

Double barrier opciók árazása haladó Monte Carlo módszerekkel

2022.

Szakdolgozat

Borza Marcell

Biztosítási és Pénzügyi Matematikai Mesterszak
Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezető:

Varga László



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

NYILATKOZAT

Név: Borza Marcell László

ELTE Természettudományi Kar, szak: biztosítási és pénzügyi matematika MSc

NEPTUN azonosító: I5F8NA

Szakedolgozat címe:

Double barrier opciók árazása haladó Monte Carlo módszerekkel

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.27.



a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Varga Lászlónak, hogy szakértő iránymutatással látott el és válaszolt minden felmerülő kérdésekre. Köszönet illeti minden jelenlegi és volt matematika tanáromat, akik mélyítették tudásomat. Emellett hálával tartozom édesanyámnak, aki elindított az úton és mindenben támogatott.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	6
2. Barrier opciók	7
2.1. Alapeset	7
2.2. Kiterjesztések	8
3. Felhasznált matematikai háttér	10
3.1. Tükrözési elv	10
3.2. Modellkörnyezet	10
4. Árazási módszerek	11
4.1. Az ár kiszámítása a trajektóriák tükrözésével	11
4.1.1. Single Barrier Opció	11
4.1.2. Példa: Down-and-In Call ára	15
4.1.3. Paritás összefüggések	16
4.1.4. Double Barrier Opció	16
4.1.5. Példa: DBC ára	19
4.2. Az ár kiszámítása a tükörképek módszerével	20
4.2.1. Gap opció	21
4.2.2. Single Barrier Opció	22
4.2.3. A tükörképek módszere single exponenciális barrierre	22
4.2.4. Tükörképek módszere a DOC opcióra	24
4.2.5. Double Barrier Opció	25
4.2.6. A tükörképek módszere double exponenciális barrierekre	25
4.2.7. A DBC opciók árának kiszámítása a tükörképek módszerével	31
4.3. Monte Carlo módszerek	31
4.3.1. Egyszerű Monte Carlo szimuláció	32

4.3.2.	Brown-hidas Monte Carlo szimuláció	33
4.3.3.	Rétegzett mintavétel	38
5.	Szimulációs eredmények	41
6.	Összefoglalás	46

1. Bevezetés

A Biztosítási és pénzügyi matematika képzés során hamar felkeltette az érdeklődésemet a különböző opcióárazási kérdések matematikai háttere, különös tekintettel az egzotikus opciók árazására, ezért szakdolgozatom témájául is ehhez kapcsolódó kérdést választottam, a double barrier opciók árazását. Manapság nagyon népszerűek a barrier típusú termékek a különböző derivatívapiacokon, ennek egyik oka az áruk. A barrier opciók felépítéséből könnyen látszik, hogy olcsóbbak, mint az alapopció, amiből származnak, viszont megfelelően választott paraméterekkel ugyanazt a hedge funkciót be tudják tölteni. Különösen gyakoriak ezek az opciók a commodity piacokon, ahol az alaptermékek árai jellemzően nagyobb volatilitással bírnak. A pénzügyi piacokon léteznek folytonos és diszkrét monitorozású barrier termékek egyaránt, ám az utóbbiak jóval elterjedtebbek. A dolgozatom fő célja a folytonos eset vizsgálata, és erre az esetre vonatkozó formulák levezetése, ám a diszkrét monitorozású termékek népszerűsége miatt külön figyelmet fordítok a különböző Monte Carlo szimulációk alkalmazására. A dolgozatban bizonyos angol kifejezéseket nem fordítok magyarra, mert azokra nehéz magyar megfelelőt találni, és széles körben elterjedt az angol kifejezés (barrier opció, monitorozási pont stb.).

A bevezetés végén most ismertetni fogom szakdolgozatom vázlatos felépítését. A 2. fejezetben bemutatom a diplomamunka tárgyát képező barrier opciókat és azok változatait. A 3. fejezetben röviden összefoglalom a felhasznált matematikai hátteret. A szakdolgozat legfontosabb része a 4. fejezet, ahol három különböző módszert mutatok be az árak kiszámítására. Először a tükrözési elvet használom, ezen rész megírásához nagy segítséget nyújtott [1], a második megközelítés a tükröképek módszere, amely megjelenik [2]-ben és [3]-ban. Ezután különböző Monte Carlo szimulációs módszereket ismertetek, először az egyszerű Monte Carlo szimulációt tekintem, majd ezt továbbfejleszttem az úgynevezett Brown-hidas technikával, amelynek single barrier esetre vonatkozó formája megjelenik [5]-ben, ám ennek a jóval komplikáltabb double barrier esetre való alkalmazása és a (4.7)-es tétel bizonyítása a saját munkám. A későbbiekben ezt a módszert kombinálom az úgynevezett rétegzett mintavételes technikával, amelynek önálló használata megtalálható [9]-ben. A rétegzett mintavételezés megvalósítása double barrier esetben és a módszer ötvözése a Brown-hidas technikával a saját eredményem. A leírt algoritmusokat R nyelven implementáltam, a szimulációs futtatások eredményeit foglalja össze az 5. fejezet. A 6. fejezetben kapott helyet az összefoglalás.

2. Barrier opciók

2.1. Alapeset

Barrier opciók alatt olyan egzotikus opciókat értünk, amelyeknek lejáratkori kifizetésfüggvénye nem csak az alaptermék lejáratkori értékétől függ, hanem az alaptermék értékének alakulásától egy vagy több előre meghatározott határfüggvényhez képest, egy szintén előre meghatározott időintervallumon belül. Ezeket a határfüggvényeket nevezzük barriereknek. A határtól való függés többféle lehet, a két klasszikus eset a következő: az elsőben a szerződés megkötésekor a vásárló fél kap egy T időpontban lejárató opciót, amelyet azonban elveszít, ha lejárat előtt az alaptermékár eléri valamelyik barrieret, az ilyen típust nevezzük knock-out típusúnak, a második esetben a vásárló az opciót nem a szerződés megkötésekor kapja meg, hanem akkor, amikor az alaptermékár eléri valamelyik barrieret (ha létezik ilyen időpont), ám azt később már nem veszítheti el, az ilyen típust nevezzük knock-in típusúnak. Ilyen értelemben a barrier elérése inaktíválja vagy aktíválja az opciót. A legegyszerűbb esetben csak egyetlen határfüggvény van a szerződésben (ezt az esetet nevezzük single barrier esetnek), ha ezen határfüggvény alatti zárt félsík az, amely aktívál/inaktívál, akkor alsó barriernek, ha a határfüggvény felett lévő zárt félsík tölt be ilyen funkciót, akkor felső barriernek nevezzük ezt a határfüggvényt. Tekintsük az egyik legegyszerűbb esetet, a down-and-out call opciót (amelyet a későbbiek DOC-vel fogok jelölni), a megnevezés arra utal, hogy egyetlen alsó barrier van a szerződésben, amely alatt a szerződésben foglalt call opció inaktíválódik. Amennyiben az alaptermékár lejáratig végig az alsó barrier felett marad, akkor a vásárló fél lejáratkor megkapja a call opció kifizetését. A legegyszerűbb esetben ezen határfüggvény időben állandó, jelöljük a szintjét L -lel, ekkor a T lejáratkori kifizetésfüggvény a következő alakban írható fel:

$$\mathbb{1}_{\{\forall t < T, X_t > L\}}(X(T) - K)^+,$$

ahol $X(t)$ jelöli az alaptermék árát a t időpillanatban, K a kötési árfolyamot, $(\cdot)^+$ a pozitív rész függvényt, $\mathbb{1}_A$ pedig az A esemény indikátorfüggvényét, amely $\omega \in A$ esetén 1-et vesz fel, $\omega \notin A$ esetén pedig 0-t. Ebben az esetben az előző kifizetésfüggvény azonosan 0, amennyiben a szerződés megkötésekor az alaptermékár L -nél kisebb. Down-and-in call esetben az alsó barrier elérése aktíválja a call opciót, up-and-out call és up-and-in call esetben egyetlen felső barrier van a szerződésben, amely feletti zárt féltér elérése előbbi

esetben inaktiválja, utóbbi esetben aktiválja a call opciót. Az alábbi táblázat tartalmazza a különböző single barrier call opciók kifizetésfüggvényét.

Név	Rövidítés	Kifizetésfüggvény
down-and-out call	DOC	$\mathbb{1}_{\{\forall t < T, X_t > L\}}(X(T) - K)^+$
down-and-in call	DIC	$\mathbb{1}_{\{\exists t < T, X_t \leq L\}}(X(T) - K)^+$
up-and-out call	UOC	$\mathbb{1}_{\{\forall t < T, X_t < U\}}(X(T) - K)^+$
up-and-in call	UIC	$\mathbb{1}_{\{\exists t < T, X_t \geq U\}}(X(T) - K)^+$

Az előbbieket természetesen módon elmondhatóak call helyett put opcióra is, a megfelelő változtatással a kifizetésfüggvényekben. Hasonló indikátort természetesen kapcsolhatunk más európai típusú opció kifizetésfüggvényéhez is, ezáltal megkapva a megfelelő barrier opciót, ám ebben a dolgozatban csak a call, illetve put opciókra szorítkozunk.

2.2. Kiterjesztések

Az egyik legfontosabb különbség az általános esetben az eddigiekhez képest, hogy egyidejűleg lehetünk tekintettel alsó, illetve felső határfüggvényre. Ha egyszerre van alsó és felső barrier a szerződésben akkor double barrier opcióról beszélhetünk, ekkor a két barrieren kívüli rész (a felső barrier feletti és az alsó barrier alatti zárt félsík) az, amely aktivál vagy inaktivál. A másik jelentős kiterjesztése az alapesetnek, ha megszabadulunk a barrierék időben állandóságától, és időfüggőként tekintünk rájuk, ám továbbra is előre meghatározottak, tehát az idő determinisztikus függvényei. Ekkor $U(t)$ -vel, illetve $L(t)$ -vel jelölhetjük a felső, illetve az alsó barrier t időpontkori értékét. A kapcsolódó irodalomban a leggyakoribb az exponenciális alakú időfüggő barrier, amely esetben a következőképp fejlődnek:

$$L(t) = Le^{\alpha t}$$

$$U(t) = Ue^{\beta t}$$

ahol L, U, α, β valós konstansok és $L, U > 0$, α és β előjele határozza meg hogy az adott barrier időben növekedő vagy csökkenő-e. Visszakapjuk a korábbi időben állandó esetet, ha $\alpha = \beta = 0$, ez esetben L és U határozza meg a két határszintet. További lehetséges általánosítás, ha a vizsgált időintervallumot megszorítjuk a szerződés élettartamánál szűkebb időszakra, így az ezen intervallumon kívüli határátlépéseket nem vesszük figyelembe. Ilyen eseteket is lefedő gondolatmeneteket találhatunk például [2]-ben. Az

eddigiekben az alaptermék lejáratkori értéke mellett, valamelyik barrier első elérésének ideje határozta meg a kifizetésfüggvényt és az első elérés utáni viselkedésnek nem volt hatása. A képletekben ez indikátorfüggvény képében nyilvánul meg, amely vagy 0 vagy 1 értéket vesz fel. Más a helyzet "proportional double barrier step" opciók esetében, ahol a barrier elérésének nem ennyire végletes a hatása, nem 0-ról 1-re vagy 1-ről 0-ra változtatja a szorzó értékét a kifizetésfüggvényben, hanem kisebb lépésekben növeli vagy csökkenti annak értékét, ezáltal nem az elérés pusztá ténye, hanem az időhorizont alatt a barrieren túl töltött idő határozza meg a lejáratkori kifizetésfüggvényt, például a következőképp

$$\Phi(X_T) = \left(1 - \frac{\tau^- + \tau^+}{T}\right) (X(T) - K)^+,$$

ahol

$$\tau^- = \int_0^T H(L(t) - X(t)) dt,$$

$$\tau^+ = \int_0^T H(X(t) - U(t)) dt,$$

ahol $H(\cdot)$ jelöli a Heaviside függvényt. Bővebben olvashatunk a proportional double barrier step opciókról [7]-ben. A kapcsolódó szakirodalom nagy részéhez hasonlóan ebben a dolgozatban is feltételezzük, hogy az alaptermék ára geometriai Brown-mozgást követ, egy másik lehetséges választás, amellyel sok cikk foglalkozik, a Heston-modell, ehhez kapcsolódó eredményeket találhatunk [10]-ben és [11]-ben. Ezen dolgozat fő témája az exponenciális alakú double barrier opciók árazása, melyeknél a vizsgált időhorizont a szerződés élettartamának teljes hossza. Az ehhez felhasznált legfontosabb eszköz a tükrözési elv, amely megjelenik mind [1]-ben, mind [2]-ben két különböző módon. A dolgozat egyik célja ezen két módszer ismertetése és összehasonlítása különböző haladó Monte Carlo szimulációs módszerekkel. Ahhoz, hogy eljussunk ide, először meg kell vizsgálnunk a single barrier és az időben állandó barrier esetét.

3. Felhasznált matematikai háttér

3.1. Tükrözési elv

A tárgyaláshoz szükségünk lesz a tükrözési elvre, melyet ebben az alfejezetben mutatok be. A tükrözési elv standard Brown-mozgásokra vonatkozó alakja szerepel a biztosítási és pénzügyi matematika MSc tantervében a következő alakban.

3.1. Tétel. *Legyen W Wiener-folyamat, τ pedig megállási idő. Definiáljuk az Y folyamatot a következőképp:*

$$Y_t = W_{t \wedge \tau} - (W_t - W_{t \wedge \tau}) = 2W_{t \wedge \tau} - W_t,$$

ahol $t \wedge \tau$ jelöli t és τ minimumát. Ekkor Y is Wiener-folyamat.

Az előző tételnél a folyamat egy adott szint elérése utáni részét tüközzük erre a szintre. A dolgozat későbbi részében a folyamatnak a szint elérése előtti részét szeretnénk tükrözni, erről szól a következő állítás.

3.1. Következmény. *Legyen X olyan folyamat, amely eleget tesz a következő sztochasztikus differenciálegyenletnek*

$$d(\log X(t)) = \sigma dW(t),$$

ahol σ pozitív konstans, W pedig Wiener-folyamat, és legyen $X(0) = X_0$. Legyen B egy előre adott szint, τ pedig ennek a szintnek az elérési ideje. Definiáljuk az Y folyamatot a következőképp:

$$Y(t) = \begin{cases} B^2/X(t) & \text{ha } \tau > t \\ X(t) & \text{ha } \tau \leq t \end{cases}$$

Ekkor $\log(Y)$ is kielégíti a korábban felírt differenciálegyenletet és $Y(0) = B^2/X_0$

3.2. Modellkörnyezet

A dolgozat során feltételezzük, hogy az alaptermék geometriai Brown-mozgást követ, tehát árának időbeli dinamikája felírható a következő sztochasztikus differenciálegyenlet formájában:

$$dX(t) = (\mu - c)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \quad (1)$$

ahol $(W(t))_{t \geq 0}$ standard Brown-mozgás az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, tehát W a piaci mérték szerint drift nélküli Brown-mozgás. Feltételezzük azt is, hogy μ , c , σ és

r konstansok, amik a várható hozamot, a folytonos osztalékhozamot, a volatilitást és a kockázatmentes hozamot testesítik meg. Ekkor alkalmazva a Girsanov-tételt, átírhatjuk az előző egyenletet egy olyan alakra, amelyben már egy új, az eredeti mérték szerint driftes, ám az új, kockázatsemleges mérték szerint standard \tilde{W} Brown-mozgás szerepel.

$$dX(t) = (r - c)X(t)dt + \sigma X(t)d\tilde{W}(t) \quad (2)$$

A mértékcserével csak a drift tag fog megváltozni, és ennek eredeti és új értékének segítségével felírhatjuk a mértékcseréhez szükséges Radon-Nikodym deriváltat. Jelöljük az új mértéket \tilde{Q} -val, ekkor

$$\frac{d\tilde{Q}}{dP} = \exp \left[\frac{r - \mu}{\sigma} W(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right)^2 t \right].$$

Alkalmazva az Itô-formulát X -re és az $f(x) = \log(x)$ függvényre, emellett bevezetve a $\lambda = r - c - \frac{\sigma^2}{2}$ jelölést:

$$d(\log X(t)) = \lambda dt + \sigma d\tilde{W} \quad (3)$$

Amely egyenlet a későbbi számolásaink kiindulópontjává fog szolgálni.

4. Árazási módszerek

Ebben a fejezetben három különböző módszert vizsgálunk meg a barrier opciók árának kiszámítására. Az első megközelítésben a tükrözési elvet fogjuk használni, a másodikban a probléma parciális differenciálegyenletekkel való leírásából indulunk ki, a harmadikban pedig különböző Monte Carlo szimulációs módszereket vizsgálunk meg.

4.1. Az ár kiszámítása a trajektóriák tükrözésével

4.1.1. Single Barrier Opció

Először térjünk vissza (3)-hoz és vezessük be a következő jelölést: legyen $\tilde{f}(X_T; X_0)$ az $X(T)$ valószínűségi változó \tilde{Q} alatti feltételes sűrűségfüggvénye az $X(0) = X_0$ feltételre

nézve az X_T helyen. Ezt (3) speciális alakja miatt könnyen ki tudjuk számolni:

$$\tilde{f}(X_T; X_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma} \exp \left\{ -\frac{\left[\log \left(\frac{X_T}{X_0} \right) - \lambda T \right]^2}{2\sigma^2 T} \right\} \quad (4)$$

Ha nem tekintünk semmilyen barrierre, akkor ennek a feltételes sűrűségfüggvénynek a segítségével felírhatjuk egy általános Φ kifizetésfüggvényű európai típusú opció értékét egy lejárat előtti tetszőleges t időpontban. Jelen esetben a kockázatmentes kamatláb konstans, így a kockázatmentes árazási formula szerint ez az ár a következő formában kapható meg:

$$V(t, X_t) = B(t) \mathbf{E}_{\tilde{Q}} \left[\frac{\Phi(X_T)}{B(T)} \mid X(t) = X_t \right] = \frac{B(t)}{B(T)} \int_0^\infty \Phi(x) \tilde{f}(x; X_t) dx,$$

ahol $V(t, X_t)$ a termék t időpontbeli ára, ha az aktuális alaptermékár éppen X_t , $B(t)$ a bankbetét t időpontbeli értéke, amely az ármércefolyamat szerepét tölti be, \tilde{Q} pedig a hozzá tartozó kockázatmentes mérték, tehát a (B, \tilde{Q}) ármércepart alkot, $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ a \tilde{Q} alatti várható érték operátor. Érdeemes megemlíteni, hogy itt $X(t)$ egy valószínűségi változó, míg X_t egy érték. Ha speciálisan a vanilla call opciót tekintjük valamilyen K kötési árral, akkor $\Phi(X_T) = (X_T - K)^+$ és a 0 időpontbeli ár a következőképp számolható ki:

$$call(0, X_0) = \int_0^\infty e^{-rT} (x - K)^+ \tilde{f}(x, X_0) dx = \int_K^\infty e^{-rT} (x - K) \tilde{f}(x, X_0) dx \quad (5)$$

Barrier nélkül tehát, (a feltételes sűrűségfüggvény ismeretében) az árat meg tudjuk határozni ennek az integrálnak a kiszámításával, ám ez megváltozik, ha egy barrierre is tekintettel vagyunk. Ekkor ugyanis a sűrűség meghatározásánál nem kezelhetünk minden X_0 -ból induló trajektóriát ugyanúgy, hiszen ezek közül némelyek elérik a barrierre az időhorizonton belül, némelyek pedig nem. Ahhoz, hogy ezeket szeparálni tudjuk, vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$\tau_L = \inf\{t \mid X(t) = L\}$$

$$\tau_U = \inf\{t \mid X(t) = U\}$$

ahol U a felső barrier, L pedig az alsó barrier konstans szintje. Ebben a fejezetben olyan szerződéseket tekintünk, amelyekben csak az egyik szerepel, de a két esetet párhuzamosan vizsgáljuk. Tegyük fel továbbá, hogy teljesül a $L \leq X_0 \leq U$ reláció. Definiáljuk a

trajektóriák halmazait a következőképp:

$$\Theta_U = \left\{ \overrightarrow{X_0, X_T} \mid \tau_U < T, X_0 \leq U \right\}$$

$$\Theta_L = \left\{ \overrightarrow{X_0, X_T} \mid \tau_L < T, X_0 \geq L \right\}$$

ahol $\overrightarrow{X_0, X_T}$ jelöli az X olyan trajektóriáit, amelyekre teljesül, hogy $X(0) = X_0$ és $X(T) = X_T$. Legyen továbbá Θ_0 az X folyamat X_0 -ból induló trajektóriáinak halmaza. Ekkor Θ_U tartalmazza azokat a trajektóriákat, amelyek X_0 -ból indulnak, X_T -be érkeznek és a kettő között járnak az U szinten, tehát elérik a felső barriert. Hasonlóképpen értelmezhető Θ_L . Triviális, hogy $\Theta_U, \Theta_L \subset \Theta_0$. A most bevezetett definíciók segítségével meg akarjuk vizsgálni, hogy mi lesz $X(T)$ sűrűségfüggvénye abban az esetben, ha amellet, hogy $X(0) = X_0$ feltesszük azt is, hogy az X folyamat T előtt jár legalább egyszer az L szinten. Erről az esetről a következő tételt tudjuk kimondani.

4.1. Tétel. *Legyen $\tilde{f}_\Theta(X_T; X_0)$ az $X(T)$ valószínűségi változó $X(0) = X_0$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvénye \tilde{Q} alatt, feltéve, hogy csak Θ -beli trajektóriákat tekintünk, ahol $\Theta \in \{\Theta_U; \Theta_L\}$. Ekkor*

$$\tilde{f}_{\Theta_U}(X_T, X_0) = \tilde{f}(X_T, U^2/X_0)(U/X_0)^{2\lambda/\sigma^2} \quad (6)$$

$$\tilde{f}_{\Theta_L}(X_T, X_0) = \tilde{f}(X_T, L^2/X_0)(L/X_0)^{2\lambda/\sigma^2} \quad (7)$$

4.1. Bizonyítás. *Tekintsük (7)-t, tehát az alsó barrier esetét (a másik esetre teljesen analóg bizonyítás adható). A korábban felírt (3) egyenlet jobb oldalából σ -t kiemelve:*

$$d(\log X(t)) = \sigma \left(\frac{\lambda}{\sigma} dt + d\tilde{W} \right) \quad (8)$$

Ezután olyan \hat{Q} mértéket szeretnénk konstruálni, amivel el tudjuk tüntetni ezt a $\frac{\lambda}{\sigma}$ konstanszt a zárójelben lévő kifejezésben. Ehhez a mértékcserevel bele kell "olvasztanunk" a Brown-mozgásba, ehhez a megfelelő Radon-Nikodym deriváltat a Girsanov-tétel biztosítja.

$$\frac{d\hat{Q}}{d\tilde{Q}} = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\sigma} \tilde{W}(T) - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)^2 T \right\}$$

Ekkor az új \hat{Q} mérték alatt $\hat{W}(t) = \tilde{W}(t) + \frac{\lambda t}{\sigma}$ standard Brown-mozgás, így a (8) dinamika a következő alakba írható:

$$d(\log X(t)) = \sigma d\hat{W}(t) \quad (9)$$

Definiáljuk \hat{f} -et és \hat{f}_{Θ_L} -et \tilde{f} -nek és \tilde{f}_{Θ_L} -nek megfelelően (a megfelelő definícióban cseréljük ki \tilde{Q} -t \hat{Q} -ra). Ekkor alkalmazva a tükrözési elvet:

$$\hat{f}_{\Theta_L}(X_T, X_0) = \hat{f}(X_T, X_0 | \tau_L < T) = \hat{f}(X_T, L^2/X_0 | \tau_L < T) = \hat{f}(X_T, L^2/X_0)$$

Az utolsó lépésben azt használtuk ki, hogy $L \leq X_0$ miatt $L^2/X_0 \leq L$, így a feltétel mindig teljesül, ezért elhagyhatjuk. A bizonyítás befejezéséhez tekintsük a következő lemmát.

4.1. Lemma. $\forall \kappa > 0$ -ra $\hat{f}(X_T, \kappa X_0) \frac{d\hat{Q}}{d\hat{Q}} = \tilde{f}(X_T, \kappa X_0) \kappa^{\frac{\lambda}{\sigma^2}}$

4.1. Lemma bizonyítás. Korábban felírtuk a \tilde{Q} -ról \hat{Q} -ra váltáshoz tartozó Radon-Nikodym deriváltat \hat{W} segítségével, most írjuk fel a fordított irányú kapcsolathoz tartozó Radon-Nikodym deriváltat \tilde{W} segítségével.

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}} = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma} \hat{W}(T) - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma^2} T \right\} \quad (10)$$

Ide behelyettesítve $\hat{W}(T)$ -t (9)-ből kapjuk, hogy

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}} = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma^2} \log \left(\frac{X_T}{X_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma^2} T \right\} \quad (11)$$

Továbbá a lemma bal oldalán szereplő $\hat{f}(X_T, \kappa X_0)$ -t fel tudjuk írni (4) és (9) segítségével, így

$$\hat{f}(X_T, \kappa X_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[\log \left(\frac{X_T}{\kappa X_0} \right) \right]^2 \right\} \quad (12)$$

Így (11) és (12) bal oldalán megjelent a lemmában szereplő kifejezés, amely tehát egyenlő a jobb oldalak szorzatával. Amely teljes négyzetté alakítás után a következő alakba írható

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[\log \left(\frac{X_T}{\kappa X_0} \right) \right]^2 \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma^2} \log \left(\frac{X_T}{X_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma^2} T \right\} = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[\log \left(\frac{X_T}{\kappa X_0} \right) - \lambda T \right]^2 \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma^2} \log \left(\frac{X_T}{X_0} \right) - \frac{1}{\sigma^2 T} \log \left(\frac{X_T}{\kappa X_0} \right) \lambda T \right\} \end{aligned}$$

ennek a kifejezésnek az elején éppen $\tilde{f}(X_T, \kappa X_0)$ jelenik meg. A maradék részt átalakítva

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma^2} \log \left(\frac{X_T}{X_0} \right) - \frac{1}{\sigma^2 T} \log \left(\frac{X_T}{\kappa X_0} \right) \lambda T \right\} &= \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma^2} \left(\log \left(\frac{X_T}{X_0} \right) - \log \left(\frac{X_T}{\kappa X_0} \right) \right) \right\} = \\ & \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma^2} \log(\kappa) \right\} = \kappa^{\frac{\lambda}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

Így összerakva a jobb oldalon $\tilde{f}(X_T, \kappa X_0) \kappa^{\frac{\lambda}{\sigma^2}}$ jelenik meg és mi épp ezt akartuk.

Felhasználva az eddigi eredményeket, a tétel bizonyítását is be tudjuk fejezni, induljunk ki a tételben szereplő kifejezés bal oldalából és először térjünk át \hat{Q} -ra, majd használjuk a tükrözési elvet a korábban tárgyalt módon.

$$\tilde{f}_{\Theta_L}(X_T, X_0) = \hat{f}_{\Theta_L}(X_T, X_0) \frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}} = \hat{f}_{\Theta_L}(X_T, L^2/X_0) \frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}}$$

Ezután a (4.1) lemmát alkalmazva $\kappa = \frac{L^2}{X_0^2}$ -re

$$\hat{f}_{\Theta_L}(X_T, L^2/X_0) \frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}} = \tilde{f}(X_T; L^2/X_0) \left(\frac{L}{X_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}}$$

és a tételben épp ezt akartuk bizonyítani.

A (4.1)-es tétel segítségével a barrier opció árának kiszámítását is vissza tudtuk vezetni egy Riemann-integrál kiszámítására, ugyanúgy mint a barrier nélküli esetben.

4.1.2. Példa: Down-and-In Call ára

Ebben a részben visszavezetjük a down-and-in call opció árát az ugyanilyen paraméterkészletű vanilla call árára időben konstans barrier esetén. Tekintsük azt az esetet, amikor $L \leq K$, ekkor a lejáratkori kifizetésfüggvény a következő alakot ölti:

$$\Phi(X_T) = \begin{cases} X_T - K & \text{ha } X(T) > K, \tau_L < T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor az általános árazó formula szerint az opció ára a 0 időpontban

$$V_{DIC}(0, X_0) = \int_0^\infty e^{-rT} (x - K)^+ \tilde{f}_{\Theta_L}(x, X_0) dx = \int_K^\infty e^{-rT} (x - K) \tilde{f}_{\Theta_L}(x, X_0) dx$$

amelyre felhasználva a (4.1)-es tételt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{L}{X_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} \int_K^\infty e^{-rT} (x - K) \tilde{f}(x, L^2/X_0) dx.$$

Itt viszont a konstans tag után (5) szerint egy másik kezdeti értékhez tartozó vanilla call ár jelenik meg. Ezt behelyettesítve

$$V_{DIC}(0, X_0) = \left(\frac{L}{X_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} call(0, L^2/X_0)$$

Azt kaptuk tehát, hogy down-and-in call opció árát megkaphatjuk, mint egy vanilla call opció árának konstansszorosa, ahol a két opció megfelelő paraméterei megegyeznek egymással, kivéve a jelenlegi alaptermékárat. Ha $L > K$, akkor két részre kell bontani a problémát, az egyik olyan alakú lesz, mint az első esetben, a másikban pedig nem lesz szerepe a barriernek. Teljesen hasonlóan számolható a felső barrier esete is.

4.1.3. Paritás összefüggések

A különböző típusú single barrier opciók között könnyen találhatunk paritás összefüggéseket a megfelelő barrier nélküli opció segítségével. Tekintsünk most egy adott barrierrel, ekkor az alaptermék minden egyes trajektóriája az "In" és "Out" verziók közül pontosan az egyikben lesz a barrier miatt elértéktelenedő. Így a két barrier ár összegeként vissza kell kapnunk a barrier nélküli opció árát.

$$V_{opc}(0, X_0) = V_{DI_opc}(0, X_0) + V_{DO_opc}(0, X_0)$$

$$V_{opc}(0, X_0) = V_{UI_opc}(0, X_0) + V_{UO_opc}(0, X_0)$$

Ezen paritás összefüggések segítségével és az eddigiek felhasználásával könnyen kiszámolható a down-and-out call opció ára is egy L szintű alsó barrier mellett:

$$V_{DOC}(0, X_0) = call(0, X_0) - \left(\frac{L}{X_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} call(0, L^2/X_0)$$

4.1.4. Double Barrier Opció

Az eddigiekben az alaptermék árfolyamatát egyszerre mindig csak egyetlen barrierhez viszonyítottuk, ezt a megszorítást oldjuk fel ebben a fejezetben, ahol egyszerre fog szerepelni alsó és felső barrier is, viszont azt továbbra is feltesszük, hogy ezek időben állandóak. Az előzőekhez hasonlóan ki szeretnénk számítani az $X(T)$ sűrűségfüggvényét abban az esetben, ha feltételezünk valamit az X folyamat trajektóriájáról U és L viszonylatában a $[0, T]$ időintervallumon. Például knock-out esetben meg szeretnénk határozni $X(T)$ fel-

tételes eloszlását, arra a két elemű feltételrendszerre nézve, hogy egyrészt $X(0) = X_0$, másrészt, hogy az X folyamat nem éri el egyik barriert sem a $[0, T]$ időintervallumon. A vizsgálathoz a lehetséges trajektóriák újabb részhalmazait kell definiálnunk.

4.1. Definíció. Legyen $L < X_0 < U$, ekkor egy $\overrightarrow{X_0, X_T}$ trajektóriáról azt mondjuk, hogy "n keresztezése van felfelé kezdéssel", ha $\exists n : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ időpont úgy, hogy

$$\begin{cases} X_{t_i} > U & \text{ha } i \text{ páratlan} \\ X_{t_i} < L & \text{ha } i \text{ páros} \end{cases}$$

Az ilyen trajektóriák halmazát jelöljük Θ_n -nel.

4.2. Definíció. Legyen $L < X_0 < U$, ekkor egy $\overrightarrow{X_0, X_T}$ trajektóriáról azt mondjuk, hogy "n keresztezése van lefelé kezdéssel", ha $\exists n : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ időpont úgy, hogy

$$\begin{cases} X_{t_i} > U & \text{ha } i \text{ páros} \\ X_{t_i} < L & \text{ha } i \text{ páratlan} \end{cases}$$

Az ilyen trajektóriák halmazát jelöljük Θ_{-n} -nel.

4.1. Megjegyzés. A Θ_0 halmaz tartalmazza az összes $\overrightarrow{X_0, X_T}$ trajektóriát, így ez a jelölés összhangban van az eddigiekkel.

Ezen jelölések segítségével a (4.1)-hez hasonló tételt tudunk kimondani, amellyel vissza tudjuk vezetni a \tilde{Q} alatti feltételes sűrűségfüggvényt feltétel nélkülire, abban az esetben, ha a feltétel az, hogy a lehetséges trajektóriák halmaza egy adott Θ_i ($i \in \mathbb{Z}$) halmaz.

4.2. Tétel. Legyen $m \in \mathbb{Z}$ és $\tilde{f}_{\Theta_m}(X_T, X_0)$ jelölje $X(T)$ sűrűségfüggvényét $X(0) = X_0$ feltétel mellett \tilde{Q} alatt, ha feltesszük, hogy a lehetséges trajektóriák halmaza éppen Θ_m . Ekkor a következő egyenlőségek igazak:

$$\tilde{f}_{\Theta_{2n}}(X_T, X_0) = \tilde{f}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) \left(\frac{L}{U}\right)^{\frac{2n\lambda}{\sigma^2}} \quad (13)$$

$$\tilde{f}_{\Theta_{2n+1}}(X_T, X_0) = \tilde{f}\left(X_T, \frac{U^2}{X_0} \left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right) \left(\frac{U}{X_0} \left(\frac{U}{L}\right)^n\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} \quad (14)$$

$$\tilde{f}_{\Theta_{-2n}}(X_T, X_0) = \tilde{f}\left(X_T, X_0 \left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right) \left(\frac{U}{L}\right)^{\frac{2n\lambda}{\sigma^2}} \quad (15)$$

$$\tilde{f}_{\Theta_{-2n-1}}(X_T, X_0) = \tilde{f}\left(X_T, \frac{L^2}{X_0} \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) \left(\frac{L}{X_0} \left(\frac{L}{U}\right)^n\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} \quad (16)$$

4.2. Megjegyzés. A korábbiaknak megfelelően $\tilde{f} = \tilde{f}_{\Theta_0}$

4.2. Bizonyítás. Csak az első két esetet bizonyítjuk, a másik kettő hasonló módon megkapható. Nézzük először (13)-et, tehát amikor a trajektóriáknak $2n$ keresztezése van felfelé indulással. A Θ_{2n} trajektóriahalmaz elemeit $2n$ -szer fogjuk tükrözni. Tekintsük újra a \hat{Q} ekvivalens martingálmértéket és a (9)-at, amely leírja az X folyamat logaritmusának dinamikáját, itt tehát \hat{W} standard Brown-mozgás \hat{Q} szerint, így $\log(X)$ \hat{Q} -martingál $[0, T]$ -n. Ha $n > 0$, akkor a tükrözési elv szerint $\forall (\overrightarrow{X_0}, A, B, C) \in \Theta_{2n}$ trajektóriához létezik egy vele ugyanolyan valószínűségű (\hat{Q} alatt) $(\overrightarrow{U^2/X_0}, A, B, C) \in \Theta_{-2n+1}$ trajektória. Ebből következően

$$\hat{f}_{\Theta_{2n}}(X_T, X_0) = \hat{f}_{\Theta_{-2n+1}}\left(X_T, \frac{U^2}{X_0}\right)$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\hat{f}_{\Theta_{-2n+1}}\left(X_T, \frac{U^2}{X_0}\right) = \hat{f}_{\Theta_{2n-2}}\left(X_T, \frac{X_0 L^2}{U^2}\right).$$

Ezen lépéseket ismételve további $2n - 2$ -szer kapjuk, hogy

$$\hat{f}_{\Theta_{2n}}(X_T, X_0) = \hat{f}_{\Theta_0}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) = \hat{f}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right)$$

Eddig \hat{Q} alatt dolgoztunk, most térjünk vissza \tilde{Q} alá felhasználva a megfelelő Radon-Nikodym deriváltat, ezután pedig alkalmazzuk az imént felírt átalakítást:

$$\tilde{f}_{\Theta_{2n}}(X_T, X_0) = \hat{f}_{\Theta_{2n}}(X_T, X_0) \frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}} = \hat{f}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) \frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}}$$

Ezután, ha alkalmazzuk a (4.1)-es lemmát $\kappa = \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}$ választással, azt kapjuk, hogy:

$$\hat{f}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) \frac{d\tilde{Q}}{d\hat{Q}} = \tilde{f}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) \left(\frac{L}{U}\right)^{\frac{2n\lambda}{\sigma^2}}$$

és épp ezt akartuk belátni.

A (14) egyenlest hasonlóképp igazolható:

$$\hat{f}_{\Theta_{2n+1}}(X_T, X_0) = \hat{f}_{\Theta_1}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) = \hat{f}_{\Theta_0}\left(X_T, \frac{U^2}{X_0} \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right)$$

itt is alkalmazva a (4.1)-os lemmát:

$$\tilde{f}_{\Theta_{2n+1}}(X_T, X_0) = \tilde{f}\left(X_T, \frac{U^2}{X_0} \left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right) \left[\frac{U}{X_0} \left(\frac{U}{L}\right)^n\right]^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}}$$

A (15) és (16) egyenletek teljesülését hasonlóképp lehet belátni.

Térjünk át az árazásra! Ehhez szükségünk van a szita-formula következő alakjára

$$\tilde{f}(X_T, X_0 | \min(\tau_L, \tau_U) > T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\Theta_{2n}}(X_T, X_0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\Theta_{2n+1}}(X_T, X_0)$$

amelybe beírva a most kapott eredményeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(X_T, X_0 \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) \left(\frac{L}{U}\right)^{\frac{2n\lambda}{\sigma^2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}\left(X_T, \frac{U^2}{X_0} \left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right) \left(\frac{U}{X_0} \left(\frac{U}{L}\right)^n\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} - \\ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}\left(X_T, \frac{L^2}{X_0} \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) \left(\frac{L}{X_0} \left(\frac{L}{U}\right)^n\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

4.1.5. Példa: DBC ára

Példaként tekintsük a knock-out double barrier call opciót, amelynek kifizetésfüggvénye

$$\Phi(X_T) = \begin{cases} X_T - K & \text{ha } X(T) > K \text{ és } \min(\tau_L, \tau_U) > T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ennek 0 időpontkori értéke a korábban felírt általános árazási formula szerint a következő integrállal számolható ki:

$$V_{DBC}(0, X_0) = \int_K^{\infty} e^{-rT} (x - K) \tilde{f}(x, X_0 | \min(\tau_L, \tau_U) > T) dx$$

A (17)-es képlet alapján a integrandusban szereplő feltételes sűrűségfüggvényt fel tudjuk bontani, ezt elvégezve és az integrálás szempontjából konstans tagok kiemelése után a

következő alakhoz jutunk:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{U}{L}\right)^{\frac{2n\lambda}{\sigma^2}} \int_K^{\infty} e^{-rT}(x-K) \tilde{f}\left(x, X_0 \left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right) dx - \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{U}{L}\right)^{\frac{2n\lambda}{\sigma^2}} \left(\frac{U}{X_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} \int_K^{\infty} e^{-rT}(x-K) \tilde{f}\left(x, \frac{U^2}{X_0} \left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right) dx - \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{L}{U}\right)^{\frac{2n\lambda}{\sigma^2}} \left(\frac{L}{X_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} \int_K^{\infty} e^{-rT}(x-K) \tilde{f}\left(x, \frac{L^2}{X_0} \left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right) dx \end{aligned}$$

ahol az integrálok épp a megfelelően paraméterezett vanilla call árakat adják, így a knock-out double barrier call árat megkaptuk egy végtelen sor összegeként, amelyben a tagok vanilla call árak konstansszorosai.

4.2. Az ár kiszámítása a tükörképek módszerével

Az előző részben a feltételes sűrűségfüggvények álltak a középpontban, és a barrierék hatását a trajektóriák tükrözésével kezeltük. Ebben a fejezetben egy kicsit távolabbról tekintünk a megoldandó feladatra és nem a konkrét trajektóriákat, hanem magát a problémát fogjuk "tükrözni". Az előbbi megközelítésben a tükrözési elv volt a fő eszközünk amelyet felhasználtunk, ennek szerepét most a tükörképek módszere veszi át, amellyel a megfelelő függvényeket fogjuk transzformálni. A tükörképek módszeréről részletes leírást találhatunk [2]-ban és [3]-ban, ezen fejezet megírásakor leginkább erre a két cikkre támaszkodtam. A korábbiaknak megfelelően jelöljük $V(t, x)$ -vel az adott termék értékét a t időpontban ($t \leq T$), ha az alaptermék aktuális ára épp x . Tudjuk, hogy ennek a V függvénynek az adott terméktől függetlenül ki kell elégíteni a Black-Scholes egyenletet, és csak a peremfeltétel fog változni termékről termékre. Felírható tehát a következő egyenlet (az argumentumokat elhagyva):

$$rV = \frac{\partial V}{\partial t} + rx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Ennek segítségével definiálhatjuk a Black-Scholes operátort.

4.3. Definíció. A Black-Scholes operátort definiáljuk a következőképp:

$$\mathcal{L}V(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

A megfelelő Black-Scholes differenciálegyenlet: $\mathcal{L}V(t, x) = 0$.

Az előző fejezethez hasonló visszavezetésekhez szükségünk lesz az úgynevezett Gap opciókra és ezek árának kiszámítására, így először vizsgáljuk meg az ilyen típusú termékeket.

4.2.1. Gap opció

A Gap opciók az európai típusú call illetve put opciók általánosításai abban az értelemben, hogy esetükben elválik egymástól a kötési ár és a lehívási ár. Megkülönböztetünk fel-, illetve le-típusú Gap opciót. Fel-típusú esetben akkor történik lehívás, ha az opció lejártakor az alaptermék ára meghalad egy előre meghatározott ξ szintet, le-típusú esetben épp ellenkezőleg, akkor történik lehívás ha a szint alatt van. Lehívás esetén mind a két esetben a kifizetés értéke $(X_T - K)$, ahol K jelöli a kötési árat. Ezek alapján a fel-típusú esetben a lejáratkori kifizetésfüggvény a következő alakot ölti:

$$\Phi(X_T) = \begin{cases} X_T - K & \text{ha } X_T > \xi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A továbbiakban jelöljük $\mathcal{G}_\xi^s(x, \tau, K)$ -val a Gap opció árát τ -val annak lejárta előtt, ahol x jelöli az aktuális alaptermékárát, K a kötési árat, ξ a lehívási árat és $s \in \{+1, -1\}$ határozza meg, hogy fel- vagy le- típusú opcióról van szó (s esetében csak az előjelet írjuk ki ebben a jelölésben). Tudjuk, hogy lejáratkor \mathcal{G} meg kell, hogy egyezzen Φ -vel, így

$$\mathcal{G}_\xi^s(x, 0, K) = (x - K) \mathbb{1}_{\{sx > s\xi\}}$$

Könnyen látszik, hogy $\xi = K$ esetén s -től függően a vanilla call kifizetésfüggvényét, illetve a vanilla put kifizetésfüggvényének ellentettjének kapjuk vissza, így a korábbi értékeknek is meg kell egyezniük:

$$call_K(0, X_0) = \mathcal{G}_K^+(X_0, T, K)$$

$$put_K(0, X_0) = -\mathcal{G}_K^-(X_0, T, K)$$

ahol a " K " alsó index jelöli a call, illetve put opció kötési árát (ezt a korábbiakban nem jelöltük külön, mert nem volt szerepe). Könnyen belátható, hogy a klasszikus Black-Scholes feltételrendszer keretei között a Gap opció árára ugyanolyan típusú zárt képlet adható, mint a vanilla call és put opciókra:

$$\mathcal{G}_\xi^s(x, \tau, K) = x\mathbf{N}(sd_\xi^+) - Ke^{-r\tau}\mathbf{N}(sd_\xi^-)$$

ahol

$$(d_{\xi}^+, d_{\xi}^-) = \left[\log\left(\frac{x}{\xi}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right] / \sigma\sqrt{\tau}$$

és \mathbf{N} jelöli a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Ennek bizonyítása teljesen analóg a Black-Scholes képletével.

4.2.2. Single Barrier Opció

A single barrier esetben a következőképpen definiálhatjuk a megoldandó problémát a Black-Scholes operátor segítségével. Tekintsük a down-and-out esetet. Legyen L időfüggő exponenciális alsó barrier: $L(t) = Le^{\alpha t}$, ahol α valós konstans és $\Phi(x)$ tetszőleges kifizetésfüggvény.

$$\begin{cases} \mathcal{L}V(t, x) = 0 & \text{ha } t < T, x > L(t) \\ V(T, x) = \Phi(x) & \text{ha } x > L(T) \\ V(t, x) = 0 & \text{ha } x = L(t), t < T \end{cases}$$

Az első sor felel azért, hogy a lejárat előtt a barrier fölött teljesüljön a Black-Scholes egyenlet, a második sor adja a lejáratkori peremfeltételt, a harmadik pedig a barrieren való eltűnésért felelős. Érdemes megjegyezni, hogy az első és az utolsó sor független attól, hogy milyen opcióról beszélünk, csak a barrier jelenik meg bennük, a második sor, tehát a lejáratkori peremfeltétel az egyetlen, ahol szerepet játszik az adott kifizetésfüggvény.

4.2.3. A tükörképek módszere single exponenciális barrierre

A következő számolásokban kulcsszerepet fog játszani a következő definíció.

4.4. Definíció. Legyen $Y(t, x)$ tetszőleges kétváltozós függvény, ekkor legyen Y tükörkép-függvénye az alsó $L(t)$ exponenciális barrierre nézve $\mathcal{I}_{L(t)}\{Y(t, x)\}$, amelyet a következő kifejezés definiál:

$$\mathcal{I}_{L(t)}\{Y(t, x)\} = (L(t)/x)^{q_{\alpha}} Y(t, L^2(t)/x)$$

ahol $q_{\alpha} = 2(r - \alpha)/\sigma^2 - 1$ (r és σ az alaptermék kockázatsemleges egyenletének, míg α az időfüggő exponenciális alsó barriernek a paramétere).

Ezt az $\mathcal{I}_{L(t)}$ operátort az $L(t)$ -re való tükrözési operátornak nevezzük, és a Black-Scholes egyenlet $V(t, x)$ megoldására szeretnénk alkalmazni. A kapott $\mathcal{I}_{L(t)}\{V(t, x)\}$ függvényre és magára a tükrözési operátorra a következő tulajdonságok igazak (\mathcal{I} jelöli az identitást):

1. $\mathcal{I}_{L(t)}^{-1} = \mathcal{I}_{L(t)}$ vagy másképp $\mathcal{I}_{L(t)}^2 = \mathcal{I}$

2. Ha $x = L(t)$, akkor $\mathcal{I}_{L(t)}V = V$ vagy másképp $(I - \mathcal{I}_{L(t)})V(t, L(t)) = 0$
3. Ha $x \neq L(t)$, akkor az eredeti x ár és a kapott $y = L^2(t)/x$ tükrözött ár a $L(t)$ barrier ellenkező oldalán helyezkedik el.

Ezen három állítás igazsága egyenes következik a korábbi definíciókból. Hasonló módon definiálható a felső barrierre való tükrözési operátor, amelyre ugyanilyen típusú állítások igazak. Az alábbi lemma teremt kapcsolatot az eredeti problémánk és a tükrözési operátorok között.

4.2. Lemma. *Legyen T egy jövőbeni lejárat, $L(t) = Le^{\alpha t}$ exponenciális alsó barrier és legyen adott a Black-Scholes egyenletnek a $\Phi(x)$ peremfeltétel melletti $V(t, x)$ megoldása. Ekkor ezen V megoldás képfüggvénye az alsó $L(t)$ barrierre nézve, tehát $\mathcal{I}_{L(t)}\{V(t, x)\}$ szintén megoldása a Black-Scholes egyenletnek, amellet a peremfeltétel mellett, amely épp az eredeti peremfeltétel tükörképfüggvénye, tehát $\mathcal{I}_{L(T)}\{\Phi(x)\}$.*

Fontos megjegyezni, hogy a tükrözött peremfeltétel ugyanúgy csak a T időpontban értelmezett, mint az eredeti peremfeltétel. A lemma bizonyítása inkább technikai, szerepel [2]-ben és [3]-ban, az állítás érdekesebb, double barrier esetre vonatkozó párjának bizonyítása megtalálható a dolgozat későbbi részében. A lemma következményeinek megértéséhez vezessük be az úgynevezett Black-Scholes árazó operátorcsaládot.

4.5. Definíció. *Legyen $\mathcal{P}\mathcal{V}_t$ ($t < T$) egy operátor, amely értelmezve van az alaptermékár lejáratkori értékének minden Φ függvényén, és megadja ezen alaptermékre vonatkozó, Φ kifizetésfüggvényű derivátiva t időpontbeli árat a Black-Scholes dinamika alatt.*

A (4.5)-ös definíció szerint a Φ kifizetésfüggvény $\mathcal{P}\mathcal{V}_t$ szerinti képe egy függvény, amely a t időpontbeli alaptermékár függvényében megadja a termék t időpontbeli árat, tehát

$$V(t, y) = \mathcal{P}\mathcal{V}_t\{\Phi(x)\}(y)$$

Az (4.5)-ös definíciót felhasználva felírhatjuk a (4.2)-es lemma egy következményét.

4.1. Következmény. *Legyen adott egy Φ európai típusú kifizetésfüggvény és egy $L(t) = Le^{\alpha t}$ alsó barrier. Ekkor*

$$\mathcal{P}\mathcal{V}_t\{\mathcal{I}_{L(T)}\{\Phi(x)\}\} = \mathcal{I}_{L(t)}\{\mathcal{P}\mathcal{V}_t\{\Phi(x)\}\}$$

A megfelelő operátorok felcserélhetőek, annyi különbséggel, hogy megváltozik a tükrözés helye. Az első esetben lejáratkor tükrözzük a peremfeltételt és ennek az új, tükrözött

peremfeltételű terméknek vesszük a t időpontbeli árát, a második esetben az eredeti termék t időpontbeli árát tükrözzük a t időpontban.

Ennyi eszközzel már meg tudjuk oldani a fejezet elején felírt down-and-out problémát, erről szól a korábban már említett tükörképek módszere, amellyel a barrier opció árazását vissza tudjuk vezetni gap opciók árazására.

4.3. Tétel (Tükörképek módszere single barrier). *Legyen $Z(t, x)$ a Black-Scholes egyenlet megoldása a $Z(T, x) = \Phi(x) \mathbb{1}_{\{x > L(T)\}}$ peremfeltétel mellett, ahol $L(t) = Le^{\alpha t}$ időfüggő alsó barrier. Ekkor a down-and-out probléma V megoldása megkapható a következő alakban:*

$$V(t, x) = Z(t, x) - \mathcal{I}_{L(t)}\{Z(t, x)\}, \quad (18)$$

ahol $\mathcal{I}_{L(t)}$ a korábban definiált alsó barrierre vonatkozó tükrözési operátor.

A tétel bizonyítása megtalálható [2]-ben, ebben dolgozatban a double barrier esetről szóló hasonló tételt bizonyítjuk. A tükörképek módszerével a down-and-out call opció árát vissza tudjuk vezetni egy olyan termék árára, ahol a barrier csak a lejárat pillanatában aktív. Ezen új, mesterségesen előállított termék lejáratkori kifizetése már nem trajektórafüggő, csak az alaptermék lejáratkori értékétől függ, ezáltal sokkal könnyebben kezelhető.

4.2.4. Tükörképek módszere a DOC opcióra

Ebben a részben a down-and-out call opció 0 időpontbeli árát szeretnénk meghatározni a tükörképek módszerének segítségével. A (4.3)-es tétel szerint ehhez mindössze a $Z(T, x) = (x - K)^+ \mathbb{1}_{\{x > L(T)\}}$ kifizetésfüggvényű derivatíva árát kell tudnunk a 0 időpontban. Jelöljük K' -vel $L(T)$ és K maximumát ($K' = L(T) \vee K$) és szabaduljunk meg a pozitív rész függvénytől, így a lejáratkori peremfeltétel a következőképp alakul:

$$Z(T, x) = (x - K)^+ \mathbb{1}_{\{x > L(T)\}} = (x - K) \mathbb{1}_{\{x > K'\}}$$

ami épp egy Gap opció kifizetésfüggvénye, ha a kötési árat K -nak a lehívási árat K' -nek választjuk, így

$$Z(t, x) = \mathcal{G}_{K'}^+(x, \tau, K),$$

ahol $\tau = T - t$. Ezt az árat a Gap opcióra vonatkozó formula alapján ki tudjuk számolni. A (4.3)-es tétel szerint így a keresett ár a következő alakban számolható ki.

$$V_{DOC}(t, x) = \mathcal{G}_{K'}^+(x, \tau, K) - (L(x)/x)^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{K'}^+(L^2(t)/x, \tau, K)$$

Az ár két Gap opció árának különbségeként adódik. A down-and-in eset a korábbiakban felírt paritásösszefüggések alapján számolható.

4.2.5. Double Barrier Opció

A double barrier esetben is definiálhatjuk a Black-Scholes operátor segítségével a megoldandó problémát, tekintsük most a knock-out esetet.

$$\begin{cases} \mathcal{L}V(t, x) = 0 & \text{ha } t < T, L(t) < x < U(t) \\ V(T, x) = \Phi(x) & \text{ha } L(T) < x < U(T) \\ V(t, x) = 0 & \text{ha } x = L(t) \text{ vagy } x = U(t), t < T \end{cases}$$

A sorok itt is hasonlóan értelmezhetőek, mint a single barrier esetben, az első felel a Black-Scholes egyenlet teljesüléséért a barrierék között lejárat előtt, a második a lejáratkori, a harmadik pedig a barrieréken lévő peremfeltétel. Tekintsük itt is egyből az exponenciális esetet, ennek természetesen speciális eseteként megkaphatjuk az időben konstans barrier esetét is $\alpha = \beta = 0$ választással. A korábbiaknak megfelelően legyen a két barrier $L(t) = Le^{\alpha t}$ és $U(t) = Ue^{\beta t}$ (L, U, α, β valós konstansok).

4.2.6. A tükörképek módszere double exponenciális barrierekre

A korábbiakhoz hasonlóan ebben az esetben is szükségünk lesz a Black-Scholes egyenlet megoldásának tükrözésére, ám ezt most egymás után többször is el kell majd végeznünk, így ennek könnyebb kezelése érdekében vezessünk be néhány jelölést. Jelölje \mathcal{I}_{LU} az \mathcal{I}_U és a \mathcal{I}_L operátorok kompozícióját, úgy hogy először \mathcal{I}_U -t alkalmazzuk, tehát

$$\mathcal{I}_{LU}\{V(t, x)\} = \mathcal{I}_L\{\mathcal{I}_U\{V(t, x)\}\}$$

Hasonlóan definiálhatjuk n darab tükrözési operátor kompozícióját is. Fontos, hogy ezen operátorok nem szabadon felcserélhetőek, így számít az alkalmazásuk sorrendje. Jelölje továbbá \mathcal{H}_{LU}^n n darab \mathcal{I}_{LU} operátor kompozícióját minden pozitív egész n esetén, legyen $\mathcal{H}_{ab}^0 = \mathcal{I}$ az identitás operátor, és jelölje \mathcal{H}_{LU}^{-n} a \mathcal{H}_{LU}^n operátor inverzét. Indukcióval belátható, hogy

$$\mathcal{H}_{LU}^{-n} = \mathcal{H}_{UL}^n$$

az állítás bizonyítása megtalálható [3]-ben. Végül definiáljuk a \mathcal{K}_L^U operátort a következő ekvivalens reprezentációk egyikével:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{L(t)}^{U(t)} &= (\mathcal{I} - \mathcal{I}_{L(t)}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n = (\mathcal{I} - \mathcal{I}_{L(t)}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{U(t)L(t)}^n = \\ &= (\mathcal{I} - \mathcal{I}_{U(t)}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{U(t)L(t)}^n = (\mathcal{I} - \mathcal{I}_{U(t)}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\end{aligned}$$

A kifejezések egyezősége következik abból, hogy ugyanazon operátorok összege van csoportosítva különbözőképpen. Ezen jelölések segítségével már ki tudjuk mondani a fejezet fő tételét, amelyet ezután bizonyítunk is, és megadjuk, hogy a tételben szereplő kifejezés miként számolható ki.

4.4. Tétel (Tükörképek módszere double exponenciális barriererekre). *A fejezet elején felírt double barrier probléma V megoldása megkapható a következő alakban*

$$V(t, x) = \mathcal{K}_{L(t)}^{U(t)} \{Z(t, x)\},$$

ahol $Z(t, x)$ a következő probléma megoldása:

$$\begin{cases} \mathcal{L}Z(t, x) = 0, & \text{ha } t < T, x > 0 \\ Z(T, x) = \Phi(x) \mathbb{1}_{\{L(T) < x < U(T)\}} \end{cases}$$

A tétel állítása szerint az ár kiszámolásához, újra egy olyan termék árára van szükségünk, amely esetében a barriererek csak a lejárat pillanatában aktívak.

4.3. Bizonyítás (Tükörképek módszere double exponenciális barriererekre). *Ahhoz, hogy a tételt bebizonyítsuk be kell látnunk, hogy ez a tételbeli V függvény kielegíti a probléma mindhárom sorát. Az első feltétel, hogy a V kielégíti a Black-Scholes egyenletet, következik a (4.2)-es lemmából és abból, hogy Z maga is kielégíti a Black-Scholes egyenletet. A harmadik, hogy V eltűnik a barrieréken, következik a \mathcal{K} -t definiáló reprezentációkból és az $\mathcal{I}_{L(t)}$ -re vonatkozó 2. tulajdonságból. A második feltétel, tehát a lejáratkori peremfeltétel, pedig a következő átalakításból következik:*

$$V(T, x) = \mathcal{K}_{L(T)}^{U(T)} \{Z(T, x)\} = Z(T, x) - \mathcal{J} \{Z(T, x)\}$$

ahol \mathcal{J} tükrözési operátorok kompozícióinak összege. Z teljesíti a peremfeltételt a két barrier között, az $\mathcal{I}_{L(t)}$ -re vonatkozó 3. tulajdonság miatt pedig, ha $x \in [L(T), U(T)]$,

akkor a $\mathcal{I}\{Z(T, x)\}$ az $[L(T), U(T)]$ intervallumon kívül értékeli ki $Z(T, \cdot)$ -t, amely a definíciója szerint ott 0-t vesz fel.

Az (4.4)-es tétel szerint a keresett megoldást megkaphatjuk egy másik probléma megoldásának elég bonyolult transzformációjaként, ám ezt egyelőre még nem tudjuk kiszámolni. Ezen transzformáció kezelhetőbb alakra alakítását célozzák a következő állítások.

4.3. Lemma. A $\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n$ operátor felbontható két tükrözési operátor kompozíciójára a következőképp:

$$\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n = \mathcal{I}_{U(t)} \cdot \mathcal{I}_{(U^{n+1}(t)/L^n(t))} \quad (19)$$

A lemma indukcióval bizonyítható, a bizonyítása megtalálható [3]-ban.

4.4. Lemma. Legyen $\mathcal{I}_n(t)$ n db exponenciális barrierre vonatkozó tükrözési operátor kompozíciója ($t < T$). (Például $\mathcal{I}_n(t) = \mathcal{I}_{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ ahol az a_i -ik exponenciális függvények.) Ekkor

$$\mathcal{P}\mathcal{V}_t[\mathcal{I}_n(T)\{\Phi(x)\}] = \mathcal{I}_n(t)\{\mathcal{P}\mathcal{V}_t[\Phi(x)]\}. \quad (20)$$

A single barrier esethez hasonlóan a tükrözések és az árazó operátor felcserélhetőek, csak a tükrözés helye változik meg.

4.2. Lemma bizonyítás. A lemma bizonyításához a tükrözési operátorok száma szerinti indukciót alkalmazunk. Az $n = 1$ esetben épp a (4.1)-es következményt kapjuk vissza, így ez esetben igaz az állítás. Tegyük fel most, hogy n -ig már bizonyítottuk az állítást, nézzük meg most $(n + 1)$ -re. Legyen az $n + 1$ tagú kompozíció utolsó tagja $\mathcal{I}_{a_{n+1}}$, ekkor $\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_{a_{n+1}} \mathcal{I}_n$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{V}_t[\mathcal{I}_n(T)\{\Phi(x)\}] &= \mathcal{P}\mathcal{V}_t[\mathcal{I}_{a_{n+1}} \mathcal{I}_n\{\Phi(x)\}] \\ &= \mathcal{I}_{a_{n+1}} \mathcal{P}\mathcal{V}_t[\mathcal{I}_n\{\Phi(x)\}] \\ &= \mathcal{I}_{a_{n+1}} \mathcal{I}_n\{\mathcal{P}\mathcal{V}_t[\Phi(x)]\} \\ &= \mathcal{I}_n(t)\{\mathcal{P}\mathcal{V}_t[\Phi(x)]\} \end{aligned}$$

felhasználva a (4.1)-es következményt és az indukciós feltevést. Ezzel bebizonyítottuk a lemmát.

4.2. Következmény. Legyen adott egy tetszőleges $\Phi(x)$ függvénye az alaptermék árának és két exponenciális barrier: $L(t)$, $U(t)$, ekkor a Black-Scholes dinamika alatt fennállnak

a következő egyenlőségek.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{V}_t\{\mathcal{H}_{L(T)U(T)}^n[\Phi(x)]\} &= \mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{\mathcal{P}\mathcal{V}_t[\Phi(x)]\} \\ \mathcal{P}\mathcal{V}_t\{\mathcal{I}_{L(T)}\mathcal{H}_{L(T)U(T)}^n[\Phi(x)]\} &= \mathcal{I}_{L(t)}\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{\mathcal{P}\mathcal{V}_t[\Phi(x)]\} \\ \mathcal{P}\mathcal{V}_t\{\mathcal{I}_{U(T)}\mathcal{H}_{L(T)U(T)}^n[\Phi(x)]\} &= \mathcal{I}_{U(t)}\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{\mathcal{P}\mathcal{V}_t[\Phi(x)]\}\end{aligned}$$

4.5. Lemma. Legyen $\eta(t) = \frac{U(t)}{L(t)} = \frac{U}{L}e^{(\beta-\alpha)t}$, a két barrier hányadosa az idő függvényében, ekkor minden Ψ függvényre és $s = \pm 1$ -re

$$\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{\Psi(x)\}\mathbb{1}_{\{sx > sU(t)\}} = \mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{\Psi(x)\}\mathbb{1}_{\{sx > s\eta^{2n}U(t)\}}$$

4.3. Lemma bizonyítás. A lemma bizonyítása a tükrözési operátor következő tulajdonságán múlik.

$$\mathcal{I}_{L(t)}\{\Psi(x)\mathbb{1}_{\{sx < sU(t)\}}\} = \mathcal{I}_{U(t)}\{\Psi(x)\}\mathbb{1}_{\{sx > s\frac{L^2(t)}{U(t)}\}}$$

Ez valóban igaz, mert elvégezve a két tükrözést, ugyanahhoz az alakhoz jutunk. Felhasználva ezt az azonosságot és az (4.3)-as lemmát kapjuk azt, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{\Psi(x)\}\mathbb{1}_{\{sx > sU(t)\}} &= \\ \mathcal{I}_{U(t)}\left\{\mathcal{I}_{(U^{n+1}(t)/L^n(t))}\{\Psi(x)\}\mathbb{1}_{\{sx > sU(t)\}}\right\} &= \\ \mathcal{I}_{U(t)}\left\{\mathcal{I}_{(U^{n+1}(t)/L^n(t))}\{\Psi(x)\}\mathbb{1}_{\{sx < sU(t)\}}\right\} &= \\ \mathcal{I}_{U(t)}\left\{\mathcal{I}_{(U^{n+1}(t)/L^n(t))}\left\{\Psi(x)\mathbb{1}_{\left\{sx > s\frac{U^{2n+2}(t)}{L^{2n}(t)U(t)}\right\}}\right\}\right\} &= \\ \mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\left\{\{\Psi(x)\}\mathbb{1}_{\{sx > s\eta^{2n}U(t)\}}\right\} &\end{aligned}$$

Az első lépésben szétbontottuk a $\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n$ operátort, majd az indikátort vittük lépésenként befelé a bizonyítás elején látott tulajdonság szerint, amíg kívül újra meg nem jelent a $\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n$ operátor. Ezzel bizonyítottuk a lemma állítását.

A következő lemma az utolsó lépés, hogy a double barrierekre vonatkozó tükröképek módszerében szereplő kifejezést ki is tudjuk számolni, ez arról szól, hogy hogyan tudjuk meghatározni a \mathcal{H} operátorok hatását.

4.6. Lemma. Legyen $Y(t, x)$ tetszőleges függvénye az időnek és az alaptermékárnak, továbbá legyen $\eta(t) = \frac{U(t)}{L(t)}$ a két exponenciális barrier hányadosa. Ekkor a \mathcal{H}_{LU}^n és \mathcal{I}

operátorok hatása a következő explicit alakban kapható meg.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{Y(t,x)\} &= \eta^{np_n} \left(\frac{x}{L(t)}\right)^{q_n} Y\left(t, \eta^{2n}x\right) \\ &= \eta^{np_{n+1}} \left(\frac{x}{U(t)}\right)^{q_n} Y\left(t, \eta^{2n}x\right)\end{aligned}\quad (21)$$

$$\mathcal{I}_{L(t)}\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{Y(t,x)\} = \eta^{np_n} \left(\frac{L(t)}{x}\right)^{p_n} Y\left(t, \eta^{2n}\frac{L^2(t)}{x}\right) \quad (22)$$

$$\mathcal{I}_{U(t)}\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n\{Y(t,x)\} = \eta^{np_{n+1}} \left(\frac{U(t)}{x}\right)^{p_n} Y\left(t, \eta^{2n}\frac{U^2(t)}{x}\right) \quad (23)$$

ahol

$$\begin{aligned}p_n &= nq_\beta - (n-1)q_\alpha; & q_n &= n(q_\beta - q_\alpha) \\ q_\alpha &= 2(r-\alpha)/\sigma^2 - 1; & q_\beta &= 2(r-\beta)/\sigma^2 - 1\end{aligned}$$

4.4. Lemma bizonyítás. Csak (21)-et és (22)-t bizonyítjuk, a másik két sor hasonlóan megkapható. Először nézzük (21)-et! Felhasználva a (4.3)-as lemmát és az \mathcal{I} tükrözési operátorok definícióját kapjuk (elhagyva a barrierek argumentumait), hogy:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{LU}^n\{Y(t,x)\} &= \mathcal{I}_U\mathcal{I}_{U^{n+1}/L^n}\{Y(t,x)\} \\ &= \mathcal{I}_U\left\{\left(\frac{U^{n+1}}{L^n x}\right)^{(n+1)q_\alpha - nq_\beta} Y\left(t, U^{2n+2}/(L^{2n}x)\right)\right\} \\ &= \left(\frac{U}{x}\right)^{q_\beta} \left(\frac{U^{n+1}}{L^n U^2 x}\right)^{(n+1)q_\alpha - nq_\beta} Y\left(t, (U^{2n}/L^{2n})x\right) \\ &= \left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{nq_\beta - (n-1)q_\alpha} \left(\frac{x}{L}\right)^{n(q_\beta - q_\alpha)} Y\left(t, (U^{2n}/L^{2n})x\right) \\ &= \eta^{np_n} \left(\frac{x}{L}\right)^{q_n} Y\left(t, \eta^{2n}x\right)\end{aligned}$$

ami épp (21). Ezt felhasználva (22)-hez:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_L\mathcal{H}_{LU}^n\{Y(t,x)\} &= \left(\frac{L}{x}\right)^{q_\alpha} \eta^{np_n} \left(\frac{L^2}{Lx}\right)^{q_n} Y\left(t, \eta^{2n}L^2/x\right) \\ &= \eta^{np_n} \left(\frac{L}{x}\right)^{q_\alpha + q_n} Y\left(t, \eta^{2n}L^2/x\right) \\ &= \eta^{np_n} \left(\frac{L}{x}\right)^{p_n} Y\left(t, \eta^{2n}L^2/x\right)\end{aligned}$$

ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

Az eddig felsorolt állítások segítségével már ki tudjuk mondani a tételt, amelyért ez idáig dolgoztunk, hogy a tükörképek módszerében szereplő kifejezést ki is tudjuk számolni.

4.5. Tétel. *Legyen $Z(t, x)$ a Black-Scholes differenciálegyenlet megoldása a következő peremfeltétel mellett*

$$Z(T, x) = \Phi(x) \mathbb{1}_{\{L(T) < x < U(T)\}}$$

(Tehát Z megoldja azt a problémát, amikor a barrierék csak lejáratkor aktívak.) Ekkor a fejezet elején felírt double barrier probléma megoldása megkapható egy végtelen összegként, csupán Z felhasználásával.

$$V(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^{np_n} \left\{ \left(\frac{x}{L(t)} \right)^{q_n} Z(t, \eta^{2n} x) - \left(\frac{L(t)}{x} \right)^{p_n} Z(t, L^2(t) \eta^{2n} / x) \right\}$$

4.4. Bizonyítás. *A bizonyítást lényegében már megcsináltuk, csak össze kell rakni a részeket. A (4.4)-es tétel szerint V felírható a következő alakban:*

$$V(t, x) = \mathcal{K}_{L(t)}^{U(t)} \{Z(t, x)\}$$

\mathcal{K} definíciója szerint

$$\mathcal{K}_{L(t)}^{U(t)} \{Z(t, x)\} = \left\{ (\mathcal{I} - \mathcal{J}_{L(t)}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n \right\} \{Z(t, x)\}$$

felbontva a zárójelet és felhasználva a (4.6)-es lemma átalakításait a következő alakhoz jutunk:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n \{Z(t, x)\} - \mathcal{J}_{L(t)} \mathcal{H}_{L(t)U(t)}^n \{Z(t, x)\} \right) = \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^{np_n} \left\{ \left(\frac{x}{L(t)} \right)^{q_n} Z(t, \eta^{2n} x) - \left(\frac{L(t)}{x} \right)^{p_n} Z(t, L^2(t) \eta^{2n} / x) \right\}, \end{aligned}$$

amely éppen az állításban szereplő kifejezés. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A képek módszerének alkalmazásával egy végtelen összegként tudtuk előállítani a double barrier opció árat. A következő alfejezetben megvizsgáljuk a tétel működését egy konkrét példán.

4.2.7. A DBC opciók árának kiszámítása a tükörképek módszerével

Az előző fejezet végéhez hasonlóan szeretnénk meghatározni a knock-out double barrier call opció 0 időpontbeli árát, de most a tükörképek módszerének segítségével. A (4.5)-es tétel szerint, ehhez szükségünk van egy másik probléma Z megoldására, ahol a barrierék csak a lejáratkor aktívak, tehát a kifizetésfüggvény, és így a lejáratkori peremfeltétel a következő alakba írható:

$$Z(T, x) = (x - K)^+ \mathbb{1}_{\{L(T) < x < U(T)\}}$$

az indikátort szétbontva és bevezetve a $K' = K \vee L(T)$ jelölést:

$$Z(T, x) = (x - K) [\mathbb{1}_{\{x > K'\}} - \mathbb{1}_{\{x > U(T)\}}]$$

A kifizetésfüggvény két Gap opció kifizetésfüggvényének a különbsége, így a vizsgált segédtermék replikálható két Gap opcióval. Legyen $\tau = T - t$, ekkor

$$Z(t, x) = \mathcal{G}_{K'}^+(x, \tau, K) - \mathcal{G}_{U(T)}^+(x, \tau, K).$$

Ezen két értéket ki tudjuk számítani, van rá képletünk a Black-Scholes dinamika alatt, így Z -t is meg tudjuk határozni, a (4.5)-es tétel szerint, pedig csak ennyire van szükségünk a knock-out double barrier call opció árának meghatározásához.

$$V_{DBC}(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^{np_n} \left\{ \left(\frac{x}{L(t)} \right)^{q_n} \left[\mathcal{G}_{K'}^+(\eta^{2n}x, \tau, K) - \mathcal{G}_{U(T)}^+(\eta^{2n}x, \tau, K) \right] - \left(\frac{L(t)}{x} \right)^{p_n} \left[\mathcal{G}_{K'}^+(\eta^{2n}L^2(t)/x, \tau, K) - \mathcal{G}_{U(T)}^+(\eta^{2n}L^2(t)/x, \tau, K) \right] \right\}$$

Az összeg nem olyan egyszerű alakú, de minden tagot ki tudunk számolni.

4.3. Monte Carlo módszerek

A korábbi fejezetekben általános matematikai formulákat vezettünk le a különböző típusú barrier opciók árának meghatározására, double barrier opció esetén az árra nem kaptunk zárt formulát, csupán egy végtelen összegként tudtuk meghatározni. Ebben a szakaszban különféle Monte Carlo szimulációs módszerekkel próbáljuk megbecsülni a barrier opció árát, megvizsgálva, hogy az egyes módszereknél milyen számítási problémákba ütközünk. Elsőként a legegyszerűbb Monte Carlo szimulációt vizsgáljuk, amikor csupán egy diszkrét

pontrendszeren értékeljük ki az alaptermék folyamatot, és ezen realizációkból becsüljük meg az árat. A későbbiekben ezt azzal módosítjuk, hogy a szomszédos monitorozási pontok közötti viselkedést is kezeljük egy-egy Brown-híd segítségével. A módszer feldolgozásának alapjául [4] és [5] szolgált, a (4.7)-es tétel bizonyítása a saját munkám. A kapott módszert tovább finomítom az úgynevezett rétegzett mintavételi technikával, amely önálló használata megjelenik [9]-ban single barrier opciókra, ám a jóval komplikáltabb double barrier eset, illetve a Brown-hidas technikával való kombináció a saját eredményem.

4.3.1. Egyszerű Monte Carlo szimuláció

Ebben az alfejezetben a legegyszerűbb Monte Carlo szimulációt mutatjuk be, ahol egyáltalán nem próbáljuk meg kezelni a folytonos és a diszkrét monitorozás közötti különbségeket. Ehhez legyen $[0, T]$ a vizsgált időintervallum és osszuk fel ezt ekvidisztánsan N egyenlő részre. Ekkor minden kis időintervallum hossza $h = \frac{T}{N}$, és az osztópontrendszer a következő alakban írhatjuk fel: $T_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$. Jelölje továbbá $X_i, i = 0, 1 \dots N$ az X folyamat T_i -kori értékét, tehát $X_i = X(T_i)$. Ekkor $X_i, i < N$ és a (2)-as kockázatmentes dinamika ismeretében meg tudjuk mondani X_{i+1} \tilde{Q} szerinti eloszlását a következőképp:

$$X_{i+1} \stackrel{d}{=} X_i \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h + \sigma \sqrt{h} Z \right\}, \quad (24)$$

ahol Z standard normális eloszlású valószínűségi változó a \tilde{Q} mérték szerint. Jelen szimulációs környezetben csak akkor aktiváljuk/inaktiváljuk az opciót, ha az alaptermék ára egy ilyen diszkrét monitorozási pontban a barrier(ek)en kívül helyezkedik el.

Egyszerű Monte Carlo szimuláció (normal MC):

1. Generáljuk le az alaptermék értékét a diszkrét monitorozási pontokban (24) szerint
2. a) Ha van olyan monitorozási pont, ahol az alaptermék értéke a barrieren kívül esik, legyen $p = 0$
- b) Ha minden monitorozási pontban a két barrier között van az alaptermék értéke, akkor legyen $p = 1$
3. Legyen az adott trajektóriára a szimulált ár $e^{-rT} p \Phi'(X_N)$, ahol $\Phi'(x) = (x - K)^+$
4. Átlagoljuk ki az egyes trajektóriákra kapott árakat

Double knock-out call esetben ezzel a technikával túl fogjuk árazni a terméket, hiszen nem nullázzuk ki a kifizetést azokon a trajektóriákon, amikor ugyan a diszkrét monitorozási pontokban a barrieren belül vagyunk, ám ezek között valahol átlépjük valamelyik barrieret. A becslés így nem lesz torzítatlan. Hasonló a helyzet a down-and-out call opció esetében. Ezen túlárzás mértéke természetesen csökkenthető a monitorozási pontok sűrűtásával, ám ily módon nem tudunk tőle teljesen megszabadulni. Valamilyen módon kezelünk kell a monitorozási pontok közötti viselkedést, erre egy lehetőség a következő alfejezetben tárgyalt Brown-hidas technika.

4.3.2. Brown-hidas Monte Carlo szimuláció

Az előző részben láttuk, hogy csupán a diszkrét megfigyelési pontokra elvégzett Monte Carlo szimuláció nem elég ahhoz, hogy pontos becslést kapjunk a barrier opció árára. Tudjuk azonban, hogy a folyamat két monitorozási pont között geometriai Brown-mozgást követ, és az előző szimuláció értelmében ismerjük a végpontokban felvett értéket. Ekkor ha tekintjük a diszkrét osztópontrendszer két szomszédos tagját, T_j -t és T_{j+1} -et, akkor az alaptermék áralakulása egy geometriai Brown-híd a $[T_j, T_{j+1}]$ intervallumon. Egy standard Brown-híd maximumának és minimumának eloszlását ki tudjuk számolni, ebből pedig meg tudjuk határozni, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a standard Brown-híd átlép egy előre meghatározott lineáris határt. Erről szól a következő tétel.

4.6. Tétel. *Legyen B Brown-mozgás, definiáljuk a $[0, 1]$ intervallumon a H folyamatot a következőképp:*

$$H_t = B_t - tB_1$$

Ekkor H Brown-híd, független B_1 -től és $a, b \geq 0$ esetén

$$P(\exists s \in [0, 1], H_s \geq bs + a(1 - s)) = e^{-2ba}$$

A tétel és annak bizonyítása szerepel a képzés Sztochasztikus folyamatok című tárgyának anyagában. Az előző állítás szerint ki tudjuk számolni, mi a valószínűsége, hogy a Brown-híd a $[0, 1]$ intervallumon átlép egy lineáris egyenest. Erre a tételre szeretnénk visszavezetni a korábban felmerült geometriai Brown-híd problémát. Adottak tehát a folyamatnak a diszkrét pontokban felvett értékei, és ki szeretnénk számolni azokat a valószínűségeket, hogy a folyamat átlépi a barrieret az adott intervallumban. Ehhez tekintsük a következő tételt.

4.7. Tétel. Legyen S geometria Brown-mozgás, amelyet a következő egyenlet definiál

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

ahol μ, σ valós konstansok és W Wiener-folyamat. Ekkor

$$P\left(\max_{t \in [0, h]} S_t > U \mid S_0 = A, S_h = B\right) = \exp\left\{-2 \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right) \log\left(\frac{U}{B}\right)}{\sigma^2 h}\right\}$$

ahol A, B, U valós konstansok és $U \geq \max\{A, B\}$

4.5. Bizonyítás. A bizonyítás során a 4.6 tételt szeretnénk felhasználni, ehhez az eredeti S geometriai Brown-mozgást fogjuk standard Brown-híddá transzformálni. Az átalakítás 5 lépésből fog állni, amelyek közben követniünk kell hogyan változik az $S_0 = A, S_h = B$ feltétel és a kezdetben konstans U szint a transzformációk hatására, ehhez legyen $Y_t = U \forall t \in [0, h]$ -ra.

1. Logaritmálás: $S_t^{(1)} = \log S_t$ ($t \in [0, h]$). A folyamat logaritmus az Itô-formula szerint kielégíti a

$$d \log S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t$$

egyenletet. A két feltétel transzformáltja:

$$S_0^{(1)} = \log(A), S_h^{(1)} = \log(B)$$

A határ transzformáltja: $Y_t^{(1)} = \log Y_t$ ($t \in [0, h]$), ezért

$$Y_0^{(1)} = \log(U), Y_h^{(1)} = \log(U)$$

2. Eltolás: $S_t^{(2)} = S_t^{(1)} - \log(A)$ ($t \in [0, h]$). A két feltétel transzformáltja:

$$S_0^{(2)} = 0, S_h^{(2)} = \log(B) - \log(A) = \log\left(\frac{B}{A}\right)$$

A határ transzformáltja: $Y_t^{(2)} = Y_t^{(1)} - \log(A)$ ($t \in [0, h]$), ezért

$$Y_0^{(2)} = \log\left(\frac{U}{A}\right), Y_h^{(2)} = \log\left(\frac{U}{A}\right)$$

3. Sztemderizálás: $S_t^{(3)} = \frac{S_t^{(2)} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma}$ ($t \in [0, h]$). Ekkor $S^{(3)}$ már standard Brown-mozgás. A két feltétel transzformáltja:

$$S_0^{(3)} = 0, S_h^{(3)} = \frac{\log\left(\frac{B}{A}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma}$$

A határ transzformáltja: $Y_t^{(3)} = \frac{Y_t^{(2)} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma}$ ($t \in [0, h]$), ezért

$$Y_0^{(3)} = \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right)}{\sigma}, Y_h^{(3)} = \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma}$$

4. Átskálázás: $S_t^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{h}}S_{ht}^{(3)}$ ($t \in [0, 1]$). Az ismert önhasonlósági tétel szerint, ekkor $S^{(4)}$ standard Brown-mozgás marad. Fontos, hogy ezzel a transzformációval a $[0, h]$ intervallumot széthúztuk a $[0, 1]$ intervallummá, így a feltételeket és a határt nem a 0 és a h időpontokban kell vizsgálnunk, hanem a 0 és az 1 időpontokban. Ennek megfelelően a két feltétel transzformáltja:

$$S_0^{(4)} = 0, S_1^{(4)} = \frac{\log\left(\frac{B}{A}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}}$$

A határ transzformáltja: $Y_t^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{h}}Y_{ht}^{(3)}$ ($t \in [0, 1]$), ezért

$$Y_0^{(4)} = \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right)}{\sigma\sqrt{h}}, Y_1^{(4)} = \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}}$$

5. Brown-híd elkészítése: $H_t = S_t^{(4)} - tS_1^{(4)}$ ($t \in [0, 1]$), a 4.6 tétel szerint ez standard Brown-híd, a két feltétel ennek megfelelően:

$$H_0 = 0, H_1 = 1$$

A transzformációt elvégezve a határra:

$$Y_t^{(5)} = Y_t^{(4)} - tS_1^{(4)} = Y_t^{(4)} - t \frac{\log\left(\frac{B}{A}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}}$$

A határfolyamat végső transzformáltját kiértékelve a 0 és 1 időpontokban:

$$\begin{aligned} Y_0^{(5)} &= \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right)}{\sigma\sqrt{h}} \\ Y_1^{(5)} &= \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}} - \frac{\log\left(\frac{B}{A}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}} = \\ &= \frac{\log(U) - \log(A) - \log(B) + \log(A)}{\sigma\sqrt{h}} = \frac{\log\left(\frac{U}{B}\right)}{\sigma\sqrt{h}} \end{aligned}$$

Az előző 5 transzformációval az eredeti folyamatot standard Brown-híddá alakítottuk, ennek az $[0, 1]$ intervallumon felvett értékeit kell összehasonlítani egy lineáris korlással, amely a 0 időpontban $\frac{\log\left(\frac{U}{A}\right)}{\sigma\sqrt{h}}$ -t, míg az 1 időpontban $\frac{\log\left(\frac{U}{B}\right)}{\sigma\sqrt{h}}$ -t vesz fel. A 4.6 tétel szerint így a keresett valószínűség

$$P\left(\max_{t \in [0, h]} S_t > U \mid S_0 = A, S_h = B\right) = \exp\left\{-2 \frac{\log\left(\frac{U}{A}\right) \log\left(\frac{U}{B}\right)}{\sigma^2 h}\right\}.$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Hasonló képlet látható be az alsó barrier esetére is. Visszatérve az eredeti problémára, legyen a felső barrier időben állandó szintje U , és tegyük fel, hogy a diszkrét monitorozási pontokban felvett értékek mind ez alatt vannak, ekkor (4.7)-es tétel szerint azok a valószínűségek, hogy két szomszédos monitorozási pont között átlépjük a felső barriert, a következőképp számolhatóak:

$$\begin{aligned} p_{j+1}^U &= P\left(\max_{t \in [T_j, T_{j+1}]} X_t > U \mid X_{T_j} = X_j, X_{T_{j+1}} = X_{j+1}\right) = \\ &= \exp\left\{-2 \frac{\log\left(\frac{U}{X_j}\right) \log\left(\frac{U}{X_{j+1}}\right)}{\sigma^2 h}\right\} \end{aligned} \quad (25)$$

Hasonlóan egy L alsó barrier esetén:

$$\begin{aligned} p_{j+1}^L &= P\left(\min_{t \in [T_j, T_{j+1}]} X_t < L \mid X_{T_j} = X_j, X_{T_{j+1}} = X_{j+1}\right) = \\ &= \exp\left\{-2 \frac{\log\left(\frac{X_j}{L}\right) \log\left(\frac{X_{j+1}}{L}\right)}{\sigma^2 h}\right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Ezen valószínűségek ismeretében két lehetőségünk van. Az első az, hogy szimuláljuk a határátlépés megtörtént-e, és ha igen, akkor az adott trajektórián kinullázzuk a kifizetést. A másik az, hogy feljegyezzük, mi a valószínűsége annak, hogy az adott időintervallumon nem történt határsértés, és a végén ezeket a valószínűségeket összeszorozzuk. Ekkor a független növekményűség miatt megkapjuk annak a valószínűségét, hogy az egész intervallumon nem történt határsértés, és ezzel súlyozzuk a lejáratkori kifizetést az adott trajektórián. Először tekintsük az első megközelítést megvalósító algoritmust knock-out dupla barrier call opció esetén:

Brown-hidas Monte Carlo szimuláció a határátlépés generálásával (MC with BB1):

1. Generáljuk le az alaptermék értékét a diszkrét monitorozási pontokban (24) szerint
2. a) Ha van olyan monitorozási pont, ahol az alaptermék értéke a barrieren kívül esik, legyen $p = 0$
- b) Ha minden monitorozási pontban a két barrier között van az alaptermék értéke, akkor számoljuk ki a p_j^L és p_j^U $j = 1, 2, \dots, N$ értékeket (26) és (25) szerint és generáljunk hozzájuk ψ_j $[0, 1]$ -en egyenletes valószínűségi változókat, amelyek függetlenek egymástól és az alaptermék értékfolyamatától és legyen
$$P = \prod_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{1-p_j^L-p_j^U > \psi_j\}}$$
3. Legyen az adott trajektóriára a szimulált ár $e^{-rT} p \Phi'(X_N)$, ahol $\Phi'(x) = (x - K)^+$
4. Átlagoljuk ki az egyes trajektóriákra kapott árakat

Az algoritmus során felhasználtuk a következő approximációt: legyen A a felső, míg B az alsó barrier elérését tartalmazó eseménye, ekkor:

$$1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \approx 1 - P(A) - P(B)$$

Ezen algoritmus eredménye sem lesz torzítatlan becslése a valódi árnak, hiszen a Brown-híd egy intervallumon átlépheti mindkét barrieret, ám a numerikus eredmények alapján az előbbi approximáció torzításának mértéke elhanyagolható. Vegyük észre, hogy az átlagolásban nagyon sok 0 fog szerepelni. Egy adott trajektória kifizetését kinullázzuk egyrészt, ha egy diszkrét monitorozási pontban az alaptermék ára a barrieren kívül helyezkedik el, másrészt ha két monitorozási pont között a Brown-híd szimulált szélsőértéke átlépi a megfelelő határt. A második eset kezelésére tekintsük az előző algoritmus alábbi módosítását:

Brown-hidas Monte Carlo a határátlépés generálása nélkül (MC with BB2):

1. Generáljuk le az alaptermék értékét a diszkrét monitorozási pontokban (24) szerint
2. a) Ha van olyan monitorozási pont, ahol az alaptermék értéke a barrieren kívül esik, legyen $p = 0$
b) Ha minden monitorozási pontban a két barrier között van az alaptermék értéke, akkor számoljuk ki a p_j^U és p_j^L értékeket (26) és (25) szerint és legyen $p = \prod_{j=1}^N (1 - p_j^U - p_j^L)$
3. Legyen az adott trajektóriára a szimulált ár $e^{-rT} p \Phi'(X_N)$, ahol $\Phi'(x) = (x - K)^+$
4. Átlagoljuk ki az egyes trajektóriákra kapott árakat

Ezen módosítással a becslés továbbra sem lesz torzítatlan becslése a valódi árnak, ám az átlagolandó értékek között már jóval több nemnulla elem fog szerepelni.

4.3.3. Rétegzett mintavétel

Az előző fejezetben részben kezeltük azt a jelenséget, hogy a Monte Carlo szimuláció végén átlagolt mennyiségek között nagyon sok nullát találunk, a Brown-híd határátlépésének direkt szimulálását kikerülve csökken a kinullázott trajektóriák száma. A monitorozási pontokban azonban még mindig kaphatunk barrieren túli értéket, amely az adott trajektóriához tartozó kifizetés azonnali kinullázását jelenti. Ennek elkerülésére szolgál az úgynevezett rétegzett mintavétel. A téma feldolgozásának alapjául [9] szolgált, ebben a cikkben a single barrier esetet vizsgálják a szerzők, ezen gondolatot ültettem át a double barrier esetre és kombináltam a Brown-hidas technikával. A módszer szerint mindig olyan növekményeket szeretnénk kapni az alaptermék áralakulása során, hogy a vizsgált időhorizonton a monitorozási pontokban mindig a két barrier között legyen az alaptermék ára. Ezzel azonban megszorítottuk a lehetséges tartományt, ahonnan mintát veszünk, így valamilyen korrekciót kell eszközölnünk. A alapötlet azon alapszik, hogy az általános árazási formulában szereplő várható érték felbontható a teljes várható érték tétel alapján

a következőképp:

$$\begin{aligned}
V(0, X_0) = & B(0)E_{\tilde{Q}} \left[\frac{\Phi(X_T)}{B(T)} \middle| X(0) = X_0 \right] = \\
& B(0)E_{\tilde{Q}} \left[\frac{\Phi(X_T)}{B(T)} \middle| X(0) = X_0, X(t_1) \in (L, U) \right] \tilde{Q}(X(t_1) \in (L, U) | X(0) = X_0) + \\
& B(0)E_{\tilde{Q}} \left[\frac{\Phi(X_T)}{B(T)} \middle| X(0) = X_0, X(t_1) \notin (L, U) \right] \tilde{Q}(X(t_1) \notin (L, U) | X(0) = X_0),
\end{aligned}$$

ahol $t_1 \in (0, T)$. Itt a második összeadandó 0 a knock-out double barrier opció kifizetésfüggvényének struktúrája miatt, hiszen t_1 -ben kiléptünk a barrierék közül. Az első összeadandóban a második tényezőt ki tudjuk számolni, az első tényezőre pedig, ugyanilyen alakú felbontást tudunk felírni. Az említett valószínűség kiszámolásához vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$C_U = \frac{\log\left(\frac{U}{X_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}}$$

és C_L -t is definiáljuk ennek megfelelően. Ekkor (24) szerint

$$\{U > X(t_1) > L | X(0) = X_0\} = \{C_U > Z > C_L\}$$

ahol $Z \tilde{Q}$ szerint standard normális eloszlású valószínűségi változó. A keresett valószínűség

$$\tilde{Q}(X(t_1) \in (L, U) | X(0) = X_0) = F_Z(C_U) - F_Z(C_L)$$

ahol F_Z a Z valószínűségi változó \tilde{Q} szerinti eloszlásfüggvénye. A módszer megvalósításához szükségünk van olyan $X(t_1)$ realizációk generálására, amelyek a (L, U) intervallumba esnek, tehát meg kell szorítanunk a valószínűségi változót erre az intervallumra. Ez természetesen egyenértékű a Z valószínűségi változó (C_U, C_L) intervallumra vett megszorításával. Ebből a megszorított eloszlásból kellene mintákat generálnunk. Ismeretes, hogy Z -t beírva a saját eloszlásfüggvényébe $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk, tehát

$$F_Z(Z) \sim U[0, 1],$$

Hasonlóan, ha a megszorított valószínűségi változót írjuk be az eredeti eloszlásfüggvényébe, újra egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk, ám ez nem tölti ki a teljes

$[0, 1]$ intervallumot:

$$F_Z(Z|_{C_U > Z > C_L}) \sim U [F_Z(C_L), F_Z(C_U)],$$

erről szól a következő tétel.

4.8. Tétel. Legyen U^* egyeneletes eloszlású valószínűségi változó a $[F_Z(C_L), F_Z(C_U)]$ intervallumon, és legyen Z abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó, ekkor a korábbi jelölésekkel

$$F_Z^{-1}(U^*) \stackrel{d}{=} Z|_{C_U > Z > C_L}$$

4.6. Bizonyítás. Tekintsük először a jobb oldalt, legyen Y olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása megegyezik Z -nek a tételben lévő intervallumra vett megszorítottjának eloszlásával, tehát

$$Y \stackrel{d}{=} Z|_{C_U > Z > C_L}$$

Ekkor Y eloszlásfüggvénye a következő alakban írható fel.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Z \leq y | C_U > Z > C_L) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y \geq C_U \\ \frac{F_Z(y) - F_Z(C_L)}{F_Z(C_U) - F_Z(C_L)} & \text{ha } C_U > y > C_L \\ 0 & \text{ha } y \leq C_L \end{cases}$$

Most a bal oldalon szereplő valószínűségi változó eloszlásfüggvényét felírva:

$$F_{F_Z^{-1}(U^*)}(y) = P(F_Z^{-1}(U^*) \leq y) = P(U^* \leq F_Z(y)) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y \geq C_U \\ \frac{F_Z(y) - F_Z(C_L)}{F_Z(C_U) - F_Z(C_L)} & \text{ha } C_U > y > C_L \\ 0 & \text{ha } y \leq C_L \end{cases}$$

kihasználva, hogy F_Z szigorúan monoton növekedő. Ez alapján $F_Z^{-1}(U^*)$ és Y eloszlásfüggvénye megegyezik, így

$$F_Z^{-1}(U^*) \stackrel{d}{=} Y \stackrel{d}{=} Z|_{C_U > Z > C_L}$$

és épp ez szerepel a tétel állításában.

Az előző tétel szerint a megfelelő megszorított valószínűségi változó eloszlásából való minta generálásához elegendő egy, a $[0, 1]$ intervallum egy részintervallumán egyeneletes valószínűségi változó. Ezen ismeretek felhasználásával szeretnénk az alaptermék értékét szimulálni a diszkrét monitorozási pontokban, (amelyek így a két barrier közé fognak

esni) ezután pedig a kapott diszkrét pontrendszerre szeretnénk alkalmazni a Brown-hidas technikát. Ehhez tekintsük a következő algoritmust.

Rétegzett mintavételes Brown-hidas Monte Carlo szimuláció:

1. Legyen $p = 1$

2. Legyen a következő diszkrét monitorozási pont T_k

$$\text{Legyen } C_U = \frac{\log\left(\frac{U}{X_{k-1}}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}}$$

$$\text{Legyen } C_L = \frac{\log\left(\frac{L}{X_{k-1}}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}}$$

Legyen u egy véletlen érték az $U[F_Z(C_L), F_Z(C_U)]$ eloszlásból

$$\text{Legyen } X_k = X_{k-1} \exp\{(r - \sigma^2)h + \sigma\sqrt{h}F_Z^{-1}(u)\}$$

$$\text{Frissítsük } p\text{-t: } p = p \cdot [F_Z(C_U) - F_Z(C_L)]$$

Amíg $k \leq N$ ismételjük 2.-t

3. A kapott diszkrét pontrendszerre számoljuk ki a p_j^U és p_j^L értékeket (26) és (25) szerint és legyen $p = p \cdot \prod_{j=1}^N (1 - p_j^U - p_j^L)$

4. Legyen az adott trajektóriára a szimulált ár $e^{-rT} p \Phi'(X_N)$, ahol $\Phi'(x) = (x - K)^+$

5. Átlagoljuk ki az egyes trajektóriákra kapott árakat

Ezzel kezeltük, hogy a Monte Carlo szimuláció végén nagyon sok 0 érték szerepelt az átlagolandó értékek között, hiszen a fenti eljárással minden trajektória eljut a lejáratig a barrierék érintése nélkül. Ennek hatását a p szorzóval korrigáljuk.

5. Szimulációs eredmények

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk és összehasonlítjuk a korábban felírt egyenletekből és algoritmusokból származó konkrét eredményeket. A Monte Carlo szimulációk esetében többször futtattam le az algoritmusokat, és a kapott eredmények átlagát és szórását vizsgáltam. Ezen futásokhoz felhasznált trajektóriákra kötegekként hivatkozok a továbbiakban. Single barrier opció esetén két különböző explicit formulát is kaptunk az árra, ebben az esetben nem ütközünk semmilyen számítási nehézségbe, viszont le tudjuk ellenőrizni,

	n= -3	n= -2	n= -1	n= 0	n= 1	n= 2	n= 3
g1	1.082038e-57	3.276984e-26	3.509732e-07	8.59165831	129.8770576	4.111271e+02	1043.9396
g2	6.768343e-71	6.517452e-35	1.575952e-11	1.69151402	129.8734820	4.111271e+02	1043.9396
g3	6.244905e-68	3.476378e-33	6.024657e-11	0.95388333	87.1270879	3.149396e+02	827.5177
g4	2.573113e-82	4.768921e-43	2.123392e-16	0.03195249	86.8053555	3.149396e+02	827.5177
price	1.639203e-59	2.006324e-27	8.682925e-08	6.25880299	-0.8900779	-3.875212e-12	0.0000

1. ábra. Gap tagok lecsengése

hogy a két út ugyanahhoz az árhoz vezet-e. Ehhez tekintsük a down-and-out call opciót és a következő paraméterkészletet:

$$X_0 = 100 \quad K = 100 \quad L = 90$$

$$r = 0,05 \quad \sigma = 0,15 \quad T = 1$$

A 1. táblázat tartalmazza a kapott eredményeket, eszerint a két ár legalább 6 tizedesjegyes pontossággal megegyezik. Double barrier esetben tekintsük a knock-out call esetet időben

Opció	Módszer	Ár
DOC	Trajektóriák tükrözése	7.928089
DOC	Képek módszere	7.928089

1. táblázat. Single barrier árak

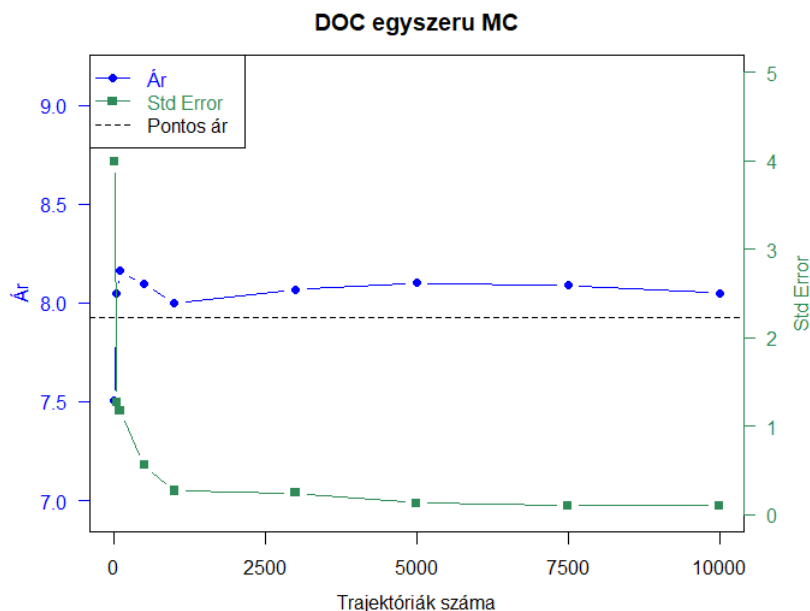
állandó barrierék mellett és az eddigi paramétereket egészítsük ki a következőkkel:

$$U = 135 \quad \alpha = \beta = 0$$

A előző fejezet eredményei alapján az opció ára a (24)-as képlet szerint számolható ki. Ez egy bonyolultnak tűnő végtelen összeg, ám megvizsgálva nagyon kedvező tulajdonságot vehetünk észre: a benne szereplő gap opció árak súlyozott összegei nagyon gyorsan lecsengenek, így az összeg nagyon gyorsan konvergál. Ezt láthatjuk az 1. ábrán, ahol az első négy sor tartalmazza az adott tagban szereplő gap árakat, az ötödik pedig ezek megfelelően súlyozott összege. Láthatjuk, hogy ezen paraméterek mellett csak az $n = 0$ és az $n = 1$ tagoknak van szignifikáns hatása. Kiszámolva és összeadva a 0 körüli tagok értékét $n = -k$ -tól $n = k$ -ig, a 2. táblázat eredményeit kapjuk. Eszerint a táblázat szerint a középső 3 tag összege már nagyon közel van a pontos értékhez. Az egyszerű Monte Carlo szimuláció használata esetén a down-and-out call, illetve a double-out-call opciók esetén a valódi ár felülbecslését vártuk, amely meg is valósul. Egy-egy single, illetve double barrier esetre vonatkozó szimuláció eredményét láthatjuk a 2. és 3. ábrán $N = 100$ és

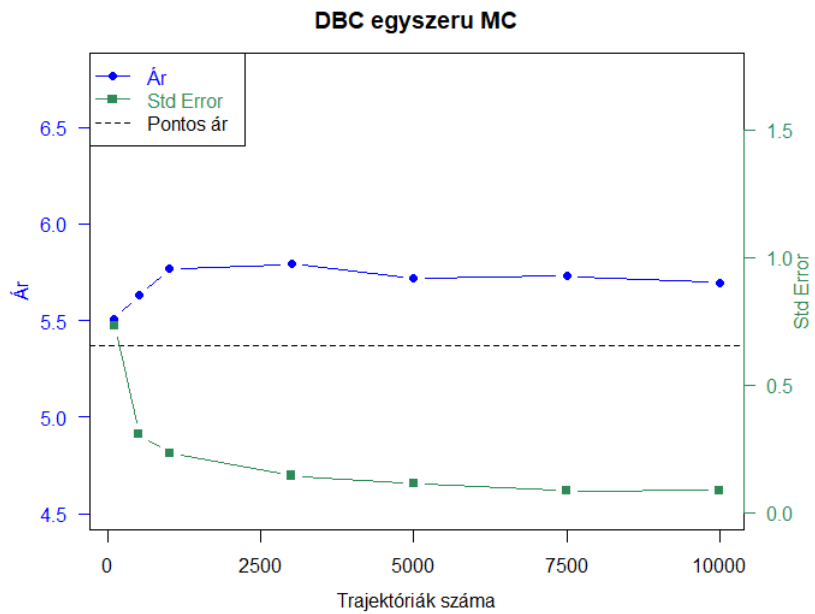
k	Érték
0	6.258803
1	5.368725
2	5.368725
3	5.368725

2. táblázat. A double barrier opció árát közelítő részletösszegek

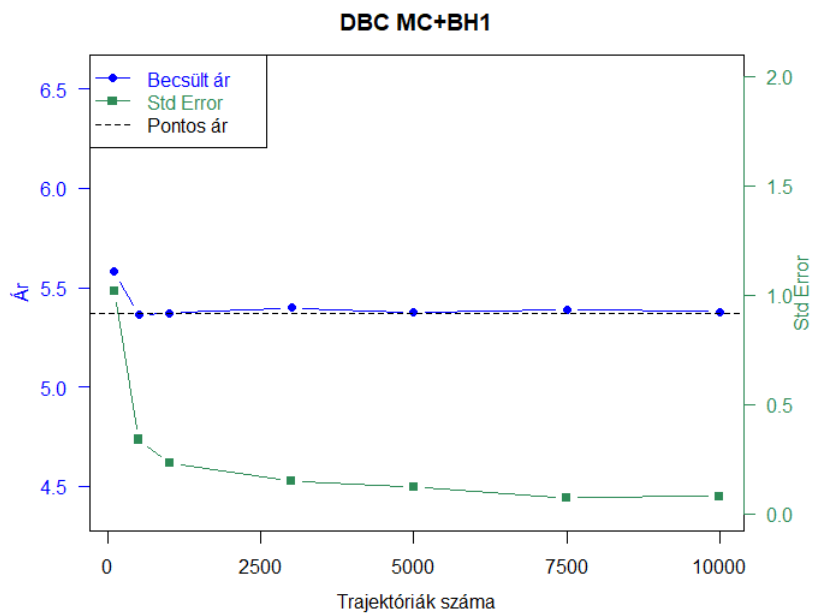


2. ábra. Az egyszerű Monte Carlo túlárázása DOC esetben

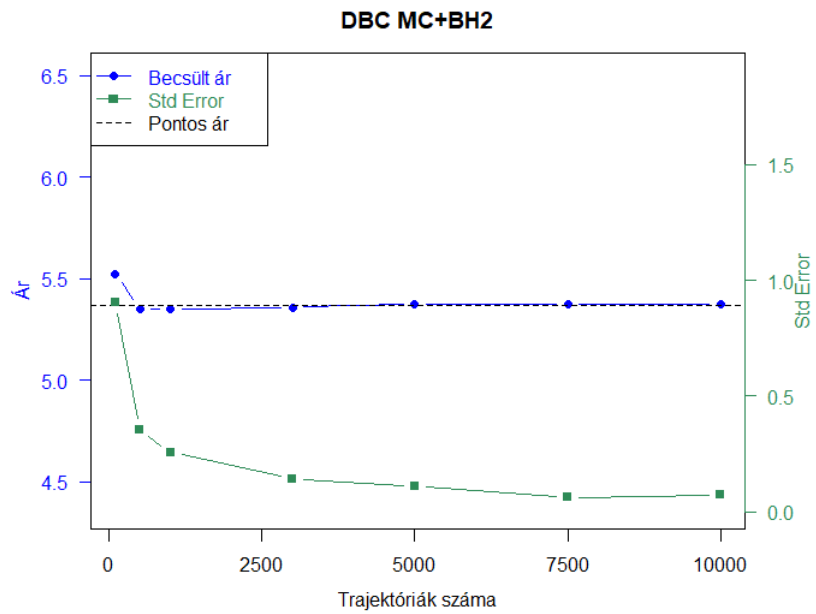
20 köteg választás mellett (a többi paraméter megegyezik a korábban felírtakkal), annak függvényében, hogy kötegenként hány trajektóriát használtam. A szaggatott vonal jelzi a pontos árat. Az ábrákról leolvasható, hogy a sztenderd hiba ugyan lecsökken, de az eljárás konzisztensen túlárazza a terméket. Ezt a felülbecslést Brown-hidak alkalmazásával kezeltük kétféleképp: először a határátlépési esemény direkt szimulálásával, majd később csak annak valószínűségének használatával. A két algoritmus teljesítményét 4. és 5. ábrán láthatjuk, különböző kötegenkénti trajektóriaszám mellett. Ezekben a szimulációkban is 20 köteget használtam, minden más paraméter a korábbiakkal megegyező, a szaggatott vonal jelzi a pontos árat. Az ábrákról leolvasható, hogy a Brown-híddal kiegészített Monte Carlo szimuláció már viszonylag kevés trajektória felhasználásával elég pontos eredményt ad alacsony sztenderd hiba mellett. Később a szimulációt kiegészítettük a rétegzett mintavételi technikával. Az algoritmussal kapott eredmények láthatóak a 6. ábrán. A becslés továbbra is torzított, de az eredmények alapján a torzítás mértéke elhanyagolható, a sztenderd hiba lecseng. A 7. ábra foglalja össze a különböző algoritmusok eredményét. Erről



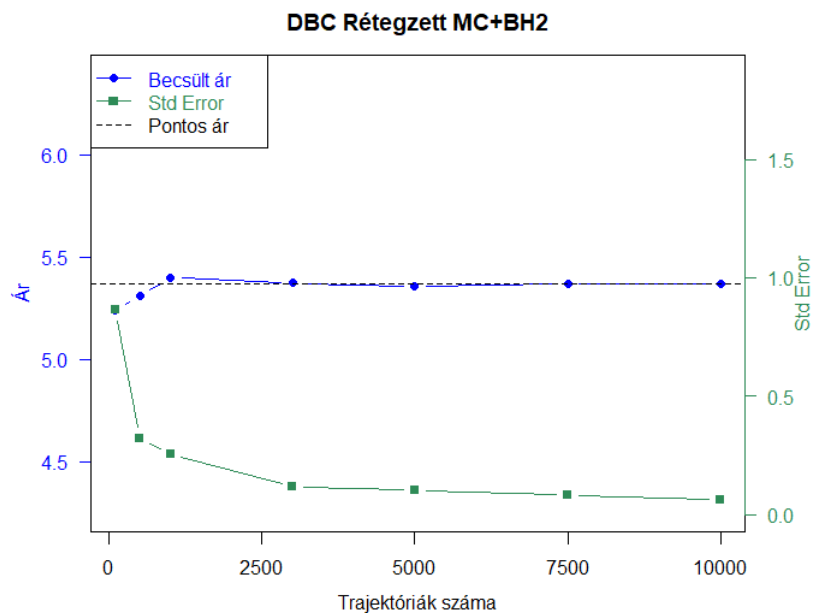
3. ábra. Az egyszerű Monte Carlo túlárázása DBC esetben



4. ábra. "Brown-hidas Monte Carlo a határátlépés generálásával" algoritmus teljesítménye



5. ábra. "Brown-hidas Monte Carlo a határátlépés generálása nélkül" algoritmus teljesítménye



6. ábra. A rétegzett mintavételes algoritmus eredménye

	Pontos	MC0	MC1	MC2	MC3
Érték	5.368725	5.75205246	5.37940285	5.372393130	5.371122954
Eitérés	0.000000	0.38332730	0.01067769	0.003667974	0.002397798
Std	0.000000	0.09045022	0.08033480	0.075168591	0.061408723

7. ábra. A Monte Carlo szimulációk összehasonlítása, az oszlopok sorrendben: pontos érték, egyszerű MC, Brown-hidas MC a határátlép generálásával, Brown-hidas MC a határátlépés generálása nélkül, Rétegzett mintavételes MC

a táblázatról leolvashatjuk, hogy az egyszerű Monte Carlo szimuláción kívül mindhárom algoritmus elég pontos eredményt ad. A korábbi ábrák alapján az is elmondható, hogy nagy pontosságú közelítés eléréséhez nem volt szükségünk sok trajektória felhasználására. A legnagyobb felhasznált kötegenkénti trajektóriaszám 10000 volt, de ennek tizedének felhasználásakor is már nagyon közel voltunk a pontos eredményhez.

6. Összefoglalás

Szakedolgozatomban többféle módszert mutattam be barrier opciók árazására. Az első megközelítésben a kockázatmentes árazási formulából indultam ki és a trajektóriák tükrözésével alakítottam át a megjelenő feltételes sűrűségfüggvényeket olyan alakúra, amelyet már tudunk kezelni. Single barrier esetben egy egyszerűnek mondható képletet vezettem le, amely szerint a down-and-in barrier call opció ára megkapható egy vanilla call árának konstansszorosaként. Double barrier esetben komplikáltabb, végtelen összeget tartalmazó formulákhoz jutottam. A második esetben a problémát parciális differenciálegyenletekkel fogalmaztam meg és a keresett megoldást visszavezettem egy hasonló felépítésű feladatra, amelyet már meg tudunk oldani. Ebben a megközelítésben gap opciók áraival tudtuk felírni a keresett barrier opció árakat, single barrier esetben véges, míg double barrier esetben végtelen összeg formájában. A harmadik, és egyben utolsó megközelítés szerint különböző felépítésű Monte Carlo szimulációkat alkalmaztam az ár közelítésére. Legelőször az egyszerű Monte Carlo szimulációt tekintettünk, ahol a várakozásainknak megfelelően a pontos értéknél nagyobb árat kaptunk. A felülbecslést először Brown-hidak alkalmazásával kezeltük, kétféle algoritmust is adtunk ennek segítségével. Ezek az algoritmusok már kezelték az alaptermék árának lehetséges határátlépéseit két monitorozási pont között is. Ezen Monte Carlo szimulációk végén sok olyan szimulált trajektóriát kaptunk, amelyhez tartozó kifizetés 0, ezen észrevétel indokolta a rétegzett mintavételezés alkalmazását. Ezen módszer révén minden monitorozási pontban olyan értéket kaptunk,

amely a két barrier között helyezkedik el, ezen megszorítás hatását egy szorzóval korrigáltuk.

A kapott eredményeket összefoglalva azt láthatjuk, hogy single barrier esetben többféle úton is zárt képleteket kaphatunk a megfelelő barrier opciók árára, az ezekből kapott árak természetesen megegyeznek. Double barrier esetben már komplikáltabb, végtelen összegeket tartalmazó formulákhoz juthatunk, ám ezek jól kezelhetőnek bizonyulnak, az első pár tagot összegezve már nagyon közel kerülünk a pontos eredményhez. A későbbi eredmények alapján a probléma jól kezelhető Monte Carlo szimulációkkal, amelyeknek több verzióját alkalmazva is nagyon pontos eredményeket kaptunk. Ezen algoritmusok közül a legjobb eredményt a legutolsónak bemutatott adta, amelyben egyszerre használtuk a Brown-hidas és a rétegzett mintavételes technikát.

A szakdolgozat során végig azt tételeztük fel az alaptermékár folyamatról, hogy geometriai Brown-mozgást követ, a későbbiekben érdekes továbblépés lehet, ha ezen feltételezést lecseréljük egy másik folyamatosztályra.

Ábrák jegyzéke

1.	Gap tagok lecsengése	42
2.	Az egyszerű Monte Carlo túlárázása DOC esetben	43
3.	Az egyszerű Monte Carlo túlárázása DBC esetben	44
4.	"Brown-hidas Monte Carlo a határátlépés generálásával" algoritmus teljesítménye	44
5.	"Brown-hidas Monte Carlo a határátlépés generálása nélkül" algoritmus teljesítménye	45
6.	A rétegzett mintavételes algoritmus eredménye	45
7.	A Monte Carlo szimulációk összehasonlítása, az oszlopok sorrendben: pontos érték, egyszerű MC, Brown-hidas MC a határátlép generálásával, Brown-hidas MC a határátlépés generálása nélkül, Rétegzett mintavételes MC	46

Hivatkozások

- [1] Li, A. (1998). The pricing of double barrier options and their variations. *Advances in Futures and Options Research*, 10.
- [2] Konstandatos, O. (2018). *Methods for Analytical Barrier Option Pricing with Multiple Exponential Time-Varying Boundaries* (No. 396).
- [3] Buchen, P., & Konstandatos, O. (2009). A new approach to pricing double-barrier options with arbitrary payoffs and exponential boundaries. *Applied Mathematical Finance*, 16(6), 497-515.
- [4] Gobet, E. (2009). Advanced Monte Carlo methods for barrier and related exotic options. In *Handbook of Numerical Analysis* (Vol. 15, pp. 497-528). Elsevier.
- [5] Nouri, K., & Abbasi, B. (2017). Implementation of the modified Monte Carlo simulation for evaluate the barrier option prices. *Journal of Taibah University for Science*, 11(2), 233-240.
- [6] Geman, H. (2009). *Commodities and commodity derivatives: modeling and pricing for agriculturals, metals and energy*. John Wiley & Sons.
- [7] Davydov, D., & Linetsky, V. (2002). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options. *Journal of Computational Finance*, 5(2), 55-88.
- [8] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models* (Vol. 11). New York: springer.
- [9] Joshi, M., & Tang, R. (2010). Pricing and deltas of discretely-monitored barrier options using stratified sampling on the hitting-times to the barrier. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(05), 717-750.
- [10] He, X. J., & Lin, S. (2021). An analytical approximation formula for barrier option prices under the Heston model. *Computational Economics*, 1-13.
- [11] Zhang, S., & Zhang, G. (2019). An analytical approximation method for pricing barrier options under the double Heston model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 48(22), 5657-5671.