track) cat("\n\nIterációs szám:", n, "\n")
22
23     J = jacobian(f, x)
24     delta = solve(t(J) %*% W %*% J + lambda * diag(length(x)),
25                 t(J) %*% W %*% residual(x))
26     deltaNorm = norm(delta, "2")
27
28     improvement = norm(residual(x), "2") - norm(residual(x + delta), "2")
29     improvementLin = norm(residual(x), "2") - norm(residual(x) - J %*% delta, "2")
30     cx = improvement / improvementLin
31     if(is.na(cx)) break
32
33     if(cx <= threshold) {
34       if(track) cat("Írány elutasítva\n")
35       lambda = lambda * nu
36     }
37     else {
38       if(track) cat("Írány elfogadva\n")
39       x = x + delta
40       ps = cbind(ps, c(x, f(x)))
41       lambda = lambda / nu
42     }
43     if(track){
44       cat(paste("lambda: ", lambda, ", delta norma: ", deltaNorm,
45               ", relatív javulás: ", cx));
46       cat("\n\nx:\n"); print(c(x)); cat("f(x):\n"); print(c(f(x)))
47     }
48   }
49   return(list(x = x, ps = ps))
50 }
51
```

```

52 ##### Az algoritmus grafikus tesztelése #####
53
54 testLm = function(fun, x_0, y_0, z, partition, phi, theta, main = ""){
55   l = LmOptimizer(fun, c(x_0, y_0), z, track = T)
56   m = mesh(partition, partition)
57   mz = matrix(fun(m$x, m$y), ncol = ncol(m$x))
58   formula = deparse(fun)[2]
59   main = ifelse(main == "", substr(formula, 8, nchar(formula) - 1), main)
60   n = length(l$ps[1,])
61   surf3D(m$x, m$y, mz, colkey = T, bty = "g", phi = phi,
62         theta = theta, main = main, cex.main = 3)
63   points3D(l$ps[1,], l$ps[2,], l$ps[3,], add = T, pch = 20, cex = 4,
64           col = "blueviolet")
65   arrows3D(l$ps[1,1], l$ps[2,1], l$ps[3,1], l$ps[1,n], l$ps[2,n], l$ps[3,n],
66           add = T, pch = 20, col = "dimgray", lwd = 3, length = 0.3)
67 }

```

```

1 ##### chapter3Script.R #####
2
3 setwd("E:/Documents/BPM/4. félév/Szakdolgozat/R/")
4 source("chapter3.R")
5
6 ##### A vizsgált tesztesetek #####
7
8 par(mfrow = c(1,3))
9
10 f = function(x, y) return ((x^2+y^2)^2)
11
12 testLm(f, x_0 = 2, y_0 = 2, z = 0, partition = seq(-2, 2, 0.05), phi = 20,
13       theta = 353)
14
15 g = function(x, y) {
16   z = complex(1, x, y)
17   return(sapply(Re(log(z)), function(a) max(a, -3)))
18 }
19
20 testLm(g, x_0 = 2, y_0 = 2, z = -3, partition = seq(-2, 2, 0.05), phi = 29,
21       theta = 210, main = "max{Re[log(x + yi)], -3}")
22
23 h = function(x, y) {
24   z = complex(1, x, y)
25   return(abs(Re(sin(z)/z)))
26 }
27
28 testLm(h, x_0 = 0.1, y_0 = 3, z = 0, partition = seq(-3, 3, 0.05), phi = 20,
29       theta = 140, main = "|Re[sin(x + yi)/(x + yi)]|")
30
31 par(mfrow = c(1,1))

```

Irodalomjegyzék

- [1] Jim Gatheral, Masaaki Fukasawa, Thibault Jaisson, and Mathieu Rosenbaum. Rough volatility: An overview. *Global Derivatives*, 2017.
- [2] Jim Gatheral, Thibault Jaisson, and Mathieu Rosenbaum. Volatility is rough. *Quantitative finance*, 18(6):933–949, 2018.
- [3] Georgiy Shevchenko. Fractional Brownian motion in a nutshell. *arXiv preprint arXiv:1406.1956*, 2014.
- [4] Paul Doukhan, George Oppenheim, and Murad Taqqu. *Theory and applications of long-range dependence*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [5] Jordan Bell. The Kolmogorov continuity theorem, Hölder continuity, and the Kolmogorov-Chentsov theorem, 2015.
- [6] Benoit B Mandelbrot and John W Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, 10(4):422–437, 1968.
- [7] Andrey Nikolaevich Kolmogorov and Sergei Vasilyevich Fomin. *Introductory real analysis*. Courier Corporation, 1975.
- [8] Wenxue Li, M. Liu, and ke Wang. A generalization of Itô’s formula and the stability of stochastic Volterra integral equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 08 2012.
- [9] Yuliya Mishura. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, volume 1929. Springer Science & Business Media, 2008.
- [10] Xiaohu Wang, Weilin Xiao, and Jun Yu. Modeling and forecasting realized volatility with the fractional Ornstein–Uhlenbeck process. *Journal of Econometrics*, 2021.
- [11] Alexander Novikov and Esko Valkeila. On some maximal inequalities for fractional Brownian motions. *Statistics & probability letters*, 44(1):47–54, 1999.

- [12] HJ Landau and Lawrence A Shepp. On the supremum of a Gaussian process. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, pages 369–378, 1970.
- [13] Patrick Cheridito, Hideyuki Kawaguchi, and Makoto Maejima. Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes. *Electronic Journal of probability*, 8:1–14, 2003.
- [14] Jean Cortissoz. On the Skorokhod representation theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(12):3995–4007, 2007.
- [15] Christian Bayer, Peter Friz, and Jim Gatheral. Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance*, 16(6):887–904, 2016.
- [16] Ian Martin. Simple variance swaps. Technical report, National Bureau of Economic Research, 2011.
- [17] Lorenzo Bergomi. Smile dynamics II. *Risk October*, pages 67–73, 2005.
- [18] Frits Beukers. Gauss’ hypergeometric function. In *Arithmetic and geometry around hypergeometric functions*, pages 23–42. Springer, 2007.
- [19] Ryan McCrickerd and Mikko S Pakkanen. Turbocharging Monte Carlo pricing for the rough Bergomi model. *Quantitative Finance*, 18(11):1877–1886, 2018.
- [20] Yaozhong Hu, David Nualart, and Hongjuan Zhou. Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes of general Hurst parameter. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 22(1):111–142, 2019.
- [21] Carlos A Sin. Complications with stochastic volatility models. *Advances in Applied Probability*, 30(1):256–268, 1998.
- [22] P-L Lions and Marek Musiela. Correlations and bounds for stochastic volatility models. In *Annales De L’Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire*, volume 24, pages 1–16. Elsevier, 2007.
- [23] Paul Gassiat. On the martingale property in the rough Bergomi model. *Electronic Communications in Probability*, 24:1–9, 2019.
- [24] Steven L Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, 6(2):327–343, 1993.

- [25] Omar Euch and Mathieu Rosenbaum. The characteristic function of rough Heston models. *Mathematical Finance*, 29, 09 2016.
- [26] Laurent Decreusefond. Stochastic integration with respect to Volterra processes. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 41, pages 123–149, 2005.
- [27] David Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*, volume 1995. Springer, 2006.
- [28] Elisa Alos, Olivier Mazet, and David Nualart. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. *The Annals of Probability*, 29(2):766–801, 2001.
- [29] Christian Bender. An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter. *Stochastic Processes and their Applications*, 104(1):81–106, 2003.
- [30] Laurent Decreusefond et al. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential analysis*, 10(2):177–214, 1999.
- [31] Peter Carr and Dilip Madan. Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of computational finance*, 2(4):61–73, 1999.
- [32] NH Sweilam, MM Khader, and AM S Mahdy. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 7(2):8, 2012.
- [33] Blanka Horvath, Aitor Muguruza, and Mehdi Tomas. Deep learning volatility: a deep neural network perspective on pricing and calibration in (rough) volatility models. *Quantitative Finance*, 21(1):11–27, 2021.
- [34] István Fazekas. *Neurális hálózatok*. Debreceni Egyetem, Informatikai Kar, 2013. Egyetemi jegyzet.
- [35] Kurt Hornik, Maxwell Stinchcombe, and Halbert White. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural networks*, 2(5):359–366, 1989.
- [36] Kurt Hornik, Maxwell Stinchcombe, and Halbert White. Universal approximation of an unknown mapping and its derivatives using multilayer feedforward networks. *Neural networks*, 3(5):551–560, 1990.
- [37] Mathieu Rosenbaum and Jianfei Zhang. Deep calibration of the quadratic rough Heston model. *arXiv preprint arXiv:2107.01611*, 2021.

- [38] Christian Bayer, Blanka Horvath, Aitor Muguruza, Benjamin Stemper, and Mehdi Tomas. On deep calibration of (rough) stochastic volatility models. *arXiv preprint arXiv:1908.08806*, 2019.
- [39] Kenneth Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 2(2):164–168, 1944.
- [40] Donald W Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.