Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kosztolányi Kata

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

Népszerű párosítások vizsgálata

Diplomamunka

Témavezető:

Bérczi-Kovács Erika
adjunktus

Operációkutatási Tanszék

Külső témavezető:

Cseh Ágnes
kutató főmunkatárs

KRTK KTI

Budapest, 2022

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban témavezetőimnek, Bérczi-Kovács Erikának és Cseh Ágnesnek szeretném megköszönni a témát, a cikkeket, a mindig tanító szándékú együtt munkálkodást és hogy a legnagyobb türelemmel és rugalmassággal a rendelkezésemre álltak. Emellett köszönöm cikkíró társunknak, Mályusz Attilának a téma mély megértését és ebből fakadó egyértelműsítő kérdéseit.

Köszönettel tartozom társamnak, támogatómnak, Kátay Tamásnak. Hálás vagyok az ELTE Bolyai Kollégium tagjainak, hogy egy motiváló, összetartó közösség részeként tanulhattam, dolgozhattam az elmúlt öt évben.

Végül, de nem utolsósorban pedig nagy hálával tartozom családomnak, amiért lehetővé tették számomra az ország vezető egyetemein való tanulást, illetve támogattak elvetemültebb próbálkozásaim, kitekintéseim kapcsán is.

Tartalomjegyzék

1. Felépítés, bevezetés

1.1. A dolgozat felépítése

Jelen dolgozat igyekszik egy logikailag egybefüggő, egymásra épülő sorrendben bemutatni a szigorú preferencialistás gráfok párosításaira vonatkozó releváns eredményeket, illetve ezek alkalmazását. Az 1.2 szakasz szolgál a téma gráfelméleti fogalmakkal való megágyazására, majd a 2. fejezet 2.1 szakaszában olvashatjuk az operációkutatási szemszögből érdekesebb lineáris optimalizálási bevezetőt. Ezután a vizsgált párosítástulajdonságot átültetjük a gráfelméleti környezetből optimalizálási feladatba a 2.2 szakaszban. A 2. fejezet 2.3 és 2.4 szakaszában kerül sor a szakirodalom jelen dolgozatban vizsgált főbb eredményeinek bemutatására, összefoglalására, amely segítségével a 2.5 szakaszban egy új, a népszerűség eldöntésére tett algoritmikus kísérletet ismerhetünk meg. Ebben a szakaszban azért is vannak bővebben kifejtve az algoritmus lépései és a bizonyítások, mint a megelőző szakaszok esetében, mert nincs hivatkozható szakirodalom, ezen dolgozatban jelennek meg ezek az eredmények először. A 2.6 szakaszban ehhez szorosan kapcsolódva megismerhetünk egy, a népszerűséget eldöntő algoritmus segítségével könnyen megtalálható duális optimumot, vagyis tanút a párosításhoz annak népszerűsége esetén.
Végül, de nem utolsósorban a 3. fejezetben olvashatunk a témakör szerteágazó problémafelvetéseiről, illetve alkalmazási lehetőségeiről.

A felhasznált források között ugyanúgy szerepel tavalyi cikk, mint 1965-ös eredmények, amiből egyrészt láthatjuk, hogy korántsem egy lezárt, jól behatárolt kutatási területről van szó, másrészt viszont fontos kiemelni, hogy a különböző gráfelméleti kérdések irodalma jóval régebbre nyúlik vissza (Euler königsbergi hidak problémája, 1735), mégis fiatal tudományterületről beszélhetünk (főleg a párosítások vizsgálatát előtérbe helyezve).

1.2. Alapvető fogalmak, megfigyelések

Ebben a szakaszban bevezetjük a dolgozat elméleti részében használt fogalmakat, jelöléseket, illetve ezek segítségével megfogalmazunk a későbbiekben hasznos állításokat, megfigyeléseket.

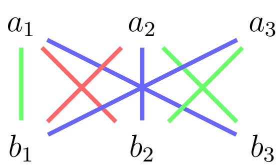
1.1. Definíció. Adott egy $G = (V; E)$ gráf, melyben a csúcsoknak szigorú preferencialistája van a szomszédaikon. Azt mondjuk, hogy egy $u \in V$ csúcs jobban preferálja az M párosítást M' párosítással szemben, ha u párosított M-ben és párosítatlan M'-ben vagy ha $M(u)$ (vagyis az u csúcs M-beli párja) előrébb van u preferencialistáján, mint $M'(u)$.

1.2. Jelölés. Jelölje $\Phi(M, M')$ azon csúcsok számát G-ben, melyek az M párosítást preferálják az M' párosítással szemben (M és M' is G-beli párosítás). Ha $\Delta(M, M') = \Phi(M, M') - \Phi(M', M) > 0$, akkor azt mondjuk, hogy M népszerűbb párosítás G-ben, mint M'.

1.3. Definíció. Egy M párosítás népszerű, ha nincs G-ben nála népszerűbb párosítás, vagyis $\Phi(M, M') \geq \Phi(M', M)$ minden G-beli M' párosításra.

1.1. Állítás. *Az a reláció, hogy egy párosítás népszerűbb egy másik párosításnál, nem tranzitív, vagyis létezik 3 olyan párosítás megfelelő gráfban, melyek körbeverik egymást a népszerűségi összehasonlításban. (Ezt a későbbi 1.7 példában is láthatjuk majd, ott valóban általános gráfra.)*

1.4. Példa. Az alábbi gráfban a zöld párosítás népszerűbb, mint a piros, a piros népszerűbb, mint a kék, és a kék népszerűbb, mint a zöld.



a_1: b_1, b_2, b_3	b_1: a_1, a_2, a_3
a_2: b_1, b_2, b_3	b_2: a_1, a_2, a_3
a_3: b_1, b_2	b_3: a_1, a_2

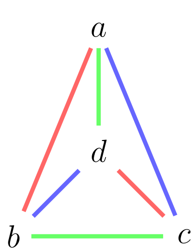
1.5. Definíció. Egy $e \in E \setminus M$ él blokkoló él az M tetszőleges G-beli párosításra nézve, ha mindkét végén lévő csúcs jobban preferálja a másikat, mint M-beli párját.

1.6. Definíció. A G gráfban egy M párosítás stabil, ha nincs rá nézve blokkoló él.

1.2. Állítás. *[6, Lemma 3]*
Általános gráfban minden stabil párosítás népszerű, és bármely népszerű párosítás fedi bármely stabil párosítás csúcsait.

1.3. Következmény. *Az 1.2 állítás következményeként adódik, hogy minden stabil párosítás minimális méretű népszerű, és ugyanazon csúcsokat fedi.*

1.7. Példa. Az alábbi példa mutatja, hogy nem minden népszerű párosítás stabil, és hogy általános gráfok esetében nem is feltétlen létezik stabil párosítás (mint ahogy az páros gráfok esetén teljesült), sőt azt is látni fogjuk, hogy népszerű párosítás sem mindig található.



a: b, c, d
b: c, a, d
c: a, b, d
d: a, b, c

Láthatjuk, hogy $M_1 = \{(a,b),(c,d)\}$ (piros) párosítást a (b,c) él, az $M_2 = \{(a,c),(b,d)\}$ (kék) párosítást az (a,b) él, és az $M_3 = \{(a,d),(b,c)\}$ (zöld) párosítást az (a,c) él blokkolja, így egyik sem stabil (kisebb párosítás pedig pont ezen élek miatt szintén nem lehet stabil). Viszont M_2 és M_3 párosítások népszerűek, hiszen egyiknél sem népszerűbb a másik két felsorolt párosítás. Amennyiben kitöröljük ebből a gráfból a d csúcsot, úgy egy olyan gárfot kapunk, melyben már népszerű párosítás sem írható fel, hiszen (a,b), (b,c) és (a,c) élek mint párosítások ilyen sorrendben kikapnak egymástól a népszerűségi versenyen, magyarán körbeverik egymást.

1.8. Jelölés. Jelölje $\widetilde{G}$ azt a gráfot, melyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsára illesztünk egy hurokélt, és minden csúcshoz saját magát a preferencialista utolsó helyére tesszük.

1.9. Jelölés. Jelölje továbbá $\widetilde{M}$ azt a (teljes) párosítást $\widetilde{G}$-ben, melyet M-ből az M által párosítatlanul hagyott csúcsokhoz rendelt hurokélek hozzávételével kapunk.

1.10. Jelölés. Tetszőleges $u \in V$-re és x, y $\widetilde{G}$-beli szomszédaira jelölje $vote_u(x,y)$ az u preferenciáját x-re y-nal szemben, vagyis

$$vote_u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u \text{ } x\text{-et preferálja } y\text{-nal szemben} \\ -1 & \text{ha } u \text{ } y\text{-t preferálja } x\text{-szel szemben} \\ 0 & \text{egyébként, vagyis ha } x = y \end{cases}$$

Ha u párosítatlan M-ben, akkor tehát $vote_u(v, \widetilde{M}(u)) = 1$ az u minden v szomszédjára. Ezek után legyen M tetszőleges párosításra és $e = (a,b) \in E$ élre $(\alpha_e, \beta_e) = (vote_a(b, \widetilde{M}(a)), vote_b(a, \widetilde{M}(b)))$. Így M-re nézve pontosan az $(1,1)$ élek lesznek blokkolók.

1.11. Jelölés. Jelölje G_M a G azon részgráfját, melyet az M-re nézve $(-1,-1)$ élek törlésével kapunk.

A későbbiek során legtöbbször ebben a G_M gráfban vizsgálódunk majd, mert ha egy M' párosítást véve, van benne $(-1,-1)$ él M-re nézve, akkor azt törölve, a két csúcs szavazata M és M' között nem változik (senki nem szeretne egyedül lenni, és így a két párosítás összehasonlítása során ezen élek figyelembe vétele nem változtat a két párosítás népszerűségi viszonyán). Igaz tehát, hogy M pontosan akkor népszerű G-ben, amikor G_M-ben.

1.12. Jelölés. Adott M párosítás mellett legyen minden (a,b) élre

$$wt_M(a,b) = \alpha_{(a,b)} + \beta_{(a,b)},$$

illetve legyen minden u csúcsra $wt_M(u,u) = 0$, ha u párja saját maga $\widetilde{M}$-ban, és -1, ha u párosított az M-ben. (Minden M-beli (a,b) élre $wt_M(a,b) = 0$.) Ez lesz az adott él/hurokél <u>M szerinti súlya</u>.

1.13. Megjegyzés. A fenti definíciók alapján $\Delta(M, M') = \sum_{u \in V} vote_u(\widetilde{M}(u), \widetilde{M}'(u))$, és így

$$\Delta(M, M') = \sum_{e \in \widetilde{M}} wt_{M'}(e) = -\Delta(M', M) = -\sum_{e \in \widetilde{M}'} wt_M(e).$$

A gráf azon élei esetében, melyeket nem veszünk figyelembe az összegzésnél, azért nem érdekes az él súlya, mert azok az élek vagy egyik párosításban sincsenek benne, így nem befolyásolják a két párosítás közötti szavazást, vagy a megfelelő párosításban vannak, így arra a párosításra nézve a súlyuk 0.

A továbbiakban, amikor két párosítás népszerűségi párbaja kerül terítékre, akkor általában ez az egyenlőség vezet a leggyorsabb eredményre.

1.4. Állítás. *Egy G gráfban M párosítás pontosan akkor népszerű, ha a hozzá tartozó wt_M súlyozásra nézve a maximális súlyú párosítás súlya 0 (és így M maga maximális súlyú párosítás).*

Bizonyítás. Az 1.13 megjegyzésben felírt alakot felhasználva M párosítás pontosan akkor népszerű, ha minden M' párosításra

$$\Delta(M, M') = -\sum_{e \in \widetilde{M'}} wt_M(e) \geq 0.$$

Ha tehát lenne olyan $\widetilde{M'}$ párosítás, melynek M szerinti súlya pozitív, akkor ez a kifejezés erre az M'-re negatív lenne, vagyis M' népszerűbb lenne M-nél. Hasonlóan látható, hogy ha M' népszerűbb M-nél, akkor a fenti kifejezés negatív, így $\widetilde{M'}$ éleinek M szerinti összsúlya pozitív.
Az $\widetilde{M}$ párosítás saját súlyozása szerinti súlya 0, így pontosan akkor népszerű, ha a saját súlyozása szerint maximális súlyú párosítás $\widetilde{G}$-ben. □

Látjuk tehát, hogy a népszerű párosítások egyik karakterizációja egy optimalizálási feladatra vezet minket vissza. Hogy precízen fel tudjuk írni ezt a feladatot, a 2. fejezet elején fogjuk megalapozni a lineáris optimalizálásban való gondolkodást.
Egy másik karakterizáció kombinatorikusan leírható, és ez megalapozza az algoritmikus gondolkodást a népszerűség eldöntésére, kezelésére vonatkozóan, melyet a 2. fejezet végén fogunk alkalmazni.

1.5. Tétel. *[3, Theorem 1]*
Egy M párosítás akkor és csak akkor népszerű, ha teljesülnek az alábbiak a G_M részgráfra:

a) Nincs $(1,1)$ élt tartalmazó alternáló kör M-re nézve.

b) Nincs $(1,1)$ élt tartalmazó alternáló út M-re nézve, mely M által párosítatlanul hagyott csúcsból indul.

c) Nincs kettő vagy több $(1,1)$ élt tartalmazó alternáló út M-re nézve.

Ezt az eredményt, illetve a 2.2 alfejezetben szereplő optimalizálási felírásokat, eredményeket fogjuk alkalmazni majd az Edmonds-alogritmus népszerűséget eldöntő módosításához a 2.5 alfejezetben.

2. Népszerű párosítások általános gráfban

Ez a fejezet adja a diplomamunka gerincét. Az első pár alfejezet arra szolgál, hogy betekintést nyerjünk a tárgyalt kutatási terület alapjaiba, majd a későbbi szakaszokban népszerű párosítások keresésére és a maximalitás, illetve (hasonlóan) a népszerűség eldöntésére szolgáló algoritmusokat fogunk megismerni.

2.1. Bevezetés a lineáris optimalizálásba

Ahhoz, hogy fel tudjuk írni egy adott élsúlyozás szerinti maximális párosítás feladatot, és az optimális megoldás jellegzetességeit, szükségünk lesz néhány alapvető optimalizálási fogalomra, megállapításra. Ahogy látni fogjuk, a lineáris algebrában való jártasság lényegesen könnyebbé teszi a lineáris optimalizálás alapfogalmainak megértését, átlátását.

2.1. Definíció. Egy poliéder egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza, vagyis véges sok féltér metszete: $R = \{x : Qx \leq b\}$, ahol $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ egyenlőtlenség-rendszert standard alakúnak nevezzük.

2.2. Definíció. Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy z elemére nézve a Q mátrix valamely sora z-aktív (vagy csak aktív), ha az egyenlőtlenség-rendszer ennek a sornak megfelelő egyenlőtlenségét z egyenlőséggel teljesíti. A Q mátrix z-aktív sorai alkotják a Q z-aktív részmátrixát, melyet $Q_z^=$-vel jelölünk.

2.3. Definíció. Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder z elemének szintje: $\sigma(z) = r(Q) - r(Q_z^=)$, ahol r az adott mátrix rangját (vagyis a lineárisan független oszlopainak/sorainak maximális számát) jelöli.

2.4. Definíció. A $Qx \leq b$ lineáris rendszer egy z megoldása bázismegoldás, ha $\sigma(z) = 0$. Ha egy z bázismegoldás nem 0 komponenseinek megfelelő Q-beli oszlopok lineárisan függetlenek, akkor a z erős bázismegoldás. (Ha Q oszlopai lineárisan függetlenek, akkor minden bázismegoldás erős.)

A fenti definíciók az olvasás megszakítására is késztethetnének minket, hiszen rögtön a mélyvízbe vezetnek. Éltesse az intuíció szintű megértés halovány reményét, hogy csupán ahhoz kellettek, hogy a most következő állítások ne a levegőben lógjanak, és így a későbbiek során fel tudjuk őket használni úgy, hogy a lelkesebb olvasók végigkövethessék a gondolatmenetet a kezdetektől.

2.1. Állítás. *[1, 3.3.10. Tétel]*
Egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer bázismegoldásai közül a maximálisan sok 0 komponenst tartalmazó megoldás erős bázismegoldás.

2.2. Állítás. *[1, 3.3.10. Tétel]*
Minden megoldható lineáris egyenlőtlenség-rendszernek létezik bázismegoldása, és így a 2.1 állítás alapján erős bázismegoldása is.

2.3. Állítás. *[1, 3.3.11. Tétel]*
A $Qx \leq b$ rendszer egy z megoldása pontosan akkor erős bázismegoldás, ha létezik Q-nak olyan $r(Q) \times r(Q)$-as nem szinguláris Q' részmátrixa (tehát melynek sorai/oszlopai lineárisan függetlenek), melyre z a $Q'x' = b'$ egyértelmű x' megoldásából áll elő 0 komponensek hozzávételével, ahol b' a b vektor Q' sorainak megfelelő komponenseiből áll.

2.4. Következmény. *A 2.3 állításból az következik, hogy tetszőleges lineáris egyenlőtlenség-rendszernek legfeljebb véges sok erős bázismegoldása van.*

2.5. Definíció. Egy lineáris programozási (LP) feladat során azt vizsgáljuk, hogy egy adott lineáris egyenlőtlenség-rendszernek van-e megoldása, és ha igen, akkor egy adott célfüggvény mellett mi az optimális megoldás/optimum. Pl. $max\{cx : Qx \leq b\}$, ahol $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$ adott, $x \in \mathbb{R}^n$ optimális megoldást keressük (amennyiben van).

2.5. Tétel. *[1, 4.1.2. Tétel]*
Tegyük fel, hogy az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nem üres (tehát a rendszernek van megoldása) és $c \in \mathbb{R}^n$ adott. Ekkor ekvivalensek a következők:

1) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-en felülről korlátos.

2) Minden $z \in R$ elemre létezik $Qx \leq b$ rendszernek olyan x^* erős bázismegoldása, melyre $cx^* \geq cz$.

3) Nem létezik olyan q vektor, melyre $cq > 0$ és $Qq \leq 0$.

4) Létezik olyan $y \geq 0$ vektor, melyre $yQ = c$.

2.6. Következmény. *A 2.5 tétel következménye, hogy ha $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nem üres és $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, akkor létezik $max\{cx : x \in R\}$, és az optimum valamelyik erős bázismegoldáson is felvétetik.*

2.7. Tétel. *[1, 4.2.3. Tétel]*
Tegyük fel, hogy $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nem üres, $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos (és így a duális $R^* = \{y : y \geq 0, yQ = c\}$ sem üres a 2.5 tétel szerint).
Ekkor $max\{cx : Qx \leq b\} = min\{by : y \geq 0, yQ = c\}$.

2.8. Tétel. *[1, 4.2.1. Tétel]*
Tekintsük a 2.5 tétel feltételeit, illetve vegyünk egy $x^* \in R$ megoldást. Erre a következők ekvivalensek:

1) Az x^* maximalizálja a cx célfüggvényt R-en.

2) Nem létezik c-növelő irány, vagyis x, melyre $Q^{=}_{x^*}x \leq 0$ és $cx > 0$.

3) Létezik $y^* \geq 0$ vektor, mely teljesíti a duális feltételt, vagyis $y^*Q = c$, illetve melyre $y^*_i > 0$ esetén $(Qx^*)_i = b_i$ teljesül (optimalitási vagy más néven komplementaritási kritérium).

Most jöjjenek azok a fogalmak, amik átvezetnek minket a gráfelméletből az optimalizálás területére (a lineáris algebrát is segítségül hívva), és amelyek használatával alkalmazni tudjuk a fenti eredményeket gráfbeli kérdések vizsgálatára is.

2.6. Definíció. Egy $x \in \{0, 1\}^n$ vektor egy n elemű halmaz H részhalmazának incidenciavektora, ha az n elemű halmaz elemeit egy megadott sorrend szerint felsorolva, az x azon koordinátái lesznek 1-ek, amelyeknek megfelelő sorszámú elemei az eredeti halmaznak benne vannak a H-ban, és azon koordinátái lesznek 0-k, melyeknek megfelelő elemek nincsenek benne H-ban.

2.7. Definíció. Egy irányítatlan gráf incidenciamátrixán (illeszkedési mátrixán) azt a $Q \in \{0,1\}^{n \times m}$ mátrixot értjük (n a gráf csúcsainak, m a gráf éleinek száma), melynek sorai a gráf csúcsainak, oszlopai a gráf éleinek felelnek meg, és egy eleme akkor 1, ha a megfelelő él illeszkedik a megfelelő csúcsra, máskülönben 0.

Így például egy egyszerű gráf incidenciamátrixának minden oszlopában pontosan két 1-es szerepel. (Ha a gráf irányított, akkor úgy módosul a definíció, hogy a mátrix egy eleme 1, ha a megfelelő élnek végpontja a megfelelő csúcs, -1, ha kezdőpontja a megfelelő csúcs, és 0, ha az él nem illeszkedik a csúcsra.)

2.8. Jelölés. Legyen x egy párosítás incidenciavektora, $d_x : V \to \mathbb{N}$ a csúcsok x incidenciavektornak megfelelő fokfüggvénye. Jelöljük $\mathbb{B}$-vel a V páratlan, legalább 3 méretű részhalmazainak halmazát. Legyen továbbá $i_x : \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ az a függvény, mely megadja, hogy x incidenciavektor esetén hány (párosításbeli) él esik bele $\mathbb{B}$ halmazaiba (ez a függvény az esetleges hurokéleket nem veszi figyelembe).

2.9. Definíció. Egy halmazrendszer lamináris, ha bármely két elemére (vagyis bármely két halmazra a rendszerben) teljesül, hogy az egyik halmaz tartalmazza a másikat vagy a két halmaz diszjunkt.

Az előbbiek segítségével fel tudjuk írni egy gráf párosításainak poliéderét, és egy élsúlyozásra kereshetjük a maximális súlyú párosítást egy ezzel a poliéderrel felírt LP-feladat megoldásaként.

2.10. Definíció. Egy lineáris programozási egyenlőtlenségrendszer teljesen duálisan egészértékű (TDI - totally dual integral), ha bármely egész célfüggvényre, mely mellett a feladatnak létezik korlátos megoldása, a duál feladatnak létezik egészértékű optimális megoldása.

2.9. Tétel. *[4, 2.2.1. Tétel]*
A $G = (V, E)$ gráf párosítás poliéderét leíró $\{x \geq 0, d_x(v) \leq 1\ \forall v \in V, i_x(Z) \leq (|Z| - 1)/2\ \forall Z \in \mathbb{B}\}$ rendszer TDI, vagyis tetszőleges egész $c : E \to \mathbb{Z}$ súlyfüggvényre a gráf maximális súlyú párosításának súlya megegyezik a

$$\min(\sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathbb{B}} y(Z)(|Z| - 1)/2)$$

értékével, ahol $\pi : V \to \mathbb{Z}_+, y : \mathbb{B} \to \mathbb{Z}_+$ nemnegatív egészértékű, és minden $(u, v) \in E$ élre

$$\pi(u) + \pi(v) + \sum_{u,v \in Z} y(Z) \geq c(u, v).$$

Ráadásul létezik olyan y optimális duális megoldás is, amelyre $\mathbb{B}_y = \{Z \in \mathbb{B}, y(Z) > 0\}$ halmazrendszer lamináris (lásd a 2.9 definíciót).

Ennek a tételnek a segítségével fogjuk felírni, hogy milyen párosítás-incidenciavektorok teljesítik a népszerűség definícióját.

2.2. Poliéderes felírás

Ebben a szakaszban jutunk el odáig, hogy az eddigi fogalmak, kérdések összeérnek, és megadjuk azt a poliéderes felírást, melyet megvizsgálva könnyen adódik az 1.4 állítás eredménye, amivel pedig eljutunk a tanú fogalmához, melyre duál optimumként egyszerű feltételt írhatunk fel a súlyvektor optimalitására, így a párosítás népszerűségére vonatkozóan.

2.11. Jelölés. Felhasználva a 2.9 tételben szereplő felírást, a wt_M súlyvektorra is felírhatjuk a megfelelő LP feladatokat ($\widetilde{G}$ gráfra):

LP1

$$\max_{e \in E(\widetilde{G})} wt_M(e) \cdot x_e$$

subject to

$$d_x(u) = 1 \quad \forall u \in V$$
$$i_x(Z) \leq (|Z| - 1)/2 \quad \forall Z \in \mathbb{B},$$

ahol $\mathbf{x}$ incidenciavektor $\widetilde{G}$ minden élére, tehát a hurokélekre is vonatkozik

LP2

$$\min \left(\sum_{u \in V} \alpha_u + \sum_{Z \in \mathbb{B}} (|Z| - 1)/2 \cdot y(Z) \right)$$

subject to

$$\alpha_u + \alpha_v + \sum_{u,v \in Z, Z \in \mathbb{B}} y(Z) \geq wt_M(u,v) \quad \forall (u,v) \in E(G)$$
$$\alpha_u \geq wt_M(u,u) \quad \forall u \in V$$
$$y(Z) \geq 0 \quad \forall Z \in \mathbb{B}$$

2.10. Állítás. *Egy M párosítás pontosan akkor népszerű G-ben, ha létezik az előbbi duál LP feladatra olyan $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y})$ megoldás, melyre $\sum_{u \in V} \alpha_u + \sum_{Z \in \mathbb{B}} (|Z| - 1)/2 \cdot y(Z) = 0$.*

Bizonyítás. A 2.9 tétel alapján a primál feladat optimuma megegyezik a duál feladat optimumával, amennyiben ez az optimum létezik, vagyis ha mindkét feladatnak van megoldása (ebben az esetben bármilyen párosítás megoldása a primál feladatnak, illetve létezik hozzá egy lefogó ponthalmaz, nevezetesen a blokkoló élek végpontjai és a párosításbeli élek egyik végpontja). Mivel egy párosítás pontosan akkor népszerű, ha minden M' párosításra $\Delta(M', M) = \sum_{e \in \widetilde{M'}} wt_M(e) \leq 0$, ahol $\widetilde{M'}$ teljes párosítása $\widetilde{G}$-nek, és $\sum_{e \in \widetilde{M}} wt_M(e) = 0$, így a maximális súlyú teljes párosítások súlya legfeljebb 0 lehet wt_M súlyozásra nézve, ha M népszerű. Kapjuk tehát, hogy a duál optimum is 0 kell legyen. □

2.12. Definíció. Az állításban szereplő $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y})$ vektor a népszerű párosítás tanúja.

2.11. Tétel. *[10, Lemma 7]*
Ha M népszerű párosítás G-ben, akkor a 2.11 jelölésben felírt duál feladatnak van olyan optimuma (valójában minden egészértékű optimum ilyen), melyre $\boldsymbol{\alpha} \in \{0, \pm 1\}^n$ és $\boldsymbol{y} \in \{0, 1, 2\}^{|\mathbb{B}|}$.

Bizonyítás. Láttuk a 2.10 állítás bizonyításában, hogy bármely M népszerű párosítás (hurokélekkel bővített) incidenciavektora optimális megoldása a 2.11 felírásban szereplő primál feladatnak. A felírt párosításpoliéder TDI, vagyis létezik egészértékű optimális megoldása a duál feladatnak is a 2.9 tétel alapján. Vegyünk most egy ilyen optimális duál megoldást. Tudjuk a duál korlátokból, hogy $\alpha_u \geq wt_M(u,u) \geq -1 \ \forall u \in V$, illetve ha $(u,u) \in \widetilde{M}$, akkor a komplementaritási feltételek miatt (2.8) $\alpha_u = wt_M(u,u) = 0$. Hasonlóan egy M-ben is párosított u csúcsra (ha $M(u) = v$) $\alpha_u + \alpha_v + \sum_{u,v \in Z, Z \in \mathbb{B}} y(Z) = wt_M(u,v) = 0$. Mivel $y(Z) \geq 0$ minden $Z \in \mathbb{B}$ halmazra, így $\alpha_u + \alpha_v \leq 0$, vagyis $\alpha_u \leq -\alpha_v \leq 1$. Kapjuk tehát, hogy $\boldsymbol{\alpha} \in \{0, \pm 1\}^n$.
Legyen $Z \in \mathbb{B}$ olyan, hogy $y(Z) > 0$. Ekkor ismét a komplementaritási feltételeket felhasználva $\sum_{e \in E(Z)} x_e = (|Z| - 1)/2$. Mivel minden $Z \in \mathbb{B}$ halmazra $|Z| \geq 3$, így minden $y(Z) > 0$-t teljesítő ilyen halmazban van legalább 1 párosításbeli él. Legyen $(u,v) \in M \cap E(Z)$, ekkor $y(Z)$ nemnegativitása és a párosításbeli élekre felírt komplementaritási feltétel alapján $y(Z) \leq -(\alpha_u + \alpha_v) \leq 2$. Így $\boldsymbol{y} \in \{0, 1, 2\}^{|\mathbb{B}|}$. □

2.13. Definíció. Egy (a,b) él pontos a népszerű párosításhoz tartozó tanúra nézve, ha teljesül rá, hogy $\alpha_a + \alpha_b = wt_M(a,b)$, és egy u csúcs pontos a tanúra nézve, ha $\alpha_u = wt_M(u,u)$.

A 2.8 komplementaritási feltételnek megfelelően minden párosításbeli él pontos él.

2.12. Állítás. *Bármely stabil párosítás tanúja választható csupa 0 értékű vektornak.*

Bizonyítás. Mivel egy stabil párosításra nézve nincsen blokkoló, vagyis $(1,1)$ él, ezért minden él súlya legfeljebb 0, így mindkét végén állhat 0 értékű csúcs. Illetve a páratlan halmazok súlya is maradhat 0. Ha így választjuk a csúcsok és páratlan halmazok értékét, akkor minden egyenlőtlenség teljesül (a hurokélekre is), és az összes súly összege valóban 0 lesz, vagyis tényleg tanút kapunk. □

2.3. Népszerű párosítás keresés

Annak eldöntése, hogy egy általános, szigorú preferencialistás gráfban létezik-e stabil párosítás, polinomiális időben kivitelezhető (lásd például Irving algoritmusát [5]). Annak eldöntése viszont, hogy népszerű párosítás található-e, már NP-nehéz ([11]). A következő részben látni fogjuk Kavitha egy eredményét, mely gyors exponenciális algoritmus alkalmazását teszi lehetővé ezen kérdés eldöntésére. A [12] cikkünkben pedig nagy fokszámú, páratlan csúcsú gráfok esetén adunk egy polinomiális idejű algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e népszerű párosítás. Lássuk ezen két eldöntési algoritmust, illetve előtte egy kis elméleti bevezetőt.

2.14. Definíció. Egy $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{m+n}_{\geq 0}$ vektor egy (teljes) törtpárosítás vektora, ha teljesül rá, hogy minden $u \in V$ csúcs esetén $\sum_{e \in \delta'(u)} p_e = 1$, ahol δ' függvény jelöli az adott csúcsból induló élek halmazát, beleértve a hurokélt.

2.15. Jelölés. Egy egész M párosítás és egy $\boldsymbol{p}$ törtpárosítás közötti népszerűségi erőviszonyt az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\Delta(\boldsymbol{p}, M) = \sum_{u \in V} vote_u(\boldsymbol{p}, M) = \sum_{u \in V} \sum_{(u,v) \in E(\widetilde{G})} p_{(u,v)} \cdot vote_u(v, \widetilde{M}(u))$$

2.16. Definíció. Egy M (egész) párosítás népszerű törtpárosítás, ha minden $\boldsymbol{p}$ törtpárosításra $\Delta(\boldsymbol{p}, M) \leq 0$.

2.17. Megjegyzés. Egy népszerű párosítás nem feltétlenül népszerű törtpárosítás is egyben (lásd [10] cikkben a második példát).

2.18. Definíció. Egy M (egész) párosítás igazán népszerű, ha népszerű törtpárosítás.

Mivel népszerű párosítás sem feltétlenül létezik egy G általános gráfban, így természetesen igazán népszerű párosítás sem. Van olyan gráf is, melyben népszerű párosítás van, igazán népszerű viszont nincsen. Annak eldöntése, hogy egy általános gráfban található-e igazán népszerű párosítás, ugyanúgy NP-nehéz, mint a népszerű párosítás létének eldöntése, hiszen adott gráfban az igazán népszerű párosítások a népszerű párosítások egy részhalmazát képezik.

2.13. Tétel. *[10, Theorem 8]*
Egy M párosítás pontosan akkor igazán népszerű, ha létezik $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y})$ tanúja, melyre $\boldsymbol{\alpha} \in \{0, \pm 1\}^n$ és $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, tehát minden páratlan halmaz súlya 0.

2.14. Tétel. *[10, Theorem 10, Lemma 13]*
Legyen M népszerű párosítás G-ben. Ekkor M felbontható M_0 és M_1 párosítások kompozíciójára ($M = M_0 \cup M_1$), ahol

1) M_0 stabil párosítás egy $C \subseteq V$ részhalmaz által meghatározott részgráfon;

2) M_1 igazán népszerű a $V \setminus C$ által meghatározott részgráfon.

Sőt az is teljesül, hogy M úgy is felbontható, hogy M_1 az igazán népszerű párosítások közül is kiemelkedjen, nevezetesen hogy tanújára $\boldsymbol{\alpha} \in \{\pm 1\}^n$ teljesüljön (ezt nevezhetjük speciális igazán népszerű párosításnak).

2.15. Állítás. *[10, 3.3]*
Az alábbi algoritmussal $O(k^n \cdot poly(n))$ időben ellenőrizhető, hogy van-e G-nek népszerű párosítása, ahol k a stabil párosítások számának felső határával összefüggésbe hozható konstans:

1) Tekintsük minden $U \subseteq V$ halmazra a következőt:

   a) az U által meghatározott részgráfon minden S stabil párosításra

   b) és a $V \setminus U$ által meghatározott részgráf minden T speciális igazán népszerű párosítására

   c) ha $S \cup T$ népszerű G-ben, akkor az algoritmus adja vissza $S \cup T$-t

2) Egyébként nincs népszerű párosítása G-nek.

Most lássunk ugyanerre a problémára egy másik megközelítést, amiben szintén felmerül a dekompozíció gondolata. A [12] cikkben olyan módon építjük fel az algoritmusunkat, hogy megnézzük, van-e olyan népszerű párosítás, ami pontosan egy előre meghatározott csúcshalmazt hagy párosítatlanul. Az ilyen népszerű párosításokhoz pedig egy dekompozíción keresztül jutunk, amely egy népszerű és stabil részből áll. Természetesen ez a megközelítés is csak akkor érdekes, ha stabil párosítást nem találtunk a gráfon.
Adott tehát egy stabil párosítás nélküli gráfban $U \subset V$ részhalmaz, melyhez pontosan U-t fedetlenül hagyó népszerű párosítást keresünk. Ehhez bevezetünk néhány jelölést, melyekkel fel tudjuk majd írni a dekompozíció eredményeként kapott részgráfokat, és a rajtuk való vizsgálódásokat.

2.19. Jelölés. Legyen $Z = V \setminus (N(U) \cup U)$ az a halmaz, mely nem tartalmazza sem U csúcsait, sem azok szomszédait. Tehát Z nem szomszédos semely csúcsán keresztül U csúcsaival. Legyen ezután $\mathcal{P}_Z$ azon párosítások halmaza, melyek minden éle legalább egy Z-beli csúcsot tartalmaz, és a párosítás lefedi Z csúcsait. Láthatjuk, hogy ezen párosítások U elemeit mindenképpen fedetlenül hagyják Z definíciója miatt. Továbá adott $P_Z \in \mathcal{P}_Z$ párosításhoz legyen $G' = G[Z \cup P_Z(Z) \cup U]$ részgráf. A D halmaz pedig jelölje azon csúcsok halmazát, melyek elérhetők P_Z-re nézve blokkoló élből G'_{P_Z}-beli alternáló úton, egy párosításbeli él azon csúcsaként, mely az alternáló úton a blokkoló éltől távolabb található.

2.16. Tétel. *[12, Section 4 - Proof of correctness] Pontosan akkor létezik pontosan U-t fedetlenül hagyó népszerű párosítás G-ben, ha végigvizsgálva minden $P_Z \in \mathcal{P}_Z$ párosítást, lesz közöttük népszerű a neki megfelelő G'-n, melyet egy pontosan $V \setminus V'$-t fedő S stabil párosítással ki tudunk egészíteni $V \setminus U$-t fedő $P = P_Z \cup S$ párosítássá, továbbá ha az így kapott P átlal meghatározott súlyozásra teljesülnek az alábbiak:*

- *minden U-beli csúcsot tartalmazó él (1,-1) az U-beli csúcs felőli 1-essel*
- *minden él D és $V \setminus V'$ között (-1,-1)*
- *minden (v', x) él (1,-1), ahol $v' \in V' \setminus (D \cup U)$, $x \in V \setminus V'$ (tehát $vote_{v'}(x, P(v')) = 1$)*

A cikkben szereplő algoritmus Z méretétől függő időben fut, ami nagy fokszámú gráf esetén bármely U mellett kicsi, ekkor c konstanssal jelölve ezt a számot, a futásidő $O(n^c \cdot (m + c^3))$.

2.4. Edmonds-algoritmus

Most pedig kanyarodjunk rá a népszerűség eldöntésére, amikor nem az a cél, hogy megmondjuk, van-e a gráfon népszerű párosítás, hanem az a kérdés, hogy egy adott párosítás népszerű-e. (Ahogy láthattuk, ez a cikkünkben leírt algoritmus esetén csupán egy köztes lépés, azonban nem egy könnyű feladat gyorsan eredményre jutni.) Ehhez ismét a vizsgált párosítás szerinti súlyozást fogjuk segítségül hívni.
Tekintsük először az eredeti (súlyozatlan általános gráfra vonatkozó) Edmonds-algoritmust, melyet a [7] könyv 24. fejezete alapján dolgoztam fel. Az algoritmus célja egy maximális méretű párosítás megtalálása.

2.20. Jelölés.

- $G = (V, E)$ egy általános gráf
- $n = |V|$, $m = |E|$
- M egy párosítás G-ben
- X az M által párosítatlanul hagyott csúcsok halmaza
- $o(G)$ a gráf páratlan komponenseinek száma
- $\nu(G)$ a legnagyobb párosítás mérete G-ben

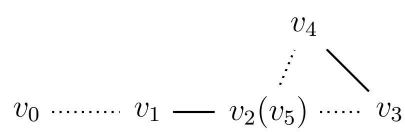
- G/B az a gráf, melyet egy $B \subseteq V$ csúcshalmaz egyetlen b pontba való összehúzásával kapunk, és amelynek csúcsai: $(V \setminus B) \cup \{b\}$; élei pedig a következőképpen keletkeznek: ha egy G-beli él egyik vége B-ben volt, akkor azt a végét G/B-ben b-vel helyettesítjük (a keletkező hurokéleket és párhuzamos éleket elhagyjuk), így kapjuk az eredeti él képét; a B-től független G-beli élek képe önmaguk lesz (előfordul, hogy a B halmazra a csúcsok által alkotott, éppen vizsgált részgráfként hivatkozunk)

- M/B az az élhalmaz G/B-ben, melyet M nem B-ben futó éleinek képei alkotnak (ha B-ből csak legfeljebb egy párosításbeli él lép ki, akkor M/B párosítás G/B-benh)

2.17. Tétel. *[7, Theorem 24.1] Minden $G = (V, E)$ gráfra teljesül, hogy*

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G \setminus U)).$$

2.21. Definíció. Egy $P = (v_0, v_1, \ldots, v_t)$ M-alternáló séta M-virág, ha t páratlan, $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$ csúcsok páronként különböznek, $v_0 \in X$ és $v_t = v_i$ egy páros $i < t$-re. Egy $B \subseteq P$ M-szirom, ha az előbbi i-vel $B = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{t-1})$. Tehát B egy páratlan hosszú kör, melyben M-nek pontosan annyi éle van, ami a körhossz felének egészrésze.



Az ábrán látható példában $i = 2$, $t = 5$, a pontozott élek a párosításon kívüli, a folyamatos élek a párosításbeli élek. Maga a gráf(részlet) egy M-virág, ha a v_1v_2 és v_3v_4 élek M-beliek, és ennek az M-virágnak az M-szirma (v_2, v_3, v_4).

2.18. Tétel. *[7, Theorem 24.2] Legyen B egy M-szirom G-ben. Ekkor M pontosan akkor maximális párosítás G-ben, ha M/B maximális párosítás G/B-ben.*

2.19. Tétel. *[7, Theorem 24.3] Ha $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ egy páros hosszú alternáló kört nem tartalmazó $X - X$ M-alternáló séta G-ben, akkor P M-javító út vagy $(v_0, v_1, \ldots, v_t)$ M-virág valamely $t \leq k$-re (a legkisebb ilyen t fog kelleni nekünk).*

2.22. Algoritmus. Párosítást javító út keresése

input: G gráfban M párosítás
output: egy M-javító út, ha van (ha nincs, M maximális)

1. Nem létezik pozitív hosszú (nem üres) $X - X$ M-alternáló séta $\Rightarrow$ nem létezik M-javító út

2. Létezik pozitív hosszú $X - X$ M-alternáló séta, $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ egy a 2.19 tételben leírt tulajdonságú ilyen séta

   a. Ekkor ha P út, akkor az output P

   b. Ha viszont P nem út, akkor jelöljük $(v_0, v_1, \ldots, v_t)$ M-virág M-szirmát B-vel, és alkalmazzuk rekurzívan G/B gráfban M/B párosításra az algoritmust

3. Ezen rekurzív lépések után kapott P^* outputot bővítsük M-javító úttá G-ben

Ez az algoritmus az alapja a maximális párosítást kereső Edmonds-algoritmusnak. Illetve ezen algoritmus egy változatát használhatjuk népszerű párosítás kereséséhez. (Változtatás: G_M-ben blokkoló élt tartalmazó alternáló kör vagy X-ből induló alternáló séta, illetve legalább két diszjunkt blokkoló élt tartalmazó alternáló séta a javítás alapja, ahogy azt majd a 2.5 szakaszban láthatjuk.) A fő különbség a két algoritmus felépítésében, hogy míg a lentebb leírt Edmonds-algoritmus ad egy maximális párosítást, a népszerű párosításokra vonatkozó változat csak a népszerűség eldöntéséig jut, a javítás nem vezet eredményre, hiszen a népszerűségi reláció nem tranzitív (1.1).

2.23. Algoritmus. Edmonds-alogritmus

1. $M = \emptyset$-ból indulva minden fázisban a javító utat kereső algoritmus által megtalált M-javító P úttal javítsuk a párosítást: $M \longrightarrow M \triangle E(P)$ (ahol a $\triangle$ jel a két élhalmaz szimmetrikus differenciáját jelöli)

2. Az algoritmus akkor ér véget, ha már nincs ilyen P út, hiszen ekkor a kapott párosítás maximális

A 2.23 algoritmus futásidejét az alábbi lépések vizsgálatával kaphatjuk:

- legrövidebb $X - X$ séta $O(m)$-ben megtalálható
- G/B $O(m)$-ben konstruálható
- a rekurzió mélysége legfeljebb n
- ezek alapján M-javítás $O(mn)$-ben található
- a javítások száma pedig legfeljebb $n/2$
- így az Edmonds-algoritmus futása $O(mn^2)$

Tekintsünk most egy segédstruktúrát, aminek segítségével csökkenteni tudunk a futásidőn. Ehhez vizsgáljuk meg azon két lépés futásidejét, melyek sorozatából a 2.22 algoritmus áll.

1. M-alternáló séta keresése

2. M-szirom összehúzása

Ezeket addig ismételjük, amíg az M-alternáló séta út nem lesz, hiszen akkor javító utat találtunk, melyen keresztül tudunk javítani a párosításon (nagyobb párosítást kapunk).
Mindkét lépés futásideje $O(m)$ (új séta keresése és a G/B gráf létrehozása a csúcsok és élek képének meghatározásával), és legfeljebb n összehúzás kell egy javítás során, valamint legfeljebb $n/2$ javításra lehet szükségünk (egy javítás során kettővel nő a párosítás által fedett csúcsok száma).
Amennyiben a szirom-összehúzás során csak lokálisan módosítjuk a gráfot (tehát csak a sziromban futó élek törlését és a belőle induló élek leképezését végezzük el), akkor egy B szirom összehúzása $O(|B|n)$ alatt fut, és $\sum_{B \text{ egy } M\text{-szirom}} |B| = O(n)$, így maga az összehúzás futásideje csupán $O(n^2)$.

A sétakeresés idejének csökkentése nehezebb. Ehhez egy M-alternáló erdőt fogunk a párosítatlan csúcsokból indulva felépíteni, majd módosítani, illetve a csúcsait címkézni. Legyen F egy M-alternáló erdő, tehát

- F erdő, $M \subseteq F \subseteq E$
- (V, F) minden összefüggőségi komponense vagy pontosan egy X-beli (párosítatlan) csúcsot tartalmaz vagy pontosan egy párosításbeli élből áll
- minden X-ből induló út M-alternáló F-ben

2.24. Jelölés.

- $even(F) = \{v \in V | \exists\ F\text{-ben páros hosszú } X - v \text{ út}\}$ (külső csúcsok)
- $odd(F) = \{v \in V | \exists\ F\text{-ben páratlan hosszú } X - v \text{ út}\}$ (belső csúcsok)
- $free(F) = \{v \in V | \nexists\ F\text{-ben } X - v \text{ út}\}$ (tisztás)

2.25. Algoritmus. Az alternáló fa felépítése, módosítása

- végig tároljuk E és M mellett az M-hez tartozó F-et is, és M módosításának, illetve a lépések általi bővítéseknek megfelelően módosítjuk
- a csúcsok halmazát kétszeresen láncolt listában tároljuk (tehát minden csúcshoz eltároljuk azt, hogy honnan érkeztünk oda, és mely csúcsba megyünk tovább; ezzel vissza tudjuk keresni, hogy mely csúcsokon keresztül jutottunk el egy csúcshoz); minden v csúcsra az E-ben, M-ben és F-ben belőle induló éleket szintén kétszeresen láncolt listában tároljuk (alapból éllistás gráftárolást alkalmazunk); azért lesz hasznos ez az adatstruktúra, mert konstans időben tudunk törölni csúcsot és éleket is
- az $even(F)$ és $odd(F)$ halmazok incidenciafüggvényeit is tároljuk
- továbbá, ha létezik $v \in V$-hez $vu \in E$, hogy $u \in even(F)$, akkor $e_v = vu$ jelölést alkalmazzuk és így tároljuk az élt (ekkor v az $odd(F)$ halmazba kerül, és ezzel a jelöléssel azt tároljuk el, hogy mely $even(F)$-beli csúcs a szülője F-ben); az algoritmus során ezt a jelölést rögtön akkor bevezetjük az adott v csúcs kapcsán, amikor egy $u \in even(F)$ szomszédja révén megtaláljuk

1. Induljunk ki $F = M$-ből (tehát kezdetben minden F-beli csúcs $free(F)$-ben van). Minden $v \in V$-hez olyan e_v élt választunk, melyre $u \in X$ (ha van ilyen).
2. Iteráljuk (először egy adott $u \in even(F)$ szomszédaira, majd az u-kon is iterálunk) a következőt: $v \in even(F) \cup free(F)$ keresése, melyre $e_v = vu$ létezik, ahol most $u \in even(F)$. Tehát $u \in even(F)$ szomszédain megyünk végig, és ha találunk egy $v \in even(F) \cup free(F)$ szomszédját, ezt vizsgáljuk tovább.
3. Ha $v \in free(F)$, akkor vu élt F-hez adjuk, valamint a v-ből induló párosításbeli élt vw-vel jelölve, minden wx élre az e_x jelölést alkalmazzuk ($w \in even(F)$). (Mivel $v \notin even(F)$, így v nem lehet párosítatlan.) Mivel ezzel a lépéssel F változott, így v átkerült $odd(F)$-be.

4. Ha $v \in even(F)$, akkor megkeressük F-ben az (egyértelmű) $X - u$ és $X - v$ utakat (az e_v jelölések és M segítségével könnyen felfejthetők). Legyenek ezek rendre P és Q. Elképzelhető, hogy az egyik (vagy akár mindkettő) csupán egy csúcsból áll, ha u vagy v X-beli, de ez nem befolyásolja a további lépéseket.
   Amennyiben P és Q diszjunktak, úgy a két utat az uv éllel összekötve egy M-javító utat kapunk. (Ez pontosan akkor teljesül, hogyha a P és Q utakban előforduló X-beli, vagyis párosítatlan csúcsok különbözőek, hiszen F egy összefüggőségi komponensében legfeljebb egy párosítatlan csúcs lehet.)

5. Ha P és Q nem diszjunktak, akkor az uv éllel kiegészítve meghatároznak egy M-virágot, melynek M-szirmát B-vel jelöljük. Ekkor minden xy élre, ahol $x \in B$, $y \notin B$, $e_y = by$ jelölést alkalmazzuk (b a B összehúzása által kapott csúcs; minden ilyen b csúcshoz érdemes azt is eltárolni, hogy mely csúcsokat tettük izolálttá az összehúzás során, hogy vissza tudjuk bontani a szirmokat az algoritmus végén). Ezután G helyett a redukált G/B-ben dolgozunk tovább (miután töröltük E-ből, M-ből és F-ből is a párhuzamos és hurokéleket).
   Az összehúzás során először is megnézzük, hogy a séta mely csúcsa egyezik meg egy korábbi csúccsal, majd a kettő közötti csúcsok szomszédait megkapja a b csúcs szomszédként, és töröljük ezen köztes csúcsok között futó, illetve belőlük induló éleket (de csak az újonnan létrehozott gráf listáiból, G-ben továbbra is ott vannak, hogy visszafejthető legyen egy-egy összehúzás - ezért is hasznos a kétszeresen láncolt listában való tárolás). A b csúcsra pedig mint eddig nem vizsgált $even(F)$-beli csúcsra kell tekintenünk (biztosan nem indul belőle új M-beli él, hiszen minden B-beli csúcs párosított volt). A felépített erdőstruktúra tulajdonságai nem sérülnek egy ilyen összehúzás hatására. (Ennek bővebb kifejtését, illetve az algoritmus összehúzás nélküli tárgyalását a [9] cikkben olvashatjuk.)

2.26. Megjegyzés.

- F változásával folyamatosan változnak a fenti halmazok is.
- Minden $v \in odd(F)$ egyetlen $F \setminus M$ él és M-beli él közös csúcsa. (Egy újonnan megtalált $odd(F)$-beli csúcshoz rögtön hozzávesszük a párját is, ami így $even(F)$-be kerül.)
- Ha nem fut él $even(F)$ és $even(F) \cup free(F)$ között, akkor M maximális párosítás G-ben: Ekkor $even(F)$ független ponthalmaz (tehát izolált pontok halmaza) $G \setminus odd(F)$-ben, így $U = odd(F)$ esetén $o(G \setminus U) \geq |even(F)| = |X| + |odd(F)| = |V| - 2|M| + |U|$, vagyis $|M| \geq 1/2(|V| + |U| - o(G \setminus U))$, amiből a 2.17 Berge–Tutte-formula alapján M maximális méretű párosítás G-ben.

Ezen megállapításokat, illetve az erdőépítő algoritmus egy bővített változatát alkalmazzuk majd a népszerűség ellenőrzésére.

Vizsgáljuk meg a következő oldalon található pszeudokód segítségével, hogy mennyit is sikerült csökkenteni a felépített fastruktúra használatával a futásidőn.

- Az iterációk száma $\leq n$, hiszen minden iterációban $|V| + |free(F)|$ legalább 2-vel csökken (összehúzás esetén csak $|V|$, továbbépítés esetén csak $|free(F)|$ változik, de mindkettő a neki megfelelő esetben legalább 2-vel csökken).

- Az építés outputja vagy egy javítás vagy egy olyan erdő, amelyben nem fut él $even(F)$ és $even(F) \cup free(F)$ között, és így M maximális.
  Szükség lehet a végső erdőt visszaalakítani az összehúzások előtti állapotba. Ezt a létrehozott b csúcsokkal eltárolt információk alapján tudjuk megtenni. Az eredeti csúcsokat az eredeti szirmoknak megfelelően visszaállítjuk, illetve minden ilyen csúcshoz a neki megfelelő b-ből induló élt rendeljük. (Ennek a visszafejtésnek az egyszerűsítésére is szolgál a [9] cikkben leírt módosítás.)

- A módosított algoritmus 3. pontjában leírtak esetén a frissítés $O(n)$ időben elvégezhető.

- A 4. pontban leírt esetben P és Q megtalálható $O(n)$-ben, és így az M-javító út is megtalálható ekkor $O(n)$-ben (ha van), illetve az adatstruktúra frissítési ideje $O(|B|n)$ abban az esetben, ha G/B-ben akarunk tovább dolgozni (G/B-ben talált javítás is $O(|B|n)$-ben alakítható át G-beli javítássá). Mivel $|B| \leq 2|\{$az összehúzások során izoláltá tett csúcsok$\}|$, így ez az összehúzás általi frissítési lépés összességében $O(n^2)$-ben kivitelezhető.

- Kapjuk, hogy egy javító iterációs lépés $O(n^2)$, és így a maximális méretű párosítás $O(n^3)$ időben megtalálható.

Algorithm 1 Adott párosításra javító út keresése

Require: G, M éllistás módon (kétszeresen láncolt listában a csúcsok és élek is)

Output: M-re javító út vagy 'M maximális párosítás G-ben'

```
G_0 = G, M_0 = M
F = M
X = V \ V(M)
even(F) = X, free(F) = V \ X, odd(F) = ∅
U = even(F)                                  ▷ Benne a csúcsokat sor struktúrában tároljuk
while U ≠ ∅ do
    for uv ∈ E, ahol u ∈ U, sőt u = U[1] do
        if v ∈ odd(F) then next v
        else if v ∈ free(F) then
            F = F ∪ {uv} ∪ {vw}, ahol {vw} ∈ M
            odd(F) = odd(F) ∪ {v}, even(F) = even(F) ∪ {w}, free(F) = free(F) \ {v, w}
            U = U ∪ {w}
            e_v = uv
        else                                                  ▷ Ekkor v ∈ even(F)
            P az F-beli X − u út, Q az F-beli X − v út
            if P és Q diszjunktak then return P ∪ Q ∪ {uv}
            else
                P ∪ Q ∪ {uv} M-virág M-szirma legyen B = (v_0, ..., v_j)     ▷ Tehát v_0 = v_j
                for x ∈ B ∩ even(F) do
                    for y ∉ B, melyre e_y = xy do e_y = v_0 y
                    end for
                end for
                U = U ∪ {v_0}
                for v_i y ∈ E, ahol i = 1, ..., j − 1, y ∉ B do
                    E = E \ {v_i x} ∪ {v_0 x} (M-re, F-re ugyanez)
                end for
                for v_i v_k ∈ E(B), ahol i, k = 0, ..., j do E = E \ {v_i v_k} (M-re, F-re ugyanez)
                end for          ▷ even(F), odd(F), free(F) ezekben a lépésekben nem változnak
            end if
        end if
    end for
    U = U \ {u}
end while
return 'M maximális párosítás G-ben'
```

2.5. A népszerűség eldöntése

Ez a szakasz a témában végzett kutakodásom eredményét hivatott összefoglalni, ami általános gráfban egy párosítás népszerűségének eldöntésére vonatkozó gyors algoritmus. Az előző szakasz arra szolgált, hogy megismerjük az Edmonds-algoritmust, hiszen a most következő felépítés és algoritmus alapját az adja. A [20] cikk megad egy $O(\sqrt{n}m)$ algoritmust a népszerűség eldöntésére. Az itt leírtak annyiban haladják ezt meg, hogy valamivel egyszerűbb az algoritmus alapgondolata, továbbá egy népszerű párosításhoz speciálisabb tanút kaphatunk az algoritmus alapján, mint ami a [10] cikkben szerepel (ezt a 2.6 szakaszban olvashatjuk kifejtve).

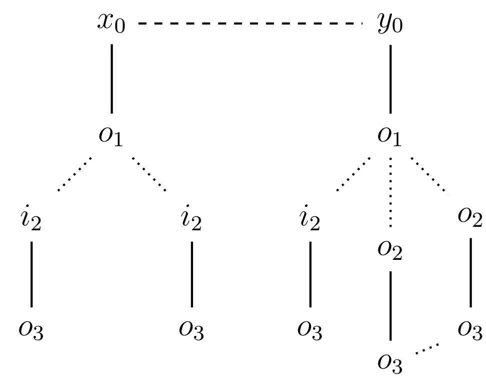
Tekintsük a G általános gráfban az M párosítást (a csúcsok szigorú preferencialistával rendelkeznek a szomszédaikon). Szeretnénk eldönteni, hogy ez népszerű-e G-ben. Ehhez vegyük először a G_M részgráfot (M-re nézve $(-1,-1)$ élek törlésével kapjuk), és ebben keressük meg az összes M-re nézve blokkoló élt. Ha ilyen nincs, akkor M stabil, és így népszerű is. Ha bármely blokkoló él egyik vége párosítatlan M által, akkor a népszerűség karakterizációjáról szóló 1.5 tétel alapján M nem népszerű. (Ezt a tételt fogjuk időről-időre felhasználni az algoritmus, illetve a bizonyítások során.) Tegyük fel tehát, hogy van M-re nézve blokkoló él, és minden blokkoló él mindkét vége párosított M által. Vegyünk G_M-ben egy blokkoló élt, ebből fogunk felépíteni egy, az Edmonds-algoritmusban megjelenő fához hasonló struktúrát.

Vezessünk be néhány jelölést:

- $X = \{M$ által párosítatlanul hagyott csúcsok$\}$
- e_0 legyen a kijelölt blokkoló él
- x_0 és y_0 az e_0 él két végpontja

Most pedig építsünk fel egy M-alternáló fát, melynek gyökérszintje x_0, y_0. Legyen ez F. A fát szintenként fogjuk felépíteni, minden páratlan szinten átvizsgáljuk a csúcsokat (illetve az algoritmus későbbi lépéseiben külsőre átcímkézett csúcsok halmazát) és az azokból induló éleket, mielőtt a következő szintre lépnénk. A csúcsok szintjét az x_0-tól, illetve y_0-tól való F-beli távolságuk adja. (Tehát x_0 és y_0 párja is első szintű lesz, az ő még meg nem talált szomszédaik második szintűek, és így tovább. Ha olyan csúcshoz érünk, amit már bevettünk a struktúrába, annak nem változtatjuk meg a szintjét.)

Az új szinteken lévő csúcsokat akkor címkézzük fel külső, illetve belső csúccsá, amikor bevesszük az alternáló fába (ezt a lépést írja le a 3.4 fejezetben található első és második segédalgoritmus). A belső csúcsok halmaza legyen $inner(F)$, a külső csúcsoké $outer(F)$, amely csúcsok egyik címkét sem kapják meg az algoritmus során (tehát nem értük el őket e_0-ból alternáló utakon, és így nem kerültek be a fába), azok halmaza pedig $free(F)$ (az algoritmus elején x_0, y_0 kivételével még minden csúcs ebben a halmazban van). A páros szintű csúcsok halmaza legyen $even(F)$, a páratlan szintűeké $odd(F)$. Ugyan az algoritmus elején még megegyezik egymással az $inner(F)$ és $even(F)$, illetve $outer(F)$ és $odd(F)$ halmaz, a későbbi lépések során előfordulhat olyan címkeváltoztatás, melynek hatására egy csúcs az $inner(F)$ halmazból átkerül az $outer(F)$ halmazba, viszont fontos lesz, hogy a szintje paritásának megfelelően kezeljük, ezért vezetjük be az $even(F)$, $odd(F)$ jelöléseket, melyek egy adott blokkoló élből induló vizsgálódás során nem változhatnak egy adott csúcsra vonatkozóan.



Az ábrán láthatunk egy egyszerű alternáló fastruktúrát, amelyet a később pontosan leírt algoritmusból kapunk. Az x_0y_0 blokkoló él, a folyamatos élek párosításbeli, a pontozott élek párosításon kívüli élek. Az o-val jelölt csúcsok külső, az i-vel jelölt csúcsok belső csúcsok, az index pedig azt jelzi, hogy a fastruktúra melyik szintjén találtuk meg először. Látható (és ez a későbbiekben nagyon fontos eleme lesz a vizsgálódásunknak), hogy a külső-belső és a szint szerinti paritás különválik a megjelenő páratlan kör miatt.

Minden belső címkéjű (eleinte minden páros szintű csúcs ide tartozik) csúcs esetén a következő lépésben építünk:

- A belőle induló párosításbeli élt hozzávesszük az alternáló fához, és a párja bekerül az $outer(F)$ halmazba, és páratlan szinten tartjuk nyilván (vagyis az $odd(F)$ halmazba is bevesszük). (Mindez a fő algoritmus 24. sorában található.)

- Ha $even(F)$ és X nem diszjunkt, akkor az azt jelenti, hogy egy blokkoló élből alternáló úton elértünk egy párosítatlan csúcsot, tehát találtunk egy javító utat M-re nézve, vagyis M nem lehet népszerű (fő algoritmus 20. sora).

- Ha pedig egy $even(F)$-beli csúcs párja egy másik gyökérőssel rendelkező, még nem vizsgált $even(F)$-beli csúcs, akkor ezen másik csúcson keresztül egy e_0-t tartalmazó javító kört kapunk, így ekkor M nem lehet népszerű (fő algoritmus 21. sora).

Minden külső címkéjű csúcs (eleinte a páratlan szintű csúcsok, később páros szintű csúcsok is lehetnek) esetében a következő lépésekben folytathatjuk (vagy épp zárhatjuk le) az algoritmust:

- Ha egy közös őssel rendelkező külső csúcsba (ami nem a saját őse vagy utódja) megy belőle él, akkor az ő összekötésükkel kapott páratlan hosszú kör (szirom) minden csúcsának címkéjét külsőre állítjuk (a 4. segédalgoritmus írja le ezt a lépést). (Ekkor ezen átcímkézett csúcsokat is megvizsgáljuk az itt leírt lépések szerint.) Ezen vizsgálódási lépés (páratlan kör megtalálása, átcímkézés) viszont ténylegesen csak a páratlan szintű csúcsokra vonatkozik, az átcímkézett páros szintű csúcsokra nem.

- Ha G_M-ben $free(F)$-be megy belőle él, akkor ezt az élt hozzávesszük a fához (fő algoritmus 30. sorától). Ha ez az él blokkoló él M-re nézve, akkor találtunk egy javító utat (2 blokkoló élt összekötő alternáló út), így M nem népszerű (fő algoritmus 35. sora). Ha nem találtunk akadályt, az újonnan bevett csúcs megkapja a belső címkét (bekerül $inner(F)$-be), és páros szinten tartjuk nyilván (bekerül $even(F)$-be is; fő algoritmus 32. sora).

- Ha bármely, az alternáló fába már beépített (de nem x_0, y_0) csúcsba megy belőle blokkoló él, akkor szintén kapunk egy javító utat (a 2 blokkoló élen át vezető alternáló út; ez további éleket is figyelembe véve esetleg kiegészülhet körré) vagy egy javító kört (ha saját páros szintű ősébe vezet a blokkoló él, ami lehet éppen x_0 vagy y_0 is), így M nem népszerű (fő algoritmus 46. sorától). (Egy sziromban lévő - és így külső címkéjű - $even(F)$-beli csúcsok közötti blokkoló él szintén javító kört hoz létre - ez a vizsgálat a fő algoritmus 55-56. sorában található.)
- Ha olyan külső csúcsba megy belőle él G_M-ben, melyet e_0 másik végpontjából indulva értünk el, akkor kapunk egy e_0-t tartalmazó javító kört M-re nézve, így M nem népszerű (fő algoritmus 61. sora). (Ez akkor is érvényes, ha esetleg az egyik csúcs - vagy mindkettő - átcímkézés miatt lett külső, és nem páratlan szintű eredetileg.)

2.27. Megjegyzés. A struktúrában későbbi szinteken elhelyezkedő belső és külső csúcsok esetében (illetve később, más blokkoló élekből indulva) előfordulhat, hogy több gyökérszintű csúcs is az ősük (ha egy külső csúcsból egy már a struktúrában lévő belső csúcsba megy él, akkor a két "ág" összekapcsolódhat). Ha ilyen módon egy már "megvizsgált" csúcsot találunk (és nem szükséges az átcímkézése), akkor a belőle induló éleket nem kell újra megvizsgálni. (Akkor nevezünk megvizsgáltnak egy csúcsot, ha belső és hozzávettük a párját a fához, vagy ha külső és a fenti lépéseket lefuttattuk a szomszédain. Nevezzük ezen megvizsgált csúcsok halmazát U-nak.)

2.28. Megjegyzés. Nevezzük fázisnak az algoritmus azon szakaszát, amikor egy adott blokkoló élből induló faépítést és csúcsvizsgálódást végezzük. Ezzel tehát fázisokra bontjuk az algoritmust. Egy fázis során minden csúcshoz eltároljuk, hogy a gyökércsúcsok (első fázis esetén x_0, y_0) közül melyikből vezet hozzá alternáló út G_M-ben. Ezt akkor tesszük meg, amikor az építés során elérjük (a közvetlen szülőjének ezen adata alapján adunk értéket ennek az "ős"-függvénynek). Ha később máshonnan is eljutunk egy csúcsba alternáló úton, és az új "szülője" más gyökérőssel rendelkezik, akkor az ős-függvény értékéhez a másik gyökércsúcsot is hozzávesszük (és ekkor minden utódján is elvégezzük ezt a változtatást, az építő lépések szerint haladva az alternáló struktúrában). Ha viszont már elkönyveltük, hogy mindkét gyökércsúcsból vezet hozzá alternáló út, akkor a későbbiekben ezt az információt már nem kell felülírni. (Ezek a lépések a fő algoritmus 15., 26., 34., 41. sorában, illetve 73. sorától találhatók.)

2.29. Megjegyzés. Az előbbi megjegyzésben tárgyalt ős-függvény segítségével egy fázis végén minden megvizsgált csúcsról tudjuk a következőket: $even(F)$ vagy $odd(F)$ halmazban van, belső ($inner(F)$) vagy külső ($outer(F)$) csúcs, illetve x_i vagy y_i gyökércsúcsból érhető el alternáló úton G_M-ben.

Ha az előbbi, népszerűséget cáfoló esetek egyike sem áll már fenn az algoritmus futása során (tehát ha az alternáló erdő felépítése során nem állt le a futás), akkor $outer(F)$-beli csúcsokból már csak néhány típusú él futhat:

- Szirmon belül nem blokkoló él
- Ősbe nem blokkoló él
- Azon gyökércsúcsba, mely nem a gyökérőse, blokkoló él (amennyiben a gyökérőséből nem indul másik blokkoló él) - ezt fogjuk gyökérsziromnak nevezni

- Utódba nem blokkoló él
- Másik ágon lévő csúcsba nem blokkoló él

Az egyéb eseteket a fenti felsorolásban tárgyaltuk, ezen utóbbiakkal minden külső csúcsból induló él kapcsán megvizsgáltuk, hogy milyen gondot okozhat. Itt érdemes megjegyezni, hogy blokkoló élek futhatnak belső csúcsok között, erre még vissza fogunk térni.

Tehát ha eljutunk idáig az algoritmusban, akkor nem találtunk M népszerűségét cáfoló, e_0-t tartalmazó bizonyítékot:

- e_0-t tartalmazó páros hosszú kört két különböző ágon lévő (tehát egymással ős-utód viszonyban nem álló), belső csúcspár közötti párosításbeli él vagy külső csúcspár közötti párosításon kívüli él jelöl ki, amiket vizsgálunk (egyéb blokkoló kört azzal zárunk ki, hogy egyik "ágon" lévő korábbi belső és későbbi külső csúcsot összekötő blokkoló él esetét és szirmon belüli blokkoló éleket is vizsgáljuk)
- e_0-t és még egy blokkoló élt tartalmazó alternáló utat egy külső csúcsból nem x_0-ba, y_0-ba, illetve nem a saját ősébe futó blokkoló él jelöl ki
- e_0-ból párosítatlan csúcsba futó alternáló utat kizárólag úgy kaphatunk, hogy az alternáló struktúra felépítése során egy $inner(F)$-beli csúcs párosítatlan M által (tehát X-ben is benne van)

Továbbá blokkoló élek (e_0-n kívül) csak belső csúcsok között, belső csúcsból F-en kívülre, illetve gyökérszirmot létrehozó módon fordulhatnak elő F csúcsaiból indulva, ha nem találtunk népszerűséget cáfoló akadályt.

Töröljük most e_0-t a gráfból (rajta keresztül már biztosan nem találunk népszerűséget cáfoló bizonyítékot, ezt írtuk le az előbbi felsorolásban). Válasszunk a megmaradt blokkoló élek közül egy következőt ($e_1 = x_1y_1$), amin futtatjuk a következő fázist (vagyis a fentebb leírt lépéseket). Ezt addig ismételjük, amíg már minden blokkoló élt megvizsgáltunk (vagyis töröltünk). Ha egyik fázisban sem kapunk cáfolatot M népszerűségére, akkor kapjuk, hogy M népszerű. A tisztás az algoritmus legvégén azon csúcsokból fog állni, melyek egyáltalán nem kaptak címkét, tehát amik $free(F)$-ben maradtak. Ezen a részhalmazon M stabil részpárosítást ad, hiszen ezen csúcsok között biztosan nem megy M-re nézve blokkoló él.

Ha gyökérszirmot találunk a fázis során, akkor a gyökérszirom csúcsait (a két szomszédos blokkoló él közös csúcsának kivételével) állítsuk külső címkéjűre (ennek leírására szolgál a 3. segédalgoritmus, és a fő algoritmus 63-64. sorában hívjuk meg), és a páros szintű csúcsokat vizsgáljuk át ilyen módon (ismét) a fenti (külső csúcsokra vonatkozó) lépések szerint. Csak azon csúcsokat kell itt újra megvizsgálni, amelyek címkéje megváltozott (belsőről külsőre). Ha esetleg olyan gyökérszirommal találkozunk, mely két gyökérőssel rendelkező külső csúcsból induló blokkoló él által jött létre, akkor viszont egy javító kört kapunk M-re nézve.
Mivel egy rögzített blokkoló élből indított alternáló struktúrában megtalált gyökérszirom másik blokkoló éle is átvizsgálásra került, így egy fázis végén több blokkoló élet is törölhetünk a még vizsgálandók köréből (fő algoritmus 63-64. sorában kapjuk meg ezeket, és a 82-83. sorában töröljük).

Az alábbi lemmához szükséges rögzíteni, hogy pontosan mit értünk akadály alatt. Az 1.5 tételben szereplő 3 lehetséges akadályból a javító utakat a lehető legrövidebbnek értelmezzük, tehát csak a két blokkoló élt vagy blokkoló élt és párosítatlan csúcsot már éppen tartalmazó útszakaszt értjük alatta.

2.20. Lemma. *Az algoritmus során egy fázis végén a gyökércsúcsokon kívül F minden csúcsára teljesül, hogy ha a fázis során nem találtunk őt belső pontjaként tartalmazó, népszerűséget cáfoló akadályt, akkor ilyen nem is fordulhat elő G_M-ben.*

Bizonyítás. A lemmát indirekt fogjuk belátni. Tegyük fel tehát, hogy létezik olyan csúcsa F-nek, mely nem gyökércsúcs, a megfelelő fázis során nem találtunk rajta keresztül akadályt, viszont G_M-ben létezik őt tartalmazó javító út vagy kör.
Egy külső csúcs esetében a fázis során minden belőle induló élet megvizsgálunk, így ha egy blokkoló élből induló alternáló út egy párosításon kívüli éllel hozzá kapcsolódik, akkor azon élet, és így a megfelelő alternáló útszakaszt a fázis során már megvizsgáltuk. Tehát ha ilyen módon akadályt találunk ezen külső csúcson keresztül, akkor azt már F felépítése és a csúcsból induló élek vizsgálata során meg kellett találnunk.
Amennyiben egy F-beli külső csúcsba párosításbeli élen keresztül érkezünk meg egy blokkoló élből alternáló úton, és párja külső csúcs, úgy az előző bekezdés megállapításai érvényesek a kijelölt csúcs párjára, mivel akkor a megjelenő alternáló út őt is tartalmazza. Ha pedig egy belső csúcs párjaként érkezünk egy külső csúcsba egy blokkoló élből induló alternáló úton keresztül, mely akadályt jelent M népszerűségére, akkor a javító út fent leírt "legrövidebb" tulajdonsága miatt az akadály tartalmazza az ezen külső csúcsból továbbinduló útszakaszt, amelyet a fázis során a gyökér blokkoló élből ugyanúgy elértünk volna alternáló úton keresztül, ami pedig ellentmond annak, hogy a fázis során nem ütköztünk akadályba, mely ezen csúcsot tartalmazta volna.
Belső csúcsok esetén az előző bekezdés megállapításai érvényesek, hiszen külső párján keresztül nem érkezhetünk hozzá a második bekezdés alapján, ha viszont rajta keresztül érkezünk a külső párjához, akkor az előző bekezdésben felvázolt esetet kapjuk.[1]
Ezzel minden F-ben előforduló csúcsra igazoltuk, hogy amennyiben az ő vizsgálatát tartalmazó fázis során nem találtunk rajta keresztülhaladó javító utat vagy kört, akkor G_M-ben sem létezik ilyen akadály. □

2.30. Megjegyzés. A fenti lemmát megfogalmazhatnánk az algoritmustól teljesen függetlenül is. Ehhez definiálnunk kellene a blokkoló élből alternáló úton elérhető csúcsok halmazát, illetve az előforduló akadályok felismerésének módját.

2.31. Megjegyzés. Látnunk kell, hogy ez nem csak fázison belül érvényes megállapítás, hiszen F nem ürül ki egy-egy fázis végén, tehát azt kapjuk, hogy minden külső csúcsot elég az algoritmus során összesen egyszer átvizsgálni (tehát minden belőle induló élet megvizsgálni), így az átvizsgált külső csúcsok maradhatnak U-ban. Belső csúcs pedig másik fázisban, mint amelyben megtaláltuk, nem válhat külsővé, így ő is U-ban fog maradni a saját fázisát követően. Ezzel tehát azt kapjuk, hogy

[1] Megnézhetjük azt is, hogy nincs-e két fázison kívüli blokkoló él között olyan alternáló út, melynek van közös csúcsa a fázis csúcsaival. A második és harmadik bekezdés alapján csak belső csúcs lehet a blokkoló élekből induló alternáló úton az első közös csúcs, és belső csúcsok között nem futhat páratlan hosszú, párosításbeli éllel induló alternáló út, különben javító kört vagy szirmot kapnánk, szirom esetében viszont már átcímkéztük volna ezen páros szintű (belső) csúcsokat.

későbbi fázisok során ha már U-ban lévő csúcshoz érünk, akkor ott nem is kell tovább vizsgálódnunk, vagyis a gráf minden csúcsát legfeljebb egyszer vizsgáljuk át (külsőként).

2.21. Lemma. *Egy fázis során megtalált szirmok, gyökérszirmok későbbi fázisban megtalált szirmokkal, gyökérszirmokkal nem metszhetik egymást, legfeljebb egy belső csúcsban (tehát egy gyökérszirmon belüli két szomszédos blokkoló él közös csúcsában).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy már megtalált sziromnak egy későbbi fázisban megtalált szirommal van közös csúcsa, legyen ez v. Ekkor mindkét szirombban pontosan egy párosításbeli él indul v-ből (ha bármely sziromnak a "gyökere" lenne v, tehát az a csúcsa, melyből a szirmon belül nem indul párosításbeli él, akkor a belőle induló éleket mind átvizsgáltuk volna a korábbi fázisban, így a teljes későbbi fázisban megtalált szirmot már korábban megtaláltuk volna), így az az él, amivel a későbbi fázis során csatlakozunk v-hez, párosításon kívüli. Mivel egy szirom összes csúcsát átcímkézzük az adott fázis során külsővé, így v összes szomszédját megvizsgáljuk az eredeti fázis során, ami pedig azt eredményezi, hogy a későbbi fázis alapját szolgáló blokkoló élhez el tudunk jutni v-ből G_M-beli alternáló úton, vagyis a korábbi fázis során akadályba ütköztünk volna.
Ha az előbbi bekezdésben kicseréljük a szirmot gyökérsziromra, és a gyökérszirmok egyetlen belső csúcsát nem vesszük figyelembe, akkor a fenti gondolatmenetet változtatás nélkül elmondhatjuk erre az esetre is. Ezzel kapjuk a lemma állítását. □

2.32. Megjegyzés. A lemmából következik, hogy amikor az algoritmus legvégén a megfelelő tanút szeretnénk megkonstruálni, akkor azon páratlan halmazok, melyeknek végül pozitív súlyt fogunk adni (a szirmok, gyökérszirmok által alkotott halmazrendszer tartalmazásra nézve legnagyobb elemei), diszjunktan helyezkednek el a különböző fázisok által lefedett csúcsok tekintetében, kivéve a belső csúcsban egymást metsző, különböző fázisban megtalált gyökérszirmokat. Ez a megállapítás pedig egy gyorsítási, egyszerűsítési lépést kínál a 2.20 állítással egyetemben: egy fázis végén töröljük a fázisban megvizsgált csúcsokat, a gyökércsúcsok és a belőlük induló párosításbeli élek kivételével (fő algoritmus 85. sora). (Ezeket azért tartjuk meg, hogy hozzájuk kapcsolódó más blokkoló élekből induló alternáló struktúra építése során ne ütközzünk hamis akadályba, például párosítatlan belső csúcsot találva.)

A fenti algoritmust leíró pszeudokód a dolgozat függelékében (3.4) olvasható. Először néhány segédalgoritmust láthatunk, majd a népszerűséget eldöntő "fő"algoritmus következik.

2.33. Megjegyzés. Azt, hogy egy csúcs a másiknak őse-e, a $p()$ parent függvény segítségével lehet felfejteni. Ez a függvény azt a szülőt jelöli, ahonnan az adott csúcsot először megtaláltuk. Az $a()$ függvény pedig azt a gyökércsúcsot jelöli, ahonnan a saját fázisán belül G_M-beli alternáló úton keresztül el tudjuk érni az adott csúcsot. Erre hivatkozunk a szöveges leírásban ős-függvényként (halmazértékű függvény, mindkét gyökércsúcsot tartalmazhatja).

2.34. Megjegyzés. Látható az algoritmusban, hogy ha találunk egy gyökérszirmot, akkor azon blokkoló élt, ami kijelöli ezt a gyökérszirmot F-ben, azt szintén töröljük a még vizsgálandó blokkoló élek halmazából. Ez azért van így, mert az egyik végpontja az éppen vizsgált blokkoló él végpontjával esik egybe, és így megvizsgáljuk a lépés során, a másik végpontja pedig olyan külső csúcs, melynek párja is külső csúcs, így azon ág esetében is végigfut az algoritmus a megfelelő vizsgálódási lépéseken.

2.35. Megjegyzés. A jelöléseket alaposabban megvizsgálva látható, hogy az $U \cap V_M$ halmaz egy fázis végén (mielőtt a fázisban átvizsgált csúcsokat törölnénk a későbbiekben vizsgálandók közül) pontosan a fázis során átvizsgált csúcsokat tartalmazza.

2.36. Jelölés. Elképzelhető, hogy két gyökérszirom azonos gyökércsúcsból indul G_M-ben, és így élhalmazuk metszete esetleg nem üres, viszont ha a kettejük által fedett csúcsok számát nézzük, az mindig páratlan lesz. Ha esetleg van olyan szirom, mely belemetsz egy gyökérsziromba, akkor vegyük annak a páratlan körnek a többi csúcsát is hozzá az eddig kapott páratlan csúcshalmazhoz. Tekintsük az ilyen hozzávételekkel, összefésülésekkel kapható (tartalmazás szempontjából) maximális páratlan halmazokat (melyekben csak külső-külső élek, illetve belső-külső blokkoló és párosításon kívüli élek szerepelnek). Ezek lesznek azok, melyeknek pozitív súlyt fogunk adni M tanújában. Legyen ezen maximális páratlan halmazoknak a halmaza $L \subset \mathbb{B}$.

2.6. Népszerű párosítás tanúja

A továbbiakban megadunk a csúcsokon és a páratlan, legalább 3 méretű halmazokon egy súlyozást, mely az előző szakaszban leírt algoritmus pozitív eredménye esetén M tanúja lesz.

A belső csúcsok súlya legyen 1, a külső csúcsoké -1 (a címkék az algoritmus végi állapot címkéi). A tisztáson lévő csúcsok súlya legyen 0. Most pedig megadjuk azon páratlan halmazokat, melyek súlya pozitív lesz. Tekintsük az összes olyan $outer(F)$-beli csúcsot, melynek párja is külső. Ezen csúcsok által F feszített részgráfjában vegyük az összefüggőségi komponenseket. Ezek (a kiválasztás alapját adó tulajdonság miatt) páros komponensek. Vegyük hozzá ezen komponensekhez azt a(z algoritmus alapján egyértelmű) belső, illetve belső címkéjű párral rendelkező külső csúcsot, mellyel (új) páratlan kör jön létre a komponensben (csak a szirmok és gyökérszirmok esetében címkéztünk át, így ezek valóban azok a páratlan körök lesznek, amit az algoritmusban ilyen módon találtunk). Lehet, hogy két ilyen páros komponenshez ugyanazon csúcsot vesszük hozzá, ekkor összeolvasztjuk a két komponenst. Az így kapott páratlan (maximális) komponensek súlya legyen 2, minden más páratlan csúcshalmaz súlya 0.

Az algoritmus végén, pozitív eredmény esetén kapunk egy csúcscímkézett, a fenti súlyokkal súlyozott gráfot, melyben a vizsgált M párosítás népszerű. Ebben a gráfban az alábbi élek fordulhatnak elő (ne feledjük, hogy G_M-ből indultunk):

- $inner(F)$-ben futó blokkoló élek
- $inner(F)$-ben futó 0 súlyú élek
- $inner(F)$ és $free(F)$ között futó 0 súlyú élek
- $inner(F)$ és $outer(F)$ között, L-beli halmazban futó blokkoló élek (gyökérszirmok blokkoló élei)
- $inner(F)$ és $outer(F)$ között futó 0 súlyú, illetve párosításbeli élek
- $outer(F)$-ben futó 0 súlyú, illetve L-beli halmazban futó párosításbeli élek

- $free(F)$-ben 0 súlyú és párosításbeli élek

Minden további éltípus M népszerűsége esetén nem fordulhat elő (az 1.5 tétel alapján):

- $outer(F)$ és $free(F)$ között nem mehet él, mert akkor még nem állt volna le az algoritmus (bővíthetnénk az alternáló struktúrát)
- $outer(F)$-ben nem futhat olyan 0 súlyú él, ami nincs pozitív súlyú halmazban, mert az egy javító kört vagy utat hozna létre
- $outer(F)$-ben semmilyen esetben nem futhat blokkoló él, mert javító kört vagy utat hozna létre
- $outer(F)$-ből nem indulhat olyan blokkoló él, ami nem L halmazaiból való csúcsok között fut, mert akkor javító utat (vagy "ősbe" futó él esetén javító kört) találnánk
- $outer(F)$ és X között nem futhat él, hiszen az javító utat hozna létre (tehát belső csúcs nem lehet párosítatlan - $inner(F) \cap X = \emptyset$ kell legyen)
- $free(F)$-ből nem indulhat blokkoló él, mert akkor a csúcs benne lenne F csúcsainak halmazában

Így a nem L-beli halmazban futó blokkoló élek két vége 1-es súlyt kap, pozitív súlyú halmazbeli blokkoló él egyik vége 1, másik vége -1, az őt tartalmazó páratlan komponens 2 súlyt kap. A párosításbeli élek két végén (L-beli halmazokon kívül) 0 súlyú csúcsok (tisztás) vagy egy belső és egy külső, vagyis egy 1 és egy -1 súlyú csúcs áll. Az L-beli halmazokon belül teljesül az $e = uv$ párosításbeli élekre, hogy $\alpha_u + \alpha_v + \sum_{u,v \in B} y_B = 0$, hiszen az él két végének súlya -1 és az egyetlen L-beli halmaz súlya, melyben mindkét csúcs benne van, az 2. A többi G_M-beli él 0 súlyú M-re nézve, és az L-beli komponenseken kívül nem is futhatnak két -1 súlyú csúcs között, hiszen azok külső csúcsok. Hasonlóan ezek a 0 súlyú élek nem futhatnak 0 és -1 súlyú csúcsok között sem, hiszen akkor menne külső csúcsból tisztásra G_M-beli él. Az L-beli halmazokban futó, párosításon kívüli élekre pedig ugyanaz elmondható, mint a bennük futó M-élekre. Maradtak a G_M-en kívüli, vagyis -2 súlyú élek (M-re nézve), ezek két végén viszont állhat akár két -1 súlyú csúcs is, így a fenti súlyozás teljesíti az él- és csúcssúlyokra felírt egyenlőtlenség-rendszert (2.11).

Ezentúl szükség van még arra a tanúsághoz, hogy a csúcsok súlyainak, valamint a páratlan halmazok súlyainak méretükkel súlyozott összege 0 legyen. Ez teljesül, hiszen a páratlan halmazok tanúértékét a méretük felének alsó egészrészével súlyozzuk, ami az algoritmus során megtalált szirmok, gyökérszirmok esetében a bennük futó párosításbeli élek száma, a többi páratlan halmaz tanúértéke pedig 0, így ott mindegy, mivel súlyozzuk. (Amikor két páratlan kört összekapcsolunk, akár több kapcsolódó él mentén, akkor az olyan, mintha az egyik körhöz páros sok csúcsot toldanánk hozzá, a megfelelő élekkel együtt, és mivel ezen csúcsok párosításbeli élekkel vannak összekötve, így továbbra is igaz lesz, hogy a benne futó párosításbeli élek számával egyezik meg a páratlan halmaz tanúértékének súlya.) Tehát azon párosításbeli élek esetében, amelynek mindkét végén -1 áll, az őket tartalmazó 2 súlyú páratlan komponens pont az ilyen párosításbeli élek számával súlyozódik a tanúértékek összegében, így ezen csúcs- és halmazsúlyok 0-ra egészítik ki egymást. Az adott páratlan halmazból kimaradt egyetlen külső (vagy gyökérszirom esetén belső) csúcs (aminek a súlyát még nem vettük figyelembe az összegnél) pedig egy belső (vagy külső) csúcs párja, és ezek súlyát összeadva szintén 0-t kapunk. A többi belső-külső csúcspár súlya is kiejti egymást az összegben, így már csak $free(F)$ súlyösszegét kell még figyelembe vennünk, hiszen F csúcsainak súlyát már összegeztük és az L-beli halmazok tanúértékeit a megfelelő súlyokkal szintén összeadtuk. A $free(F)$ halmaz minden csúcsának súlya 0, így az összegük is 0. Kaptuk tehát, hogy az egész gráfra vonatkozó összeg,

$$\sum_{u \in V} \alpha_u + \sum_{B \in \mathbb{B}} y_B \cdot \frac{|B| - 1}{2} = 0.$$

Tehát valóban az M párosítás egy tanúját kaptuk a fenti csúcs- és halmazértékekkel.

Kavitha [10] cikkében az szerepelt eredményként, hogy egy népszerű párosítás egészértékű tanújára $\boldsymbol{\alpha} \in \{0, \pm 1\}^n$ és $\boldsymbol{y} \in \{0, 1, 2\}^{|\mathbb{B}|}$ teljesül. Láthatjuk, hogy az előbbiekben megadott csúcs- és halmazsúlyozás jelen esetben erősebb állítást is lehetővé tesz, hiszen 1 súlyú páratlan halmazra nem volt szükség. Ez abból adódik, hogy pozitív súllyal ellátott halmazokban csak -1 és 1 súlyú csúcsok vannak, tehát 2.8 komplementaritási feltétel alapján a halmaz súlya páros kell legyen, hiszen a halmazban szereplő párosításbeli élek párosítás szerinti súlya 0. Következésképpen azt kapjuk, hogy olyan tanú is megadható, mely a legalább 3 méretű páratlan halmazokhoz 0 vagy 2 súlyt rendel.

3. Alkalmazási területek a biztosítási piacon és a nagyvilágban

3.1. Általánosítási lehetőségek

Eddig olyan gráfsturktúrával dolgoztunk, melyben minden szereplőnek szigorú preferencialistája volt (vagyis nem engedtük, hogy közömbös legyen két különböző szomszédja között), illetve minden szereplőhöz legfeljebb egy másik szereplőt rendeltünk. Ezek alapján két általánosítási lehetőség is felmerül. Egyrészt megengedhetjük, hogy a preferencialistában egyenlőségek (közömbösségek) is megjelenjenek, másrészt tekinthetünk egy olyan "párosítást", amiben egy szereplőhöz akár több másik szereplő van rendelve. Ezen második kiterjesztés jóval alkalmazhatóbbnak bizonyul, mint az egyszerű párosítási konstrukció, hiszen akár piaci, akár más kontextusbeli szereplők esetében gyakoribb, hogy több másik szereplővel szeretnének végül megállapodni, kereskedni.
Tekintsük például a releváns szakdolgozatokban (egy kivonat olvasható itt: [14], illetve a [15] is hasznos a témában) sokszor felbukkanó felvételi rendszereket. Ebben a kontextusban mindkét oldalnak (felvételiző és egyetem) több "párja" lehet, hiszen a hallgató is járhat párhuzamosan több egyetemre, szakra, és természetesen az egyetem egyszerre több száz hallgatót is felvehet egy adott szakra. Maga a felvételi eljárás, és így a kapott eredmény tulajdonságai országonként eltérhetnek. Ennek tárgyalására nem térünk ki jelen dolgozat keretein belül, viszont Toma Zsófia volt biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakos hallgató szakdolgozatában részletesen olvashatunk a különböző rendszerekről, kimenetelekről (témavezetője Biró Péter volt, a szakdolgozat címe: Egyetemi felvételik és iskolaválasztás Európában).
További módosítása lehet még az eddig vizsgált feladatnak, hogy ugyan két csoportra vannak osztva a szereplők (tehát páros gráfban vizsgálódunk), de csak az egyik csoport tagjainak van preferenciája, és ezen múlik, hogy végül milyen párosokat kapunk. Ilyen lehet például a lakáspiac. Természetesen maguk a lakások nem fogják kifejezni a különböző értékülésüket az őket látogató vevőkről, legfeljebb az eladók, de ez sem számottevő, hogyha rögzített árakat feltételezünk. Ilyenkor tehát csakis a vevők preferenciáin múlik a lakó-lakás párosítás. Ezt a problémakört nevezi a szakirodalom house allocation problem-nek ([16]).
Hasonló egyébként maga a biztosítási piac is. A potenciális ügyfelek bizonyos információk alapján felállítanak egy sorrendet a különböző biztosítók termékei között, majd a számukra legkedvezőbb szerződést fogják megkötni. Ebbe beleszólhatnak ugyan a biztosítók a közzétett információk, illetve a marketing mentén, és az is előfordulhat, hogy nem ajánlanak szerződést az ügyfélnek, mert mondjuk nem felel meg az egészségi feltételeknek, de a választás az ügyfeleken múlik, a végső sok-a-sokhoz (many-to-many) "párosítás" alapvetően az ő preferenciasorrendjük alapján fog kialakulni (figyelembe véve persze a biztosítók kapacitását).

3.2. Stabilitási fogalmak, optimális párosítások

A fent már elejtett sok-a-sokhoz struktúra annyit takar, hogy a végső párosításban nem csupán szereplőket, hanem szereplők halmazait "párosítjuk" más szereplőkhöz vagy szereplők halmazához. Erre jó példa lehet akár a felvételi rendszerek (egy szakra sok hallgatót vesznek fel, egy hallgató több szakra is járhat párhuzamosan), akár a biztosítási piac (egy biztosítónak adott portfólióban sok ügyfele van, és egy ügyfél több termék mentén is lehet szerződő, akár különböző biztosítókkal). Viszont mindkét példa páros gráffal jellemezhető. Ha belegondolunk, sokkal könnyebben találunk olyan példát jártunkban-keltünkben, ahol a megfelelő modell egy páros gráf lesz, mint olyat, ahol általános gráfot érdemes használnunk. Bármilyen kétszereplős piac természetesen modellezhető páros gráffal, és ezzel az alkalmazási területeknek rögtön egy nagyon nagy szeletét fedtük le. A fejezet egy későbbi szakaszában kicsit bővebben kifejtek egy lehetséges kérdéskört egy általános vevő-eladó piacról ([21]).

Most viszont nézzük meg, hogyan módosulnak a dolgozatban kiemelt fogalmak a sok-a-sokhoz struktúrák párosításai kapcsán. Először is a továbbiakban többször a partnerség fogalmat fogjuk használni, ami az eddigi pár fogalomnak felel meg (tehát a párosítás egy éle), csupán annyi változik, hogy egy szereplőnek több partnere is lehet. Ilyenkor általában minden csúcshoz rendelünk egy kvótát is, amely azt az információt tartalmazza, hogy egy párosításban legfeljebb hány él indulhat ki belőle, vagyis legfeljebb hány partnere lehet az adott szereplőnek (ezt a későbbiekben r, illetve s jelöli páros gráf esetén a két ponthalmaz csúcsain). Ezekből az is következik, hogy nem feltétlenül lesz elég az a fogalomkör az ilyen elrendezésekben való vizsgálódáshoz, amit eddig használtunk, vagy mindenesetre pontosabban kell megfogalmaznunk, hogy mi is van fókuszban. Tekintsük először is a stabilitás fogalmát különböző feladatok esetén ([19]).

3.1. Definíció. Egy $G = (P \cup Q, E)$ gráfban egy (sok-a-sokhoz) párosítás ($x \in \{0,1\}^{m \times n}$ mátrix) megvalósítható, ha minden $(i,j) \in E$ élre $\sum_{q \in Q} x_{iq} \leq r_i \ \forall i \in P$, $\sum_{p \in P} x_{pj} \leq s_j \ \forall j \in Q$, ahol r_i az i szereplő kvótája, s_j a j szereplő kvótája. Továbbá i és j kölcsönösen elfogadhatók egymás számára, ha $x_{ij} = 1$, és ekkor x szerint párosítva vannak.

3.2. Definíció. Egy $G = (P \cup Q, E)$ gráfban egy (sok-a-sokhoz) párosítás pairwise (páronként) stabil, ha nem léteznek $p \in P$ és $q \in Q$ szereplők, akik nem állnak párban, viszont ha párrá válnának (esetleg néhány partnerségüket felbontva a kvótájuk miatt), mindketten szigorúan jobb partnerhalmazzal rendelkeznének. (Ez a definíció felel meg az egyszerű párosításokra vonatkozó stabilitásfogalomnak.)

3.3. Definíció. Az előbbi gráfban egy párosítás corewise (magonként) stabil, ha nincs olyan részhalmaza a szereplőknek, akik csupán maguk között kialakítva partneri kapcsolatokat, mind szigorúan jobban járnának (vagyis szigorúan preferáltabb részhalmazzal lennének partneri viszonyban), mint az adott párosítás esetén.

3.4. Definíció. Egy párosítás setwise (halmazonként) stabil, ha nincs olyan részhalmaza a csúcsoknak, akik csupán maguk között alkotva új partneri kapcsolatokat, de esetleg eddigi kapcsolataikból párat megszakítva, mind szigorúan jobban járnának, mint az adott párosítás esetén.

A [19] cikkben példákon keresztül láthatjuk, hogy a fenti definíciók nem feltétlenül egyeznek meg, sőt az sem teljesül mindig, hogy egy párosítás, melyre a *pairwise* és *corewise* stabil tulajdonság teljesül, az *setwise* is stabil lesz. Továbbá azt is megmutatja Sotomayor a cikkben, hogy *pairwise* stabil párosítás mindig létezik (bizonyos prefernciákra tett alapvető feltételek mellett), *setwise* stabil párosítás viszont nem mindig létezik páros (sok-a-sokhoz) gráfok esetében.

A [18] cikkben egy Gale–Shapley-algoritmushoz ([13]) hasonló eljárást láthatunk páronként stabil párosítás keresésére. Ahogy egyszerű párosítások esetén, itt is különbséget kell tennünk az algoritmusok azon tulajdonsága mentén, hogy mely csúcshalmaz kezdeményez. Ha a cégek ajánlanak állást az elfogadható alkalmazottak részhalmazának a preferencialistájuknak megfelelően, amely ajánlatokat a munkavállalók elfogadhatnak vagy visszautasíthatnak, akkor a cégek számára optimális stabil párosítást kapunk. Ha fordítva, vagyis a munkavállalók keresik meg a számukra elfogadható cégeket, majd a cégek elutasíthatják vagy elfogadhatják a jelentkezést, akkor egy munkavállalók számára optimális stabil párosítást kapunk. (Az, hogy egy stabil párosítás optimális az összes lehetséges stabil párosítás között, azt jelenti, hogy a megfelelő csúcshalmaz szereplőinek nem éri meg másik stabil párosítást keresniük, mivel így járnak a legjobban, egyikük sem kaphat jobb párt.) Ebből következik, hogy a mostani munkakeresési szokások a munkavállalóknak kedveznek, hiszen a keresés során általában ők jelentkeznek az állásra, és a megegyezés tárgyát képező egyik fő szempont, a bérezés kapcsán is sokszor van beleszólásuk a megállapodásba.

3.3. Versenyek a bálteremben és a piacon

Tekintsük azt a mindannyiunk által jól ismert jelenséget, amikor egy végzős osztály készül a szalagavató nyitó táncára. Ehhez valahogy az osztály tagjainak (általában) fiú-lány párokba kell rendeződniük. Az előző szakasz végén kifejtett eredmény azt mutatja, hogy amennyiben a fiúkra marad a feladat, hogy felkérjék a lányokat együtt keringőzésre (és a lányok még válthatnak is parnert egy ideig a Gale–Shapley-algoritmusnak megfelelően), akkor bizony egy fiú-optimális stabil párosítást fogunk kapni. Szóval néha lányként is megéri bevállalni a kezdeményezést.

Tekintsük a biztosítási piacot, ott is a viszont- és együttbiztosítási szerződéseket. Ha van egy halmazunk direktbiztosítókból és egy halmazunk viszontbiztosítókból, akkor egy-az-egyhez párosítást feltételezve (tehát minden viszontbiztosító csak egy dikertbiztosítóval áll szerződésben, és fordítva) találhatunk stabil párosítást. Ha ebben a kontextusban maradunk, de sok-a-sokhoz párosítást feltételezünk, ami jelen esetben a természetesebb irány, akkor a korábban említett eredmény ([19, Section 5.2]) alapján páronként stabil párosítás ilyenkor is létezik. (A preferenciákat ilyenkor a biztosítási díj, fedezet, esetleg egyéb szerződés szempontjából fontos paraméterek határozzák meg.) Ha a szakdolgozatban tárgyalt általános gráfot szeretnénk alkalmazni modellként, akkor vizsgálhatjuk az együttbiztosítások esetét. Egyszerű (egy-az-egyhez) párosítás esetén azt feltételezzük, hogy minden, a modellben szereplő biztosító pontosan egy másik biztosítóval szeretne együttbiztosítási szerződést kötni (persze előfordulhat, hogy ez bizonyos biztosítóknak nem sikerül, és egyedül maradnak a kockázataikkal szemben). Ekkor fontosabb az, hogy egy szerződés megkötése esetén mennyivel növekszik a biztosítók várható profitja együttesen, és a megállapodás azt rögzíti le, hogy milyen arányban fognak osztozni ezen a profiton, ha megkötik az együttbiztosítási szerződést. Ezek alapján alakulnak ki a preferenciák. Ahogy az 1.7 példában láttuk, nem feltétlenül létezik stabil párosítás általános gráfban, sőt népszerű sem, így előállhat az a helyzet, hogy a biztosítók akár nagy része elégedetlen lesz a kapott eredményekkel, hiszen úgy érzik, más párosítás esetén nagyobb profitot is elérhettek volna. (Azt azért feltételezzük, hogy csak olyan más biztosítókat céloznak meg a biztosítótársaságok, akikkel való együttbiztosítás hatására, az adott portfóliót tekintve, megnövekszik a profitjuk.)[2]

További vizsgálódás tárgyát képezi az az eset, amikor egy együttbiztosítás nem csak kettő, hanem több biztosító között jön létre, tehát amikor általános gráfban valamilyen szempontból optimális

[2] A COVID-19 járvány kitörése után a német korlátozások között szerepelt, hogy legfeljebb két háztartásból legfeljebb öt személy találkozhat egymással személyesen, és egy háztartásnak előre meg kell adnia, hogy mely másik háztartás tagjaival fog találkozni. Itt hasonló struktúrát fedezhetünk fel, hiszen általános gráffal tudjuk modellezni a háztartásokat, és ebben az általános gráfban keresünk párosítást.[17]

halmazrendszert keresünk a csúcsok (biztosítók) halmazán. (Ez a páros gráfok esetén tekintett sok-a-sokhoz párosítások általánosítása. Hasonló koncepcióval találkozhatunk, ha beleássuk magunkat a vesecsereprogramok matematikájába.) Ezzel a kérdéskörrel ebben a dolgozatban nem foglalkozom. A diplomamunkában vázolt problémakör csak nagyon kicsi szelete a preferencialistás gráfokban vizsgált párosítások kérdéskörének. Tekinthetnénk egy időben változó struktúrát is, ahol a gráf élei, akár csúcsai is idővel alakulnak ki, így a kapott eredményeket folyamatosan frissíteni kell, vagy adni egy korlátot arra vonatkozóan, hogy időben meddig vizsgáljuk a rendszert. (Lásd például [22] cikket, melyben a MIDAS dinamikus mikroszimulációs nyugdíjmodell háztartásformálódási modulját vizsgálják a szerzők.)

3.4. Piaci árak egységessége

Ahogy az előző szakaszban felmerült, kézenfekvő modellezése lehet a különböző piacokon történő kereskedésnek a páros gráfokban való párosításkeresés. Olyan kereskedelmet tudunk páros gráffal jól modellezni, ahol minden szereplő vagy csak eladóként vagy csak vevőként jelenik meg, illetve ha azon szereplőket, akik megjelennek a piacon mindkét szerepben, azokat mindkét ponthalmaz csúcsaihoz hozzávesszük, és ezen két csúcs közötti párosításbeli él jelenti azt, hogy az adott szereplő végül nem kereskedik. Előfordulhat, hogy a szereplők többsége vesz és ad is el terméket a piacon, ekkor megtehetjük, hogy minden szereplőt megjelenítünk mindkét oldalon. Ha például valaki eladóként párban áll egy másik szereplővel, de vevőként nem sikerült partnert találnia, akkor az egyik neki megfelelő csúcsból fog indulni párosításbeli él, a másikból nem.
A preferenciákat természetes módon tekinthetjük az árak függvényének. Ha feltételezzük, hogy minden szereplőnek van egy elképzelése, hogy milyen áron szeretne kereskedni az adott termékkel, és azt is, hogy teljesül az egyéni racionalitás (vagyis az, hogy minden szereplő a preferenciáinak megfelelően fog dönteni, és a számára legkedvezőbb elérhető áron kereskedik), akkor kialakulhatnak a preferenciák az üzlet megkötése esetén fizetendő árak alapján. (A kifizetett összeg mind az eladó, mind a vevő elképzeléseitől függ.)

A továbbiakban a [21] cikkben szereplő modell, illetve eredmények összefoglalását olvashatjuk. Tekintsünk a fentiek szerint egy eladó-vevő páros gráfot, ahol minden csúcsnak adunk egy pozitív súlyt ($\mu : S \cup B \to \mathbb{R}^+$), nevezetesen azt az értéket, amennyiért hajlandó eladni/megvenni a piacon kereskedett terméket (természetes módon az eladó egy minimumot, a vevő egy maximumot határoz meg). Akkor lehet a gráfban éllel összekapcsolva egy eladó és egy vevő, ha $s \in S$ eladóra és $b \in B$ vevőre $\mu(s) < \mu(b)$, hiszen ekkor történhet közöttük kereskedés. (Feltételezzük, hogy a szereplők által meghatározott árak előre adottak, és nem változnak semmilyen hatásra. Továbbá azt is, hogy minden szereplő egy egységnyi terméket ajánl/igényel.) Láthatjuk tehát, hogy a μ függvény meghatározza a gráf felépítését, amely tehát előre adott.
Lássunk néhány további jelölést, mely megkönnyíti a vizsgálódásokat.

3.5. Jelölés. [21, Section 2.1]

- M tetszőleges párosítás a $G = (S \cup B, E)$ páros gráfban
- $p_M : M \to \mathbb{R}^+$ árfüggvény azt az árat adja meg, amelyen a kereskedés végül lezajlik az M párosítás esetén egy pár tagjai között

- $v(M, p_M) : S \cup B \to \mathbb{R}$ az az érték, mely azt mutatja, hogy M és p_M mellett lezajlott kereskedés hatására mennyit kapott/fizetett az adott szereplő (ha nem kereskedik, akkor ennek a függvénynek az értéke megegyezik a neki megfelelő μ súllyal)
- $u(M, p_M) : S \cup B \to \mathbb{R}$ hasznosságfüggvény

3.6. Megjegyzés. Lássuk a fent definiált függvényeket képletszerűen.

- $v(M, p_M)(s) = \begin{cases} \mu(s) & \text{ha } s \text{ párosítatlan } M \text{ által} \\ p_M(M(s), s) & \text{ha } s \text{ párosított } M \text{ által} \end{cases}$
- $v(M, p_M)(b) = \begin{cases} \mu(b) & \text{ha } b \text{ párosítatlan } M \text{ által} \\ p_M(M(b), b) & \text{ha } b \text{ párosított } M \text{ által} \end{cases}$
- $u(M, p_M)(s) = v(M, p_M)(s) - \mu(s)$
- $u(M, p_M)(b) = \mu(b) - v(M, p_M)(b)$

A fenti 3.5 jelölésekkel felírhatjuk, hogy egy él mikor lesz M-re nézve blokkoló: $(s, b) \in E \setminus M$ blokkolja M-et, ha $v(M, p_M)(s) < v(M, p_M)(b)$, hiszen ekkor az eladó többet is kaphatna, a vevő kevesebbet is fizethetne a termékért, ha egymással kereskednének.

3.7. Definíció. Az M párosítás <u>páronként stabil a p_M árfüggvény mellett</u>, ha nincs M-re nézve blokkoló él, és teljesül az egyéni racionalitás, vagyis $\forall (s, b) \in M$ $p_M(s, b) \in [\mu(s), \mu(b)]$. Az M párosítás <u>páronként stabil</u>, ha létezik p_M árfüggvény, mely mellett páronként stabil (ekkor azt mondjuk, hogy p_M árfüggvény támogatja M-et).

3.8. Definíció. Egy (G, μ) gráf-csúcsfüggvény pár teljesíti a <u>LOP</u> (Law of One Price) tulajdonságot, ha minden páronként stabil M párosításra és M-et támogató p_M árfüggvényre p_M konstans függvény.

3.9. Definíció. Egy G gráf rendelkezik a <u>SLOP</u> (Strong Law of One Price) tulajdonsággal, ha bármilyen μ csúcssúlyozás (árigényeket meghatározó függvény) mellett (G, μ) teljesíti a LOP-ot.

A cikkben láthatunk is egy példát (Example 1), ahol a szerzők mutatnak egy (G, μ) csúcssúlyozott, LOP tulajdonságot teljesítő gráfra egy másik csúcssúlyozást, mely mellett már nem teljesíti a LOP tulajdonságot az új (G, μ') páros, tehát G nem SLOP tulajdonságú. Ehhez kapcsolódóan a cikkírók megadják a SLOP tulajdonságú gráfoknak egy karakterizációját, melyet röviden összefoglalva olvashatunk a következőkben.

Először is szükségünk van néhány újabb jelölésre.

3.10. Jelölés. [21, Section 2.4]

- $G|M$ az a gráf, melyet úgy kapunk G-ből, hogy elhagyjuk az M által párosítatlan csúcsokat, és a belőlük induló éleket (feltesszük, hogy minden G-beli maximális M párosításra $G|M$-nek van legalább 2-2 csúcsa az eladók és a vevők között is)
- egy G gráfra és M maximális párosítására $G|M$ teljesíti a <u>M-AC</u> tulajdonságot, ha $G|M$-ben létezik minden csúcsot fedő alternáló körséta (nem feltétlenül csak egyszer tartalmazhatja a csúcsokat)

- egy G gráf teljesíti a SAC tulajdonságot, ha minden M maximális párosítására $G|M$ teljesíti a M-AC tulajdonságot

Most pedig következzen a cikk fő állítása.

3.1. Tétel. *[21, Theorem 1] Egy G gráf pontosan akkor rendelkezik a SLOP tulajdonsággal, ha rendelkezik a SAC tulajdonsággal.*

Láthatjuk tehát, hogy az árak egységességére vonatkozó lehetőségek magától a gráfnak a felépítésétől függnek, pontosabban attól, hogy milyen alternáló struktúrákat tudunk megfigyelni a gráfban, bármely maximális párosítás mellet. (A 2.4 és 2.5 szakaszok algoritmusaiban - a maximalitás és a népszerűség eldöntésében - hasonlóan egy adott párosítás mellett kialakuló alternáló struktúrák vizsgálata a fő eszközünk.)

Nézzük most meg SLOP-szemüvegen keresztül a vizsgált páros, iránytatlan gráfok aszimptotikus viselkedését.

3.11. Definíció. Legyen $\theta > 0$, és $\mathbb{G}(\theta J, J)$ azon páros, irányítatlan gráfok halmaza, melyek egyik csúcshalmazában θJ, másikban J csúcs található, valamint legyen $t = \min\{\theta J, J\}$. Legyen minden $\lambda_t \in (0, 1)$ esetén P_{λ_t} egy valószínűségi eloszlás $\mathbb{G}(\theta J, J)$ halmazon, melyre minden k élű gráf előfordulási valószínűsége $\lambda_t^k(1-\lambda_t)^{\theta J^2 - k}$.

Magyarán a piaci szereplők Poisson-folyamatnak megfelelően véletlenszerűen találkoznak. Lássunk egy feltételt, mely mellett ezen véletlen találkozások hatására a kapott gráf aszimptotikusan 1 valószínűséggel teljesíti a SLOP tulajdonságot.

3.2. Állítás. *[21, Proposition 2] Legyen $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan, melyre $\lambda_t > \frac{\ln t + \ln\ln t + c_t}{t}$, ahol $c_t \to \infty$ $t \to \infty$ mellett. Ekkor* $\lim_{t\to\infty} P_{\lambda_t}(\{G \in \mathbb{G}(\theta J, J) : G \text{ teljesíti a SLOP tulajdonságot}\}) = 1$.

Az állítás azt mondja ki, hogy a piac növekedésével megfelelő feltételek mellett az árak 1 valószínűséggel egységessé válnak, illetve hogy a kapcsolatok számának (a csúcsok számához képesti) $\ln t$ ütemben való növekedésével a gráf aszimptotikusan SLOP tulajdonságú lesz. Vagyis elég az árak egységességéhez az, hogyha minden eladó növeli a várható kapcsolatai számát a piaci résztvevők számához képest $\ln t$ ütemben.

Függelék

Itt olvasható a 2.5 szakaszban leírt népszerűséget eldöntő algoritmus pszeudokódja.

Algorithm 2 F-bővítés inner

Require: $v \in free(F)$

$free(F) = free(F) \setminus \{v\}$
$inner(F) = inner(F) \cup \{v\}$
$even(F) = even(F) \cup \{v\}$

Algorithm 3 F-bővítés outer

Require: $v \in free(F)$

$free(F) = free(F) \setminus \{v\}$
$outer(F) = outer(F) \cup \{v\}$
$odd(F) = odd(F) \cup \{v\}$

Algorithm 4 szirom

Require: $u \in odd(F)$

for $u\underline{v} \in E(odd(F))$, ahol u és v "gyökérőse" megegyezik **do**
    $C = uv$ által meghatározott páratlan kör F-ben ▷ szirom
    for $w \in C \cap inner(F)$ **do**
        $inner(F) = inner(F) \setminus \{w\}$
        $outer(F) = outer(F) \cup \{w\}$
    end for
end for

Algorithm 5 egy-sziromban

Require: $u, v \in V(F) \setminus x_i, y_i$

for C szirom **do**
    if $u, v \in C$ **then return** 'yes'
    else next C
    end if
end for
return 'no'

Algorithm 6 gyökérszirom

Require: $u \in outer(F), i \in \{x_i, y_i\}$
if u "gyökérőse" i **then**
$j = \{x_i, y_i\} \setminus \{i\}$
if $uj \in B$ **then**
$R = uj$ által meghatározott páratlan kör F-ben ▷ gyökérszirom
for $w \in R \cap inner(F) \setminus \{j\}$ **do**
$inner(F) = inner(F) \setminus \{w\}$
$outer(F) = outer(F) \cup \{w\}$
end for
return $f = uj$
end if
end if
return 0

Lássuk a fő algoritmus pszeudokódját.

Require: G, M preferencia éllistás módon (kétszeresen láncolt listában a csúcsok és élek is)
$G_M = G \setminus \{M$-re nézve -2-es élek$\}$
$V_M = V$
$B = \{M$-re nézve blokkoló élek$\}$
$F = \{e_0\}$, ahol $e_0 = x_0 y_0 \in B$
$X = V \setminus V(M)$
$inner(F) = even(F) = \{x_0, y_0\}$
$free(F) = V \setminus inner(F)$
$outer(F) = odd(F) = \emptyset$
$U = \emptyset$ ▷ Ez egy üres sor, tehát fontos lesz az elemek bekerülési sorrendje
$p(u) = \emptyset \ \forall u \in V$
$a(u) = \emptyset \ \forall u \in V \setminus \{x_0, y_0\}$; $a(x_0) = x_0, a(y_0) = y_0$
for $e_i = x_i y_i \in B$ **do**
if $i \in V_M \setminus U$, ahol $i \in \{x_i, y_i\}$ **then**
F-bővítés inner(i)
$a(i) = i$
end if
for $u \in V_M \setminus U$ **do**
if $u \in free(F)$ **then** next u
else if $u \in inner(F)$ **then**
if $u \in X$ **then return** 'Blokkoló élből alternáló úton párosítatlan csúcs'
else if $M(u) \in even(F)$ **then return** 'Blokkoló élt tartalmazó alternáló kör'
else
$F = F \cup \{uM(u)\}$
F-bővítés outer($M(u)$)
$p(M(u)) = u$
$a(M(u)) = a(u)$
$U = U \cup \{u\}$
end if

29: **else** ▷ Ekkor $u \in outer(F)$
30: **for** $u\underline{v} \in E(G_M)$, ahol $v \in free(F)$ **do**
31: $F = F \cup \{uv\}$
32: F-bővítés inner(v)
33: $p(v) = u$
34: $a(v) = a(u)$
35: **if** $uv \in B$ **then return** 'Legalább két blokkoló élt tartalmazó alternáló út'
36: **else** next v
37: **end if**
38: **end for**
39: **for** $u\underline{v} \in E(G_M)$, ahol $v \in V_M \setminus free(F)$ **do**
40: **if** $\{x_i, y_i\} \notin a(v)$ **then**
41: $a(v) = a(v) \cup a(u)$
42: **else** next v
43: **end if**
44: **end for**
45: **if** $u \in odd(F)$ **then**
46: **for** $u\underline{v} \in B$, ahol $v \in (V(F) \cap V_M) \setminus \{x_i, y_i\}$ **do**
47: **if** $v \notin \{x_i, y_i\}$ nem az u őse **then return** 'Legalább két blokkoló élt tartalmazó alternáló út'
48: **else if** $v \in even(F)$ az u őse **then return** 'Blokkoló élt tartalmazó alternáló kör'
49: **end if**
50: **end for**
51: **else** ▷ Tehát $u \in outer(F) \cap even(F)$
52: **for** $u\underline{v} \in B$, ahol $v \in V_M$[3] **do**
53: **if** $v \notin \{x_i, y_i\}$ nem az u őse, és egy-sziromban(u, v)='no' **then return** 'Legalább két blokkoló élt tartalmazó alternáló út'
54: **else if** $v \in even(F)$ az u őse, és egy-sziromban(u, v)='no' **then return** 'Blokkoló élt tartalmazó alternáló kör'
55: **else if** $v \in even(F)$ az u őse, és egy-sziromban(u, v)='yes' **then return** 'Legalább két blokkoló élt tartalmazó alternáló út'
56: **else return** 'Blokkoló élt tartalmazó alternáló kör'
57: ▷ Ekkor v nem az őse, egy sziromban vannak, és $v \in even(F)$, mivel amúgy már kiszúrtuk volna a blokkoló élt
58: **end if**
59: **end for**
60: **end if**
61: **for** $u\underline{v} \in E(outer(F) \cap V_M)$, ahol $a(u) \cap a(v) = \emptyset$ **do return** 'Blokkoló élt tartalmazó alternáló kör'
62: **end for**

[3]Mint látjuk, ebben az esetben mindenképpen akadályba ütközünk, az 53-58. sorok csupán arra szolgálnak, hogy megadjuk, hogy pontosan melyik típusú akadályba. Ha ez az információ nem szükséges, akkor ezt a részt össze is vonhatjuk egy feltételbe.

if gyökérszirom$(u, x_i) \neq 0$ **then** $f_i(u) =$gyökérszirom(u, x_i)

else if gyökérszirom$(u, y_i) \neq 0$ **then** $f_i(u) =$gyökérszirom(u, y_i) $\triangleright$ Csak az egyik fordulhat elő, különben a két blokkoló élen keresztül javító kört kapnánk.

end if

if $u \in odd(F)$ **then**

szirom(u)

end if

$U = U \cup \{u\}$

end if

next u

end for

for $u \in U \cap outer(F) \cap V_M$ **do**

for $u\underline{v} \in E(V_M \cap U) \setminus M$ **do**

if $\{x_i, y_i\} \notin a(v)$ **then**

$a(v) = a(v) \cup a(u)$

else next v

end if

end for

end for

$B = B \setminus \{e_i\}$

for $u \in U \cap outer(F)$, ahol gyökérszirom(u, x_i) vagy gyökérszirom(u, y_i) nem 0 **do**

$B = B \setminus \{f_i(u)\}$

end for

$V_M = V_M \setminus U \cup \{x_i, y_i, M(x_i), M(y_i)\}$

next e_i

end for

return 'M népszerű párosítás G-ben'

Hivatkozások

[1] Frank, A., Király, T. *Operációkutatás*. Typotex, 2013.

[2] https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2020/kosztolanyi_kata.pdf

[3] Huang, C.-C. and Kavitha, T. Popular Matchings in the Stable Marriage Problem. *Information and Computation.* 222. 666-677. 10.1007/978-3-642-22006-7-56., 2011.

[4] Frank, A. *Kombinatorikus optimalizálás III: Poliéderes kombinatorika.* ELTE TTK, Operációkutatási Tanszék, 2014.

[5] Irving, R. W. An efficient algorithm for the "stable roommates" problem. *Journal of Algorithms*, 6(4), 577-595., 1985.

[6] Biró, P., Irving, R.W. and Manlove, D. Popular Matchings in the Marriage and Roommates Problems. *CIAC.*, 2010.

[7] Schrijver, A. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency., 2003.

[8] Edmonds, J. Paths, Trees, and Flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17, 449 - 467., 1965.

[9] Witzgall, C. and Zahn, C.T. Modification of Edmonds' maximum matching algorithm. *Journal of Research of the National Bureau of Standards Section B Mathematics and Mathematical Physics*, 91., 1965.

[10] Kavitha, T. Popular Roommates in Simply Exponential Time. *FSTTCS.*, 2019.

[11] Faenza, Y., Kavitha, T., Powers, V. and Zhang, X. Popular Matchings and Limits to Tractability., 2018.

[12] Kovács, E.R., Cseh, Á., Kosztolányi, K. and Mályusz, A. Polynomially tractable cases in the popular roommates problem. *ArXiv, abs/2107.06694.*, 2021.

[13] Gale, D. and Shapley, L. S. College Admissions and the Stability of Marriage. *The Amnerican Mathematical Monthly, 69(1), 9–15.*, 1962.

[14] https://math.bme.hu/~zv/kivonatok/2019/stumphauser_nora_szdkiv.pdf

[15] https://docplayer.hu/200569790-Lekli-henrietta-iskolavalasztas-europaban.html

[16] https://en.wikipedia.org/wiki/House_allocation_problem

[17] https://mkik.hu/download/98/a-koronavirus-hatasai-a-delnyugat-nemetorszagi-gazdasag-aktualis-helyzetere-uezleti-kapcsolatainkra

[18] Roth, A. E. Stability and Polarization of Interests in Job Matching. *Econometrica, 52(1)*, 47–57., 1984.

[19] Sotomayor, M. Three remarks on the many-to-many stable matching problem. *Mathematical social sciences, 38(1)*, 55-70., 1999.

[20] Huang, C.-C. and Kavitha, T. Efficient Algorithms for Maximum Weight Matchings in General Graphs with Small Edge Weights. *Proceedings of the Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms.* 1400-1412., 2012.

[21] Donna, J., Schenone, P. and Veramendi, G. Networks, frictions, and price dispersion. *Games and Economic Behavior. 124.* 406-431., 2020.

[22] Gal, R., Törzsök, Á. Háztartás-formálódás a MIDAS modellben [Marriage market in the MIDAS-HU model]. *Közgazdasági Szemle. 62.* 1343-1358., 2015.