Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Egyensúly párosítási piacokon

— Szakdolgozat —

Témavezető:

Dr. Jankó Zsuzsanna
Tudományos munkatárs
Operációkutatás és Aktuáriustudományok tanszék

Készítette:

Kocsis Júlia
Biztosítási és pénzügyi matematika MSc.
Aktuárius szakirány

Budapest, 2022

NYILATKOZAT

Név: Kocsis Júlia

ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

NEPTUN azonosító: MYYF23

Szakdolgozat címe:
Egyensúly párosítási piacokon

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. 05. 30.

Kocsis Júlia

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Jankó Zsuzsannának, hogy elvállalta a témavezetésemet, rendszeres konzultációt tartott, a felmerülő kérdéseimre mindig válaszolt. Köszönet illeti Szádoczkiné Varga Veronikát, amiért segített az elindulásban.

Külön köszönöm Bodolai Előd szaktársamnak az ízléses borítószerkesztését.

Hálával tartozom még családomnak, különösen Szüleimnek és Andrásnak a támogatásaikért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A való élet számos területén, köztük a gazdaságban is felmerülnek olyan problémák, amikor két különböző halmaz elemei között szeretnénk, ha kialakulnának olyan kapcsolódások, hogy az általuk meghatározott rendszer optimálisan működjön. Ilyen lehet például párok alakítása férfiak és nők között vagy felvételiző diákok elhelyezése iskolák között, de akár a dolgozók allokálása is a munkaerőpiacon.
Az ilyen helyzetekben párosítási piacokról beszélünk és valamilyen módon az egyensúlyi állapotát szeretnénk modellezni, definiálni.
A modellezéseknél leggyakrabban használt párosítási módszerekről például a [14] cikkben olvashatunk rendszerezve kigyűjtve. Ezek közé tartoznak a jelen dolgozat témáját is felölelő stabil párosítások elméletére épülő módszerek, amik élesen elkülönülnek az ugyancsak népszerű sztochasztikus modellektől a zárt rendszerek között.
A stabil párosítások fogalmát először Gale és Shapley vezették be az 1962-es [3] cikkükben, ahol egy iskolai felvételi folyamatra keresték az optimális eljárást. Hasonló, stabil párosításra vezető algoritmust alkalmaztak korábban is a kórházi rezidensek elhelyezésére [11]. Ennek egy fokkal egyszerűbb szemléletes változata az ún. stabil házasságok elmélete. Itt az alapszituáció szerint úgy szeretnénk férfiak és nők között házaspárokat kialakítani, hogy a párok várhatóan együtt is akarjanak maradni. Ezt egy olyan stabilitási fogalom segítségével lehet bevezetni, ami megköveteli, hogy ne legyen lehetőség megcsalásra (megcsalás akkor lehetséges, ha van olyan férfi és nő, akik mindegyike jobban szereti a másikat, mint a jelenlegi házastársát), azaz – egy fokkal elvontabban megfogalmazva – ne legyen blokkoló pár.
Az ilyen jellegű stabilitási fogalom más szituációban is hatékonynak bizonyult. Iskolai felvételi eljárásban több helyen is erre épülő módszert alkalmaznak, de néha elméleti közgazdasági modelleknek is jó alapot ad. Ilyenek a [1], [5] és a [10] cikkekben bemutatott munkaerőpiacok stabilitását vizsgáló modellek is. Ezekbe szintén a blokkolásmentes allokációkat keressük a munkavállalók és alkalmazóik között. A [10] cikk amellett, hogy a bemutatott modelljeit a stabil párosítások fogalmára építi, még annak az elemzésére is kitér, hogy a vizsgált piacon előfordul, hogy nem mindenki van az összes információ birtokában.
Összességében a stabil párosítások témakörének mind a matematikai és játékelméleti általánosításai, mind a gyakorlati felhasználásai közgazdasági és egyéb modellekben rendkívül sokszínűek, a vele foglalkozó irodalom szinte kimeríthetetlen.
Aktuárius szakon nyilván felmerül a kérdés, hogy lehet-e mindezt valamilyen kontextusban a biztosítási piaccal összefüggésbe hozni. Erre a kérdésre kereste a választ a [8] cikk is. Mint az az előbbi cikkben is szerepel, egyelőre nem igazán elterjedt a biztosítási piac ilyenfajta modellezése.

A szakdolgozatban először ismertetjük a stabil párosítások matematikai hátterét és szépségeit főleg a [3] cikk alapján. A házassági probléma gráfelméleti megfogalmazásában definiáljuk az alapfogalmakat és bemutatjuk a híres Gale-Shapley algoritmust, amivel megkaphatunk egy stabil párosítást. Ezután a fentebb is említett munkaerőpiacon vett modelleket vizsgáljuk meg részletesen, bemutatva a kapcsolódó szakirodalom jelentősebb eredményeit. Külön figyelmet szentelünk annak az esetnek, amikor az információs asszimmetria is belekerül a vizsgált körülmények közé. Amellett, hogy megpróbálja kezelni az egész témakör gyenge pontját azaz, hogy feltételezi, hogy a piacon mindenki minden információt tud, az információs aszimmetriát is vizsgáló modell olyan szempontból is érdekes számunkra, hogy hogyan lehet mindezt a biztosítási piacon is alkalmazni, összevetni az eddigi ismereteinkkel. Az utolsó fejezetben a [8] cikk elemzése után ennek az információs aszimmetriának a bevételére is kísérletet teszünk, felhasználva a munkaerőpiaci modellekben látott módszereket. A kapott eredményeket helyenként összevetjük a hasonló témájú, klasszikus mikroökonómiai modellek következtetéseivel.

2. Stabil párosítások

Először ízelítőképp nézzünk meg két gyakorlati példát, amire a stabil párosítások adhatják meg az optimális megoldást:

- Adott n férfi és n nő. Mindenki rendelkezik valamilyen preferenciarendezéssel az ellenkező nem tagjain aszerint, hogy kivel mennyire szívesen házasodna (az is elképzelhető, hogy valaki szívesebben marad egyedül, mint párban egy másik emberrel, ilyenkor nem mindenki szerepel a rendezésében). Hogyan rendezzük őket párba, hogy ne találjunk olyan párost, akik ugyan nincsenek együtt, mégis mindegyik jobban szeretné a másikat, mint a jelenlegi párját (vagy egyedülálló)? Az ilyen elrendezéseket nevezzük majd stabil párosításnak.

- Van n intézmény (pl. egyetem) mindegyik q_i férőhellyel ($i \in \{1, ...n\}$) és m jelentkező. Mindegyik jelentkezőnek – hasonlóan az előző példához – vannak preferenciái az intézmények között és ez utóbbiak is valamilyen felvételivel rangsorolják a jelentkezőket. Hogyan oldható meg, hogy ne legyen olyan jelentkező, aki tud olyan intézményt, ahova szívesebben menne, mint ahova felvették és ebben a preferált intézményben lenne olyan hallgató, akit megelőzne a rangsorban.

Ezek a példák szerepelnek Gale és Shapley 1962-es cikkében [3] is, de látni fogjuk majd, hogy érdemes a témával foglalkozni más gyakorlati példák kapcsán is. Előtte viszont nézzük meg a matematikáját.

2.1. Stabil házasságok témaköre

Először az első példában is szereplő felállás modelljét nézzük meg páros gráfokon. Ezt a szakirodalom is „házassági problémá”-nak nevezi. Sokszor egyszerűbb és szemléletesebb úgy beszélni róla (ez itt is megmutatkozik majd a szóhasználatban).

Vegyünk egy $G = (A, B, E)$ páros gráfot, legyen $|A| = n$ és $|B| = m$. Minden $v \in V = A \cup B$ csúcshoz tekintsünk a csúcs élszomszédain preferenciarendezéseket a következő jelöléssel: $x <_v y$, ahol $x, y \in V$ és $\{v, x\}, \{v, y\} \in E$. Ez a házasságos példában azt jelenti, hogy v jobban szereti y-t, mint x-et.
A továbbiakban $\forall v \in V$-re $N(v)$ jelöli a v-vel szomszédos csúcsokat, $E(v)$ pedig a szomszédos éleket.

1. Definíció (Blokkoló él). *[6] Tekintsük a $G = (A, B, E)$ gráf egy $P \subseteq E$ párosítását. Egy $\{a, b\} = e \in E \setminus P$ él blokkoló él, ha mind az a csúcs preferenciarendezésében $x <_a b$, ahol $\{a, x\} \in P$ vagy a-t nem fedi a párosítás, mind pedig $y <_b a$, ahol $\{a, y\} \in P$ vagy b-t nem fedi a párosítás.*

Egy blokkoló él a házasságos példában pont azt jelentené, hogy létezne olyan férfi és nő, akik mindketten jobban szeretnék a másikat, mint a jelenlegi párjukat (ha van).

2. Definíció (Stabil párosítás). *[6] Egy $G = (A, B, E)$ páros gráf egy $P \subseteq E$ párosítását stabilnak nevezzük, ha nem létezik $e \in E$ blokkoló él.*

3. Tétel (Gale-Shapley [3]). *Egy $G = (A, B, E)$, a fent leírt preferenciarendezésekkel ellátott páros gráfban mindig létezik stabil párosítás.*

Bizonyítás. Gale-Shapley algoritmussal, melynek lépései:

1. Minden A-beli csúcs kiválasztja a saját preferenciarendezése szerinti, számára legjobban preferált B-beli csúcsot ez a $P_1 \subseteq E$ élhalmaz (egyáltalán nem biztos, hogy párosítás).

2. Az új párosítás legyen $P_{2k} = \{\{a, b\} \in P_{2k-1}, a \in A, b \in B, \nexists\{b, a'\} \in E(b) \cap P_{2k-1}, a <_b a'\}$, azaz B minden csúcsa kiválasztja azok közül az A-beli csúcsok közül a számára leginkább preferáltat, amelyek az előző lépésben azt a csúcsot választották (ha van). Így már P_{2k} párosítás és $P_{2k} \subseteq P_{2k-1}$.

3. Ekkor lehet, hogy P_2 nem fedi A-t. Legyen $P_{2k+1} = P_{2k} \cup \{\{a, b\} \in E \setminus (P_1 \cup \ldots P_{2k-1}),\ a \in A, b \in B, \nexists\{a, b'\} \in E(a) \setminus (P_1 \cup \ldots P_{2k-1}),\ b <_a b'\}$. Azaz A azon csúcsaihoz, amik nem szerepelnek P_{2k} élhalmaz végpontjai között hozzávesszük azokat az éleket, amik a még korábbi P_i élhalmazban nem szerepeltek és azokon belül legjobban preferált B-beli csúcsokkal vannak összekötve élként.

A 2. és 3. lépéseket ismételjük úgy, hogy mindegyik lépésnél az éppen aktuális P_i élhalmaz i indexét eggyel növeljük, amíg nem változik az éppen aktuális párosításunk (P_i rendre).

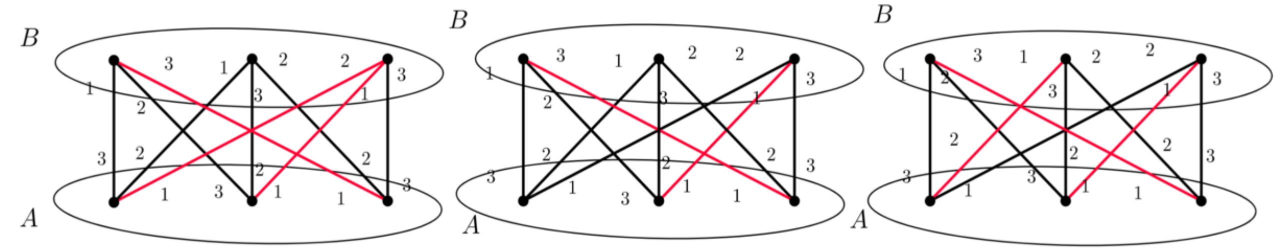
A lépéseket talán egyszerűbb a párválasztási példa történetével elmondani. Először minden férfi megkéri a számára legszimpatikusabb nő kezét. A nők mindegyike megtartja a számára legkedvezőbb ajánlatot (a változtatás jogát fenntartva), a többieket kikosarazza. Ekkor a még pár nélküli férfiak megkérik annak az általuk legkedveltebb lánynak a kezét, aki még nem utasította őket vissza. A lányok pedig mérlegelnek és ha számukra jobban preferált ajánlatot kapnak, azt választják, a másikat visszautasítják. Az algoritmust addig folytatják, amíg a férfiak tudnak ajánlatot tenni.

Belátható, hogy ez az algoritmus véges sok lépésben véget ér és a kapott párosítás stabil.

Egyrészt véget ér, mivel a 3. lépés szerint minden férfi egy lánynak legfeljebb egyszer kéri meg a kezét, így legfeljebb $2nm$ lépés lehet.

Másrészt végül párosítást kapunk, erről a 2. pontban leírt lépés mindig gondoskodik. Ezért ahhoz, hogy stabil legyen elég belátnunk, hogy nincs blokkoló él. Legyen $P \subseteq E$ az algoritmus végén kapott párosítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\{a, b\} \in P \setminus E, a \in A, b \in B$ blokkoló él. Ez viszont azt jelenti, hogy ha a jobban preferálja b-t, mint a jelenlegi $x \in B$, $\{a, x\} \in P$ párját (ha van), tehát előbb kellett b-t választania, de b biztos, hogy visszautasította, hiszen x-et a kevésbé preferálja. Abban a lépésben amikor b visszautasította a-t, b akkori párja jobb volt mint a. Nem biztos, hogy ő lesz b végső párja, de az algoritmus során b mindig egyre jobb

és jobb partnereket kapott, tehát b P-beli párja jobb mint a. Ez viszont ellentmondás, mert b jobban preferálja a-t, mint a jelenlegi párját amiatt, hogy $\{a, b\}$ blokkoló él.
$\square$



1. ábra. Példa a Gale-Shapley algoritmusra. A számok a megfelelő csúcsnak az átellenes elemeken vett preferenciarendezését jelölik.

4. Definíció. *Adott P (stabil) párosításban jelölje $P(x)$ az $x \in V$ csúcshoz azt az $y \in V$ csúcsot, amelyre $\{x, y\} \in P$ (azaz x-nek a „párja”).*

5. Definíció (Elérhető csúcs). *Ha egy $G = (A, B, E)$ gráfon van olyan $P \subseteq E$ stabil párosítás, hogy $\{x, y\} \in P$, akkor azt mondjuk, hogy x számára y elérhető csúcs (és fordítva).*

6. Megjegyzés. *[6] A fenti algoritmusra elmondható, hogy az így kapott párosítás az A halmaz elemeire nézve optimális lesz olyan értelemben, hogy nincs olyan másik stabil párosítás, amiben minden A-beli csúcs a preferenciarendezése szerint legalább olyan jót kap és legalább az egyik szigorúan jobbat („férfiakra nézve optimális”).*

Bizonyítás. Azt szeretnénk belátni, a fent megadott algoritmussal kapott stabil párosításban hogy mindegyik A-beli elem legalább olyan jól jár, mint bármely másik stabil párosításban.
Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan P' stabil párosítás, és $\alpha \in A$ fiú, aki P'-ben jobban jár, mint a Gale-Shapley algoritmus által kapott P párosításban, azaz $P'(\alpha) >_\alpha P(\alpha)$. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus során volt olyan, hogy α kosarat kapott $P'(\alpha)$-tól, mert α mindig a preferenciarendezése szerinti sorrendben kéri meg a lányok kezét a számára legszimpatikusabbtól indulva. Mivel önmagában az a forgatókönyv, hogy az algoritmus során egyszer történik olyan, hogy egy fiút kikosaraz egy számára elérhető lány a „fiú-optimalitás”-nak ellent mondana, ezért a bizonyításunk során vehetjük azt, amikor α az első olyan, akit számára elérhető lány kikosaraz.
Ekkor $P'(\alpha)$ azért kosarazta ki α-t, mert kapott számára jobban preferált felkérést egy másik fiútól, legyen ez α'. Az eddigiek alapján viszont elmondható, hogy $P'(\alpha') <_{\alpha'} P'(\alpha)$, azaz α' jobban szereti $P'(\alpha)$-t, mint a P' szerinti párját, mert fordított esetben már megkérte volna korábban $P'(\alpha')$-t, de ezt nem tehette meg, mert feltettük, hogy α az első olyan, akit számára elérhető kikosaraz.

Ekkor viszont láthatjuk, hogy $\{\alpha', P'(\alpha)\}$ blokkoló él a P' – az indirekt feltétel miatt stabil – párosításban, ami ellentmondás.
$\square$

7. Következmény. *[6] Ha a fenti Gale-Shapley algoritmusban A és B szerepét felcseréljük („legénykérő algoritmus”), akkor is stabil párosítást kapunk. Ez a párosítás már a másik halmaz elemeire lesz optimális („lány-optimális”).*

8. Definíció. *[6] A $G = (A, B, E)$ gráfon egy P párosítás az A halmaz szerint dominálja P'-t, ha $P(a) \geq_a P'(a)$ $\forall a \in A$. Jele: $P \geq_A P'$.*

9. Állítás (Knuth [7]). *Ha P és P' stabil párosítások, akkor*

$$P \geq_A P' \Leftrightarrow P \leq_B P'.$$

Bizonyítás. [6] Az odafele irányhoz indirekt módon tegyük fel, hogy $P \geq_A P'$, de van olyan $\beta \in B$, amelyre $\alpha = P(\beta) >_\beta P'(\beta)$, azaz a B halmaz szerint nem teljesül a fordított irányú dominancia. Mivel tudjuk, hogy A halmaz szerint P dominálja P'-t ezért $\beta = P(\alpha) \geq_\alpha P'(\alpha)$, azaz $\{\alpha, \beta\}$ blokkoló él a P' (stabil) párosításban, ami ellentmondás.
A visszafele irány ugyanígy látható be a szerepek felcserélésével. $\square$

10. Definíció. *[6] Egy $S \subseteq A \cup B$ halmaz blokkoló koalíció a P (nem feltétlenül stabil) párosításra nézve, ha létezik olyan Q párosítás S-en, hogy $\forall x \in S$-re $Q(x) \in S$ és $Q(x) \geq_x P(x)$ és legalább egy helyen szigorú egyenlőtlenség áll.*

Ezek alapján egy blokkoló él egy kételemű blokkoló koalíció. Blokkoló koalícióban tehát mindenki „jobban” szereti az ottani (Q szerinti párját), mint az eredeti párosításban.

11. Definíció (mag). *[6] Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfon adott preferenciarendezésekkel felírt párosítási feladat magja azokból a lehetséges P párosításokból áll, amikre nem létezik blokkoló koalíció.*

12. Állítás. *[13] A párosítási feladat magját pontosan a stabil párosítások adják meg.*

Általánosságban is beszélhetünk egy többszemélyes játék magjáról. Ott az azon (valamely alapvető racionalitási kitételnek eleget tevő) végkimeneteleket tekintjük magbelinek, amiket nem tud egyes játékosok koalíciója dominálni úgy, hogy a koalíció mindegyik tagja jobban járjon. További magbeli allokációkat fogunk definiálni a 3. fejezetben ismertetett modellekben.

2.2. Az iskolai felvételi példája

A fentebb is felvázolt egyetemi felvételi problémája vetődött fel a [3] cikkben is. Hiszen ha csak annyiból áll a felvételi, hogy felvételi pontszám szerint sorrendben a legjobb q_i jelentkezőt felvesszük, egyáltalán nem biztos, hogy azoknak ez az első helyen megjelölt intézmény. Erre ad megoldást a következő eljárás. Első körben mindegyik egyetem az általa legjobban preferált q_i jelentkezőnek tesz ajánlatot, akik feltételesen elfogadják a számukra legjobbat. Ezután az egyetemek mindig annyi hallgatónak tesznek ajánlatot, amennyi hiányzik a q_i létszámkerethez, a jelentkezők pedig ezekkel az ajánlatokkal is összevetve választják mindig a legjobban preferált intézményt azok közül, amelyektől ajánlatot kaptak. Ezt addig ismétlik, amíg el nem fogynak az egyetemek által felvehető jelentkezők. A rangsorolásnál mind az egyetemekről, mind a felvételizőkről feltesszük, hogy nincs holtverseny a preferenciarendezésükben. Vegyük észre, hogy ez csupán annyiban módosítja az előbbi, párosításokra vonatkozó Gale-Shapley algoritmust, hogy itt az egyetem mindig q_i-re pótolja ki a létszámát.

13. Megjegyzés. *[15] Pontosan ezt az algoritmust használja a magyar középiskolai felvételi rendszer. A felsőoktatásban viszont nem így van.*

14. Megjegyzés. *A feladat direktben is visszavezethető a „házassági" problémára. Ugyanis ha a páros gráfban egy i iskolát nem egy, hanem q_i pontnak feleltetünk meg és ebben a gráfban keresünk stabil párosítást a klasszikus esetben (gráfelméleti értelemben, azaz minden pontnak a foka legfeljebb egy a párosításban), akkor ugyanazt kapjuk a megfelelő pontok összevonásával, mintha a fent említett szemléletes felvételi eljárást végeztük volna el.*

3. Állástalálás modellezése a stabil párosítások mintájára

Ebben a fejezetben bemutatjuk először Crawford és Knoer [1] majd Kelso és Crawford [5] cikkei alapján a párosítási piac két lehetséges közgazdasági modelljét úgy, hogy munkavállalókat párosítunk a munkát kínáló vállalatokkal. A két megközelítés nagyon hasonlít egymásra, hiszen mindkettő figyelembe veszi a piac két oldalán található szereplők preferenciáit hasznossági függvény vagy ahhoz hasonló – a fizetésekkel összeadható – mérőszám formájában. Mind a mennyiségek, mind a stabilitási definíciók egymásnak analóg módon megfeleltethetőek. A két modell közötti egyetlen lényeges különbség annyi lesz, hogy amíg a Crawford-Knoer modellben előre meghatározott méretei vannak a vállalatoknak és az egyes additívan szeparálhatóak, addig a Kelso-Crawford modell a maximális profittól függővé teszi a vállalatok méretét és a dolgozók közös produktivitása az egyéni produktivitások összeadásánál általánosabb struktúrát is megenged.
Végül megismerkedünk a [10] cikk alapján a modell egy lehetséges továbbfejlesztésével, ami azt vizsgálja, hogy mennyiben változik a stabilitás információs asszimmetriával terhelt esetben, amikor feltesszük, hogy a vállalatoknak hiányosak az ismeretei a munkavállalók képességeivel kapcsolatban.
A fejezet célja illusztrálni egy gyakorlati modellen keresztül, hogy az előbb megismert Gale-Shapley algoritmust – kissé továbbfejlesztve – mennyire jól bele lehet illeszteni egy összetettebb közgazdasági modellbe.

3.1. A Crawford-Knoer modell

Először írjunk fel egy olyan modellt a munkaerő piacon, ami szinte analóg a 2.2 fejezetben látott iskolai felvételivel annyi különbséggel, hogy itt nem egyszerű listás rangsorolás történik, hanem figyelembe vesszük a fizetési ajánlatokat, mint az egyéni hasznosságnak részét az ettől független, preferenciákat leíró mérőszámok mellett. Ebben a részben az [1]-ben szereplő modellt ismertetjük.

3.1.1. Modellspecifikáció, kiindulási feltevések

Adott $J = \{1, \ldots, n\}$, n darab vállalat, mindegyik egy adott számú dolgozót szeretne foglalkoztatni. A piac másik oldalán $I = \{1, \ldots, m\}$, m munkavállaló, mindegyikük egy adott (egész) számú állást szeretne betölteni.
Az i dolgozó elégedettségi, termelékenységi és fizetési mérőszámát a j vállalatnál jelölje rendre a_{ij}, b_{ij}, és s_{ij}, melyekről azt feltételezzük, hogy ugyanarra az egységes mértékegységre vannak átskálázva, azaz egymással összehasonlíthatóak.
Így i teljes elégedettsége j-vel leírható az alábbiak szerint:

$$a_{ij} + s_{ij},$$

és a nettó produktivitása j vállalatnak, ha i dolgozik nála:

$$b_{ij} - s_{ij}.$$

Az általánosság csorbítása nélkül kiköthetjük, hogy $\forall i, j$-re

$$a_{ij} + b_{ij} \geq 0 \tag{1}$$

legyen. Ezzel tulajdonképpen csak normalizáljuk a rendszert, hiszen az teljesen természetes kívánalom, hogy egy létrejövő munkaviszony együttesen „jobb” legyen, mint a „semmittevés”.
A későbbiekben szükségünk lesz $s_{ij}(t)$ jelölésre, ami megmutatja, hogy mekkora fizetést ajánl j vállalat az i munkavállalónak $t \in \mathbb{N}$ egyelőre diszkrét időpontban.
A továbbiakban az egyszerűbb felírás érdekében tegyük fel, hogy mindegyik vállalat és munkavállaló pontosan egy dolgozót, illetve alkalmazottat szeretne. Ebből a feltevésből kiindulva a végén egyszerűen ki lehet terjeszteni majd az eredeti esetre.
Ezen kívül élhetünk még az $n = m$ feltevéssel, azaz, hogy a vállalatok és munkavállalók száma megegyezik. Különben kiegészíthetnénk technikai vállalatokkal vagy dolgozókkal, attól függően, hogy eredetileg melyikből volt több úgy, hogy a számuk megegyezzen. Az olyan párokhoz, ami ilyen elemet tartalmaz 0-t jegyzünk mind elégedettség, termelés és fizetés szerint is.
Végül tegyük fel, hogy a_{ij}, b_{ij}, s_{ij} és $s_{ij}(t) \in \mathbb{Z}$. Ezt is később ki lehet terjeszteni a folytonos esetre.

Térjünk vissza egy kissé még az általános esetre, amikor nem egy az egyhez a párosításunk. A későbbi kiterjeszthetőség érdekében megköveteljük, hogy az előbb definiált a_{ij} és b_{ij} nem függ attól, hogy az i személynek és j vállalatnak mely másik egyedekkel van még szerződése.

15. Megjegyzés. *A modell teljes információs bizonyosságot tételez fel, azaz a vállalatok ismerik a munkavállalók produktivitását. Persze nyilvánvaló, hogy a valóságban ez kevéssé tűnik reálisnak, mégis érdemes ezen keret szerint is megismerni a lehetséges piaci egyensúlyra vonatkozó fogalmakat, állításokat. Ezek megértése segít az információs asszimmetriával terhelt esetek vizsgálatában is.*

3.1.2. A munkaerőpiac elméleti egyensúlya

Teljes információs bizonyosság mellett heterogén vállalatokkal és munkavállalókkal, fix kapacitásokkal a munkaerőpiac elméleti egyensúlya megkívánná, hogy semelyik szereplőnek se legyen lehetősége arra, hogy olyan egyezségre jusson, ami kölcsönösen előnyösebb mindkét fél számára, mint a meglévő szerződése. Ez az eszményi egyensúly fogalom teljesen analóg az eddig látott stabil párosítással.
Nézzük meg, hogy az így megfogalmazott egyensúlyi fogalomhoz hogyan juthatunk el a modell-jelöléseivel.

16. Definíció (Egyénileg racionális allokáció). *[1] Jelölje* $\mu : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, *kölcsönösen egyértelmű függvény a munkavállalók és vállalatok közti párosítást (azaz* $\mu(i) = j$ *jelenti, hogy* i *a* j *vállalatnál dolgozik), illetve fordítva használjuk a* $\kappa(j) := \mu^{-1}(i)$ *jelölést. Ekkor* f *egy egyénileg racionális allokációja a munkaerőpiacnak, ha kielégíti a*

$$a_{i,\mu(i)} + s_{i,\mu(i)} \geq 0 \tag{2}$$

és

$$b_{\kappa(j),j} - s_{\kappa(j),j} \geq 0 \tag{3}$$

egyenlőtlenségeket minden i *és* $j \in \{1, 2, ..., n\}$ *esetén.*

Valóban, ezek tényleg racionális elvárások, hogy minden szereplő legalább olyan elégedett legyen, mintha nem dolgozna egyáltalán (a „semmittevés” szintjének a modellspecifikációnál értelemszerűen a 0-t jelöltük ki).

17. Definíció (Diszkrét szigorú magbeli allokáció). *[1] Egy egyénileg racionális* $(\mu, s_{1,\mu(1)}, ..., s_{n,\mu(n)})$ *allokációt diszkrét egyensúlynak nevezünk, ha nincs olyan* (i, j) *dolgozó-vállalat páros és* $s \in \mathbb{Z}$, *amelyekre a*

$$a_{i,j} + s \geq a_{i,\mu(i)} + s_{i,\mu(i)} \tag{4}$$

és

$$b_{i,j} - s \geq b_{\kappa(j),j} - s_{\kappa(j),j} \tag{5}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek és legalább az egyik szigorúan teljesíti.

Összevetve az előző fejezetben megismert stabil párosítás fogalmával, láthatjuk, hogy ha az elégedettségi mérőszámuk alapján rangsorolják be a szereplők a preferenciáikat, akkor éppen a stabil párosítás fogalmát kapnánk az előbbi definícióra. Viszont az is látszik, hogy a modellt nem lehet egy az egyben a Gale-Shapley algoritmusra visszavezetni, ugyanis nem véglegesek a preferenciák, mindig az adott bérajánlatoktól függenek.

18. Definíció (Diszkrét magbeli allokáció). *[1] Ugyanúgy definiáljuk, mint az előbbit, annyi különbséggel, hogy itt mind a* (4)*-nél és* (5)*-nél szigorú egyenlőtlenséget követelünk meg.*

A két egyensúlyi definíció között nincs különbség a folytonos piaci modellben, azaz amikor az elégedettségi, produktivitási és fizetési mennyiségek lehetnek valós számok is a modell többi korábbi feltevését megkövetelve. Akkor sincs, ha a diszkrét modellben feltesszük, hogy a szereplők sosem lehetnek indifferensek két potenciális partner között.
A következő fejezetben mutatunk egy olyan algoritmust, ami egyben a magbeli allokációk létezését igazolja a diszkrét piacon.
Alább a 25. tételt bebizonyítva belátjuk, hogy minden folytonos piacon is van magbeli allokáció [1].

19. Megjegyzés. *[13] Megintcsak tekintve a szereplők által meghatározott páros gráfot, az* $\{i, j\}$ *éleken a súlyozást* $a_{ij} + b_{ij}$*-nek tekintve egy szigorú magbeli allokáció által meghatározott párosításról elmondható, hogy a páros gráfban egy maximális súlyú párosítás.*

3.1.3. Fizetéskövető párosítási algoritmus

Az előbbi modellben bevezetett fogalmak és jelölések segítségével tekintsük az alábbi – fentebb leírt Gale-Shapley algoritmussal analóg – párosító algoritmust. Az egyes (diszkrét) időpontokban a vállalatok fizetési ajánlatot tehetnek a jelentkezőknek és a jelentkezők ezt feltételesen elfogadhatják vagy véglegesen elutasíthatják [1].
Legyen $S(t) = [s_{ij}(t)] \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mátrix az egyes vállalatoknak a dolgozók számára kiígért fizetések halmaza a t időpontban (*„megengedett fizetések mátrixa”*).

1. Legyen $s_{ij}(0) = -a_{ij}$ $\forall i, j$. Ha nem történik a következő lépésekben semmi, akkor ez így is marad.

2. Először minden egyes vállalat ajánlatot tesz a *„kedvenc”* dolgozójának az $S(0)$ mátrixban szereplő fizetésekkel. A *„kedvenc”* dolgozót értelemszerűen úgy kell érteni, hogy például j vállalatnak i, ha i megoldása a $\max_k(b_{kj} - s_{kj}(0))$ kifejezésnek.

3. Minden dolgozó a beérkezett ajánlatok közül megtartja a kedvencét, azaz i a j-t választja, ha a $j = argmax_k(a_{ik} - s_{ik}(0))$, ahol k az i-nek ajánlatot tevő vállalatokon fut végig. Ezt feltételesen elfogadja, a többit visszautasítja (ha többen is teljesítik a maximumot holtversenyben, akkor is ezek közül egyet választ, mondjuk a legkisebb indexűt).

4. A nem visszautasított ajánlatok érvényben maradnak. Ha pedig i visszautasította j-t a $(t-1)$. időpontban, akkor $s_{ij}(t) = s_{ij}(t-1) + 1$, ha nem, akkor $s_{ij}(t) = s_{ij}(t-1)$ változatlan marad. A visszautasított vállalatok folytatják, hogy ajánlatot tegyenek a *„kedvenc”* dolgozójuknak a 2. pontban leírtak szerint (az időváltozó értelemszerűen módosul), figyelembe véve az aktuális megengedett fizetéseiket.

5. Akkor áll meg az algoritmus, amikor már nincs több visszautasítás.

Ha nem egy az egyhez lenne a párosítás (ami a valóságban így van), akkor az algoritmusba annyi módosítás kellene, hogy a 2. és 4. pontban annyi ajánlatot tegyenek, illetve annyit fogadjanak el az egyes szereplők, amennyi a kapacitásuk.

20. Tétel. *[1] Az előbbiekben megadott algoritmus véges időben egy diszkrét magbeli allokációhoz konvergál a diszkrét munkaerőpiacon, amin definiáltuk.*

Bizonyítás. Részekre bontva.

21. Lemma. *[1] Ha az i dolgozónak t időpontban van legalább egy ajánlata, akkor a későbbi időpontokban is mindig lesz legalább egy ajánlata.*

Bizonyítás. Azonnal látszik a 2. és 3. pontokból. □

22. Lemma. *[1] Véges időn belül megáll a folyamat, nem lesz több visszautasítás és minden dolgozó pontosan egy ajánlatot kap.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az i dolgozónak nincs egyetlen ajánlata sem valamikor a folyamat során. Amíg nem kap ajánlatot, addig a 4. pont miatt a megengedett fizetési konstansok maradnak és persze nincs is mit visszautasítania i-nek.
Ugyanakkor amíg i ajánlattétel nélkül marad, addig legalább egy másik dolgozó tesz visszautasítást (máskülönben megállna a folyamat), legyen ez k. Amíg k visszautasításai a számára megengedett fizetésekben növekedést idéznek elő, addig i-nek végig konstansok maradnak a megengedett fizetései. Viszont k nem tud visszautasítani ajánlatokat anélkül, hogy az érvényes ajánlatait ne csökkentse le 1-re. Amikor ez bekövetkezik, már nem tud többet visszautasítani.
Ugyanez a gondolatmenet elmondható minden további munkavállalóra, aki egynél több ajánlatot kapott, így viszont i-re is véges időn belül sor kerül és kap ajánlatot.
Mivel minden dolgozó, aki kezdetben ajánlat nélkül volt véges időn belül valamikor fog kapni ajánlatot és azután is végig (előző lemma miatt), ezért valóban véges időn belül megáll a folyamat (5. pont) és mint láttuk, pontosan egy ajánlata lesz mindenkinek, ezt szerettük volna belátni. □

23. Lemma. *[1] Az algoritmus egyénileg racionális allokációba tart.*

Bizonyítás. Legyen t^* az az időpont, ahol az eljárás véget ér (az előbb láttuk, hogy ez létezik és véges, a modellfeltevések miatt pedig még egész is).
Azonnal adódik, hogy $a_{ij} + s_{ij}(t^*) \geq 0 \ \forall i, j$, mert egyrészt $s_{ij}(0) = -a_{ij}$, másrészt pedig $s_{ij}(t)$ nemcsökkenő az 1. és 4. pont miatt.
Ha i a j vállalatnál dolgozik, akkor a $b_{ij} - s_{ij}(t^*) \geq 0$ egyenlőtlenség belátásához először indirekt módon tegyük fel az ellenkezőjét, azaz, hogy $b_{ij} - s_{ij}(t^*) < 0$. A 4. pont miatt j vállalat nem adhatott volna i-nek ajánlatot $s_{ij}(t^*)$ fizetéssel, hacsak nem $b_{kj} - s_{kj}(t^*) < 0$ is igaz $\forall k \neq i$-re. De mivel a modellfeltevésünk és az 1. pont miatt $b_{ij} - s_{ij}(0) = a_{ij} + b_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$, ezért mindegyik dolgozóról elmondható, hogy legalább egyszer visszautasította j-t szigorúan t^* időpont előtt (1. és 4. pont). Ez viszont lehetetlen, mert az 21. lemmából és az 5. pontból tudjuk, hogy legalább egy dolgozó mindig ajánlat nélkül van t^* előtt, aki így nem is tudta visszautasítani j-t. Ez ellentmond az indirekt feltételezésünknek, amiből következik, hogy a kapott allokáció teljesíti az egyénileg racionalitás definícióját. □

24. Lemma. *[1] A folyamat egy diszkrét magbeli allokációhoz tart.*

Bizonyítás. A 22. lemma miatt az algoritmus valamilyen egyensúlyhoz tart, amit jelöljünk $(\phi, s_{1\phi(1)}, \ldots, s_{n\phi(n)})$-el (ahol ϕ maga a kölcsönösen egyértelmű párosítási függvény a dolgozók és vállalatok között) és ψ jelölje ϕ^{-1}-et. Indirekt módon tegyük fel az állítás ellenkezőjét, azaz hogy $(\phi, s_{1\phi(1)}, \ldots, s_{n\phi(n)})$ nem egy diszkrét magbeli allokáció. Ekkor mivel a 23. lemma miatt $(\phi, s_{1\phi(1)}, \ldots, s_{n\phi(n)})$ egyénileg racionális allokáció, ezért van olyan i dolgozó, j vállalat és $s \in \mathbb{Z}$ fizetés, amelyekre

$$a_{ij} + s > a_{i\phi(i)} + s_{i\phi(i)}, \quad \text{és} \tag{6}$$

$$b_{ij} - s > b_{\psi(j)j} + s_{\psi(j)j}. \tag{7}$$

Ekkor biztos, hogy j minden olyan egész s-sel, ami kielégíti a (6) és (7) egyenlőtlenségeket ajánlatot tesz i-nek az algoritmus 4. pontja szerint. Ezeket az ajánlatokat i mind vissza kell, hogy utasítsa, különben j nem tudna ajánlatot tenni $\psi(j)$-nek.
Mivel a dolgozók sosem veszítenek el ajánlatokat, csak úgy, ha visszautasítják őket, ha kapnak egy jobbat, ezért i egyensúlyi fizetésére igaznak kell lennie, hogy

$$a_{i\phi(i)} + s_{i\phi(i)} \geq a_{ij} + s.$$

Ez viszont ellentmond a (6) egyenlőtlenségnek, amivel beláttuk a lemmát. □
Ezzel befejeztük az eredeti tétel bizonyítását, valóban véges lépésszámban véget ér az algoritmus egy diszkrét magbeli allokációval.
□

3.1.4. Folytonos piac vizsgálata

A fizetéskövető párosítási algoritmussal végső soron beláttuk, hogy minden így definiált diszkrét piacon van diszkrét magbeli allokáció. Nézzük most a folytonos piac esetét is, amikor $a_{ij}, b_{ij}, s_{ij} \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám lehet figyelembe véve a többi modellfeltevést. Vegyük észre, hogy itt már a magbeli és szigorú magbeli allokációk definíciója nem jelent különbséget.

A gyakorlatban persze mégsem annyira megvalósítható az, hogy tetszőleges valós szám legyen a fizetése valakinek, ezért azt mondhatjuk, hogy minden egyes folytonos piachoz tartozik egy diszkrét piac, amit úgy kapunk meg, hogy az előbb felsorolt értékek mindegyikét a legközelebbi egész értékre átváltjuk valamilyen (mérték)egység szerint. Azaz a_{ij}, b_{ij}, s_{ij} diszkrét piaci megfelelői $\forall i, j$-re az ε egység (például legkisebb fizetőeszköz, 5 forint) szerint: $a^d_{ij} = \left[\frac{a_{ij}}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right], b^d_{ij} = \left[\frac{b_{ij}}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right], s^d_{ij} = \left[\frac{s_{ij}}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right]$, ahol $[.]$ az alsó egészrészt jelenti.

25. Tétel. *[1] Minden folytonos piacon van szigorú magbeli allokáció.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan folytonos piac, ahol nincs szigorú magbeli allokáció. Azzal fogunk érvelni, hogy ha elég kicsinek választjuk a lépésközöket, akkor az ehhez kapcsolódó diszkrét piacon sem lesz magbeli allokáció, ami ellentmondás a korábbi tétel miatt.
Ehhez meg kell mutatnunk, hogy egy olyan piacon, ahol nincs szigorú magbeli allokáció, akkor a lehető legnagyobb potenciális össznyeresége valamely, az allokációban nem párban lévő dolgozó-vállalat párosnak felülről korlátos minden egyénileg racionális allokációban. Ekkor ugyanis a kapcsolódó diszkrét piachoz az ε egységünket $\varepsilon < \frac{c}{2}$-nek választva a diszkrét piacon is igaz lesz, hogy minden egyénileg racionális allokációban van olyan dolgozó-vállalat páros, akik együtt tudnának javítani a helyzetükön a jelenlegihez képest.

Vegyünk egy tetszőleges egyénileg racionális allokációt a foltonos piacon, legyen ez $(\phi, s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)})$, ahol $\phi : I \to J$ bijekció. Legyen $\forall i, j$-re

$$\hat{s}((i,j), \phi, s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)}) := a_{ij} + b_{ij} - (a_{i\phi(i)} + s_{i\phi(i)}) - (b_{\psi(j),j} - s_{\psi(j),j}),$$

ahol $\psi = \phi^{-1}$. Azaz $\hat{s}(.)$ lesz az össznyereség, ami abból fakad, hogy i és j a ϕ-beli kötelékeit felbontva szövetkezik.
Legyen

$$F(\phi, s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)}) := \max_{i,j} \hat{s}((i,j), \phi, s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)}).$$

A feltétel szerint $F(\phi, s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)}) > 0$, amikor $(\phi, s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)})$ egyénileg racionális. Megjegyzendő, hogy adott ϕ mellett F folytonos $(s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)})$-ben (véges sok folytonos függvény maximuma is folytonos).
Legyen

$$G(\phi) := \min_{s_{1,\phi(1)},\ldots,s_{n,\phi(n)}} F(\phi, s_{1,\phi(1)}, \ldots, s_{n,\phi(n)}),$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} a_{i,\phi(i)} + s_{i,\phi(i)} &\geq 0 \quad \forall i, \\ b_{\psi(j),j} - s_{\psi(j),j} &\geq 0 \quad \forall j. \end{aligned} \tag{8}$$

Végül legyen

$$H := \min_{\phi \in \Phi} G(\phi),$$

ahol $\Phi = \{\phi : I \to J, \text{kölcsönösen egyértelmű}\}$.
Ekkor G jól definiált, mert $\forall \phi \in \Phi$-re F folytonos és (8) lehetséges megoldásainak a halmaza kompakt (mert zárt $-a_{i,\phi(i)} \leq s_{i,\phi(i)} \leq b_{i,\phi(i)}$ intervallumok direkt szorzata), nemüres (az $a_{ij} + b_{ij} \geq 0$ modellfeltevés miatt). Folytonos függvény kompakt halmazon pedig mindig felveszi a minimumát. Tudjuk még, hogy $G(\phi) > 0$ minden $\phi \in \Phi$-re, mert ahogy azt korábban is említettük $F(.) > 0$ mindenhol a (8) lehetséges megoldásainak a halmazán minden $\phi \in \Phi$-re.
Mindezek miatt H is jól definiált lesz és szigorúan $H > 0$, mert véges elemszámú halmaz ($|\Phi| = n!$) minimuma. Így $\varepsilon = \frac{H}{2}$-vel teljesül az elején leírt gondolatmenet, azaz valóban ellentmondásra jutunk a kapcsolódó diszkrét piacon.
□

3.2. A Kelso-Crawford modell

Nézzünk meg még egy, az előbb bemutatotthoz nagyon hasonló, de egy fokkal általánosabb modellt a munkaerőpiac vizsgálatához. Ezzel az [5] cikkben megjelent modellt ismertetjük. Jelentős változás lesz az előbbiekhez képest, hogy itt már nem élhetünk azon egyszerűsítéssel, hogy az egy-az-egyhez esetre vezetjük vissza, ugyanis nem lesznek feltétlenül additívak az egyes kapcsolatok által megszerzett hasznossági mutatók.

3.2.1. Modellspecifikáció, kiindulási feltevések

A modell szereplői legyenek:

- m dolgozó $i \in I$, ahol $I = \{1, \ldots, m\}$ a dolgozók halmaza, mindegyik legfeljebb 1 helyen dolgozhat,

- n vállalat $j \in J$, ahol $J = \{1, \ldots, n\}$ a vállalatok halmaza, mindegyik annyi embert foglalkoztat, amennyit szeretne.

Az i munkásnak a hasznossági függvénye függ attól, hogy melyik vállalatnál dolgozik és ott mekkora fizetésért, ezt jelöljük $u^i(j, s_{ij})$-vel, ahol s_{ij} a j vállalattól kapott fizetése i-nek. A hasznossági függvény legyen értelemszerűen a 2. változójában szigorúan monoton növő és folytonos.
Írja le $y^j(C^j)$ a j vállalat nettó termelését, ahol C^j jelöli az ott dolgozó emberek halmazát ($C^j \subseteq \{1, ..., m\}$) vagy indikátor- vektorát (mindkét értelemben használjuk), azaz $C^j = (c_{1j}, ..., c_{mj}) \in \{0, 1\}^m$ és

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \text{ nem dolgozik a } j \text{ vállalatnál,} \\ 1 & \text{ha } i \text{ a } j \text{ vállalatnál dolgozik.} \end{cases}$$

Ekkor j nettó profitja

$$\pi^j(C^j, s^j) = y^j(C^j) - \sum_{i, c_{ij}=1} s_{ij},$$

ahol $s^j = (s_{ij}, ..., s_{mj})$ a fizetési vektor.
Jelentse $u^i(0, 0)$ azt a hasznosságot, amihez az i munkás munka és fizetés nélkül jut. Vezessük be azt a legkisebb olyan σ_{ij} fizetést, amivel i-nek éppen közömbös, hogy j-nél dolgozik-e vagy sehol, azaz $u^i(j, \sigma_{ij}) = u^i(0, 0)$.
A modellünkben az alábbi három feltevéssel kell élnünk:

1. Az egyes dolgozók határtermelékenységéről: $\forall (i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$ és $C \in \{0, 1\}^m$, azaz $C \subseteq \{1, ..., m\}$-re amire $i \notin C$,

$$y^j(C \cup \{i\}) - y^j(C) - \sigma_{ij} \geq 0. \tag{MP}$$

   Ez egy természetes kívánalom, hogy az egyes dolgozók több termelést adjanak hozzá a vállalathoz, mint amennyit annak minimálisan ki kell fizetnie, hogy kompenzálja azt, hogy semmittevés helyett dolgozik.

2. Nincs ingyen ebéd („no-free-lunch”):

$$y^j(\emptyset) = 0 \quad \forall j. \tag{NFL}$$

3. Álljon $M^j(s^j)$ azokból a $C \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ halmazokból, amik megoldásai az alábbi szélsőérték feladatnak:

$$\max_C \pi^j(C, s^j).$$

   Azaz adott s^j fizetési vektor mellett a j vállalat profitját maximalizáló dolgozói halmazok $M^j(s^j)$ elemei. Vegyünk j számára két lehetséges s^j és $\tilde{s}^j$ kifizetésvektort. Legyen

$$T^j(C^j) = \{i | i \in C^j \text{ és } \tilde{s}_{ij} = s_{ij}\}.$$

Ekkor megkívánjuk, hogy $\forall j$-re, ha $C^j \in M^j(s^j)$ és $\tilde{s}^j \geq s^j$, akkor

$$\exists \tilde{C}^j \in M^j(\tilde{s}^j) \text{ úgy, hogy } T^j(C^j) \subseteq \tilde{C}^j. \tag{GS}$$

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy koordinátánként nem csökkentjük a fizetési vektort és vesszük $T^j(C^j)$ halmazt, azaz azokat a dolgozókat, akik j-nél voltak és nem kaptak $\tilde{s}^j$ mellett sem jobb fizetést, ahol C^j dolgozóhalmazzal j vállalat maximalizálja a profitját s^j fizetések mellett. Ekkor $\tilde{s}^j$ mellett j egy olyan halmazzal is tudja maximalizálni a profitját, ami tartalmazza azokat a dolgozókat, akiknek nem lett növelve a fizetése ($T^j(C^j) \subseteq \tilde{C}^j$). Erre utal a *GS (Gross-Substitutes)* elnevezés is.

3.2.2. Allokációk kívánatos tulajdonságai

Az alábbiakban definiáljuk, hogy a milyen tulajdonságaival találkoznánk szívesen a munka kétoldali párosítási piacán. Megint olyan állapotokat keresünk, amik a bevezetett munkaerőpiacon stabilnak tekinthetőek, azaz már nem lesz lehetőségük egy mindenki számára kedvezőbb világállapotba eljutniuk onnan.
Legyen $\mu : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ az a (szürjektív) függvény, ami leírja, hogy melyik dolgozó melyik vállalatnál dolgozik, azaz i az $\mu(i)$ vállalatnál. Ekkor $C^j = \{i | j = \mu(i)\}$.

26. Definíció (Egyénileg racionális allokáció). *[5] Egy $\mu : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ allokációja a dolgozóknak egyénileg racionális (adott fizetések mellett), ha $\forall i, j$-re*

$$s_{i\mu(i)} \geq \sigma_{i\mu(i)}, \qquad \textit{és} \tag{9}$$

$$\pi^j(s^j, C^j) = y^j(C^j) - \sum_{i \in C^j} s_{ij} \geq 0. \tag{10}$$

Ez a tulajdonság egyrészt azt az intuitív igényünket formalizálja, hogy minden dolgozó keressen legalább olyan jól, hogy legalább annyi hasznossága származzon belőle, mintha nem dolgozna sehol. Másrészt a vállalat se legyen veszteséges (akkor már inkább zárjon be).

27. Definíció (Diszkrét szigorú magbeli allokáció). *[5] Vegyünk egy egyénileg racionális $(\mu, s_{1\mu(1)}, ..., s_{m\mu(m)})$ elhelyezését a dolgozóknak úgy, hogy ne legyen olyan (j, C) kombináció és $r^j = (r_{1j}, ..., r_{mj})$ fizetési vektor (egészekből álló), ami kielégíti az alábbi két egyenletet:*

$$u^i(j, r_{ij}) \geq u^i(\mu(i), s_{i\mu(i)}) \qquad \forall i \in C \qquad \textit{és} \tag{11}$$

$$\pi^j(C, r^j) \geq \pi^j(C^j, s_j), \tag{12}$$

úgy, hogy legalább egyszer szigorú egyenlőtlenség teljesüljön.

28. Definíció (Diszkrét magbeli allokáció). *[5] Ugyanaz, mint az előző, annyi módosítással, hogy itt mindkét egyenlőtlenséget szigorú korláttal kívánja meg.*

3.2.3. Módosított fizetéskövető párosítási algoritmus

Ebben a részben bemutatunk egy olyan folyamatot, ami a Gale-Shapley algoritmus analógiájára párosítja a dolgozókat leendő munkahelyükkel [5].

1. A vállalatok megismerik, hogy mennyi σ_{ij}. A 0. körben ezt az ajánlatot teszik meg minden egyes dolgozónak, jelöljük $s_{ij}(0)$-val. Ez nem jelent felesleges költségeket (MP) miatt. A további t időpontbeli körökben $s_{ij}(t)$ ugyanaz marad, mint volt, kivéve akkor, amikor ezt jelezzük a további instrukciókban.

2. Minden körben minden vállalat ajánlatot tesz a kedvenc dolgozókból álló halmazának ami maximalizálja a $\pi^j(C, s^j(t))$-t, ahol $s^j(t) = (s_{1j}(t), ..., s_{mj}(t))$ az előbb meghatározott fizetési vektor. Ez a halmaz legyen $C^j(j)$. Ezeknek tesz j ajánlatot úgy, hogy minden olyan egyéb ajánlatot is megtart, amit eddig nem utasítottak vissza (ezzel nem veszít profitot (GS) miatt).

3. Minden olyan dolgozó, aki egy vagy több ajánlatot kap, a számára legnagyobb hasznosságot ígérő kivételével mindet visszautasítja. A legjobbat pedig feltételesen elfogadja (bármikor visszamondhatja).

4. Azok az ajánlatok, amiket nem utasítottak vissza érvényben maradnak. Ha pedig i visszautasítja j-nek az $s_{ij}(t-1)$ fizetést ígérő ajánlatát a $t-1$. körben, a t. körben ezt j módosítja: $s_{ij}(t) = s_{ij}(t-1)+1$. Ha viszont nem utasítja vissza, marad $s_{ij}(t) = s_{ij}(t-1)$. Ezután a vállalatok az új fizetési vektorhoz igazítva módosítják a kedvenc dolgozói halmazukat.

A folyamat akkor áll le, amikor egy lépésben senki nem utasít vissza ajánlatot.
Ekkor a következőt mondhatjuk el a kapott munkaerő piacról:

29. Tétel. *[5] A módosított fizetéskövető párosítási algoritmus egy diszkrét magbeli allokációba fog megérkezni véges időben (diszkrét piacon tekintjük, azaz csak egész számok lehetnek a fizetések).*

A tétel bizonyítása elolvasható az [5] cikkben, ugyanolyan típusú lemmákból áll össze, mint a 20. tétel bizonyítása.
Azzal, hogy beláttuk diszkrét piacokra, miszerint a módosított fizetéskövető algoritmus garantálja a diszkrét magbeli allokáció létezését, ugyanez folytonos piacokról is belátható, hogy azoknak a halmazán is létezik – de itt már egyben szigorú – magbeli allokáció [5].

30. Megjegyzés. *A modell egyik legnagyobb hátránya, hogy a vállalatok méretét nem lehet előre meghatározni, hanem attól függ, hogy hogyan tudja a termelékenységét, ezáltal a profitját maximalizálni. Ez a legfőbb eltérése a Crawford-Knoer modelltől.*

3.3. Információs asszimmetria bevétele a modellbe

Ebben a részben Qingmin Liu [10] cikke szerint a 3.1 fejezetben bemutatott Crawford-Knoer modellt egészítjük ki annyival, hogy egy alább definiált értelemben hiányos információs kontextusba helyezzük a modellt. A későbbiekben az ilyen információs aszimmetria melletti modellre Liu-modellként is hivatkozunk.

Továbbra is legyen egy I véges halmazunk, aminek minden $i \in I$ eleme jelöl egy-egy dolgozót, hasonlóan J véges halmaz pedig a vállalatok halmaza. A korábbiaktól eltérően legyen $F \subset \mathbb{R}$ a vállalatok és $W \subset \mathbb{R}$ a dolgozók lehetséges típusainak (véges) halmaza. Azt, hogy az egyes szereplők milyen típusba tartoznak, rendre az $\mathbf{f}\colon J \to F$ és $\mathbf{w}\colon I \to W$ függvények határozzák meg. Ezeket felhasználva a Crawford-Knoer modellben leírt elégedettségi és termelékenységi mutatószámokat egy i dolgozó és j vállalat között a típusuk fogja meghatározni, ami olyan, mintha abban a modellben minden szereplő egy típust jelölne.

Ha $\mathbf{f}(j) = f \in F$ és $\mathbf{w}(i) = w \in W$, akkor legyen

- $\nu_{wf} \in \mathbb{R}$ egy $w \in W$ típusú dolgozó elégedettségi szintje, amikor egy $f \in F$ típusú vállalatnál dolgozik
- $\phi_{wf} \in \mathbb{R}$ egy $f \in F$ típusú vállalatnál dolgozó $w \in W$ típusú ember termelékenységi mutatószáma a vállalatnál.

A továbbiakban az i és j páros által meghatározott összhaszonnak nevezzük a $\nu_{wf}+\phi_{wf}$ összeget. Ezekről a mérőszámokról felesszük, hogy ugyanúgy vannak skálázva, hogy egymással és alább a pénzbeli juttatásokkal összemérhetőek legyenek. Ha egy szereplőnek nincs éppen párja, akkor a kapott elégedettségi szintjét 0-nak feltételezzük. Jelölésekkel: $\nu_{\mathbf{w}(\emptyset)\mathbf{f}(j)} = \phi_{\mathbf{w}(i)\mathbf{f}(\emptyset)} = 0$.

Vegyük észre, hogy ezek a típusok által meghatározott elégedettségi mutatószámok megfeleltethetőek a korábbi a_{ij} és b_{ij} fogalmaknak. A típusokba besorolásnak annyi lesz a modellnél a jelentősége, hogy egyrészt egyes példákban annak valamilyen függvénye lesz a termelékenysége vagy az elégedettsége, másrészt ennek az ismeretének a hiánya okozza majd az információs asszimmetriát a következőképpen:

Tegyük fel, hogy mindegyik vállalat típusa közismert ($\mathbf{f}$ függvény ismert). Továbbá minden dolgozó ismeri a saját típusát (i tudja, hogy mi $\mathbf{w}(i)$), de a vállalatok ezt nem ismerik, csak miután már felvették. A vállalatok számára ismert viszont a dolgozók valamilyen lehetséges eloszlása, ezt jelölje $\Omega \subset W^I$ (ez lehet például az, hogy milyen típusból mennyi van). Végül a $\nu : W \times F \to \mathbb{R}$ és $\phi : W \times F \to \mathbb{R}$ függvényeket tekintsük mindenki által ismertnek.

Az alábbiakban tekintsük az $i \in I$ és $j \in J$ dolgozó és vállalat által alkotott párost. Legyen

- $u_i^w(j) := \nu_{\mathbf{w}(i)\mathbf{f}(j)} + p_{ij}$ a dolgozó összelégedettsége,
- $\pi_j^f := \phi_{\mathbf{w}(i)\mathbf{f}(j)} - p_{ij}$ a vállalat összprofitja,

ahol $p_{ij} \in \mathbb{R}$ jelöli a j vállalat által az i dolgozónak adott fizetést. Ha i nem dolgozik, vagy j nem alkalmaz dolgozót, akkor értelemszerűen legyen $p_{i\emptyset} = p_{\emptyset j} = 0$. Jelölje $\mu : I \to J \cup \{\emptyset\}$ a munkavállalók egy párosítását a vállalatokhoz. Itt is „egy az egyhez” párosításokat keresünk, amit már korábban láttunk, hogy az általánosság megszorítása nélkül megtehetünk. Ekkor létezik $\kappa := \mu^{-1}$, ami a vállalatokhoz rendeli a dolgozójukat. A $\mu(i) = \emptyset$ jelentse azt, hogy i munkanélküli, $\kappa(j) = \emptyset$ pedig azt, hogy a j vállalat nem alkalmaz senkit.

31. Definíció (Allokáció, kimenetel). *[10] Az előbbiekben meghatározott munkaerőpiac egy allokációját meghatározza a $(\mu, \mathbf{p})$ páros, ahol μ a párosító függvény és $\mathbf{p}$ az egyes párosokban lévő fizetéseket tömörítő fizetési vektor.*
A kimenetelét a párosításnak a $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ négyes adja, amiben már benne vannak a szereplők típusai is az allokáció mellett.

3.3.1. Stabilitás fogalma

Szeretnénk az imént bevezetett információs asszimmetriával terhelt munkaerőpiacon bevezetni az eddig használt stabilitási fogalmakhoz hasonlóakat. Tehát a stabilitást ismét úgy szeretnénk megfogni, hogy olyan állapota legyen a munkaerőpiacnak, hogy ha egyszer odakerül, akkor onnan nem fog elmozdulni (amíg valamilyen exogén sokk nem éri).
Az egyénileg racionalitás fogalma teljesen analóg az eddig látottakkal:

32. Definíció (egyénileg racionális kimenetel). *[10] A $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetel egyénileg racionális, ha*

- $\nu_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(\mu(i))} + \mathbf{p}_{i,\mu(i)} \geq 0 \ \forall i \in I$ *és*
- $\phi_{\mathbf{w}(\mu^{-1}(j)),\mathbf{f}(j)} - \mathbf{p}_{\mu^{-1}(j),j} \geq 0 \ \forall j \in J.$

Mivel teljes információ mellett az egyes vállalatok egyértelműen el tudtak készíteni egy rangsort a dolgozók halmazán annak ismeretében, hogy számukra melyik hozza a legnagyobb megtérülést, a blokkoló él fogalma ott ugyanúgy volt értelmezhető, mint ahogyan azt az 1. definíciónál bevezettük. Információs asszimmetria mellett viszont érdemes először megvizsgálnunk, hogy a vállalat pontosan milyen információknak van a birtokában és ezek alapján egy dolgozó-vállalat páros mikor blokkolja a párosítást.
Egy vállalat tehát látja az összes vállalat típusát, a dolgozók típusának az eloszlását, az éppen aktuális dolgozójának a típusát és még azt is, hogy a többi dolgozó melyik vállalathoz került, milyen fizetéssel. Minket az érdekel, hogy milyen következtetésekből tudja megállapítani a vállalat, hogy egy adott i dolgozót érdemes lenne-e valamilyen fizetési ajánlattal „átcsábítania” magához, amivel i is jobban jár.
Tekintsük azt az eshetőséget, amikor egy vállalat az egyik dolgozóval blokkoló párost sejt azzal a feltétellel, hogy tudomása van arról, hogy a dolgozók típusa konzisztens valamilyen lehetséges Σ kimenetelek halmazával.

33. Definíció (Σ-blokkoló kimenetel). *[10] Tekintsük egyénileg racionális kimeneteleknek egy nemüres Σ halmazát. Azt mondjuk, hogy a $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in \Sigma$ kimenetel Σ-blokkoló, ha van olyan (i, j) dolgozó és vállalat alkotta pár és $p \in \mathbb{R}$ fizetés, hogy $\forall \mathbf{w}' \in \Omega$-ra teljesülnek az alábbiak:*

$$\nu_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(j)} + p > \nu_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(\mu(i))} + p_{i,\mu(i)}, \tag{13}$$

$$\phi_{\mathbf{w}'(i),\mathbf{f}(j)} - p > \phi_{\mathbf{w}'(\mu^{-1}(j)),\mathbf{f}(j)} - p_{\mu^{-1}(j),j} \tag{14}$$

feltéve, hogy

$$(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f}) \in \Sigma \tag{15}$$

$$\mathbf{w}'(\mu^{-1}(j)) = \mathbf{w}(\mu^{-1}(j)) \tag{16}$$

$$\nu_{\mathbf{w}'(i),\mathbf{f}(j)} + p > \nu_{\mathbf{w}'(i),\mathbf{f}(\mu(i))} + p_{i,\mu(i)} \tag{17}$$

34. Definíció (Σ-stabil kimenetel). *[10] Egy $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in \Sigma$ kimenetel Σ-stabil, ha nem Σ-blokkoló.*

A (13) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az i dolgozó jobban jár a blokkoló párjával, mint az eredetivel, a (14) pedig azt, hogy j vállalat jobban járjon a blokkolással, mint minden másik $\mathbf{w}'$ „lehetséges” kimenetelben. Arra a kérdésre, hogy mi számít „lehetséges” kimenetelnek az utolsó három feltétel ad választ. Értelemszerűen (15) szerint benne kell lennie abban a Σ alaphalmazban, amiben a vizsgálatot végezzük, (16) pedig megköveteli, hogy j alkalmazotta ugyanolyan típusú legyen az összes többi $\mathbf{w}'$-t tartalmazó kimenetelben, mint az éppen aktuálisban. Végül a (17) feltétel szerint az i dolgozónak is jobban kell járnia mindegyik másik $\mathbf{w}'$ esetén is a blokkoló párjával, mint az eredetivel.

35. Példa. *[10] Az alábbiakban egy nem túl bonyolult példával próbáljuk meg illusztrálni a teljes információs modelltől való eltérést aszimmetrikus információ mellett:*

Legyen három dolgozónk: $I = \{a, b, c\}$ és ugyanennyi vállalat: $J = \{A, B, C\}$. A dolgozók lehetséges típusainak halmaza $W = \{1, 2, 3\}$, a vállalatoknak $F = \{2, 4, 5\}$ valamint köztudott, hogy $\mathbf{f}(a) = 2$, $\mathbf{f}(b) = 4$ és $\mathbf{f}(c) = 5$. Egy w típusú dolgozó és f típusú vállalatra legyen $\nu_{wf} = \phi_{wf} = w \cdot f$. A vállalatok nem tudják viszont a dolgozók típusát, csak azt, hogy $W = \{1, 2, 3\}$ és ismerik az éppen náluk dolgozó személy típusát. Tekintsük az alábbi kimenetelt a megadott fizetésekkel együtt.
Tegyük fel, hogy aszimmetrikus információ mellett is hasonlóan szeretnénk a stabilitás fogalmát elképzelni, mint minden releváns információ ismeretében, azaz hogy nincs olyan jelenleg párban nem álló dolgozó és vállalat, akik mindketten jobban járnának, mint a kimenetelben szereplő párjukkal.

dolgozó:	a	b	c
dolgozó összelégedettsége, u_i^w:	2	16	6
dolgozó típusa, $\mathbf{w}$:	1	3	2
fizetések, $\mathbf{p}$:	0	4	-4
vállalat típusai, $\mathbf{f}$:	2	4	5
vállalat összprofitja, π_j^f:	2	8	14
vállalat:	A	B	C

2. ábra. Az egymás alatti dolgozók és vállalatok jelölik a kimenetelben a párokat.

Tekintsük c dolgozót és B vállalatot valamilyen $\tilde{p} \in (-2, 0)$ fizetéssel. Vajon aszimmetrikus információ mellett tekinthetőek-e így blokkoló párnak? Jelen példában ennek vizsgálatával szeretnénk a 33. definíciót illusztrálni. Teljes információ mellett c és B nyilvánvalóan blokkoló pár lenne az előbbi $\tilde{p}$ fizetés mellett. Aszimmetrikus információ esetén is azonnal látható, hogy a c dolgozó ezzel jobban járna, mint a jelenlegi párjával és ő ezt tudja is magáról. A B vállalat viszont nem tudja, hogy c 1-es, vagy 2-es típusú, csak azt, hogy a kettő közül valamelyik. Ha 2-es típusú, akkor számára előnyös, a másik esetben viszont már kiszámolható, hogy nem az. Ha pedig megvizsgáljuk, hogy B mit tud c-ről, azt is láthatjuk, B tudja, hogy mindegy az, hogy c 1-es vagy 2-es típusú, mert mindkét esetben jobban járna c, ha B-vel blokkoló párt alkotnának, de B csak akkor járna jól, ha c 2-es típus lenne. Eszerint az érvelés szerint tehát $\{c, B\}$ nem tekinthető blokkoló párnak.

A gondolatmenet azonban nem ér itt véget: ha ugyanis c 1-es típusú lenne, akkor a C vállalat összprofitja 9 lenne, az a dolgozó pedig 2-es típusúként 4 összelégedettséggel inkább a C vállalattal alkotna blokkoló párt $p' = 0$ fizetés mellett. De B feltételezése az, hogy ilyen blokkoló pár nincs (mert nem látja, hogy erre kifejezné a szándékát), ezért mégis tudni fogja, hogy c a 2-es típusú dolgozó, azaz végső soron mégis blokkoló párost alkotnak.

36. Definíció (Pozitív/negatív asszortatív párosítások). *Egy $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ és $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ számhalmaz közötti $\mu : \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ párosítást **pozitív asszortatív**nak nevezünk, ha $\mu(x_i) = y_i$, $\forall i$. **Negatív asszortatív**, ha $\mu(i) = y_{n-i+1}$ $\forall i$.*

37. Definíció. *[10] Legyen Σ^0 az egyénileg racionális kimenetelek halmaza. Adott $k \geq 1$-re legyen*

$$\Sigma^k := \{(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in \Sigma^{k-1} : (\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \;\; \Sigma^{k-1}\text{-}stabil\}.$$

Ekkor az aszimmetrikus információval terhelt esetekben stabil kimenetelek legyenek a

$$\Sigma^\infty := \bigcap_{k=1}^{\infty} \Sigma^k$$

halmaz elemei.

A Σ^k sorozat elemei nemnövekvő egymásba ágyazott halmazok. Először nézzük meg, hogy mit mondhatunk Σ^∞ határértékükről.

38. Állítás. *[10] Minden* $(\mathbf{w}, \mathbf{f})$ *típusokra létezik aszimmetrikus információs stabil* $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ *kimenetel, azaz* Σ^∞ *halmaz sosem üres.*

Bizonyítás. Ha $(\mu, \mathbf{p})$ teljes információ mellett magbeli (stabil) allokáció a $(\mathbf{w}, \mathbf{f})$ típusokkal, akkor definíció szerint $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in \Sigma^k$ $\forall k \geq 0$ (hiszen a Σ-blokkoló kimenetel definíció szerint egy szigorúbb fogalom annál, mint amilyen tulajdonságot a teljes információ melletti magbeli allokációk nem szabad, hogy teljesítsenek). $\square$

Az előbbi 37. definíció segítségével le tudunk írni egy algoritmust, hogy megkapjuk az összes stabil kimenetelt információs asszimmetria mellett. Ehhez az alábbi fixpont karakterizációs gondolatmenetet használjuk.

39. Definíció (Önstabilizáló halmaz). *[10] Legyen* $E \subseteq \Sigma^0$ *az egyénileg racionális kimenetelek egy nem üres részhalmaza. Ekkor azt mondjuk, hogy* E *önmagát stabilizáló, ha minden* $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in E$ *kimenetel* E*-stabil. Egy adott* $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ *kimenetelt stabilizál az* E *halmaz, ha* $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in E$ *és* E *önstabilizáló. Egy* $\Omega^* \subset \Omega$ *dolgozók típusainak halmazait tartalmazó halmaz stabilizálja a* $(\mu, \mathbf{p})$ *allokációt, ha a* $\{(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) : \mathbf{w} \in \Omega^*\}$ *egy önstabilizáló halmaz.*

40. Lemma. *[10] Önmagukat stabilizáló halmazokról az alábbiak mondhatóak el:*

1. *Az* $\{(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})\}$ *egyelemű halmaz pontosan akkor önstabilizáló, ha* $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ *teljes információ mellett is magbeli (stabil) kimenetel.*
2. *Ha* E_1 *és* E_2 *önstabilizáló, akkor* $E_1 \cup E_2$ *is az.*
3. *Ha* E *önstabilizáló, akkor* $\overline{E}$ *is az, ahol* $\overline{E}$ *a halmaz lezártját jelenti.*
4. *Ha* E *önmagát stabilizáló halmaz és* $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in E$*, akkor* $E \cap \{(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f}) : \mathbf{w}' \in \Omega\}$ *is önstabilizáló halmaz.*

A következő állítás adja meg a stabil kimeneteleknek a fixpont karakterizációját.

41. Állítás. *[10] Legyen* Σ^∞ *az aszimmetrikus információ mellett stabil kimenetelek halmaza. Ekkor*

1. *Ha* E *önstabilizáló, akkor* $E \subset \Sigma^\infty$.
2. *Az aszimmetrikus információ mellett stabil* Σ^∞ *kimenetelek halmaza önstabilizáló, ezáltal a legnagyobb önstabilizáló halmaz.*
3. Σ^∞ *zárt.*

Amíg az információs aszimmetria melletti stabilitás a blokkolás fogalmától függ, relatíve megengedő néhány természetes feltételezés mellett és a stabil végkimenetelek maximalizálják az összhasznot.

Tekintsük az alábbi lehetséges feltételezéseket:

1. **Monotonitás:** a ν_{wf} és ϕ_{wf} mérőszámok w illetve f szerint szigorúan monoton nőnek. Ebből is látszik, hogy a w és f típusjelzők nem csupán a megkülönböztetésre vannak, hanem számszerűen utalhatnak az adott szereplőnek tulajdonságára.

2. **Szupermodularitás:** a ν_{wf}, ϕ_{wf} és $\nu_{wf}+\phi_{wf}$ szigorúan szupermodulárisak w és f szerint, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy bármely $f_1 \leq f_2$ és $w_1 \leq w_2$ esetén rendre $\nu_{f_1,w_1} + \nu_{f_2,w_2} > \nu_{f_1,w_2}+\nu_{f_2,w_1}$, $\phi_{f_1,w_1}+\phi_{f_2,w_2} > \phi_{f_1,w_2}+\phi_{f_2,w_1}$ és $(\nu_{f_1,w_1}+\phi_{f_1,w_1})+(\nu_{f_2,w_2}+\phi_{f_2,w_2}) > (\nu_{f_1,w_2} + \phi_{f_1,w_2}) + (\nu_{f_2,w_1} + \phi_{f_2,w_1})$ (az utolsó az előtte lévőkből nyilvánvalóan következik is). A szupermodularitás közgazdasági modellekben gyakori feltételezés. Fordított irányú egyenlőtlenség esetén szubmoduláris függvényekről beszélhetünk.

   Például a $\nu_{wf} = w \cdot f$ szupermoduláris a rendezési egyenlőtlenség miatt.

A következőkben azokra az esetekre koncentrálunk, amikor a fenti két feltételezés teljesül, ezeket felhasználva szeretnénk következtetéseket levonni az információs aszimmetriával terhelt munkaerőpiac hatékonyságával kapcsolatban.

42. Definíció (Hatékony kimenetel). *Egy információs asszimmetriával terhelt párosítási piacon kialakult kimenetelt hatékonynak nevezünk, ha teljes összhasznosság maximális.*

43. Lemma. *[10] Tegyük fel, hogy az 1. és 2. feltételezéseink fennállnak és a $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetel egyénileg racionális. Ekkor ha egy w^* típusú dolgozó egy f^* típusú vállalattal párt alkot p^* fizetés mellett, akkor minden olyan vállalat, amelynek típusa nagyobb, mint f^*, azaz $f > f^*$ létezik $\varepsilon > 0$, hogy $\forall p \in (\nu_{w^*f^*} + p^* - \nu_{w^*f}, \nu_{w^*f^*} + p^* - \nu_{w^*f} + \varepsilon]$-ra teljesülnek az alábbi korlátok:*

$$\nu_{wf} + p > \nu_{wf^*} + p^*, \quad \forall w \geq w^* \tag{18}$$

$$\nu_{wf} + p \geq 0, \quad \forall w \geq w^* \tag{19}$$

$$\nu_{wf} + p \leq \nu_{wf^*} + p^*, \quad \forall w < w^*. \tag{20}$$

Abban az esetben pedig, ha a w^* típusú dolgozónak nincs párja, akkor minden f típusú vállalathoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall p \in (-\nu_{w^*f}, -\nu_{w^*f} + \varepsilon]$-ra teljesülnek:

$$\nu_{wf} + p > 0, \quad \forall w \geq w^* \tag{21}$$

$$\nu_{wf} + p \leq 0, \quad \forall w < w^*. \tag{22}$$

Az előbbi lemmában szereplő egyenlőtlenségek szemléletesen a következőket jelentik: tegyük fel, hogy az egyik dolgozó blokkoló párt szeretne alkotni egy $f > f^*$ típusú vállalattal, ahol f^* a dolgozó μ-beli párjának a típusa. A blokkolást egy olyan p fizetéssel szeretné kivitelezni, ami egy „kicsivel” meghaladja $\nu_{w^*f*} + p^* - \nu_{w^*f}$-et, azaz éppen megéri neki. Ebből az f típusú vállalat annyit lát, hogy pontosan akkor járna vele jobban a dolgozó, ha legalább w^* típusú. A (18) is ezt mondja ki, hogy minden legalább w^* típusú dolgozó jobban szeretne egy f típusú vállalatnál lenni az így megadott p fizetéssel, ami (19) szerint nem rúgná fel az egyénileg racionalitást és ε úgy megválasztható, hogy w^*-nál alacsonyabb típusú dolgozóknak ugyanez már ne érje meg, maradjanak inkább a jelenlegi párjuknál.

Ebből következni fog, hogy a szupermodularitási feltétel mellett egy kimenetelejlet pontosan akkor eredményez hatékony piacot (azaz az összhaszon maximális), ha a párosítás pozitívan asszortatív. Sőt, ha egy páros negatív összhasznot adna ki, akkor inkább nem is jön létre a kapcsolatuk. Információs aszimmetriával terhelt stabilitás esetén ezek a kitételek teljesülnek és belátható a következő tétel:

44. Tétel. *[10] A monotonitási 1 és szupermodularitási 2 feltételezés mellett minden információs asszimmetria melletti stabil kimenetel hatékony piacot eredményez.*

45. Példa. *[10] Egy példán keresztül megmutatjuk, hogy a szupermodularitás szigorúsága nélkül már lehet, hogy van olyan stabil kimenetel, ami nem hatékony:*

Legyen két dolgozónk (a és b) két vállalattal (A és B), $W = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2\}$ úgy, hogy $\mathbf{f}(A) = 1$, $\mathbf{f}(B) = 2$ és $\mathbf{w}(b) = 2$. Tegyük fel, hogy a típusa nem ismert, lehet 1 és 3 is, de a valóságban ez $\mathbf{w}(a) = 3$. Legyen $\nu_{wf} = w + f$, ami ugyan szupermoduláris, de nem szigorúan és legyen $\phi_{wf} = w \cdot f$, ahogyan az előző példában is. Ezek mellett tekintsük az alábbi két kimenetelt:

dolgozó:	a	b
u_i^w:	4	4
w:	3	2
p:	0	0
f:	1	2
π_j^f:	3	4
vállalat:	A	B

dolgozó:	a	b
u_i^w:	2	4
w':	1	2
p:	0	0
f:	1	2
π_j^f:	1	4
vállalat:	A	B

Azt szeretnénk megmutatni, hogy az első $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetel aszimmetrikus információ mellett stabil, de nem hatékony. Az, hogy nem hatékony azonnal látszik, hiszen ellentétes párosítással a piacon az összhaszon 16 lenne a jelenlegi 15 helyett.

Ahhoz, hogy a stabilitást belássuk, tekintsük a másik, $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f})$ kimenetelt. Legyen $E = \{(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}), (\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f})\}$. Belátjuk, hogy E önsabilizáló halmaz, amiből a 40. lemma miatt következik, hogy az elemei aszimmetrikus információ mellett stabil kimenetelek.

Ehhez először is nézzük $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f})$ kimenetelt. Ez teljes információ mellett stabilnak mondható, így a 40. lemma 1. pontja alapján egyelemű halmazként önstabilizáló. A $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetel egyetlen lehetséges E-blokkoló párja a $(\mathbf{w}, \mathbf{f})$ típusokkal csak az (a, B) lehet. Azonban egy 1-es és egy 3-as típusú a dolgozó is szívesen részt venne egy ilyen blokkoló párban minden olyan p' fizetéssel, amire $p' > -1$. Így B nem tudja kizárni annak az eshetőségét, hogy a 1-es típusú, amivel ő nem járna jól. Emiatt nem lehet blokkolni E-ben a $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetelt, azaz aszimmetrikus információ mellett stabil lesz E-ben. Ezzel beláttuk, hogy E önstabilizáló halmaz, amiből következik, hogy $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ stabil.
Tehát valóban tudunk olyan kimenetelt mutatni, ahol nem szigorúan szupermoduláris ν_{wf} elégedettségi függvény mellett stabil kimenetel nem hatékony piacot eredményez.

Továbbmenvén a stabil kimenetelek furcsaságainak bemutatásával. Az igazságosság alapvető építőköve lenne, olyan értelemben, hogy az ugyanolyan típusú szereplők ugyanolyan elégedettségi szinteket érjenek el. Azt már láttuk, hogy szigorú szupermodularitás mellett a piac teljesíti a hatékonyság fogalmát. Azonban most egy példán keresztül bemutatjuk, hogy az egyenlő bánásmód nem feltétlenül teljesül mindig.

46. Példa. *[10] Nézzünk meg egy egyszerű, két dolgozóból és vállalatból álló gazdaságot, ahol a dolgozók ugyanolyan típusúak, de mégsem ugyanúgy járnak.*

Legyen két vállalat, mindegyik 2-es típusú, a dolgozók típusát pedig az $\{1, 2\}$ halmazból választjuk ki egymástól függetlenül. Hasonlóan az első példához, legyen $\nu_{wf} = \phi_{wf} = w \cdot f$. Tekintsük az alábbi két lehetséges $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ és $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f})$ kimenetelt:

dolgozó:	a	b
u_i^w:	6	8
w:	2	2
p:	2	4
f:	2	2
π_j^f:	2	0
vállalat:	A	B

dolgozó:	a	b
u_i^w:	4	8
w':	1	2
p:	2	4
f:	2	2
π_j^f:	0	0
vállalat:	A	B

A $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetelen látszik, hogy a két dolgozó ugyan ugyanolyan típusú, mégsem ugyanolyan az összelégedettségük. Teljes információ mellett nem lenne stabil ez a kimenetel, ugyanis a és B blokkoló párost alkotna.
Ellenben az aszimmetrikus információ melletti stabilitás az alábbiak szerint megmutatható a $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetelről. Vegyük a második, $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f})$ kimenetelt, amiről láthatjuk, hogy teljes információ mellett stabil. Legyen $E = \{(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f}), (\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}', \mathbf{f})\}$. Az előző példához hasonlóan itt is belátjuk, hogy E önstabilizáló halmaz, amiből a 40. lemma miatt következik, hogy az elemei aszimmetrikus információ mellett stabil kimenetelek. Ehhez már csak annyit kell megmutatnunk, hogy $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ aszimmetrikus információ mellett E-stabil, amihez elég

látni, hogy a és B nem E-blokkoló pár. Ez pedig egyenesen következik abból, hogy ha a 1-es típusú lenne, akkor is minden olyan blokkoló (a, B) párban szívesen venne részt, amiben 2-es típusúként, viszont B nem szívesen látná 1-esként. Így $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ is stabil, viszont nem ugyanúgy járnak az ugyanolyan típusú dolgozók és ezt szerettük volna megmutatni.

3.3.2. Kapcsolat a teljes információs stabilitással

Teljes információs stabil kimenetel alatt a 28. definíció folytonos verzióját (magbeli allokációt) értjük, amit ebben a kontextusban a 3.3 részben leírt megfeleltetéssel egészítünk ki az alábbiak szerint:

47. Definíció. *[10] A $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ egyénileg racionális kimenetel teljes információ mellett stabil, ha nem létezik olyan (i, j) dolgozó és vállalat, melyekre valamilyen $p \in \mathbb{R}$ fizetés mellett*

$$\nu_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(j)} + p > \nu_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(\mu(i))} + \mathbf{p}_{i,\mu(i)}$$

és

$$\phi_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(j)} - p > \phi_{\mathbf{w}(\mu^{-1}(j)),\mathbf{f}(j)} - \mathbf{p}_{\mu^{-1}(j),j}.$$

A 38. állításban már korábban láttuk, hogy minden teljes információ mellett stabil (magbeli) kimenetel aszimmetrikus információ esetén is stabil. A 45. és 46. példákban pedig olyan kimeneteleket mutatunk be, amik aszimmetrikus információ mellett stabilak, de teljes információval már nem, ezért szigorú tartalmazási kapcsolat áll fenn a kétféle stabilitási fogalmat teljesítő kimenetelek között. Ugyanakkor látva az eddigieket, sokszor kényelmesebb lenne teljes információs helyzetet feltételeznünk. Most érintőlegesen arra a kérdésre adunk választ, hogy milyen esetben esik egybe a két fogalom.
Itt tegyük fel, hogy ν_{wf} és ϕ_{wv} w-ben folytonosak. A korábbi példákban bemutatott kimenetelekben a dolgozók lehetséges eloszlásainál az egyes dolgozók típusát függetlennek tekintettük („visszatevéssel húztunk" W halmazból), ami arra az intuitív képre szeretne utalni, hogy a vállalatok viszonylag keveset tudnak megállapítani a dolgozók típusáról egy ilyen környezetben.
Ha viszont a dolgozók típusai között valamilyen korrelációt feltételezünk, akkor elképzelhető, hogy a vállalatok erősebb következtetéseket tudnak levonni, így az aszimmetrikus információ mellett stabil kimenetelek valamilyen értelemben közelebb lehetnek a stabil kimenetelekhez. Ehhez azt a meglehetősen szigorú feltételezést tesszük, hogy az Ω halmaz elemei ugyanannak a típushalmaznak a permutációiból áll. Ilyenkor a következő állítást mondhatjuk a kétféle stabilitási fogalom egybeeséséről:

48. Állítás. *[10] Tegyük fel, hogy monotonitási 1 és szupermodularitási 2 feltételezés igaz és Ω permutációk egy halmaza. Ekkor az aszimmetrikus információ melletti stabilitás egybeesik a teljes információ mellettivel, ha az alábbiak közül legalább az egyik teljesül:*

1. *a különböző vállalatok különböző típusúak*

2. a különböző dolgozók különböző típusúak.

A téma részletesebb leírása a bizonyításokkal együtt megtalálható a [10] cikkben. Nekünk belőle csak az előbbi állítás fontos, későbbi következtetések levonása miatt.

3.3.3. Stabilitás és árazás kapcsolata

Térjünk vissza megint a hiányos információs eset további tárgyalására. Ebben a részben a stabil kimenetelek tulajdonságait vizsgáljuk úgy, hogy néhány piaci környezetben is tapasztalható tulajdonságot is beveszünk az eddigi modellünkbe. Láttuk korábban, hogy mely feltételek mellett lesz a piac hatékony (44. tétel). A 43. lemmában pedig láttuk, hogy ugyanezen feltételek mellett, ha nem teljesül a hatékonyság, akkor nem lehet stabil a párosítás, mert mutatunk egy olyan fizetést, ami mellett egy meg nem alakult pár mindkét fele biztos lehet benne, hogy jobban jár. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy vajon van-e valamilyen olyan előre rögzített árrendszer, amiben megbízhatunk és hatékony kimenetelhez fog vezetni anélkül, hogy a piac szereplőinek bértárgyalás útján kelljen megegyezniük.
A következőkben vezessük be az „árban fenntartható kimenetel” (price-sustainable outcome) fogalmát. Az alapötlet az, hogy egy információs aszimmetria melletti stabilitással analóg fogalmat szeretnénk alkotni a korábbiak szerint. Annyi a különbség, hogy itt megköveteljük, hogy mind a dolgozók és mind a vállalatok direkt kapcsolat helyett a piaci árak szerint találjanak egymásra. Ezért ebben a kontextusban inkább úgymond árfenntarthatóságról beszélünk aszimmetrikus információ melletti stabilitás helyett.
Így viszont egy jelölt az elhelyezkedését csak a létező árak elfogadása mellett kifogásolhatja, amivel nehezebbnek tűnhet egy blokkolás létrejötte.

Az előbb felvázoltak értelmében tehát mondhatjuk azt is, hogy a vizsgált kétoldali piacon, amit jelen esetben a munkaerőpiacnak feleltetünk meg, a lehetséges partneri kapcsolatok a jószágok, azaz az i dolgozó és j vállalat között (i, j), ha pedig nem jön létre i és valamelyik vállalat között semmilyen kapcsolat, akkor $(i, \emptyset)$.
Legyen $\mathbf{P} : I \times J \cup \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ a piacot jellemző ármátrix, ahol $\mathbf{P}_{ij}$ az a fix fizetés, ami i és j között megvalósulhat. Tegyük fel még, hogy $\mathbf{P}_{i\emptyset} = \mathbf{P}_{\emptyset j} = 0$ $\forall i \in I$ és $j \in J$-re. Így a továbbiakban az árak elfogadása melletti $\mu : I \to J \cup \{\emptyset\}$ kimenetelekről lesz szó $\mathbf{P}$ ármátrix mellett. Ezekre is hasonlóan bevezethetjük az egyénileg racionalitás definícióját:

49. Definíció (Árelfogadás mellett egyénileg racionális kimenetel). *[10] A $(\mu, \boldsymbol{P}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$-ra azt mondjuk, hogy* ***árelfogadás mellett egyénileg racionális kimenetel****, ha $\nu_{\mathbf{w}(i)\mathbf{f}(\mu(i))} + P_{i,\mu(i)} \geq 0$ $\forall i \in I$ és $\phi_{\mathbf{w}(\mu^{-1}(j))\mathbf{f}(j)} - \boldsymbol{P}_{\mu^{-1}(j),j} \geq 0$ $\forall j \in J$.*

Persze ehhez a definícióhoz is hozzátartozik, hogy a vállalatok ismerik a náluk dolgozók típusát, mi pedig ne felejtsük el, hogy egy már létrejött párosítást vizsgálunk.
A következő definíció már az árban fenntarthatósághoz kapcsolódik:

50. Definíció (Ψ-árfenntartható kimenetel). *[10] Vegyük az árelfogadás melletti egyénileg racionális kimenetelek egy nemüres Ψ részhalmazát. Ekkor a $(\mu, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{f}) \in \Psi$ árelfogadás melletti kimenetel Ψ-árfenntartható (vagy csak Ψ-fenntartható), ha $\nexists\ i \in I$ és $j \in j$, amelyekre*

$$\nu_{\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{f}(j)} + \boldsymbol{P}_{ij} > \nu_{\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{f}(\mu(i))} + \boldsymbol{P}_{i,\mu(i)},$$

vagy

$$\phi_{\boldsymbol{w'}(i),\boldsymbol{f}(j)} - \boldsymbol{P'}_{ij} > \phi_{\boldsymbol{w'}(\mu^{-1}(j)),\boldsymbol{f}(j)} - \boldsymbol{P'}_{\mu^{-1},j}$$

minden olyan $\boldsymbol{w'} \in \Omega$ típusra és $\boldsymbol{P'} : I \times J \to \mathbb{R}$ ármátrixra, amelyre

$$(\mu, \boldsymbol{P'}, \boldsymbol{w'}, \boldsymbol{f}) \in \Psi,$$

$$\boldsymbol{w'}(\mu^{-1}(j)) = \boldsymbol{w}(\mu^{-1}(j)), \quad \text{és}$$

$$\boldsymbol{P'}_{i',\mu(i')} = \boldsymbol{P}_{i',\mu(i')} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{P'}_{i',j} = \boldsymbol{P}_{i',j} \quad \forall i' \in I.$$

Próbáljuk meg értelmezni az előbbi definíciót. Egyrészt – hasonlóan a korábbi stabilitási definíciókhoz – a i dolgozó nem járhat jobban semelyik másik vállalattal sem a $\mathbf{P}$ ármátrix mellett. Másrészt a vállalat oldaláról egy kicsit összetettebb a helyzet. Nézzük meg, hogy az egyes szereplők miket tudnak. Minden vállalat tudja a saját dolgozójának a típusát és minden létrejött kapcsolat $\mathbf{P}_{i,\mu(i)}$ ára mindegyik szereplő számára nyilvános. Feltesszük még azt is, hogy minden dolgozó és vállalat ismeri azoknak a lehetséges (de nem feltétlenül megvalósult) kapcsolatoknak az árát, amiben saját maga szerepel. Azt viszont nem tesszük fel, hogy egy j vállalat ismerné egy olyan (i', j') párnak az árát, amiben $\mu(i') \neq j'$. Azaz a vállalatok nem tudják azoknak a lehetséges munkaviszonyoknak az árát, amik nem köttettek meg és nem is szerepel benne saját maga.

Egy árelfogadó kimenetel pedig olyankor veszítheti el a Ψ-fenntartható tulajdonságát, amikor valamelyik szereplő nem szeretne a jelenlegi párjával lenni, mert vagy egyedül jobban jár, vagy valaki mással, figyelembe véve, hogy milyen árakon (fizetéssel) szerződhet és, hogy a másik fél ebbe beleegyezik-e. Ismét figyelembe kell vennünk j vállalat ismereteit. Ahhoz, hogy a fenntarthatóság elbukjon a j vállalat miatt, neki egy olyan, számára jobb alternatívát kell találnia, amelyre teljesül, hogy minden $\mathbf{w'}$ típusra és $\mathbf{P'}$ ármátrixra – amik teljesítik a fenti három kritériumot is – jobban jár. Ezek a kritériumok pedig azt jelentik, hogy azon túl, hogy az így kapott $(\mu, \mathbf{P'}, \mathbf{w'}, \mathbf{f})$ lehetséges kimenetel benne van a vizsgált halmazban, legyen összhangban j típusra és a fizetési mátrixra vonatkozó ismereteivel.

A következőekben vezessünk be egy iteratív fogalmat a vizsgált Ψ halmazokra:

51. Definíció (Árfenntartható kimenetel). *[10] Legyen Ψ^0 az árelfogadás melletti egyénileg racionális kimenetelek halmaza. Ekkor $\forall k \geq 1$-re legyen*

$$\Psi^k = \{(\mu, \mathbf{P}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in \Psi^{k-1} : (\mu, \mathbf{P}, \mathbf{w}, \mathbf{f})\ \Psi^{k-1} - \textbf{fenntarthat}\text{ó}\}.$$

*Ekkor az **árfenntartható** kimeneteleket megkaphatjuk a következőképpen:*

$$\Psi^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Psi^k.$$

52. Definíció (Önfenntartható kimenetel). *[10] Az árelfogadás melletti egyénileg racionális kimenetelek egy nemüres C részhalmaza **önfenntartható**, ha minden $(\mu, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{f}) \in C$ eleme C-fenntartható.*

Egy előzőekkel analóg lemma:

53. Lemma. *[10] Az árfenntartható kimenetelek Ψ^∞ halmaza önfenntartható. Ha pedig C önfenntartható, akkor $C \subset \Psi^\infty$.*

Emiatt tehát ahhoz, hogy egy $(\mu, \mathbf{P}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ kimenetelről megmutassuk, hogy árfenntartható elég egy olyan C halmazt találnunk, ami önfenntartható és $(\mu, \mathbf{P}, \mathbf{w}, \mathbf{f}) \in C$.

Végül gondoljunk bele, hogy az árban fenntartható kimenetelek milyen kapcsolatban állnak az információs aszimmetria melletti stabil kimenetelekkel. Mivel az egyes tranzakciók csak a megjelölt árak mellett mehetnek végbe, ezért a vállalatok lehetséges következtetései jóval egyszerűbbek lesznek, így egy ilyen rendszerben könnyebben azonosíthatják, hogy megéri-e (és ez el is érhető-e) a jelenlegi partnerükkel felbontani a kapcsolatot vagy sem. Viszont a szereplők óhatatlanul belegondolnak, hogy a fizetések esetleges megváltoztatásával tudnának-e előnyösebb pozícióba kerülni, így ha az árak nincsenek hatóságilag szabályozottan lerögzítve, inkább az eredeti stabilitásra törekednek a szereplők. Ez az észrevétel is intuitívan magyarázza a következő állítást, miszerint az aszimmetrikus információ mellett stabil kimeneteleknek bővítése az árban fenntartható kimenetelek halmaza az alábbi módon:

54. Állítás. *[10] Legyen $(\mu, \mathbf{p}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ egy aszimmetrikus információ melletti stabil kimenetel. Ekkor van olyan $\mathbf{P} : I \times J \to \mathbb{R}$ kiterjesztése $\mathbf{p}$-nek (azaz $\forall i \in I$ esetén $\mathbf{P}_{i,\mu(i)} = \mathbf{p}_{i,\mu(i)}$), amire $(\mu, \mathbf{P}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$ árban fenntartható kimenetel.*

A bizonyítás illusztráló példával megtalálható a [10] cikkben.

4. A biztosítási piac modellezése

Ahogyan az előző fejezetben láthattuk, a fizetéskövető párosítási algoritmussal egyensúlyi helyzetet találtunk a modell szerinti munkaerőpiacon. Aktuáriusként felmerülhet a kérdés, hogy vajon ehhez hasonlóan lehetne-e egyéneket megfelelő biztosítási szerződésekkel így optimálisan párosítani.
Azt már számos tanulmány alátámasztja, hogy a piac sajátosságának számító információs asszimmetria miatt az ügyfelek oldalán fellépő összhasznosság vesztessége ellensúlyozható ügynökök bevonásával, akik megfelelő szerződéssel párosítják össze az ügyfeleket. Ilyen modell található például a [2] cikkben is. Itt azt feltételezi a szerző, hogy ügynökök nélkül a biztosítási termékeket véletlenszerűen választják a különböző típusú ügyfelek. Ezzel szemben ha a 3.3 részre gondolunk, ott valamilyen minimális előzetes információt fel tudnak használni a szereplők és aszerint a számukra elérhető legjobb állapotot keresni.
Ebben a fejezetben először megvizsgáljuk azt, hogy a korábbi teljes párosítások elméletét miképpen lehetne a biztosítási piacra alkalmazni és esetleg milyen következtetéseket tudunk levonni. Ezután pedig kísérletet teszünk a 3.3 részhez hasonlóan információs aszimmetriát is figyelembe venni a piacon.

4.1. Biztosító-biztosított párosítás mindent ismerő ügynökök segítségével

Az, hogy az ügynök milyen szempontok szerint párosítja az egyes ügyfeleket a lehetséges biztosításokkal, szinte mindig a modell feltevéseitől függ. Young-Ju Lee, a [8] cikk szerzője csupán annyit tételezett fel, hogy valamilyen sorrend szerinti preferenciákkal rendelkeznek a felek és az ügynöknek az e szerinti stabil párosítást kell létrehoznia, pont mint a 2.2 fejezetben bemutatott felvételi eljárásnál. A cikk a koreai biztosítási piacból indul ki, ahol az ügynökök jellemzően a biztosítótársaságok érdekeit képviselik. Arra kíváncsi, hogy ha ezt figyelembe véve készítünk stabil párosításokat, ami valamilyen értelemben optimális mindkét fél számára, mennyire jogos az ügyfelek oldalán fellépő bizalmatlanság a biztosítók felé. Az alábbiakban ennek a módszernek az eredményeit tárgyaljuk.

Tekintsük a biztosítási piac egy $\{I, J\}$ szeletét, ahol $I = \{i_1, ..., i_m\}$ a potenciális ügyfelek halmaza, $J = \{J_1, ...J_n\}$ pedig a biztosítótársaságok, amik közül az ügyfelek választhatnak, hogy melyiknél kívánják megkötni biztosításukat. A szerző itt feltételezte, hogy ugyanazt a típusú terméket szeretnék megkötni és minden biztosítótársaság kínál egy abba a kategóriába sorolhatót.
Tegyük fel, hogy minden ügyfélnek van valamilyen szigorú preferenciarendezése a biztosítók halmazán. Ez adódhat mind a termékek esetleges árnyalatnyi különbségeiből, például a kiegészítők különbözőségéből de akár olyan szubjektív dolgok is belejátszhatnak, mint az egyén bizalma a „márkában” vagy a földrajzi közelsége a biztosítóhoz.

Továbbá a modell feltételezi, hogy a biztosítók is megadják személyes preferenciáikat a potenciális ügyfelek mindegyikén. Ez persze a valóságtól eléggé elrugaszkodottnak tűnhet, de erre szükség van a modellhez. Ezt a kockázatelbírálást az ügynökök végzik, akik az egyes ügyfelek adatai alapján rangsorolják az embereket (ehhez korábbi tapasztalataik alapján aktuáriusok tudnak adatelemzéseket és predikciós modelleket képezni). Legyen a J_k biztosítónak $q_k \in \mathbb{N}$ az a korlátja, aminél több szerződést már nem tud megkötni. Ennek a korlátnak van realitása, ha például arra gondolunk, hogy előírt szavatolótőke mennyiséget kell tartania minden egyes szerződésre.
Legyen $J^* = \{j_1 = J_{11}, j_2 = J_{12}, ..., j_{q_1} = J_{1q_1}, ..., j_{\sum q_i} = J_{nq_n}\}$ a 14 megjegyzésben is említett halmaz, amit úgy kapunk, hogy mindegyik biztosítóhoz tartozó J_k-t lemásoljuk q_k-szor (biztosító kapacitásának megfelelően), azaz az így kapott pontok mindegyikéhez hozzárendelhető értelemszerűen valamelyik biztosító, aminek a preferenciáit kell követnie a pontnak, amivel az $\{I, J^*\}$-on az eredeti Gale-Shapley algoritmussal stabil párosítás kapható. Vagyis itt a páros gráfunk két komponense I és J^*. A gráf teljes páros gráf, hiszen feltettük, hogy mindenkinek van az ellentétes halmazon valamilyen szigorú preferenciarendezése. Egy P párosításban az $\{i, J_{kl}\} \in P$ él, jelentse azt, hogy az i ügyfél szerződést köt a J_k biztosítóval. Ez technikailag könnyebbé teszi majd a következő állítás bizonyítását. A továbbiakban $i \in I$-hez jelölje $P(i) \in J^*$ az $\{I, J^*\}$ teljes páros gráfon adott P stabil párosításban azt a pontot, amire $\{i, P(i)\} \in P$.

55. Definíció. *Legyen P és P' két stabil párosítás a $\{I, J^*\}$ teljes páros gráfon. Azt mondjuk, hogy $P >_{J^*} P'$, ha $P(j) \geq_j P'(j)$ $\forall j \in J^*$. Ez lényegileg azt jelenti, hogy a P párosítás jobb a biztosítóknak, mint P', azaz a stabil párosítások halmazán számukra egy Pareto-javítás.*

Ez előbbi a 8. definíciót eleveníti fel.

56. Állítás. *[8] A biztosítók számára optimális stabil párosítás a lehető legrosszabb az ügyfelek számára a stabil párosítások halmazán.*

Bizonyítás. Elég azt belátnunk, hogy ha P és P' stabil párosítás $\{I, J^*\}$-on, akkor

$$P >_{J^*} P' \iff P' >_I P.$$

Mivel itt visszavezettük a párosítást a „házassági” modellre, elég ott belátni az előbbi ekvivalenciát. Ezt pedig már beláttuk a fentebbi 9. állításnál. □

57. Következmény. *[8] Ebből arra következtethetünk, hogy amennyiben az ügynökök a biztosító érdekeit nézve alkotják meg a stabil párosítást, az az ügyfelek számára a legrosszabb stabil párosítás lesz.*

4.1.1. Következtetések

Elméletileg kívánatos lenne a biztosítási piacon az ügyfeleket úgy allokálni, hogy a kapott párosítás stabil legyen, hiszen az pont azt jelentené, hogy ha lenne is valamelyik ügyfél számára egy olyan biztosító, amellyel szívesebben szerződne, az a vállalat viszont nem szeretné lecserélni egyik ügyfelét sem erre az emberre (és nem is tudja befogadni), azaz egy olyan helyzetbe állítjuk be a piacot, ahonnan ha odaér nem fog elmozdulni.
Ellenben kiderült, hogy az előbbi kívánatos tulajdonságot nagyban ellensúlyozza az a gyakorlat, hogy az ügynökök a biztosító számára optimális stabil párosítást készítik el. A gyakorlatban ez eredményezheti azt, hogy az úgynevezett ügynök-alapú „push" marketing hatására megcsappant az embereknek a biztosítókba vetett bizalmuk, amiről a bemutatott [8] cikk részletesen beszámol. Ezzel az eredeti kérdésére azaz, hogy miért lettek bizalmatlanok a fogyasztók a biztosítók iránt, a választ a közvetítési rendszer stratégiájában látta. Viszont annak is megvan a maga oka, hogy hagyományosan ez a közvetítési rendszer tudott kialakulni. A biztosítási termékek ugyanis ahhoz túl összetettek, hogy az ügyfél magától el tudja dönteni melyik számára a kedvezőbb vagy egyáltalán úgy érezze, hogy szüksége lenne rá. Ezért az a bevett szokás alakult ki, hogy az egyes biztosítók ügynökei célcsoportokat keresnek és megpróbálják őket meggyőzni a termék előnyeiről, ez a „push" marketing. Erre a [8] cikk szerzője azt javasolja, hogy a változás megfontolandó az ügynökrendszerben, akár felső szabályozás útján is.
Hasonló eredményre jutott még a [2] cikk is, csak kissé más módszerrel, amikor azt vizsgálta, hogy milyen ügynök-stratégiákkal lehetne az ügyfelek számára a lehető legnagyobb összhasznosságot elérni és minderre hogyan lehetne motiválni az ügynököket. Ott arra jutottak, hogy semmiképp sem a biztosítóknak kellene a jutalékokat kifizetnie, független ügynök-hálózat kellene.

4.1.2. Modellkritika

Az elemzéshez egy egyszerű elméleti párosítási modellt alkalmaztunk, megpróbáltuk értelmezni a biztosítási piacon található negatív észrevételeket.
A párosítás alapjául szolgáló preferenciák felállításának realitása és helyessége néhol nem tűnik valósághűnek.
Egyrészt a biztosítók oldaláról nem várhatjuk el, hogy a biztosító minden ember kockázatosságát ismerje egyszerre (ha még meg is tudná mérni egyesével, akkor sem az összes emberre). Annak már nagyobb realitása van, hogy egy ügyfél a piacon megtalálható nem túl sok biztosítótársaságot rangsorolja magának, itt egyedül az információs asszimmetria miatt fellépő rossz döntései miatt kérdőjelezhető meg a feltevés. Erre a már többször is említett [2] cikk ad részletesebb elemzést.
Összességében elmondható ez a modell – mindamellett, hogy újszerű módon a stabil párosítások kontextusába helyezi a biztosítási piacot – túl kevés biztosítás-specifikus feltevést alkalmaz, érdemes lenne esetleg egy kifinomultabb modellt fejleszteni rá, hasonlóan a 3. fejezetben bemu-

tatott megközelítésekhez.

4.1.3. Összevetés egy másik közvetítői modell eredményeivel

Az előző résznek tehát az volt a tanulsága, hogy az a jelenség, hogy az ügyfelek részéről bizalmatlanság tapasztalható a biztosítók iránt, abból is eredeztethető, hogy a közvetítői rendszer nem független, hanem a biztosítók felé húz. Erre persze a fenti magyarázat – a modell túlságosan is leegyszerűsített szerkezetével, néhol kissé elrugaszkodott feltételezéseivel – nem annyira áll stabil lábakon. Ezért nézzünk meg egy általánosabban elterjedt modellt a biztosítási piacra, amiből hasonló következtetésre lehet jutni. Ebben a fejezetben vázlatosan ismertetjük a [2] cikkben szereplő modellt, mely ennek leírását tűzte ki céljául.
Először bemutatjuk a közvetítés nélküli alapmodellt, ahol az ügyfelek találomra választanak biztosítást, ezután ismertetjük a jutalékrendszeres közvetítői modellt, ami növelni fogja a rendszer hatékonyságát, majd megvizsgáljuk, hogy melyik oldalnak kellene a közvetítő ügynököket fizetni.

Tegyük fel, hogy a piacon minden fogyasztó kockázatát ugyanaz a várható veszteség reprezentálja, legyen ez a $C > 0$ valószínűségi változó. A fogyasztók kockázati profilját viszont egyénenként eltérő $x \in [0, 1]$ jellemezze. Ez jelentse azt, hogy káresemény bekövetkezésekor hányad részét kártalanítja a biztosító. Legyen $v > 0$ a fogyasztónak az a pénzzel is összemérhető hasznossága, ami abból fakad, hogy van biztosítási szerződése (biztonságérzetből eredő hasznosság).
Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy összesen két biztosító közül választhat, amelyek $j = 0$ és 1 úgy, hogy rendre $x = 0$ és $x = 1$-ben kínálnak szerződéseket.
Tegyük fel, hogy a fogyasztók $\phi \in [0, 1]$ hányada jól informált a kockázati profiljáról és az informált és nem informált fogyasztók eloszlása egyenletes. Ha pedig a fogyasztó számára nem megfelelő biztosítást köt, akkor haszonveszteséggel szembesül.
Ha a két biztosító α_0 és α_1 áron adja a termékét, akkor az x kockázati profilú fogyasztónak (továbbiakban x) a nettó hasznossága:

- $v - \alpha_0 - tx$, ha $j = 0$-val köt biztosítást,
- $v - \alpha_1 - t(1 - x)$, ha pedig $j = 1$-gyel,

ahol $t > 0$ a marginális hasznossági veszteség mérőszáma. Egy informált fogyasztónak mindegy, hogy melyik biztosítást választja, ha

$$x = x(\alpha_0, \alpha_1) = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 + t}{2t}. \tag{23}$$

A rosszul informált fogyasztóknak csak valamilyen elvárásuk van a kockázati profiljukról és az árról, legyenek ezek x^e és α^e, így arra számítanak, hogy az elért hasznosságuk

- $v - \alpha_0^e - tx^e$, ha $j = 0$-val köt biztosítást,
- $v - \alpha_1^e - t(1 - x^e)$, ha pedig $j = 1$-gyel.

Itt az olyan egyensúly állapotot szeretnénk megvizsgálni, amikor mindkét biztosító ugyanazon az α^* áron adja a biztosítását, és egyiknek sem érdemes változtatni ezen, amíg a másik sem tesz így (szimmetrikus Nash-egyensúly). Ha mindkét biztosító ugyanazon az áron adja a termékét, abból az fog következni, hogy a rosszul informált fogyasztókon fele-fele arányban fognak osztozni. Ebből felírhatóak a biztosítók keresleti függvényei és profit függvényei, amiből, amiből kijön (a technikai részletek kifejtése megtalálható a [2] cikkben), hogy az egyensúlyi ár:

$$\alpha^* = c + \frac{t}{\phi}, \tag{24}$$

az egyensúlyi profitok pedig:

$$\pi_j^* = \frac{t}{2\phi}. \tag{25}$$

Ez alapján a tudatlan fogyasztók nettó várható hasznossága a

$$u_u^e = v - c - t\left(\frac{2+\phi}{2\phi}\right) \tag{26}$$

mennyiségnek adódik, míg a jól informált fogyasztóknál ugyanez

$$u_i^e = v - c - t\left(\frac{4+\phi}{4\phi}\right). \tag{27}$$

Ez utóbbi két eredményt összehasonlítva látszik mekkora várható hasznossági különbözettel szembesülnek a nem informált fogyasztók, ha véletlenszerűen kötik meg a szerződést.
Alkalmazva az eddigieket e gazdaság egészére a fogyasztók nettó várható hasznosságainak és a biztosítók profitjainak összegeként előálló összgazdasági jólét a következő:

$$\Phi^* = v - c - \left(\frac{2-\phi}{4}\right). \tag{28}$$

Ezután a modell kiegészíthető közvetítői tevékenységgel, aminek hatására azt várjuk, hogy ez az összjóléti hasznossági mutató javulni fog. Az viszont nem egyértelmű, hogy a közvetítőket milyen módon vesszük figyelembe. Alapvetően két rendszert lehet megkülönböztetni:

1. **Független tanácsadói rendszer:** ebben az esetben közvetlenül a biztosítottak fizetik meg az ügynök munkáját, a biztosítók és ügynökök között semmilyen együttműködést nem teszünk fel. Ilyenkor a kezdetben tudatlan, de az ügynök által informált és jól informált ügyfelek között a biztosítók nem tudnak különbséget tenni.

   A fogyasztók biztosítókkal történő párosítását a következőképpen képzeljük el a modellben: első körben a biztosítók rendre bejelentik α_0 és α_1 áraikat. Ezután az ügynökök is elárulják, hogy mekkora fix f díjért vállalják a nem informált fogyasztók kockázatelemzését, amennyiért azok vagy igénybe veszik az ügynök szolgáltatását vagy nem. Végül a fogyasztók döntenek, hogy kérnek-e és melyik biztosítást. Az eddigiekhez még egy paramétert veszünk be: legyen k az ügynök egységnyi kockázatelbírálásra eső költsége.

Ekkor az egyensúlyi rendszerben minden tudatlan fogyasztó igénye fogja venni az ügynöki szolgáltatást, amennyiben $f \leq t$, ellenkező esetben senki sem és az előbbi közvetítői rendszer nélküli helyzet áll elő. Az ügynöknek viszont csak akkor fogja megérni a tevékenysége, ha $k \leq \frac{1}{4}t$. Ilyenkor az összjólétnek

$$\Phi^* = v - c - (1 - \phi)k - \frac{1}{4}t \tag{29}$$

adódik. Ezt összevetve a (28)-al láthatjuk, hogy a független közvetítői rendszer pontosan akkor növeli az összjólétet, ha $k \leq \frac{1}{4}t$. Ebből azt a következtetést lehet levonni, hogy ha az egyéneknek megéri ügynökökhöz fordulni, akkor az egész rendszer hatékonyabb lesz, mint nélküle.

2. **Jutalékrendszer:** a biztosítók fizetik az ügynökeiket minden egyes egyéni tanácsadás után. Itt már feltesszük, hogy a biztosítók különbséget tudnak tenni a fogyasztók típusai között. Ebben a felállásban óhatatlanul felmerül, hogy a biztosítók ár szerint diszkriminálják a fogyasztókat.

   Eszerint a modell szerint is először a biztosítók közlik az áraikat, annyi különbséggel, hogy külön α_{ij} és α_{uj} árat mondanak az informált és nem informáltakat megkülönböztetve. Ezután az ügynökök közli a g árát a kockázatelemzésének, amit az a biztosító fog kifizetni neki, akinél veszi a vizsgált fogyasztó a biztosítást, de a minden esetben a fogyasztó dönt, hogy igénybe venne-e közvetítői szolgáltatást.

   Tehát eddig annyiban térünk el a tanácsadói rendszertől, hogy a fogyasztóknak az ügynöki szolgáltatásért nem kell egységesen fizetniük, hanem a biztosító fizeti ki, amennyiben megköti a biztosítást, aminek viszont beépülhet az árába ez a jutalék. Így hasonló kikötések mellett ugyanarra juthatunk, azaz

$$\Phi^* = v - c - (1 - \phi)k - \frac{1}{4}t. \tag{30}$$

   Ehhez az eredményhez viszont fel kellett tennünk, hogy az ügynökök semmilyen stratégiát nem követnek, minden ügyfélnek a számára legelőnyösebb szerződést közvetítik ki.

   Azonban könnyen előfordulhat és számos tanulmány ([2], [8], [4]) is érvel mellette, hogy jutalékrendszer esetén az ügynökök olyan szerződés megkötésére is ösztönözhetik a naiv fogyasztót, ami neki nagyobb hasznot hozhatna. Itt olyan szituációt képzeljünk el, amikor az ügynöknek haszna származik a rosszul párosításból (például nem érné meg a fogyasztónak biztosítást kötnie, de meggyőzi róla, vagy az egyik biztosítótársasággal játszik össze az ügynök).

Összességében a [2] cikkben arra a következtetésre jutottak, hogy a piac egészének hatékonyságára nézve jól hat az, ha közvetítői rendszer segítségével kötnek biztosítást az ügyfelek. A kétféle közvetítői rendszerben ugyanannak az összjólétnek az elérésére képes, de a jutalékrendszerben visszaélésekre van lehetőség a biztosítók javára. Ugyanerre a következtetésre jutott a fentebb ismertetett, stabil párosításokra épülő módszer is, de egyértelműen hangsúlyozni kell, hogy mennyire eltérő modellfeltevéseket alkalmaztak. A stabil párosítási alaphelyzetben azon túl, hogy több szereplő volt biztosítói oldalon, ott nem csak a fogyasztóknak lehettek preferenciái, döntési lehetőségei, hanem a biztosítóknak, ráadásul volt is egy keretlétszámuk, amivel az utóbbi nem számol. Ellenben a két esetben a fogyasztók jellemzése még a kockázati profiljuk jellemzésében sem egyezik, itt a közvetítői modellben kap nagyobb hangsúlyt a pontos karakterizálása.

4.2. Ügynökmentes biztosítotti allokációk – információs aszimmetria a biztosító oldalán

Kézenfekvő dolog lenne a 3.3 részben ismertetett Liu-féle modellek alkalmazhatóságát megvizsgálnunk egy fiktív biztosítási piacon, ami illeszkedik a modell keretrendszerébe. Természetesen azt is meg kell néznünk, hogy miként lehet megfeleltetni neki és ezek mennyire tűnnek ésszerű modellfeltevésnek.

Legyen a megszokott I a fogyasztók, J pedig a biztosítók véges halmaza. Feltesszük, hogy a biztosítók mindegyike egymáshoz hasonló szerződéseket kínál, ezeknek a típusát az $\mathbf{f} : J \to F$ függvény adja meg, ahol $F \subset \mathbb{R}$ a lehetséges típusok halmaza. A fogyasztók kockázati típusát pedig a $\mathbf{w} : I \to W$ függvény adja meg.
Megint legyen $|I| = |J|$, azaz egy az egyhez párosítást keresünk a két halmaz között, amiből a 14. megjegyzés szerint visszakaphatjuk az eredeti esetet, amikor jellemzően jóval kevesebb biztosító van, mint amennyi fogyasztó.
A különböző hasznossági mérőszámokban csak az alábbi eltérések lehetnek, de ezt a megkülönböztetést is inkább logikailag kell megtennünk, mivel technikailag nem változtat:

- $u_i^w(j) := \nu_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(j)} - p_{ij}$ a $w = \mathbf{w}(i)$ típusú fogyasztó várható összelégedettsége a j biztosítónál történő szerződéskötés esetére $p_{ij} \in \mathbb{R}$ biztosítási díj mellett. Tegyük fel, hogy $\nu_{\mathbf{w}(i),\mathbf{f}(j)}$ tartalmazza a várható kárkifizetést a biztosítás megkötésével járó biztonságérzetből fakadó elégedettséget.

- $\pi_j^f := \phi_{\mathbf{w}(i)\mathbf{f}(j)} + p_{ij}$ az $f = \mathbf{f}(j)$ típusú biztosítónak az összhasznossága abban az esetben, ha i fogyasztóval p_{ij} díjon köt szerződést. Itt $\phi_{\mathbf{w}(i)\mathbf{f}(j)}$ (negatív előjellel) a kárkifizetés miatti várható veszteséget tartalmazza.

Ezek a mennyiségek így teljesen megfeleltethetőek a Liu-modell paramétereinek, leszámítva az előjelbeli cserét, de ez sem változtatás valójában.
Ebben az esetben az a feltételezés, miszerint a biztosítók által kínált termékek típusa a fogyasztók számára teljes mértékben ismert, pont ellentmond az előbbi, 4.1.3 részben ismertetett közvetítői modell alapfeltevésének (ott inkább a fogyasztói oldalon fellépő, biztosítási termékek komplexitásából eredő információs aszimmetria volt a vizsgálat tárgya), viszont kiegészítve

azzal, hogy a biztosítók nem ismerik a fogyasztók típusát, nagyon hasonlít az antiszelekciós viselkedés széles körben elterjedt Rothschild-Stiglitz modelljének feltételezésével [12]. A két modellt részletesebben összevetjük a 4.2.1 részben alább.

A $\mathbf{p}$ árakkal kapcsolatban a 3.3 részben az alap megközelítés szerint nem lehetnek a biztosítási díjak lerögzítve, mindig a biztosítók saját érdekeik szerint rendszeresen meg tudják változtatni azokat. Ezt tovább lehet szigorítani a 3.3.3 rész szerinti speciális eset bevezetésével, azaz hogy egy adott j biztosítási termék és i fogyasztó között csak fix $p_{ij} = \mathbf{P}_{ij}$ áron köthető meg a szerződés, ahol $\mathbf{P}$ a rögzített ármátrix.
Mindkét előbb említett megközelítés mellett vannak érvek és ellenvetések. A valóságban az eredetileg „fixre” kiszámolt díjakon ugyanis elképzelhető, hogy valamelyest inkább módosítanának a biztosítók, figyelembe véve a piac lehetőségeit, így talán az eredeti esetet lenne érdemes tekinteni, ráadásul ott erősebb állítások is jöttek ki. Emellett szól még az 54. állítás és az azt megelőző gondolatmenet is. Viszont egy árazó aktuáriusi szemlélettel elfogadható lenne az is, ha egy adott típusú termékre ugyanolyan kockázati típusú fogyasztóknak csak egy bizonyos gondosan kiszámolt áron kínálhatnák a szerződést.
Ha a díjakat a piac megkötések nélkül tudja alakítgatni, akkor várhatóan egy, a feltételek szerinti információs aszimmetria melletti stabil kimenetelnél ki.
Ha belegondolunk, hogy egy kisebb ország piacán általában relatíve kevés biztosítót találunk, érdemes kitérnünk arra a speciális esetre, amikor a vizsgált biztosítók által kínált termékek (itt gondoljunk hasonló, de mégsem egyforma termékekre, például tegyük fel, hogy mindegyik lakásbiztosítás) mind különböző $f \in F$ típussal rendelkeznek. Ekkor teljesül a 48. állítás feltétele, aminek következtében teljes információ mellett is stabil kimenetel lesz a piacon egyensúlyi állapotban. Azaz olyan lesz a piac, mint a 3.1 vagy 3.2 fejezetekben ismertetettek minden speciális tulajdonságukkal.

Felmerül a kétség, hogy az előbbi speciális esetben tehát úgy kapunk olyan stabil helyzetet, ami akkor is az lenne, ha minden információ publikus lett volna, azaz elképzelhető lenne, hogy nincs is egyáltalán szükség a közvetítői rendszerre. Eszerint valóban levonhatnánk ezt a következtetést, de helyette inkább ismerjük fel, hogy ez a modell alapfeltevése szerint nem lenne alkalmazható. Ugyanis az elején, amikor feltettük, hogy a fogyasztók ismerik a biztosítások típusait pont azt lehetetlenítettük el, hogy a közvetítői rendszer által adott többletismereteket vizsgálni lehessen. Így a Liu-modellben csak a biztosítók által elszenvedett információs hiányt lehet kezelni, ezért általánosságban az ilyen felállás a biztosító antiszelekciós kockázatainak vizsgálatára alkalmas lehet. Ehhez először vázolunk egy nem stabil párosításokra épülő, de bevett modellt és néhány állítását (a részletekbe nem belemenve) az antiszelekció vizsgálatára.

4.2.1. Összevetés az antiszelekciót vizsgáló Rotschild-Stiglitz modellel

Az alábbiak [12], illetve a biztosítási modellek a közgazdaságtanban tárgyon szerzett ismeretek felhasználásával készültek.

Tekintsünk egy olyan biztosítási piacot, amelyben csak a különféle kockázatú fogyasztók rendelkeznek döntési képességgel. A legegyszerűbb esetet nézzük, ahol egy biztosítót vizsgálunk, de az több hasonló biztosítási terméket is kínálhat, amelyek mindegyikének ismerik a típusát a fogyasztók, a biztosító viszont nem ismeri az egyének kockázati típusát, csak az eloszlásukat. Ez máris eltér a Liu-modellnek attól a feltevésétől, hogy egyrészt mindkét fél dönthet, hogy belemegy-e a szerződésbe (itt csak a fogyasztó) illetve, hogy fix terméktípusok vannak. Ennek az eltérésnek az oka, hogy kifejezetten az antiszelekciós kockázat hatását szeretné vizsgálni, azaz azt a jelenséget, amikor a fogyasztó a valódi kockázatának elhallgatásával szeretne számára kedvezőbb biztosítást kötni.

A biztosítónak az a célja, hogy ne szenvedjen amiatt veszteséget, hogy az esetleg magasabb kockázatú ügyfeleknek túl alacsony áron értékesít biztosítást vagy, hogy alacsonyabb kockázatúaknak ne érje meg megkötni a szerződést. Azaz olyan feltételeket szeretne szabni, hogy lehetőleg minden fogyasztó válasszon biztosítást a saját kockázatának megfelelően. Ebben a modellben lehetőség van a több biztosítós esetet is megnézni, amikor ezek versenyezhetnek egymással és nincsenek mennyiségi korlátaik úgy, mint a stabil párosítási modelleknél.

Az egyszerűség kedvéért csak azt az esetet nézzük meg, amikor csak kétféle típusú fogyasztó van: alacsony és magas kockázatú. Ezt úgy értelmezzük (megint leegyszerűsítve), hogy az adott időszakban ugyanazon nagyságú kár az alacsony kockázatúnál kisebb valószínűséggel következik be (két világállapotuk van a fogyasztóknak: vagy bekövetkezik egy L nagyságú kár vagy nem). Ebben a Rotschild-Stiglitz (továbbiakban RS) modell annyiban reálisabb, hogy az egyes típusú ügyfelekhez rendel valószínűségeket. A Liu-modell ezen hiányossága viszont kiküszöbölhető lenne azzal, hogy az egyes típusokba a kárbekövetkezési valószínűségek alapján soroljuk be az embereket, így akár meg is feleltethetőek. Az viszont mindkét modellben nagy egyszerűsítés, hogy csak egy fix nagyságú káresemény lehet. Ez például kockázati életbiztosításnál helytálló lehetne, de a tipikus nem-élet biztosításoknál inkább valamilyen összetett kockázati modellt kellene használni.

A biztosítási termékeket is karakterizáljuk aszerint, hogy a kár mekkora hányadát hagyja meg önrésznek. Azt is lehetőségként beveszi, hogy túlbiztosítsa magát az ügyfél. A Liu-modellben is a biztosítások típusát ez alapján lehetne meghatározni. Viszont elég nagy eltérés, hogy a RS-modellben az árakat előre valamelyik típus várható kárnagyságával határozza meg.

A RS-modellben egyensúlyi állapotról akkor beszélünk, ha teljesülnek a következők:

- A fogyasztók maximalizálják a várható hasznosságukat.
- Egyik szerződés sem ad negatív várható profitot.
- Nincs az egyensúlyi halmazban lévőkön kívül olyan szerződés, ami nemnegatív profitot ad.

Ehhez a biztosítónak olyan szerződéseket kell kínálnia, hogy semelyik típusnak ne érje meg a másikét választania. Ezt a megfelelő ösztönzési korlátok felírásával lehet vizsgálni. Belátható, hogy ezek egyes esetitől függően az alábbiak valamelyike áll elő egyensúlyban:

- az alacsony kockázatúak teljes biztosítást kapnak, a magas kockázatúak viszont túlbiztosítást,
- a magas kockázatúak teljes biztosítást, az alacsonyak részlegeset,
- mindkét típus ugyanazt a teljes biztosítást kapja.

Az, hogy ezek közül melyik áll fenn, a piac szerkezetéről alkotott feltevéseinktől függ (tökéletes verseny, monopol piac). Fontos megjegyezni, hogy az egyes típusok arányát figyelembe véve az egyensúly nem mindig létezik és nem is mindig Pareto-hatékony. Ez egy fontos eltérés a Liu-modelltől, ahol az egyensúly az aszimmetrikus információ melletti stabilitás jelentette és láttuk a 38. állításban, hogy bármilyen típusok mellett mindig létezik stabil állapot.
Összességben a fő különbség a RS és a Liu modell között abban rejlik, hogy ez utóbbiban a biztosítót is döntési jogok illetik meg, nem csak passzívan megköti az ezt szándékozó ügyféllel a szerződést. Van egyrészt méretbeli korlátja, másrészt ha a kissé hiányos ismereteiből azt a következtetést vonja le, hogy nem éri meg neki, nem kötelező megkötnie a szerződést. Ez alapján elmondhatjuk, hogy a Liu-modell csak részlegesen vizsgálja az antiszelekciót, inkább a piac szereplőit megfelelően szeretné allokálni a biztosító részéről fellépő hiányos ismeretek mellett. Az is jelentős különbség, hogy a Liu-modellben elvileg a szerződés pillanatában kiderül az ügyfél típusa, míg a RS-modellben nem, amit esetleges több periódusú bónusz-málusz rendszerrel lehet például kezelni.

5. Összefoglalás

Jelen szakdolgozat fő célja a népszerű Gale- és Shapley-féle stabil párosítások témakörének közgazdasági modellekben is előforduló alkalmazásainak megismerése, megértése, majd ezeknek a biztosítási piacra való átültethetőségének a vizsgálata volt.

Ehhez először a stabil párosítások matematikájának alapfogalmaival, a Gale-Shapley algoritmussal és néhány fontosabb tulajdonságával ismerkedtünk meg. Ezt a klasszikus stabil házasságok példáján keresztül néztük meg, de szó esett az iskolai felvételi típusú esetről is, az úgynevezett „sok az egyhez” (angolul „many-to-one”) típusról is. Ezt a legtöbb esetben a házassági „egy az egyhez” (angolul „one-to-one”) esetre vissza is vezettük.

Ezután a kétoldali párosítási piacok stabil allokációit ismertük meg a Kelso-Crawford és Crawford-Knoer modelleken keresztül, ez utóbbira információs aszimmetriával terhelt esetet is vizsgáltunk Liu-modelljében. Ilyenkor mindig a munkaerőpiacot tekintettük a modellek környezetének, ott az alkalmazott feltevések látszólag reálisnak tűntek. Végül áttértünk a biztosítási piacon történő alkalmazhatóság vizsgálatára. Annak ellenére, hogy a stabil párosítások alkalmazásainak irodalma rendkívül terjedelmes, biztosítási alkalmazásképp csak a [8] cikket találtuk. A tanulmányban bemutatott modellt némi kritika mellett ismertettük, rávilágítva arra, hogy a Liu-modellben is bemutatott információs aszimmetria bevétele biztosítási környezetben fontos lehet. Ezért ennek az alkalmazhatóságát is megnéztük és összevetettük egy másik biztosítási modellel. További ide kapcsolódó téma lehetne a párosítási piacokon az információs aszimmetriának különféle modellezési lehetőségeit vizsgálni, akár valószínűség alapú feltételezésekkel is (például [9]). Összességében természetesen az ilyen jellegű mikroökonómiai elemzések nem annyira elterjedtek az aktuáriusi gyakorlatban, viszont továbbgondolva érdekes közgazdasági kutatásoknak lehetnek a kiindulópontjai, akár a biztosítási piaccal kapcsolatban is.

Fontos megjegyezni még, hogy a biztosításhoz kapcsolódási modellezési lehetőségek közül a piac vizsgálata csak egy, de felmerült még, hogy lehetne akár társadalmi és demográfiai folyamatok mikroszimulációs modellezésében a háztartás-formálódás párválasztási részéhez is felhasználni stabil párosításokat. Ennek elemzése is érdekes feladat lehetne a házassági piac vizsgálatával a későbbiekben.

Hivatkozások

[1] Vincent Crawford and Elsie Marie Knoer. Job matching with heterogeneous firms and workers. *Econometrica*, 49(2):437–50, 1981.

[2] Uwe Focht, Andreas Richter, and Jörg Schiller. Intermediation and matching in insurance markets. FZID Discussion Paper 04-2009, Stuttgart, 2009. urn:nbn:de:bsz:100-opus-3650.

[3] David Gale and Lloyd S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[4] Hugh Gravelle. Remunerating information providers: Commissions versus fees in life insurance. *The Journal of Risk and Insurance*, 61(3):425–457, 1994.

[5] Alexander S. Kelso and Vincent P. Crawford. Job matching, coalition formation, and gross substitutes. *Econometrica*, 50(6):1483–1504, 1982.

[6] Végh László; Király Tamás, Pap Júlia. *Játékelmélet jegyzet.* 2021. https://tkiraly.web.elte.hu/students/jatekelmelet_jegyzet.pdf, (Letöltés dátuma: 2022.03.02.02.).

[7] Donald Knuth. *Marriages Stables.* Les Presses de l'Universite de Montreal: Montreal, QC, Canada, 1976.

[8] Yong-Ju Lee. Distribution channel, matching, and welfare asymmetry in the korean insurance industry - a hint from matching theory. *Asia Marketing Journal*, 17:89, 01 2016.

[9] Qingmin Liu. Stability and bayesian consistency in two-sided markets. *American Economic Review*, 110(8):2625–66, August 2020.

[10] Qingmin Liu, George J. Mailath, Andrew Postlewaite, and Larry Samuelson. Stable matching with incomplete information. *Econometrica*, 82(2):541–587, 2014.

[11] Alvin Roth. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. *Journal of Political Economy*, 92(6):991–1016, 1984.

[12] Michael Rothschild and Joseph Stiglitz. Equilibrium in competitive insurance markets: An essay on the economics of imperfect information. *The Quarterly Journal of Economics*, 90(4):629–649, 1976.

[13] Lloyd S. Shapley and Martin Shubik. *The Assignment Game I: The Core.* RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1971.

[14] Sabine Zinn. A mate-matching algorithm for continuous-time microsimulation models. *International Journal of Microsimulation*, 5:31–51, 01 2012.

[15] Biró Péter és Fleiner Tamás. A magyarországi felvételi besoroló algoritmusok rövid bemutatása. https://www.felvi.hu/felsooktatasimuhely/archivum/Algoritmusok/a-magyarorszagi -felveteli-besorolo-algoritmusok-rovid-bemutatasa?itemNo=2 (Letöltés dátuma: 2021.11.30.).