

NYILATKOZAT

Név: Gehér Panna

ELTE Természettudományi Kar, szak: Alkalmazott Matematikus MSc

NEPTUN azonosító: GRBHC5

Szakedolgozat címe:

Euklideszi Ramsey elmélet

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022. 05. 26.

Gehér Panna

a hallgató aláírása

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

GEHÉR PANNA

EUKLIDESZI RAMSEY ELMÉLET

DIPLOMAMUNKA

ALKALMAZOTT MATEMATIKUS MSc

TÉMAVEZETŐ: TÓTH GÉZA

RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET

BME SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI ÉS INFORMÁCIÓELMÉLETI TANSZÉK



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

2022.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Tóth Gézának az évek során nyújtott rengeteg segítségét, odaadó munkáját és tanácsait. Hálás vagyok az érdekes konzultációkért, illetve a mindig lelkes és motiváló hozzáállásáért.

Köszönöm továbbá Frankl Nórának dolgozatom iránti érdeklődését, a hasznos beszélgetéseket és érdekes kérdésselvetéseit. Szintén hálával tartozom az egyetem oktatóinak a mindig jó hangulatú előadásokért, és amiért bármilyen felmerülő kérdés kapcsán számíthattam segítségükre. Külön köszönöm Bérczi-Kovács Erikának és Bérczi Kristófnak a sok biztatást és motivációt.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni családomnak és barátaimnak szüntelen támogatásukat.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Ramsey halmazok	5
2.1. Példák Ramsey halmazra	7
2.2. Példák nem Ramsey halmazra	10
3. Ramsey halmazok normált térben	13
3.1. l_p -Ramsey halmazok	15
3.1.1. Példák l_p -Ramsey halmazra	15
3.1.2. Negatív eredmények	21
3.2. Erősen Ramsey halmazok	23
3.3. Összefoglalás	26
4. Aszimmetrikus Ramsey problémák	27
4.1. Monokromatikus eltoltak	33
4.2. Nem monokromatikus eltoltak	37
4.2.1. Reguláris színezések alacsony dimenziós terekben	38
4.2.2. Szubreguláris színezések magas dimenziós terekben	48
4.3. Nem monokromatikus izometrikus példányok	55
4.3.1. Euklideszi terekben	55
4.3.2. Minkowski terekben	57
4.4. Összefoglalás	59
5. Hivatkozások	61

1. Bevezetés

A Ramsey elmélet nagy struktúrák elkerülhetetlen részstruktúráit vizsgáló tudományág. Klasszikus példa Ramsey típusú tételre a témakör nevét viselő Frank P. Ramsey gráfokra vonatkozó tétele: két színnel színezett kellően nagy csúcsszámú teljes gráf mindig tartalmaz adott méretű egyszínű teljes részgráfot. A tételt más és más kontextusba helyezhetjük: Gráfok helyett színezhetünk más objektumokat, például részhalmazokat, számokat vagy éppen a sík pontjait. A keresett részstruktúrák ezen esetekben egyszínű részhalmazok, számsorozatok, illetve pontkonfigurációk.

Az Euklideszi Ramsey elmélet főleg az utóbbival, a geometriai vonatkozású kérdésekkel foglalkozik: Tipikusan az Euklideszi sík, vagy magasabb dimenziós tér pontjait színezzük és egyszínű konfigurációkat keresünk. A szisztematikus vizsgálatokat Erdős, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer és Straus háromrészes cikksorozata [16–18] indította el az 1970-es években, aminek köszönhetően egy új, izgalmas ága született a kombinatorikus geometriának. A témakör egyik leghíresebb nyitott kérdése, az úgynevezett Hadwiger–Nelson probléma ennél korábban, az 1950-es években fogalmazódott meg: Mennyi a sík $\chi(\mathbb{R}^2)$ -vel jelölt kromatikus száma, azaz legkevesebb hány színnel lehet kiszínezni a sík pontjait úgy, hogy ne legyen két egyszínű pont egységtávolságra? A pontos érték meghatározása továbbra is nyitott kérdés, és meglehetősen nehéz feladatnak tűnik. Egyszerű példák mutatják, hogy hét szín elég (Isbell [35]), de három szín nem (Moser [50]). Ezen eredmények szinte a feladat megjelenésével egyidőben születtek, mégis sokáig nem sikerült javítani rajtuk, így nagy visszhangot keltett, mikor 2018-ban de Grey [34], illetve nem sokkal később Exoo és Ismailescu [20] igazolták, hogy 4 szín sem elég. Tehát az ismert korlátok:

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

A 2018-as áttörést követően a témakör ismét nagyobb figyelemben részesült, a problémakör feltérképezése érdekében pedig egy Polymath projekt indult. Ennek elsődleges célja de Grey bizonyításának további vizsgálata, illetve esetleges egyszerűsítése volt. Igaz, a ma ismert legegyszerűbb bizonyítás is számítógép használatát igényli, a bizonyítás nagymértékben egyszerűsödött, ráadásul több új eredmény is született a probléma egyes variánsaival kapcsolatban.

A feladatot magasabb dimenzióban is vizsgálhatjuk. Sokáig ismeretlen volt $\chi(\mathbb{R}^n)$ aszimptotikus viselkedése, így nagy áttörést jelentett, mikor Frankl és Wilson [27] exponenciális alsó korlátot adtak. A jelenleg ismert legjobb korlátok:

$$(1.239\dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n,$$

ahol az alsó korlát Raigorodskii-tól [57] származik, a felső korlátot pedig először Larman és Rogers [45] igazolták, majd később Prosanov [55] új bizonyítást publikált.

A feladatot számtalan különböző módon általánosíthatjuk. Érdekes kérdésekhez jutunk, ha például az egyes színosztályokban különböző konfigurációkat keresünk vagy ha egybevágóság helyett más transzformációkat tekintünk. Az Euklideszi tér helyett akár más normált terekben is dolgozhatunk.

Diplomamunkámban két Ramsey típusú kérdéskört vizsgálunk. A dolgozat első felében a témakör középpontjában álló úgynevezett Ramsey halmazokkal foglalkozunk, melyet Erdősét vezettek be cikksorozatukban. Cikkük megjelenését követően számos új eredmény született a témában, azonban a Ramsey halmazok karakterizálása továbbra is nyitott probléma. A dolgozatban először körbejárjuk a témakör legfontosabb eredményeit, problémáit és nyitott kérdéseit, majd azt vizsgáljuk, miként lehet a Ramsey halmaz fogalmát normált terekre kiterjeszteni: Általában l_p terekben dolgozunk, de röviden kitérünk a Minkowski terek esetére is. Az l_p normák esetében a Ramsey halmaz definíciójának általánosítása kézenfekvő, mégis csak kevés idekapcsolódó eredmény található az irodalomban, ezek túlnyomó többsége pedig kizárólag az l_∞ normával foglalkozik. A dolgozatban megmutatjuk, hogy a legtöbb Euklideszi esetben ismert tulajdonság – a feltételek esetleges gyengítése mellett – átöröklődik l_p terekre.

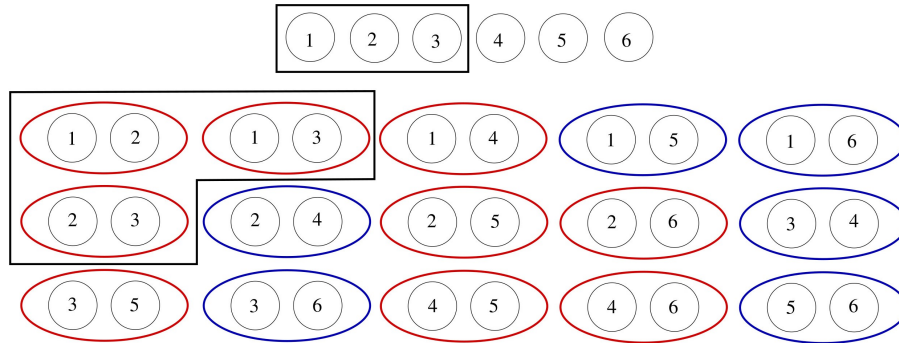
Ezzel ellentétben, lényegesen nehezebbnek tűnik a helyzet Minkowski terekben, ugyanis már a Ramsey halmaz fogalmának általánosítása sem teljesen egyértelmű. A dolgozatban egy lehetséges definíciót adunk, azonban tulajdonságainak vizsgálata során több komolyabb nehézség is adódik.

A dolgozat második részében a Hadwiger-Nelson problémának egy aszimmetrikus változatával foglalkozunk, melyet szintén Erdősék vetették fel 1973-ban. A kérdés így szól: Milyen K konfigurációkra teljesül, hogy a sík minden piros-kék színezésében található vagy egységtávolságú piros pontpár, vagy K -val egybevágó egyszínű kék konfiguráció? Egyszerű megfontolás alapján minden 3 vagy kevesebb pontú konfiguráció teljesíti a feltételeket. Juhász [37] tétele azt állítja, hogy a 4 pontú konfigurációk is rendelkeznek ezen tulajdonsággal. Kérdés, hogy mi a helyzet a nagyobb pontszámú konfigurációkkal. A legjobb felső korlátot Csizmadia és Tóth [12] tétele adja, akik egy trükkös konstrukcióval 8 pontú ellenpéldát mutattak. A dolgozatban a problémát magasabb dimenziós Euklideszi terekben, illetve Minkowski terekben tekintjük. Vizsgálatainkban fontos szerepet foglalkoztatnak a játszott fedési és pakolási tételek, így először röviden összefoglaljuk a témakör legfontosabb eredményeit és nyitott kérdéseit.

2. Ramsey halmazok

A Ramsey elméletet alapjait meghatározó gondolat, illetve eredmény 1930-ból származik:

2.1. Tétel (Ramsey [59]). *Minden $k < l$ és r értékekre létezik olyan $R = R(k, l, r)$ szám, melyre teljesül, hogy r színnel színezve egy tetszőleges R elemű halmaz k elemű részhalmazait mindig található olyan l elemű részhalmaz, melynek minden k elemű részhalmaza azonos színt kapott.*



1. ábra. Példa: egy 6 elemű halmaz 2 elemű részhalmazait 2 színnel színezve van olyan 3 elemű halmaz, melynek minden 2 elemű részhalmaza azonos színű, azaz $R(2, 3, 2) \leq 6$

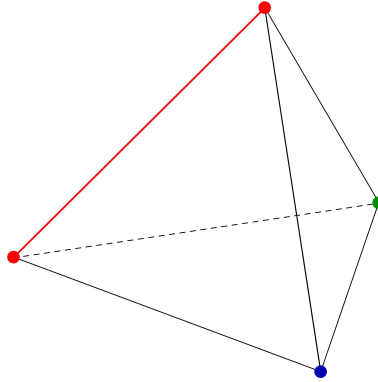
Érdeemes kiemelni, hogy az $l = 2, k = 1$ eset egybeesik a skatulya elvvel: tetszőleges $R = r + 1$ elemű halmazt r színnel színezve mindig lesz legalább 2 elem, melyek azonos színt kaptak. A tétel legegyszerűbb nemtriviális, egyben legismertebb alakja a bevezetőben is említett gráfokra vonatkozó Ramsey tétel:

2.2. Tétel (Ramsey tétele gráfokra). *Minden l érték esetén, létezik olyan $R = R(l)$ érték, hogy minden R csúcsú gráf vagy tartalmaz l csúcsú klikket, vagy található benne üres l -est, azaz kiválasztható l csúcs, melyek közül egyik pár közt sem fut él.*

Ez valóban egy speciális esete Ramsey 2.1. tételének, hiszen megegyezik a $k = 2, r = 2$ esettel: Legyen $R = R(2, l, 2)$ és tekintsünk egy tetszőleges R csúcsú gráfot. Ezen gráf egyértelműen megfeleltethető az $[R] = \{1 \dots R\}$ halmaz 2 elemű részhalmazainak 2-színezésének: egy részhalmazt színezzünk pirosra, ha a hozzátartozó csúcspár közt fut él, ellenkező esetben színezzük kékre. Ramsey tétele alapján az $[R]$ halmaznak vagy létezik olyan l elemű részhalmaza, melynek minden 2 elemű részhalmaza piros, vagy létezik olyan l elemű részhalmaza, melynek minden 2 elemű részhalmaza kék, ebből pedig következik az állítás.

Az Euklideszi Ramsey elmélet a fenti tételben megjelenő szemléletet igyekszik a geometria területére átültetni. Tekintsünk például egy $(r + 1)$ csúcsú szabályos szimplexet. Csúcsait r színnel tetszőlegesen színezve mindig lesz azonos színnel rendelkező csúcspár. Vagyis minden r színszámra

teljesül, hogy az r vagy magasabb dimenziós Euklideszi teret r színnel színezve elkerülhetetlen az azonos színű egységtávolságú pontpár létrehozása.



2. ábra. A tetraéder tanúsítja, hogy \mathbb{R}^3 minden 3-színezése tartalmaz egyszínű egységtávolságú pontpárt

A pontpár ezen tulajdonságát általánosítja az úgynevezett Ramsey halmaz fogalma, melyet Erdősék vezettek be cikksorozatukban:

2.1. Definíció (Ramsey). *Egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt Ramseynek nevezünk, ha minden $r \geq 2$ egészre létezik $n_0 = n_0(X, r)$ küszöbindex, hogy $n \geq n_0$ esetén \mathbb{R}^n minden r -színezésében található X -el egybevágó egyszínű halmaz.*

Érdeemes egy kicsit más szemszögből is megnézni a fenti definíciót: Legyen X egy véges halmaz. Az $\chi(\mathbb{R}^n; X)$ kromatikus szám jelölje azt a legkisebb k értéket, melyre teljesül, hogy \mathbb{R}^n kiszínezhető k színnel úgy, hogy egyik színosztály se tartalmazzon vele egybevágó részhalmazt. Egy X halmaz tehát pontosan akkor Ramsey, ha $\chi(\mathbb{R}^n; X)$ nem korlátos n függvényében. Speciálisan, ha I egy két pontú halmaz, akkor a $\chi(\mathbb{R}^n; I)$ kromatikus számot a Hadwiger-Nelson probléma nyomán a tér kromatikus számának nevezzük és egyszerűen $\chi(\mathbb{R}^n)$ -el jelöljük. Értékére alsó korlátot ad egy tetszőleges egységtávolság gráf kromatikus száma, azaz egy olyan gráf kromatikus száma, melyben két csúcs közt pontosan akkor fut él, ha azok egységtávolságra vannak egymástól. Sőt, a kompaktsági elv segítségével megmutatható, hogy létezik olyan véges egységtávolság gráf, melynek kromatikus száma megegyezik $\chi(\mathbb{R}^n)$ értékével. Ezen tétel a későbbiekben nagyon fontos szerepet fog játszani.

2.3. Tétel (de Bruijn-Erdős tétel [6]). *Legyen X egy tetszőleges halmaz, r pedig adott egész. Ha \mathbb{R}^n minden r -színezésében található X -el egybevágó egyszínű halmaz, akkor ez már \mathbb{R}^n -nek egy véges részhalmazára is teljesül.*

Tehát egy Ramsey halmaz esetén minden r színszámhoz tartozik egy ezt igazoló véges tanúhalmaz. Kérdés, hogy mely halmazok teljesítik, illetve mely halmazok nem teljesítik a Ramsey tulajdonság feltételeket: A továbbiakban mindkét esetre látunk példákat.

2.1. Példák Ramsey halmazra

Triviálisan minden 1 pontú halmaz Ramsey. Már azt is láttuk, hogy az egységtávolságú pontpár is rendelkezik a Ramsey tulajdonsággal, sőt hasonló megfontolás alapján minden szabályos szimplex is Ramsey. A következő tétel fontos tulajdonságát írja le a Ramsey halmazoknak, segítségével a már ismert példákból további Ramsey halmazokat gyárthatunk.

2.4. Tétel (Szorzás-tétel [16]). *Legyen $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ és $K_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ Ramsey halmaz.*

Ekkor a $K_1 \times K_2 := \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mid (x_1, \dots, x_n) \in K_1, (y_1, \dots, y_m) \in K_2\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ halmaz is Ramsey.

Bizonyítás. Legyen $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ és $K_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ Ramsey halmaz, $r > 1$ adott. A Ramsey halmaz definíciója alapján létezik u dimenziószám, melyre teljesül, hogy \mathbb{R}^u minden r -színezésében található K_1 -el egybevágó egyszínű halmaz. Legyen $T = \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ a kompaktsági elv által biztosított véges tanúhalmaz. Továbbá legyen v olyan, hogy \mathbb{R}^v minden r^t -színezése tartalmaz K_2 -vel egybevágó egyszínű halmazt. Azt állítjuk, \mathbb{R}^{u+v} minden r -színezése tartalmaz $K_1 \times K_2$ -vel egybevágó egyszínű halmazt: Vegyünk egy tetszőleges $\chi : \mathbb{R}^{u+v} \rightarrow [r]$ színezést. Ez meghatározza \mathbb{R}^v -nek egy r^t -színezését:

$$\chi' : \mathbb{R}^v \rightarrow [r^t], \chi'(y) := (\chi(x_1, y), \dots, \chi(x_t, y)).$$

A v dimenziószám választása alapján létezik K_2 -vel egybevágó χ' színezés szerint egyszínű halmaz, legyen K'_2 ilyen. Színezzük T pontjait a következő módon:

$$\chi'' : T \rightarrow [r], \chi''(x_i) := \chi(x_i, y), \text{ ahol } y \in K'_2 \text{ tetszőleges.}$$

T definíciója alapján tartalmaz K_1 -el egybevágó χ'' szerint egyszínű halmazt, legyen K'_1 ilyen. K'_1 és K'_2 definíciója alapján $K'_1 \times K'_2$ a χ színezés szerint egyszínű, ezzel pedig az állítást beláttuk. \square

A tétel közvetlen következménye, hogy minden két elemű halmaz szorzata, azaz a téglák csúcshalmazai rendelkeznek a Ramsey tulajdonsággal. Egy Ramsey halmaz minden részhalmaza is Ramsey, amiből azonnal adódik, hogy a derékszögű háromszögek Ramsey halmazok, hiszen egyetlen pont hozzávételével kiegészíthetők téglalappá. Kérdés, milyen halmazokra igaz még, hogy pontjaik egy téglatest csúcseinak részhalmazát alkotják. Álljon $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n+1$) általános helyzetű pontból. Ahhoz, hogy pontjai kiegészíthetők legyenek egy téglacsúcshalmazává, egy szükséges feltétel, hogy X semelyik 3 pontja se határozzon meg derékszögnél nagyobb szöget. Ez a feltétel $n \leq 3$ esetben elégségesnek is bizonyul, így minden hegyesszögű háromszög Ramsey. Mi a helyzet a tompaszögű háromszögekkel? A kérdést Frankl és Rödl válaszolták meg:

2.5. Tétel (Frankl-Rödl [24]). *Minden háromszög Ramsey.*

Bizonyítás. (Vázlat)

A bizonyítás három lépésből áll: Az első lépésben a 2.1. Ramsey-tétel segítségével azt mutatták meg, hogy minden $t \geq 2$ egészre a $\sqrt{2t}$, $\sqrt{2t}$, $\sqrt{8t-6}$ oldalú háromszög Ramsey. Vegyük észre,

hogy t értékét növelve a két rövidebb oldal által bezárt szög 180° -hoz tart, azaz egyre laposabb tompaszögű háromszöget kapunk. A második, illetve harmadik lépésben ezen háromszögcsalád segítségével először az egyenlőszárú háromszögek, majd a tetszőleges háromszögek Ramsey tulajdonságát bizonyították.

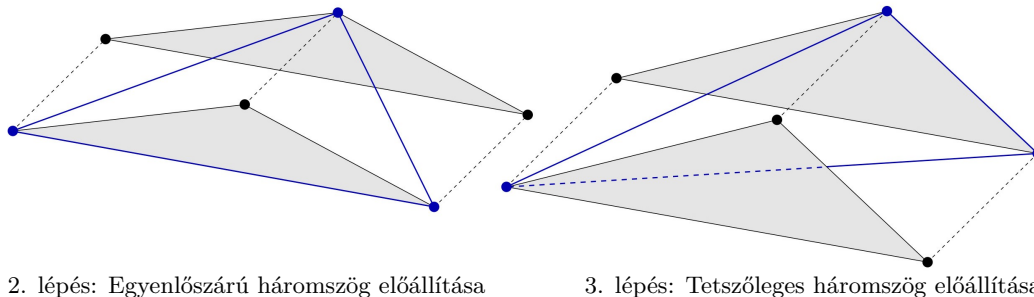
Az első állítás igazolásához rögzítsünk egy $t \geq 2$ egész számot és legyen $n = R(2t + 1, 2t - 1, r)$, azaz válasszuk n -et olyan nagynak, hogy minden n elemű halmaz $(2t - 1)$ elemű részhalmazain definiált tetszőleges r -színezés tartalmazzon olyan $(2t + 1)$ elemű részhalmazt, melynek minden $(2t - 1)$ elemű részhalmazához ugyanazzal a színnel rendelkezik. Tekintsük \mathbb{R}^n azon pontjait, melyeknek koordinátái helyén $(2t - 1)$ helyet leszámítva 0 áll, a maradék helyeken pedig $1, 2, \dots, t, t - 1, \dots, 1$, ebben a sorrendben. Ezen pontok r -színezése meghatározza az $[n] = \{1, \dots, n\}$ halmaz $(2t - 1)$ elemű részhalmazainak egy r -színezését. Így n választása alapján létezik egy $(2t + 1)$ elemű S halmaz, melynek minden $(2t - 1)$ elemű részhalmaza azonos színű. Válasszuk ki S három részhalmazát úgy, hogy a hozzájuk tartozó A, B, C pontok nem 0 koordinátái B -ben eggyel jobbrább legyenek mint A -ban, és eggyel balrabb legyenek mint C -ben. Például $t = 4$ -re A, B, C a következő alakú:

$$\begin{aligned} A &= \{ \dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1 \dots 0 \dots 0 \dots \} \\ B &= \{ \dots 0 \dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1 \dots 0 \dots \} \\ C &= \{ \dots 0 \dots 0 \dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1 \dots \} \end{aligned}$$

Az A, B, C pontok megfelelőek, hiszen egyszínűek, és könnyen ellenőrizhető, hogy A és B , illetve B és C távolsága $\sqrt{2t}$, még A és C távolsága $\sqrt{8t - 6}$. Ezzel az 1. állítást igazoltuk.

Második lépésben az egyenlőszárú háromszögek Ramsey tulajdonságát igazoljuk: Könnyen látszik, hogy tetszőleges egyenlőszárú háromszög előállítható egy, az első lépésben definiált lapos háromszögből kiindulva az alapon fekvő két csúcs megemelésével: Valóban, adott egyenlőszárú háromszög esetén megfelelően választva t értékét a háromszög beágyazható egy $\sqrt{2t}, \sqrt{2t}, \sqrt{8t - 6}$ oldalarányú háromszög és egy megfelelő hosszú intervallum szorzataként előálló hasábjába. Így a 2.4. Szorzás tétel alapján minden egyenlőszárú háromszög Ramsey.

Végül a harmadik lépésben a 2.4. Szorzás tétel újbóli alkalmazásával az egyik alapon fekvő csúcsot tovább emelhetjük, így tetszőleges egyszínű háromszöget megtalálhatunk.



2. lépés: Egyenlőszárú háromszög előállítása

3. lépés: Tetszőleges háromszög előállítása

3. ábra. Tetszőleges háromszög előáll Ramsey halmazok szorzataként

□

Csak kevés további példa ismert Ramsey halmazra. Kříž [41] tétele alapján minden szabályos sokszög, például a szabályos ötszög is Ramsey. Nemrég Karamanlis [38] megmutatta, hogy minden szimplex beágyazható véges sok szabályos sokszög szorzataként előálló testbe. A két tételt összevetve adódik, hogy minden szimplex Ramsey. Korábban Frankl és Rödl [25] más technikával ennél erősebb állítást bizonyítottak: megmutatták, hogy minden szimplex exponenciálisan Ramsey.

2.2. Definíció (Exponenciálisan Ramsey halmaz). *Egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz exponenciálisan Ramsey, ha létezik $c > 1$ konstans, hogy $m \geq n$ és $r < c^m$ esetén \mathbb{R}^m minden r -színezésében található X -el egybevágó egyszínű halmaz.*

Ezzel ekvivalensen X exponenciálisan Ramsey, ha $\chi(\mathbb{R}^n, X)$ exponenciálisan növekszik n -ben, azaz $\chi(\mathbb{R}^n, X) \geq c^n$ teljesül valamely $c > 1$ konstansra.

A két pontú halmazok exponenciális Ramsey tulajdonságát, azaz a tér kromatikus számának exponenciális növekedését hosszú idő után Frankl és Wilson [27] igazolták. A nagy áttörést egy halmazrendszerekre vonatkozó tételük segítségével érték el: Bizonyításukban egy egységtávolság gráfokból álló sorozatot konstruáltak és egy trükkös hozzárendelés segítségével egy halmazrendszert definiáltak. Erre vonatkozó tételükkel pedig exponenciális alsó korlátot adtak a gráfcsalád kromatikus számára.

2.6. Tétel (Frankl-Wilson [27]). *Nagy n dimenziószám esetén:*

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.2 + o(1))^n.$$

Bizonyítás. (Vázlat)

Legyen n rögzített egész, q pedig egy tetszőleges szám, melyre $2q - 1 \leq n$ teljesül. Tekintsük az n -dimenziós tér azon pontjait, melyeknek koordinátái közt $(2q - 1)$ helyen $1/\sqrt{2q}$ áll, a többi koordinátája pedig 0 és vegyük az ezen pontok által meghatározott $G = (V, E)$ egységtávolság gráfot. Egy G gráf kromatikus számára alsó becslést például az $\alpha(G)$ függetlenségi számára vonatkozó felső becslés segítségével adhatunk, hiszen tetszőleges G gráf esetén:

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

G minden v pontjához definiáljuk az $F(v) := \{i \mid x_i \neq 0\}$ halmazt. Ekkor $v_1, v_2 \in V$ pontok távolsága pontosan akkor 1, azaz v_1 és v_2 közt pontosan akkor fut él, ha $F(v_1)$ és $F(v_2)$ metszete éppen $(q - 1)$ elemű. Így elegendő a következő kérdést tekinteni: maximum hány $F(v)$ halmazt választhatunk ki úgy, hogy egyik halmazpárnak se legyen a metszete éppen $(q - 1)$ elemű? Frank és Wilson belátták, hogy ha q prímszám, akkor $\binom{n}{q-1}$ halmaznál nem választhatunk többet, tehát:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{\substack{q \text{ prímszám} \\ 2q-1 \leq n}} \frac{\binom{n}{2q-1}}{\binom{n}{q-1}}.$$

Megfelelően választva q értékét az állítás adódik. \square

Vegyük észre, hogy Frankl és Wilson az exponenciális Ramsey tulajdonságnál többet bizonyítottak, hiszen azt mutatták meg, hogy a kromatikus számra alsó korlátot adó $|V|/\alpha(G)$ hányados is exponenciálisan növekszik. Ráadásul az ezt tanúsító gráfsorozat csúcshalmazának mérete csak exponenciálisan nő n -ben. Ezen tulajdonságot igyekeznek megragadni az úgynevezett szuper-Ramsey feltétel:

2.3. Definíció (Szuper-Ramsey halmaz). *Egy X halmazt szuper-Ramseynek nevezünk, ha léteznek $c_1, c_2 > 1$ konstansok és n_0 küszöbindex, hogy $n > n_0$ esetén \mathbb{R}^n -nek létezik olyan $Y(n)$ részhalmaz, melyre:*

$$|Y(n)| \leq c_1^n \quad \text{és} \quad \frac{|Y(n)|}{\alpha(Y, X)} \geq (c_2 + o(1))^n$$

teljesül, ahol $\alpha(Y, X)$ az Y legnagyobb olyan részhalmazának elemszáma, mely nem tartalmaz X -el egybevágó halmazt.

A definícióban szereplő feltételek inkább technikai jellegűek, jelentőségük abban rejlik, hogy az exponenciálisan Ramsey halmazokkal ellentétben a szuper-Ramsey halmazokról ismert, hogy szorzásra zárt halmazt alkotnak:

2.7. Tétel (Frankl-Rödl [26]). *Két szuper-Ramsey halmaz szorzata is szuper-Ramsey.*

Definícióból adódóan a szuper-Ramsey tulajdonságból azonnal következik, hogy az adott halmaz exponenciálisan Ramsey, tehát két szuper-Ramsey szorzata exponenciálisan Ramsey. Fontos megemlíteni, hogy az eddig említett összes exponenciálisan Ramsey halmaz a szuper-Ramsey tulajdonsággal is rendelkezik. Sőt, ez az egyetlen ismert módszer az exponenciális Ramsey tulajdonság igazolására. Egy másik érdekesség, hogy egyelőre olyan halmaz se ismert, mely Ramsey, de nem exponenciálisan Ramsey. Tehát lehetséges, hogy a három fogalom egybeesik.

2.2. Példák nem Ramsey halmazra

A másik irányból elindulva Erdősék igazolták, hogy nem minden halmaz Ramsey. Egyrészt megmutatták, minden Ramsey halmaz véges. Kicsit pontosabban, ennél erősebb tételt bizonyítottak:

2.8. Tétel (Erdős és társai [17]). *Legyen X egy végtelen elemszámú halmaz. Ekkor minden n -re \mathbb{R}^n kiszínezhető megszámlálható sok színnel úgy, hogy minden X -hez hasonló halmaz legalább $1-1/n$ pontot tartalmaz az összes színosztályból.*

Tekintsük \mathbb{R}^n -nek azt a 2 -színezését, melynek egyik színosztálya megegyezik a fenti tétel által garantált színezés egyik színosztályával. Ebben a színezésben minden X -el egybevágó halmaz mindkét színosztályból tartalmaz pontot.

2.9. Következmény. *Legyen X egy végtelen elemszámú halmaz. Ekkor minden n -re \mathbb{R}^n kiszínezhető két színnel úgy, hogy egyik színosztály se tartalmazzon X -el egybevágó halmazt, azaz X nem Ramsey.*

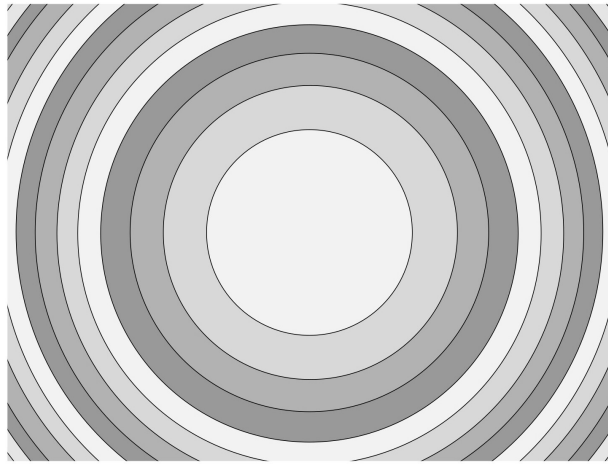
Erdősék azt is megmutatták, nem minden véges halmaz Ramsey: a legegyszerűbb ilyen példa az $(1, 1, 2)$ oldalú elfajuló háromszög.

2.10. Állítás (Erdős és társai [16]). *Legyen X egy $(1, 1, 2)$ oldalú elfajuló háromszög. Ekkor minden n egész esetén \mathbb{R}^n kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy egyik színosztály se tartalmazzon X -el egybevágó egyszínű halmazt, azaz X nem Ramsey.*

Bizonyítás. Legyen n tetszőleges egész és egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont színe legyen

$$\lfloor |x|^2 \rfloor \pmod{4}.$$

Vegyük észre, hogy a színezés az origótól távolodva egyre vékonyabb gömbhéjakat határoz meg. A sík ezen 4-színezése a 4. ábrán látható.



4. ábra. A sík 4-színezése, mely nem tartalmaz egyszínű $(1, 1, 2)$ oldalú háromszöget

Egyszerű számolással igazoljuk, hogy a színezés megfelelő: Indirekt tegyük fel, hogy az egyik színosztály tartalmaz X -el egybevágó egyszínű halmazt, azaz valamely x pontra és u egységvektorra x , $x + u$ és $x - u$ ugyanazt a színt kapták. Definíció szerint léteznek a_1, a_2, a_3 egészek, továbbá egy $0 \leq r < 4$ egész és $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$ számok, melyre:

$$|x|^2 = 4a_1 + r + \theta_1 \tag{1}$$

$$|x - u|^2 = 4a_2 + r + \theta_2 \tag{2}$$

$$|x + u|^2 = 4a_3 + r + \theta_3 \tag{3}$$

(2) – (1):

$$-2\langle x, u \rangle + 1 = 4(a_2 - a_1) + \theta_2 - \theta_1$$

(3) – (1):

$$2\langle x, u \rangle + 1 = 4(a_3 - a_1) + \theta_3 - \theta_1$$

Tehát:

$$0 = -2 + 4(a_3 + a_2 - 2a_1) + \theta_3 + \theta_2 - 2\theta_1$$

ami ellentmondás, hiszen a_1, a_2 és a_3 egész, illetve $0 \leq \theta_i < 1$. □

A fenti bizonyításban definiált gömbhéjas színezés általánosításával Erdősék megmutatták, hogy ha egy konfiguráció nem gömbi, azaz pontjai nem egy gömb felszínén helyezkednek el, akkor nem Ramsey. A témakör egyik legismertebb, 1000 dollárt érő sejtése szerint ennek fordítottja is igaz:

2.1. Sejtés (Graham [33]). *Egy véges halmaz pontosan akkor Ramsey, ha pontjai egy gömb felszínén helyezkednek el.*

A kérdés több mint 30 éve nyitva áll, ráadásul egy másik, rivális sejtés is megjelent. Eszerint a gömbi halmazoknak csak egy részhalmaza, az úgynevezett tranzitív halmazok rendelkeznek a Ramsey tulajdonsággal. Informálisan, egy halmazt akkor nevezünk tranzitívnek, ha pontjai "ugyanúgy néznek ki". Kicsit pontosabban:

2.4. Definíció (Tranzitív halmaz). *Egy X halmaz tranzitív, ha G szimmetriacsoportjának hatása tranzitív, azaz minden $x, y \in X$ -re létezik $g \in G$, melyre $gx = y$.*

Egyszerű példa tranzitív halmazra egy tetszőleges n csúcú szabályos sokszög: Két szomszédos csúcú esetén például $(360/n)$ fokú forgatás megfelelő izometriát ad a két csúcú között. Egy másik fontos példacsalád a téglák halmaza.

Leader és társai azt figyelték meg, hogy az eddig ismert Ramsey halmazok esetén a Ramsey tulajdonság igazolása során fontos lépés egy megfelelő tranzitív halmazba való beágyazás. Ezen észrevétel motiválja az alábbi sejtést:

2.2. Sejtés (Leader, Russell és Walters [46]). *Egy halmaz pontosan akkor Ramsey, ha tranzitív, vagy tranzitív halmaz részhalmaza.*

Milyen kapcsolatban állnak a tranzitív és a gömbi halmazok? Egyszerű megfontolás alapján minden tranzitív halmaz gömbi: Legyen X egy véges tranzitív halmaz és tekintsük azt a legkisebb r sugarú S gömböt, mely tartalmazza X minden pontját. Könnyen látszik, hogy pontosan egy ilyen S gömb létezik és az is feltehető, hogy S origó középpontú. Azt szeretnénk megmutatni, hogy egy tetszőleges $x \in X$ pont az S gömb felszínén helyezkedik el. A sugár választása alapján ez X legalább egy pontjára teljesül, legyen $y \in X$ ilyen. A tranzitív halmaz definíciója alapján létezik olyan g szimmetria, melyre $g \cdot x = y$ fennáll. Ebből pedig következik, hogy $|x| = r$, vagyis x valóban az S gömb határán van.

Nehezebb kérdés annak eldöntése, hogy létezik-e olyan halmaz, ami gömbi, de nem egészíthető ki tranzitív halmazzá. Leader és társai igenlő választ adtak a kérdésre, azaz megmutatták, hogy a tranzitív halmazok valódi részhalmazát alkotják a gömbi halmazoknak. Ez tehát azt jelenti, hogy a két sejtés valóban különbözik egymástól.

3. Ramsey halmazok normált térben

Egy természetes irány a probléma általánosítására, ha az Euklideszi metrikát más metrikával helyettesítjük. A továbbiakban azt vizsgáljuk, miképp lehet normált terekre jól kiterjeszteni a Ramsey halmaz fogalmát, illetve, hogy az így definiált halmazok milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Előtte azonban tekintsünk néhány fontos fogalmat és definíciót:

3.1. Definíció (Metrikus tér). *Legyen X vektortér, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ kétváltozós szimmetrikus függvény, melyre az alábbiak teljesülnek:*

- $d(x, y) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $x = y$,
- d teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, azaz minden $x, y, z \in X$ -re: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ekkor az (X, d) párt metrikus térnek nevezzük. Ha X véges, akkor véges metrikus térről beszélünk.

Metrikus teret például normált tér segítségével definiálhatunk:

3.2. Definíció (Normált tér). *Legyen X vektortér, $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ egyváltozós függvény, melyre az alábbiak teljesülnek:*

- $\|x\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $x = 0$,
- minden $x \in X$ -re és α számra $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
- $\|\cdot\|$ teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, azaz minden $x, y, z \in X$ -re: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ekkor az $(X, \|\cdot\|)$ párt normált térnek nevezzük.

Valóban, minden $(X, \|\cdot\|)$ normált tér meghatároz egy (X, d) metrikus teret, ahol $d(x, y) = \|x - y\|$. A továbbiakban az úgynevezett Minkowski normált terekkel foglalkozunk:

3.3. Definíció (Minkowski tér). *Legyen C egy n -dimenziós origóra középpontosan szimmetrikus konvex test. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont C által meghatározott normája:*

$$\|x\|_C = \min \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \lambda C \}.$$

Ekkor az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ párt Minkowski térnek nevezzük.

Vizsgálatainkat azonban először az l_p^n normált terekre szűkítjük.

3.4. Definíció (l_p^n tér). *Legyen $1 \leq p \leq \infty$ adott. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont normája:*

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} & \text{ha } p \in [1, \infty) \\ \max \{ |x_i| \mid i = 1 \dots n \} & \text{ha } p = \infty \end{cases}$$

Ekkor az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ párt l_p^n térnek nevezzük.

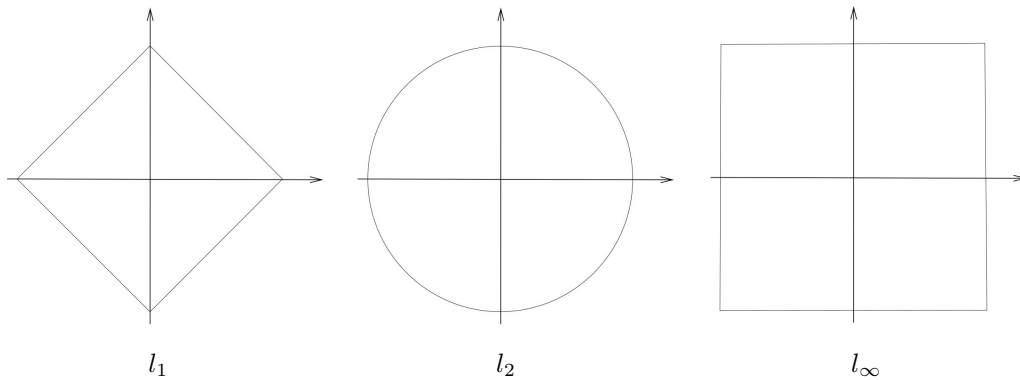
A definícióból közvetlenül leolvashatjuk az l_p normák néhány fontos jellemzőjét. Egyrészt minden p esetén az l_p norma permutáció-invariáns, azaz minden $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ permutációra

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \|(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})\|_p$$

teljesül. Egy másik megemlítendő tulajdonság az l_p normák monotonitása: minden $1 \leq p \leq q \leq \infty$ értékekre tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ pont esetén

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Az is világos, hogy l_2 éppen az Euklideszi normát határozza meg. Ezenkívül fontos még külön megemlíteni az l_∞ , illetve az l_1 normákat: az l_∞ norma, másnéven a maximum norma vagy Csebisev norma által meghatározott egységgömb az n -dimenziós egységkocka; az l_1 norma, másnéven Manhattan norma egységgömbje pedig ennek duálisa, az úgynevezett keresztpolitóp (azaz a standard egységvektorok, illetve ellentettjeik konvex burka). Tehát ebben a két esetben az egységgömb nem szigorúan konvex.



5. ábra. Az l_p^2 terek egységköre $p = 1, 2$ és ∞ értékre

Azt is könnyű igazolni, hogy ezen két extrém p érték kivételével – azaz az $1 < p < \infty$ esetekben – viszont szigorúan konvex egységgömböt kapunk. Ezen megfigyelés kulcsfontosságú lesz a Ramsey tulajdonság vizsgálata során, ugyanis szigorúan konvex egységgömb esetén lényegesen eltérő az izometrikus példányok viselkedése. A fő különbséget a következő megfigyelés adja:

3.1. Állítás. *Legyen $1 < p < \infty$ rögzített és legyen X egy tetszőleges véges metrikus tér. Ha az X halmaz 3 pontja egyenlőséggel teljesíti a háromszög egyenlőtlenségét, akkor X minden beágyazásában ezen 3 pont egy egyenesre esik.*

Végül megemlítjük az ismert Hölder egyenlőtlenség egy fontos következményét, ami bizonyos értelemben az l_p normák közti távolságot adja meg:

3.2. Állítás. *Legyen $1 \leq p \leq q \leq \infty$ adott. Ekkor:*

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q.$$

3.1. l_p -Ramsey halmazok

Kérdés, hogy miképp lehet a Ramsey halmaz fogalmát kiterjeszteni. Még az Euklideszi esetben egyszínű egybevágó példányokat kerestünk, metrikus tér esetében izometrikus példányok létezését vizsgálhatjuk, ami alatt a következőt értjük:

3.5. Definíció (Izometrikus halmazpár). *Azt mondjuk, hogy két metrikus tér izometrikus, ha pontjaik közt létezik távolságtartó bijekció.*

Vegyük észre, hogy az l_p normacsalád struktúrájának köszönhetően szinte változtatás nélkül használhatjuk az eredeti definíciót:

3.6. Definíció (l_p -Ramsey halmaz). *Legyen $1 \leq p \leq \infty$ rögzített. Azt mondjuk, hogy egy X metrikus tér l_p -Ramsey, ha minden $r \geq 1$ egészre létezik $n_0 = n_0(X, r)$, hogy $n \geq n_0$ esetén $(\mathbb{R}^n; l_p)$ tetszőleges r -színezésében található X -el izometrikus egyszínű halmaz.*

Analóg módon definiálhatjuk az exponenciálisan l_p -Ramsey és az l_p -szuper-Ramsey halmaz fogalmát is. Az eddig tárgyalt Ramsey halmazok az l_2 -Ramsey halmazoknak felelnek meg, így az egyértelműség kedvéért a továbbiakban l_2 -Ramsey halmaznak nevezzük őket. Továbbá fontos megjegyezni, hogy az $r = 1$ eset egybeesik azzal a kérdéssel, hogy az adott normált térnek létezik-e X -el izometrikus részhalmaza, azaz, hogy X beágyazható-e az adott normált térbe. Az l_2 -Ramsey halmaz definíciójában említésre sem került ez az eset, feltettük, hogy kizárólag az Euklideszi térbe beágyazható halmazok körében dolgozunk.

3.1.1. Példák l_p -Ramsey halmazra

Az első ötlet l_p -Ramsey halmaz keresésére, hogy megvizsgáljuk, az Euklideszi esetben bemutatott tételek bizonyításai miként emelhetők át l_p terekbe. Ahogy látni fogjuk, a legtöbb bizonyítás apró módosítások segítségével egyszerűen általánosítható.

Vizsgálatainkat a két pontú metrikus terekkel kezdjük: Egyszerű megfigyelés, hogy a 2.6. tételben bemutatott konstrukció a permutáció-invariáns normákra, így az l_p normákra is megfelelő, tehát tetszőleges p esetén minden 2 pontú metrikus tér exponenciálisan l_p -Ramsey:

3.3. Állítás. *Legyen I egy tetszőleges két elemű halmaz. Ekkor minden $1 \leq p \leq \infty$ esetén létezik $c > 1$ konstans, hogy:*

$$\chi(l_p^n, I) = \chi(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \geq c^n.$$

Igaz, az l_p^n terek kromatikus számának aszimptotikus viselkedésének vizsgálata a mai napig nagy figyelemben részesül, a pontos érték egyedül az l_∞ esetében ismert: Egyszerű meggondolás mutatja, hogy minden n -re $\chi(\mathbb{R}^n, l_\infty) = 2^n$ teljesül. A legjobb felső korlátot Euklideszi esetben Larman és Rogers [45], illetve tőlük függetlenül Prosanov [55] mutatta, a Minkowski terekre vonatkozó felső

korlát pedig Kupavskiitól [43] származik. Továbbá Raigorodskii [57, 58] az l_1 és l_2 normák esetében javított Frankl és Wilson konstrukcióján. Így az ismert korlátok:

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{R}^n, l_\infty) &= 2^n \\ (1.239 + o(1))^n &\leq \chi(\mathbb{R}^n, l_2) \leq (3 + o(1))^n \\ (1.365 + o(1))^n &\leq \chi(\mathbb{R}^n, l_1) \leq (4 + o(1))^n \\ (1.2 + o(1))^n &\leq \chi(\mathbb{R}^n, l_p) \leq (4 + o(1))^n, \text{ ahol } 1 \leq p \leq \infty.\end{aligned}$$

A következő kérdés, hogy mi a helyzet a háromszögekkel. Kezdjük néhány speciális esettel: Azt mondjuk, hogy az $(\{x_1, x_2, x_3\}, d)$ három pontú metrikus tér

- hegyesszögű háromszög l_p -ben, ha $\|x_1 - x_2\|^p + \|x_2 - x_3\|^p > \|x_1 - x_3\|^p$
- derékszögű háromszög l_p -ben, ha $\|x_1 - x_2\|^p + \|x_2 - x_3\|^p = \|x_1 - x_3\|^p$

Ezen háromszögek Ramsey tulajdonságát Sagdeev vizsgálta és exponenciális alsó korlátot mutatott kromatikus számukra:

3.4. Tétel (Sagdeev [66]). *Legyen $1 \leq p \leq \infty$ rögzített. Ekkor minden l_p -ben hegyesszögű és l_p -ben derékszögű háromszög exponenciálisan l_p -Ramsey.*

Egy későbbi megfigyelés miatt fontos megjegyezni, hogy Sagdeev a fenténél kicsivel erősebb állítást bizonyított, miszerint minden l_p -ben hegyesszögű és l_p -ben derékszögű háromszög l_p -szuper-Ramsey.

Mit mondhatunk egy általános háromszögről? Megmutatjuk, hogy Frankl és Rödl 2.5. tétele általánosítható l_p terekre. Az Euklideszi bizonyításban fontos szerepet játszott a 2.4. Szorzás tétel, így először definiáljuk két halmaz l_p -szorzatát.

3.7. Definíció. *Legyen $X = (X, d_X)$ és $Y = (Y, d_Y)$ metrikus tér. Ekkor X és Y l_p -szorzata az $(X \times Y, d)$ metrikus tér, ahol minden $x_1, x_2 \in X$ -re és $y_1, y_2 \in Y$ -ra*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{d_X^p(x_1, x_2) + d_Y^p(y_1, y_2)}.$$

Vegyük észre, hogy a 2.4. Szorzás tétel az Euklideszi norma tulajdonságai közül kizárólag a permutáció-invarianciát használta ki, így a bizonyítás változtatás nélkül megfelelő:

3.5. Tétel. *Legyen $1 \leq p \leq \infty$ rögzített és legyen (X, d_X) és (Y, d_Y) l_p -Ramsey halmaz. Ekkor X és Y l_p -szorzata is l_p -Ramsey.*

Az Euklideszi esettel ellentétben normált térben azonban két halmaz szorzata nem rendelkezik igazán szép geometriai jelentéssel, így kevésbé támaszkodhatunk erre. Emiatt a háromszögek l_p -Ramsey tulajdonságának igazolásakor a fenti l_p -szorzás tétel használata helyett a részleteket is kiírjuk.

3.6. Tétel. *Tetszőleges $1 \leq p \leq \infty$ esetén minden (nem elfajuló) háromszög l_p -Ramsey.*

Bizonyítás. (Vázlat)

Legyen p rögzített. Az Euklideszi esethez hasonlóan egy nagyon lapos háromszögből induljunk ki: Frankl és Rödl bizonyítását követve igazolható, hogy tetszőleges $t \geq 2$ egészre a $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2t}$ és $\sqrt[p]{2^{p+1}(t-1)+2}$ oldalú háromszögek l_p -Ramsey halmazok. A t értékét növelve a két rövidebb oldal hosszának összege tart a harmadik oldal hosszához, azaz megfelelően nagy t választása mellett tetszőlegesen lapos háromszöget állíthatunk elő. Azt is megfigyelhetjük, hogy az Euklideszi esethez hasonlóan adott háromszög esetén elegendő egy megfelelő oldalarányú monokromatikus háromszög létezését igazolni. A pontosság kedvéért azonban a nagyításhoz szükséges ε szorzótényezőt is kiírjuk. A következő két lépésben az 2.4. Szorzás tételhez hasonlóan járunk el: egy $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2^{p+1}(t-1)+2}$ oldalarányú háromszög két, illetve a 2. lépésben további 1 csúcsának koordinátáit egészítjük ki úgy, hogy a keresett háromszöggel izometrikus egyszínű háromszöget kapjunk. Legyenek N_1 , N_2 és N_3 egészek, melyek értékeit később határozzuk meg. Tekintsük az $n = N_1 + N_2 + N_3$ dimenziós pontok közül azokat, melyek a következő alakúak:

- az első N_1 koordináta $(2t-1)$ helyet leszámítva 0, a maradék helyeken $\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, t\varepsilon, (t-1)\varepsilon, \dots, \varepsilon$, ebben a sorrendben, ahol $\varepsilon > 0$,
- a következő N_2 koordináta közül 1 értéke nem 0, a maradék koordináta pedig egy α szám,
- az utolsó N_3 koordináta közül pedig 1 értéke nem 0, a maradék koordináta pedig egy β szám.

Az n -dimenziós tér r -színezése meghatározza az $[N_1]$ halmaz $(2t-1)$ elemű részhalmazainak $r^{N_2 \cdot N_3}$ -színezését. Így N_1 értékét $N_1 = R(2t+1, 2t-1, r^{N_2 \cdot N_3})$ -nek választva lesz $(2t+1)$ elemű részhalmaza, melynek minden $(2t-1)$ elemű részhalmaza azonos színű. Az első N_1 koordináta színeit tekintsük rögzítettnek. Hasonlóan, az $N_2 + N_3$ -dimenziós tér r -színezése meghatározza az $[N_2]$ halmaz elemeinek r^{N_3} -színezését. Így $N_2 = R(2, 1, r^{N_3}) = r^{N_3} + 1$ esetén lesz olyan két elemű részhalmaz, melynek elemei azonos színűek. Végül ugyanezen megfontolás alapján válasszuk N_3 értékét $R(2, 1, r) = r+1$ -nek. Az n választása alapján kiválaszthatunk egyszínű A, B, C pontokat, melyek a következő alakúak:

$$\begin{aligned}
 A &= \left\{ \dots \varepsilon \dots 2\varepsilon \dots 3\varepsilon \dots t\varepsilon \dots (t-1)\varepsilon \dots 3\varepsilon \dots 2\varepsilon \dots \varepsilon \dots 0 \dots 0 \dots \left| \dots \alpha \dots 0 \dots \right| \dots \beta \dots 0 \dots \right\} \\
 B &= \left\{ \dots 0 \dots \varepsilon \dots 2\varepsilon \dots 3\varepsilon \dots t\varepsilon \dots (t-1)\varepsilon \dots 3\varepsilon \dots 2\varepsilon \dots \varepsilon \dots 0 \dots \left| \dots 0 \dots \alpha \dots \right| \dots \beta \dots 0 \dots \right\} \\
 C &= \left\{ \dots 0 \dots 0 \dots \varepsilon \dots 2\varepsilon \dots 3\varepsilon \dots t\varepsilon \dots (t-1)\varepsilon \dots 3\varepsilon \dots 2\varepsilon \dots \varepsilon \dots \left| \dots \alpha \dots 0 \dots \right| \dots 0 \dots \beta \dots \right\}
 \end{aligned}$$

Megfelelően választva $\varepsilon, \alpha, \beta$ és t értékét tetszőlegesen oldalhosszú háromszöget állíthatunk elő a fenti módon, így valóban minden háromszög l_p -Ramsey. \square

Egy apró észrevétel, hogy az l_1 norma esetén a fenti állítás némileg egyszerűsíthető: a 2.5. Frankl-Rödl tétel bizonyításának első lépésében ügyesen megkonstruált lapos háromszöget helyett egyszerűen kiindulhatunk egy elfajuló háromszögből: Legyen (X, d) metrikus tér, ahol $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

és $\|x_1 - x_2\|_1 = \|x_2 - x_3\|_1 = \varepsilon$, $\|x_1 - x_3\|_1 = 2\varepsilon$. Sagdeev 3.4. tétele alapján X l_1 -szuper-Ramsey, hiszen X derékszögű háromszög l_1 -ben. Sőt, egy kicsit erősebb állítást is megfogalmazhatunk:

3.7. Állítás. *Minden háromszög exponenciálisan l_1 -Ramsey.*

Bizonyítás. A [44] cikk szerzői megfigyelték, hogy Frankl és Rödl bizonyításából kiolvasható a 2.7. állítás l_p normákra történő általánosítása, azaz l_p -szuper-Ramsey halmazok l_p -szorzata is rendelkezik az l_p -szuper Ramsey tulajdonsággal. Így elegendő azt meggondolni, hogy minden háromszög előáll l_1 -szuper-Ramsey halmazok szorzataként: egyrészt a 3.3. állítás szerint minden két pontú halmaz l_1 -szuper-Ramsey, másrészt a 3.4. tétel szerint l_1 -ben minden elfajuló háromszög l_1 -szuper-Ramsey. Tehát a 3.6. tételben leírt konstrukció alapján valóban minden háromszög előáll két l_1 -szuper-Ramsey halmaz szorzataként. \square

Eddig tehát azt láttuk, hogy az l_2 -Ramsey halmazok bizonyításában leírtak (apró módosításokkal) az l_p -Ramsey tulajdonság igazolásához is megfelelőek. Most ismert beágyazási tételek segítségével az eddigieknél erősebb állítást mutatunk. Az ötlet a következő: Tekintsünk egy tetszőleges l_2 -Ramsey halmazt. A 2.3. de Bruijn-Erdős tétel alapján minden r színszámra meghatározhatunk egy véges tanúhalmazt, azaz egy olyan véges halmazt, melyre teljesül, hogy \mathbb{R}^n minden r -színezésében van vele egybevágó egyszínű halmaz. Tehát az l_p -Ramsey tulajdonság igazolásához elegendő megmutatni, hogy a tanúhalmazok izometrikusan beágyazhatóak egy véges dimenziós számú l_p térbe. Röviden összefoglaljuk a legfontosabb beágyazási tételeket:

Beágyazási tételek

Először is definiáljuk, hogy egy véges metrikus tér mikor l_p -beágyazható:

3.8. Definíció. *Legyen (X, d) és (X', d') metrikus tér. Azt mondjuk, hogy (X, d) (izometrikusan) beágyazható az (X', d') térbe, ha létezik egy ϕ függvény, hogy minden $x, y \in X$ pontra:*

$$d(x, y) = d'(\phi(x), \phi(y)).$$

Speciálisan, az (X, d) metrikus teret l_p -beágyazhatónak nevezünk, ha létezik olyan m , melyre (X, d) beágyazható az (\mathbb{R}^m, l_p) térbe.

Milyen l_p -beágyazható példákat ismerünk? A témakör egyik legismertebb tétele az úgynevezett Fréchet féle beágyazási tétel, ami azt mondja ki, hogy minden véges metrikus tér beágyazható egy korlátos dimenziós számú l_∞ térbe:

3.8. Állítás (Fréchet beágyazás (látsd például [49])). *Tetszőleges n pontú metrikus tér beágyazható az l_∞^n térbe.*

Bizonyítás. Legyen $(X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, d)$ egy tetszőleges véges metrikus tér. Tekintsük azt az $f : X \rightarrow l_\infty^n$ függvényt, mely minden $x \in X$ ponthoz hozzárendel egy n hosszú vektort, melynek

i . koordinátája az x és x_i pontok $d(x, x_i)$ távolságával egyezik meg. Megmutatjuk, hogy f egy izometrikus beágyazását adja X -nek az l_∞^n térbe.

Egyrészt minden $x_i, x_j \in X$ -re $\|f(x_i) - f(x_j)\|_\infty \geq d(x_i, x_j)$, hiszen:

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_\infty = \max_k |f_k(x_i) - f_k(x_j)| \geq |f_i(x_i) - f_i(x_j)| = d(x_i, x_j).$$

Másrészt a háromszög egyenlőtlenségből adódóan minden k indexre:

$$|f_k(x_i) - f_k(x_j)| = |d(x_i, x_k) - d(x_k, x_j)| \leq d(x_i, x_j).$$

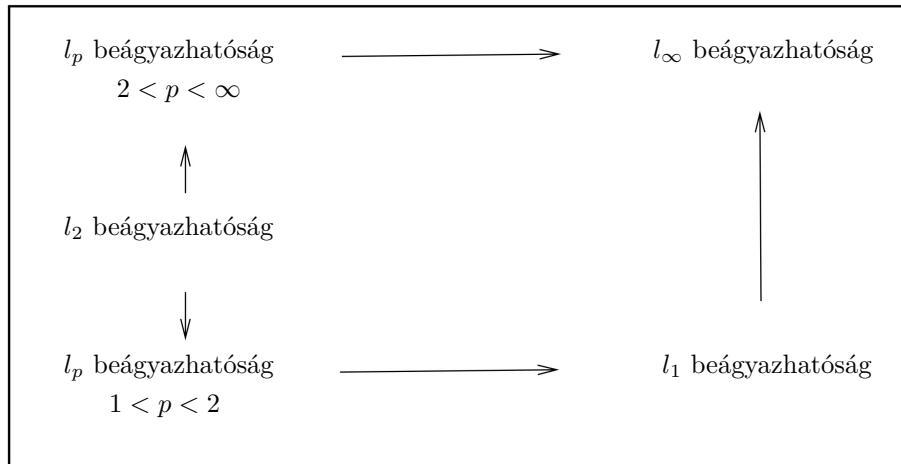
Ezzel pedig az állítást beláttuk. □

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás némileg erősíthető: minden $n \geq 4$ pontú véges metrikus tér már $m = n - 2$ esetén is beágyazható az l_∞^m térbe (Wolfe [74]).

Mit mondhatunk a többi l_p norma esetében? Triviálisan minden 3 vagy kevesebb pontú metrikus tér l_p -beágyazható, hiszen minden $1 \leq p \leq \infty$ esetén beágyazható az l_p^2 síkba. Azonban a 4 pontú halmazokra ez már nem teljesül: létezik olyan 4 pontú metrikus tér, ami semelyik $1 < p < \infty$ esetén sem l_p -beágyazható. A következő tétel az l_p -beágyazható halmazok közt ismert legfontosabb kapcsolatokat írja le:

3.9. Tétel (látsd például [14], 34. oldal). *Legyen (X, d) egy n pontú metrikus tér. Ekkor*

1. (X, d) l_∞ -beágyazható.
2. Ha (X, d) l_2 -beágyazható, akkor l_p -beágyazható is minden $1 \leq p \leq \infty$ esetén.
3. Ha (X, d) l_p -beágyazható valamely $1 \leq p \leq 2$ értékre, akkor l_1 -beágyazható is.



6. ábra. Az l_p -beágyazhatóságok közt lévő kapcsolatok különböző p értékekre

A következő kérdés, hogy egy adott l_p -beágyazható halmaz mennyire kicsi dimenziószámú térbe ágyazható be. Jelölje $m_p(n)$ azt a legkisebb m egészt, melyre teljesül, hogy egy tetszőleges n pontú l_p -beágyazható metrikus tér beágyazható az l_p^m térbe. Wolfe említett tétele alapján tehát $m_\infty(n) \leq n - 2$ teljesül. Egyszerű meggondolás alapján $m_2(n) = n - 1$, a többi l_p térben azonban már kevésbé triviális a helyzet. Witsenhausen [73] az l_1 normában adott felső korlátot. Megmutatta, hogy:

$$m_1(n) \leq \binom{n}{2}.$$

Tételét később Fichet, illetve tőle függetlenül Ball tetszőleges l_p normákra általánosította:

3.10. Tétel (Fichet [31], Ball [4]). *Legyen (X, d) egy tetszőleges n elemű véges metrikus tér, és $1 \leq p \leq \infty$ rögzített. Ha (X, d) beágyazható az l_p^m térbe, akkor beágyazható az $l_p^{m'}$ térbe is, ahol $m' \leq \binom{n}{2}$, azaz:*

$$m_p(n) \leq \binom{n}{2}.$$

Az alábbi állítás az említett beágyazási tételek néhány fontos következményeit tartalmazza:

3.11. Következmény. *Legyen $1 \leq p \leq \infty$ rögzített. Ekkor*

1. *Minden l_2 -Ramsey halmaz l_p -Ramsey is.*
2. *Minden l_2 -szuper-Ramsey halmaz l_p -szuper-Ramsey is.*
3. *Minden nemelfajuló háromszög exponenciálisan l_p -Ramsey.*

Bizonyítás. Az 1. állítás azonnal adódik a 3.9. beágyazási tételből. A 2. állításhoz csupán azt kell felhasználni, hogy egy l_2 -szuper-Ramsey halmazhoz tartozó (T, d) tanúhalmaz legfeljebb c^n nagyságú valamely c konstansra. A 3.9. beágyazási tétel alapján (T, d) beágyazható az l_p^m térbe, ahol $m \leq \binom{n}{2}$, tehát például a $c' := c^2$ konstanssal teljesíti az l_p -szuper-Ramsey feltételeket is. Ebből pedig rögtön adódik a 3. állítás is, hiszen minden háromszög beágyazható az Euklideszi síkba és ismert, hogy minden nemelfajuló háromszög l_2 -szuper-Ramsey. \square

A 3.9. beágyazási tételből is látszik, hogy a maximum norma igencsak speciális helyzetben van. Eddig azt láttuk, hogy minden l_2 -Ramsey halmaz egyben l_p -Ramsey is. Nemrég Kupavskii és Sagdeev ennél lényegesen többet bizonyított:

3.12. Tétel (Kupavskii-Sagdeev [44]). *Minden véges metrikus tér exponenciálisan l_∞ -Ramsey, azaz egy tetszőleges (X, l_∞) véges metrikus tér esetén létezik $c > 1$ konstans, hogy:*

$$\chi(l_\infty^n, X) \geq c^n.$$

Később Frankl, Kupavskii és Sagdeev [28] tovább vizsgálta az l_∞ -Ramsey tulajdonságot, és bizonyos metrikus tér esetén a kromatikus számuk pontos értékét is sikerült meghatározniuk.

3.1.2. Negatív eredmények

A következő kérdés, hogy milyen halmazok nem rendelkeznek az l_p -Ramsey tulajdonsággal. Erdősék 2.8. tétele szerint egy végtelen halmaz nem lehet l_2 -Ramsey. Egy érdekes megfigyelés, hogy bizonyításuk minden szigorúan konvex egységgömbbel rendelkező norma esetén megfelelő, tehát $1 < p < \infty$ esetekben végtelen halmaz nem lehet Ramsey:

3.13. Állítás. *Legyen $1 < p < \infty$ rögzített és legyen X egy végtelen elemszámú halmaz. Ekkor minden n -re (\mathbb{R}^n, l_p) kiszínezhető megszámlálható sok színnel úgy, hogy minden X -el izometrikus halmaz legalább 1-1 pontot tartalmaz az összes színosztályból.*

Az l_p -Ramsey tulajdonságot azonban okkal nem szűkítettük le a véges metrikus terek osztályára: Nemrég ugyanis Frankl, Kupavskii és Sagdeev [28] végtelen elemszámú l_∞ -Ramsey halmazt mutattak.

A véges halmazok közül egyedül az Euklideszi értelemben nem gömbi halmazokról ismert, hogy nem l_2 -Ramsey halmazok. Kérdés, hogy ezen tétel általánosítható-e az l_p normákra. Tekintsük az egyik legegyszerűbb nem gömbi halmazt, az l_p -ben $(1, 1, 2)$ oldalú háromszöget, azaz az

$$X := \{x_1, x_2, x_3 \mid \|x_1 - x_2\|_p = \|x_2 - x_3\|_p = 1, \|x_1 - x_3\|_p = 2\}$$

metrikus teret. Kupavskii és Sagdeev 3.12. tétele szerint minden véges metrikus tér exponenciálisan l_∞ -Ramsey, Sagdeev 3.4. tétele alapján pedig minden derékszögű háromszög exponenciálisan l_p -Ramsey. Mivel X derékszögű háromszög l_1 -ben, így a fentiek alapján X exponenciálisan l_1 és l_∞ -Ramsey. Az $1 < p < \infty$ esetben azonban más a helyzet, a különbséget az adja, hogy ezen feltétel mellett az egységgömb szigorúan konvex. Ezt kihasználva Erdősék bizonyítását követve megmutatjuk, $1 < p < \infty$ feltétel mellett X nem exponenciálisan l_p -Ramsey.

3.14. Állítás. *Legyen $1 < p < \infty$ rögzített és legyen X egy l_p -ben $(1, 1, 2)$ oldalú háromszög. Ekkor X nem exponenciálisan l_p -Ramsey.*

Bizonyítás. Legyen $1 < p < \infty$ rögzített és X legyen l_p -ben $(1, 1, 2)$ oldalú háromszög. Megmutatjuk, minden n egész esetén \mathbb{R}^n kiszínezhető $d(n)$ színnel úgy, hogy egyik színosztály se tartalmazzon X -el izometrikus halmazt, ahol $d(n)$ csak lineárisan nő a dimenziószámában. Fontos megfigyelés, hogy az x_1, x_2 és x_3 pontok egyenlőséggel teljesítik a háromszögegyenlőtlenséget, így a 3.1. állítás alapján X minden beágyazásában a pontjai egy egyenesre esnek. Azt is könnyű látni, hogy minden beágyazásban x_2 éppen az $\overline{x_1x_3}$ szakasz felezőpontja, azaz X minden beágyazásában felírható $x, x + u, x - u$ alakban, ahol $\|u\|_p = 1$ egységvektor.

Először tegyük fel, hogy $2 \leq p < \infty$. A 3.2. állítás alapján:

$$\|x\|_p \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2-1/p} \|x\|_p.$$

Legyen $d = d(n) = \lceil n^{1/2-1/p} \rceil$, tehát a fenti alapján $1 \leq \|u\|_2 \leq d$. Tekintsük azt a színezést, melyben egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont színe:

$$\lfloor \|x\|_2^2 \rfloor \text{ modulo } (2d^2 + 2).$$

Erdősék bizonyításához hasonlóan igazoljuk, hogy a színezés megfelelő: Tekintsünk egy x , $x + u$, $x - u$ alakú $(1, 1, 2)$ háromszöget és indirekt tegyük fel, hogy x , $x + u$ és $x - u$ ugyanazt a színt kapták. Definíció szerint ekkor léteznek a_1, a_2, a_3 egészek, egy $0 \leq r < d^2 + 2$ egész és $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$ számok, melyre:

$$\|x\|_2^2 = (2d^2 + 2) \cdot a_1 + r + \theta_1 \quad (4)$$

$$\|x - u\|_2^2 = (2d^2 + 2) \cdot a_2 + r + \theta_2 \quad (5)$$

$$\|x + u\|_2^2 = (2d^2 + 2) \cdot a_3 + r + \theta_3 \quad (6)$$

(5) – (4):

$$-2\langle x, u \rangle + \|u\|_2^2 = (2d^2 + 2) \cdot (a_2 - a_1) + \theta_2 - \theta_1$$

(6) – (4):

$$2\langle x, u \rangle + \|u\|_2^2 = (2d^2 + 2) \cdot (a_3 - a_1) + \theta_3 - \theta_1$$

Tehát:

$$0 = -2\|u\|_2^2 + (2d^2 + 2) \cdot (a_3 + a_2 - 2a_1) + \theta_3 + \theta_2 - 2\theta_1$$

ami ellentmondás, hiszen $-2 \geq -2\|u\|_2^2 \geq -2d^2$, a_1, a_2, a_3 egészek és $0 \leq \theta_i < 1$.

Másodszor legyen $1 < p \leq 2$. A 3.2. állítás alapján:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/2} \|x\|_2, \text{ azaz} \\ n^{1/2-1/p} \|x\|_p \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_p.$$

Legyen $d = \lceil n^{1/p-1/2} \rceil$, egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont színe pedig legyen

$$\lfloor (d\|x\|_2)^2 \rfloor \text{ modulo } (2d^2 + 2).$$

Az előző esetekhez hasonlóan ellenőrizhető, hogy a színezés nem tartalmaz X -el izometrikus egyszínű halmazt. A színek száma mindkét esetben csak lineárisan nő a dimenziószám szerint, ezzel tehát az állítást beláttuk. \square

A fenténél erősebb állítás lenne, hogy X nem l_p -Ramsey valamely p értékre. Ehhez olyan konstrukcióra lenne szükség, amely konstans számú színt használ, egyelőre azonban az Euklideszi eseten kívül nem ismert ilyen színezés. Másrészt, ha olyan p értéket találnánk, melyre X l_p -Ramsey, akkor ez azt igazolná, hogy az exponenciálisan l_p -Ramsey halmazok valódi részhalmazát képzik az l_p -Ramsey halmazok családjának.

3.2. Erősen Ramsey halmazok

Térjünk át a Minkowski terek vizsgálatára. Az l_p normákkal szemben tetszőleges Minkowski térre nézve nem teljesen egyértelmű, hogy lehet jól általánosítani a Ramsey halmaz fogalmát. Egy lehetséges meghatározás a következő:

3.9. Definíció (Erősen Ramsey halmaz). *Egy X metrikus térre azt mondjuk, hogy erősen Ramsey, ha bármely $r \geq 1$ egész esetén létezik egy n_0 egész, hogy minden $n \geq n_0$ dimenziószám és $C \subseteq \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex test által meghatározott Minkowski tér esetén $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_C)$ minden r -színezésében van X -el izometrikus egyszínű halmaz.*

Kérdés, hogy milyen halmazok teljesítik a fenti feltételeket, milyen tulajdonságaik vannak az erősen Ramsey halmazoknak.

Az eddigiekhez hasonlóan a 2 pontú metrikus terek Ramsey tulajdonságának igazolásához elég belátni, hogy minden $r \geq 1$ számra létezik olyan n dimenziószám, hogy minden n -dimenziós Minkowski tér tartalmaz $(r+1)$ csúcsú szabályos szimplexet. Meglepő módon már ennek az egyszerű állításnak is kifejezetten nehéz a bizonyítása, bemutatása némi előkészületet igényel.

Maximális elemszámú szabályos szimplex

Legyen X normált tér és jelölje $e(X)$ az X -ben található páronként egységtávolságra lévő pontok maximális számát. Euklideszi esetben ismert, hogy $e(\mathbb{R}^n) = n + 1$, azonban tetszőleges X normált tér esetén $e(X)$ meghatározása meglehetősen nehéz feladatnak bizonyul, a továbbiakban röviden összefoglaljuk az $e(X)$ értékekről ismert eredményeket. Síkban ismert, hogy $3 \leq e(X) \leq 4$, és $e(X)$ pontosan akkor 4, ha X egységgömbje paralelogramma (Petty [54]). Nyitott kérdés, hogy igaz-e a fenti alsó korlát magasabb dimenziós általánosítása:

3.1. Sejtés. *Egy n -dimenziós X normált tér esetén $e(X) \geq n + 1$.*

A sejtést több speciális esetben igazolták. Egy egyszerű megfigyelés, hogy egy permutáció-invariáns normált tér esetén az n standard egységvektor páronként egyenlő távolságra vannak egymástól, így $e(X) \geq n$. Sőt, kis meggondolás alapján az egységvektorok kiegészíthetőek $(n + 1)$ pontú szabályos szimplexé (Kobos [39]), azaz $e(X) \geq n + 1$ is teljesül. Egy másik fontos speciális osztályt a "közel-Euklideszi" normált terek alkotják. A pontos megfogalmazáshoz szükségünk lesz az alábbi fogalomra:

3.10. Definíció (Banach-Mazur távolság). *Legyen $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex test. K és L testek $d(K, L)$ Banach-Mazur távolságának azt a legkisebb pozitív λ számot hívjuk, melyre létezik olyan $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, hogy*

$$T(K) \subseteq L \subseteq \lambda T(K).$$

A következő állítás a Banach-Mazur távolság legfontosabb tulajdonságait foglalja össze:

3.15. Állítás. *Legyen K, L és $M \subseteq \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex test. Ekkor:*

- $d(K, L) \geq 1$,
- $d(K, L) = 1$ pontosan akkor teljesül, ha K és L egymás affín képei,
- $d(K, L) = d(L, K)$,
- $d(K, M) \leq d(M, L) \cdot d(L, K)$.

Tehát $d(\cdot, \cdot)$ az n -dimenziós szimmetrikus konvex testek affín ekvivalenciaosztályain multiplikatív metrikát határoz meg, azaz logaritmusos egy metrika.

Ennek segítségével definiálhatjuk két normált tér távolságát is: Legyen X és Y n -dimenziós normált tér. Ekkor $d(X, Y)$ az X és Y egységgömbjeinek Banach-Mazur távolságát jelöli. Ezzel ekvivalens a következő definíció:

$$d(X, Y) := \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\|, \text{ ahol } T : X \rightarrow Y \text{ lineáris, invertálható leképezés.} \}$$

John [29] nevezetes ellipszoidokról szóló tétele azt mondja, hogy egy tetszőleges n -dimenziós origóra szimmetrikus konvex C test esetén létezik olyan E ellipszoid, melyre:

$$E \subseteq C \subseteq \sqrt{n}C.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy egy n -dimenziós Minkowski tér és az Euklideszi tér távolsága legfeljebb \sqrt{n} , amiből pedig következik, hogy két n -dimenziós Minkowski tér Banach-Mazur távolsága maximum n lehet. Néhány speciális esetben ennél jobb korlátot is adhatunk, például a 3.2. állítást a következőképp fogalmazhatjuk át:

3.16. Állítás. *Legyen p és q rögzített, n tetszőleges. Ha $1 \leq p \leq q \leq 2$, vagy $2 \leq p \leq q \leq \infty$, akkor:*

$$d(l_p^n, l_q^n) = n^{1/p-1/q}.$$

Visszatérve a páronként egységtávolságra lévő pontok maximális számára, a közel-Euklideszi terek $e(X)$ értékére Brass, illetve tőle függetlenül Dekster adott alsó korlátot:

3.17. Tétel (Brass [5], Dekster [13]). *Legyen X egy tetszőleges n -dimenziós normált tér, melyre $d(X, l_2^n) \leq 1 + 1/n$. Ekkor bármely n pontú szabályos szimplex kiegészíthető $(n + 1)$ pontúvá, így:*

$$e(X) \geq n + 1.$$

A tétel segítségével az általános esetben is viszonylag jó alsó korlátot kapunk $e(X)$ értékére, hiszen ismert, hogy egy megfelelően magas dimenzió esetén tetszőleges Minkowski tér tartalmaz egy közel-Euklideszi alteret. Pontosabban:

3.18. Tétel (Dvoretzky [15]). *Létezik $c > 0$ konstans, hogy minden $\varepsilon > 0$ -ra és $n \geq \exp(cm\varepsilon^{-2})$ -ra egy n -dimenziós Minkowski térnek létezik olyan m -dimenziós Y altere, melyre:*

$$d(Y, l_2) \leq 1 + \varepsilon.$$

Az ε értékét $1/(m+1)$ -nek választva az előző két tételt összevetve adódik, hogy tetszőleges X Minkowski tér esetén létezik $c > 0$ konstans, hogy

$$e(X) \geq c\sqrt[3]{\log(n)}.$$

Ezen a korláton javított Swanepoel és Villa. Bizonyításuk fő ötlete, hogy a Dvoretzky tétel egy általánosítását, Alon és Milman tételét alkalmazták:

3.19. Tétel (Alon-Milman [1]). *Legyen X egy tetszőleges n -dimenziós normált tér. Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $c \in (0, 1)$ konstans, hogy X -nek létezik egy $m \geq \exp(c\sqrt{\log n})$ dimenziós Y altere, melyre:*

- vagy $d(Y, l_2) \leq 1 + \varepsilon$,
- vagy $d(Y, l_\infty) \leq 1 + \varepsilon$ teljesül.

Swanepoel-Villa megmutatták, hogy $d(X, l_\infty) \leq 3/2$ esetén $e(X) \geq n + 1$ teljesül, ezzel igazolva tételüket:

3.20. Tétel (Swanepoel-Villa [70]). *Legyen X egy tetszőleges normált tér. Ekkor létezik $c > 0$ konstans, hogy:*

$$e(X) \geq \exp\left(c\sqrt{\log n}\right).$$

Tehát $n_0 = \exp((c \cdot \ln(2r+1))^2)$ választása mellett minden $n \geq n_0$ esetén $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ tartalmaz $(r+1)$ csúcsú szabályos szimplexet. Így valóban minden két pontú halmaz erősen Ramsey.

A következő felmerülő kérdés, hogy a 2.5. Frankl-Rödl tétel általánosítható-e, azaz igaz-e, hogy minden háromszög erősen Ramsey. Az előző esethez hasonlóan minden r színszámhoz létezik egy n dimenziószám, hogy az n -dimenziós tér tartalmaz $(2r+1)$ pontú szimplexet, így a szabályos háromszögek (vagy általánosabban a szabályos szimplexek) erősen Ramsey halmazok.

Azonban továbbra is nyitva áll a kérdés, hogy minden háromszög erősen-Ramsey-e. A Frankl-Rödl tétel alapján adott háromszöghöz minden színszám esetén meghatározhatunk egy véges tanúhalmazt. Ha ezek beágyazhatóak minden kellően magas dimenziós Minkowski térbe, (például a 3.18. Dvoretzky-tétel által biztosított közel-Euklideszi alterébe), akkor a válasz igenlő.

Milyen halmazokról tudjuk, hogy nem rendelkeznek az erős Ramsey tulajdonsággal? Definíció alapján, ha X nem ágyazható be valamelyik Minkowski térbe, akkor nem lehet erősen Ramsey. Másrészt, ha X beágyazható az Euklideszi térbe, és nem Ramsey, akkor erősen sem Ramsey. Egyelőre tehát az ismert, hogy az Euklideszi értelemben nem gömbi halmazok nem erősen Ramsey halmazok.

3.3. Összefoglalás

A Ramsey halmaz fogalmát az 1970-es években vezették be Erdősék. Cikksorozatuk megjelenést követően sok új eredmény született a témában, így ma sok példa ismert Ramsey halmazra. Másrészt, az is ismert, hogy nem minden halmaz rendelkezik a Ramsey tulajdonsággal: Erdősék megmutatták, hogy végtelen halmaz nem lehet Ramsey, illetve, hogy a nem gömbi halmazok sem rendelkeznek a Ramsey tulajdonsággal. Azonban a Ramsey halmazok karakterizálása máig nyitott kérdés, sőt két rivális sejtés is megjelent a problémával kapcsolatban.

A Ramsey halmaz fogalmát nagyon természetes módon kiterjeszthetjük l_p terekre, mégis csak kevés eredmény született ezzel az általánosítással kapcsolatban. A helyzet egyedül a maximum norma esetén tisztázott: nemrég Kupavskii és Sagdeev megmutatták, hogy minden véges metrikus tér exponenciálisan l_∞ -Ramsey. A dolgozatban a többi l_p normát vizsgáltuk: Egyrészt megfigyeltük, hogy a Ramsey tulajdonság igazolásakor általában az Euklideszi normának egyedül a permutáció-invariáns tulajdonságát kell felhasználni, így az ismert tételek apró módosítások segítségével l_p terekre is általánosíthatóak. Később ismert beágyazási tételek következményeként azt is láttuk, hogy ezen megfigyeléseket tovább erősíthetjük. Adott r színszám és l_2 -Ramsey halmaz esetén a de Bruijn-Erdős tétel alapján meghatározhatunk egy véges tanúhalmazt. Ezt a tanúhalmazt pedig beágyazhatjuk egy (esetleg magasabb dimenziós) l_p térbe, ami azt igazolja, hogy minden l_2 -Ramsey halmaz egyben l_p -Ramsey is (tetszőleges $1 \leq p \leq \infty$ értékre).

A másik irányból elindulva azt vettük észre, hogy a negatív eredmények bizonyításában általában felhasználjuk az egységgömb szigorú konvexitását, így ezen tételeket legfeljebb a $1 < p < \infty$ esetre általánosíthatjuk. Ebből is látszik, hogy az l_1 és l_∞ helyzete igencsak elkülönül a többi l_p normától. A fő különbséget valószínűleg a nem szigorúan konvex egységgömb adja. Érdekes, és eddig csak keveset vizsgált kérdés, hogy a l_2 -Ramsey halmazokon túl milyen halmazok rendelkeznek az l_1 -Ramsey tulajdonsággal: Egyelőre nem ismert nem l_1 -Ramsey halmaz, tehát az is lehetséges, hogy a maximum normához hasonlóan minden véges metrikus tér l_1 -Ramsey.

Végül kitértünk a Minkowski terekre és bevezettük az erősen Ramsey halmaz fogalmát. Ismert tételek segítségével megmutattuk, hogy minden szabályos szimplex erősen Ramsey. Azonban az erősen Ramsey halmazok további tulajdonságainak vizsgálata során komolyabb nehézségekbe ütköztünk, már a háromszögek erősen Ramsey tulajdonságának igazolása is meglehetősen nehéz feladatnak bizonyult.

4. Aszimmetrikus Ramsey problémák

Az eddig tárgyalt kérdéseket számtalan különböző módon általánosíthatjuk. Egy érdekes problémakör az úgynevezett aszimmetrikus Ramsey párokat vizsgálja, melynek fogalmát szintén Erdősék vezették be cikksorozatuk II. részében [17]. Ebben a változatban a sík, vagy egy magasabb, de rögzített dimenziószámú tér pontjait színezzük két színnel – hagyományosan pirosra és kékre – és a két színosztályban különböző konfigurációkat keresünk. Egy tipikus kérdés a következő: Ha a sík egy piros-kék színezésében megtiltunk egy adott K_1 konfigurációt a piros színosztályban, milyen K_2 konfigurációk lesznek elkerülhetetlenek a kék színosztályban? Ha K_1 és K_2 teljesíti ezen feltételeket, azt mondjuk K_1 és K_2 pontkonfigurációk aszimmetrikus Ramsey párt alkotnak és ezt $\mathbb{R}^2 \rightarrow (K_1, K_2)$ -el jelöljük, ellenkező esetben pedig az $\mathbb{R}^2 \not\rightarrow (K_1, K_2)$ jelölést használjuk.

Erdősék többek között azt a speciális esetet vizsgálták, amikor az egyik konfigurációt az egység-távolságú pontpárnak rögzítjük, amit ezentúl P_1 -el jelölünk. A továbbiakban mi is ezt az esetet tekintjük, így érdemes bevezetni a következő fogalmat:

4.1. Definíció. *A sík egy piros-kék színezését nevezzük megengedettnek, ha a piros színosztály nem tartalmaz egységtávolságú pontpárt. Továbbá a sík egy k színosztályból álló színezését hívjuk megfelelő k -színezésnek, ha mind a k színosztály teljesíti ezen feltételt, azaz egyik sem tartalmaz egységtávolságú pontpárt.*

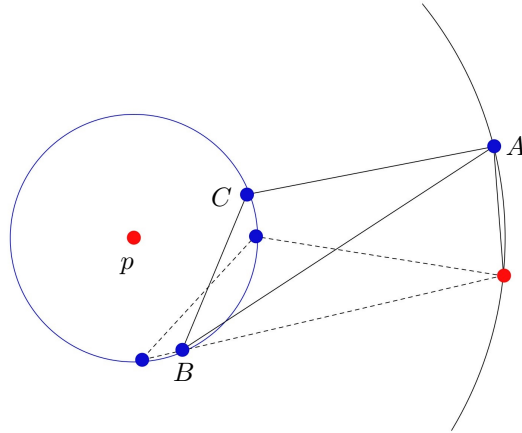
Így a kérdés a következőképp fogalmazható meg: Milyen K konfigurációkra teljesül, hogy a sík minden piros-kék színezésében található K -val egybevágó kék konfiguráció? Azaz milyen K konfigurációra teljesül, hogy $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, K)$? Egy piros-kék színezést az egyik színosztálya egyértelműen meghatároz, így a továbbiakban mindig csak a piros színosztályt definiáljuk, illetve az ábrákon is ezt jelöljük.

Először tekintsük át a problémához kapcsolódó ismert eredményeket: Triviálisan minden 1 pontú K halmazra $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, K)$ teljesül és az egységoldalú szabályos háromszög tanúsítja, hogy $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, P_1)$ is fennáll. Apró megfigyelés mutatja, hogy $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, K)$ minden 2 pontú konfigurációra is teljesül. Sőt, az is egyszerűen igazolható, hogy a háromszögek is teljesítik a feltételeket:

4.1. Állítás. *Legyen K egy tetszőleges 3 pontú konfiguráció. Ekkor \mathbb{R}^2 minden megengedett piros-kék színezése tartalmaz K -val egybevágó kék konfigurációt. Azaz $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, K)$ minden 3 pontú K konfiguráció esetén fennáll.*

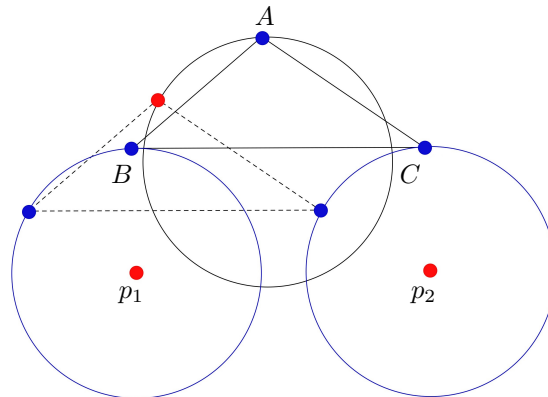
Bizonyítás. Tekintsük a síknak egy megengedett piros-kék színezését és legyen A, B, C egy tetszőleges háromszög, melynek oldalhosszai $a \leq b \leq c$. Először vizsgáljuk az $a \leq 2$ esetet, azaz tegyük fel, hogy a háromszög egyik oldala legfeljebb 2 hosszú. Feltehető, hogy a színezés tartalmaz piros pontot, legyen a p pont ilyen, C_1 pedig jelölje a p pont köré írt 1 sugarú kört. Ekkor C_1 minden pontja szükségszerűen kék. Válasszunk a C_1 körön egy tetszőleges a hosszú BC húrt és egészítsük

ki egy A' ponttal úgy, hogy ABC -vel egybevágó háromszöget kapjunk. Ha A' kék, készen vagyunk. Ellenkező esetben az A' pontot forgassuk körbe p pont körül. Az így kapott C_2 kör egy 1 hosszú húrjának két végpontja közül legalább az egyik kék, vagyis a C_2 körön választhatunk egy kék A pontot, ezzel pedig egy a, b, c oldalú kék háromszöget találtunk.



7. ábra. Első eset: $a \leq 2$

Másodszor tegyük fel, hogy az ABC háromszög minden oldalhossza nagyobb mint 2. Ha nincs a távolságú piros pontpár, akkor alkalmazhatjuk az előző gondolatmenetet egy piros pont körüli a sugarú kék körből kiindulva. Tehát feltehető, hogy van a távolságú piros pontpár; p_1 és p_2 legyenek ilyenek és tekintsük a p_1 és p_2 körüli $1 - 1$ sugarú C_1, C_2 köröket. A két körön tetszőlegesen választva két a távolságú pontot, a háromszög harmadik csúcsa egy 1 sugarú C_3 körön helyezkedhet el. A C_3 kör egy 1 hosszú húrjának két végpontja közül legalább az egyik kék, azaz ebben az esetben is találtunk a, b, c oldalú kék háromszöget.



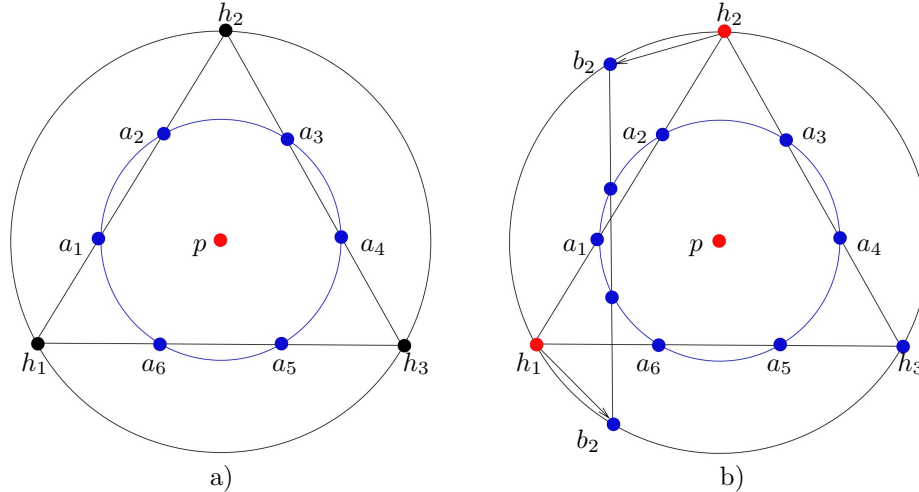
8. ábra. Második eset: $a > 2$ és van a távolságú piros pontpár

□

A következő felmerülő kérdés, hogy mi a helyzet a négyszögekkel. Az első idekapcsolódó tétel Erdőséktől származik, akik azt a 4 pontú konfigurációt vizsgálták, melynek pontjai egy egyenesre esnek és a pontok egymástól $1 - 1$ távolságra helyezkednek el. A továbbiakban ezt P_3 -mal jelöljük.

4.2. Tétel (Erdős és társai [17]). *A sík minden piros-kék színezése vagy tartalmaz P_1 -el egybevágó piros, vagy P_3 -mal egybevágó kék konfigurációt. Azaz $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, P_3)$ fennáll.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges megengedett piros-kék színezést, ami feltehetően legalább egy p piros pontot tartalmaz. Ekkor a p középpontú 1 sugarú C_1 kör minden pontja kék. Tekintsünk egy vele koncentrikus $\sqrt{3}$ sugarú C_2 kört. A C_2 körbe írt szabályos $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ háromszög segítségével fogjuk igazolni a kék P_3 létezését: Jelölje a_i ($i = 1 \dots 6$) a H háromszög és a C_1 kör metszéspontjait, a 9.a ábrán látható sorrendben. Vegyük észre, hogy a h_1, a_1, a_2, h_2 pontok éppen



9. ábra. A sík minden megengedett piros-kék színezése tartalmaz 4 egy-egy távolságra lévő kék pontot

1 – 1 távolságra vannak egymástól. Hasonlóan a h_2, a_3, a_4, h_3 és a h_3, a_5, a_6, h_1 négyes is 1 – 1 távolságot határoznak meg. Ha H legalább két csúcsa kék, készen vagyunk. Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, legyen például h_1 és h_2 is piros. A C_2 körön azonos irányban válasszuk h_1 -től és h_2 -től 1 távolságra lévő b_1, b_2 pontokat. Mivel b_1 és b_2 kék, az általuk meghatározott egyenes C_1 körrel való metszéspontjaival kiegészítve őket megfelelő kék konfigurációt találtunk (9.b ábra). \square

Erdősék azt sejtették, hogy más négyszögek, például az egységnégyzet is megfelelő választása K -nak. Néhány évvel később Juhász Rozália ennél többet bizonyított: megmutatta, hogy minden 4 pontú konfiguráció teljesíti a feltételeket.

4.3. Tétel (Juhász [37]). *Legyen K egy tetszőleges 4 pontú konfiguráció. Ekkor \mathbb{R}^2 minden megengedett piros-kék színezése tartalmaz K -val egybevágó kék konfigurációt. Azaz $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, K)$ minden 4 pontú K konfiguráció esetén fennáll.*

A tétel nagy elismerésben részesült a témakörrel foglalkozó matematikusok körében, Juhász eredményét többek között Rod Laver¹teniszező bravúros teljesítményéhez hasonlították [7]. Nem meglepő módon csak kevés további példa ismert: Nemrég Tsaturian [72] egy 5 pontú K halmazt mutatott, melyre $\mathbb{R}^2 \rightarrow (P_1, K)$ teljesül.

¹Rod Laver ausztrál teniszező, aki a férfiak közt páratlan módon egy éven belül nyerte meg a profi szintű Grand Slam mind a négy tornáját.

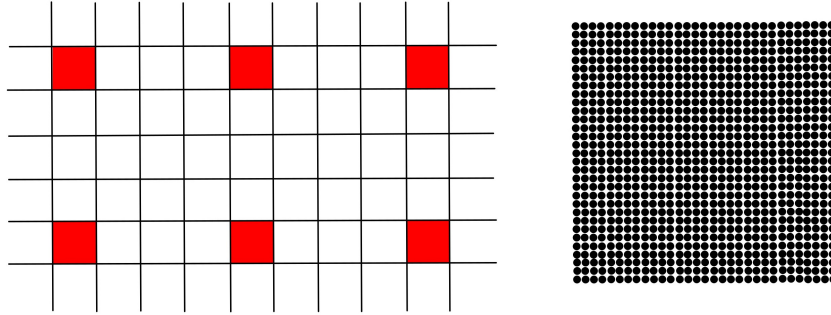
A másik irányból elindulva, már Erdősék cikkében is megjelent, hogy létezik olyan konfiguráció, mely nem tesz eleget a feltételeknek. Ezt egy nem éppen optimális rácsminti színezés-konfiguráció párral igazolták:

4.4. Tétel (Erdős és társai [17]). *Létezik egy K konfiguráció és \mathbb{R}^2 -nek egy olyan piros-kék színezése, mely nem tartalmaz egységtávolságú piros pontpárt és minden K -val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Vagyis létezik olyan K konfiguráció, melyre $\mathbb{R}^2 \not\rightarrow (P_1, K)$.*

Bizonyítás. Színezzük pirosra az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2m \leq x \leq 2m + 1/2, 2n \leq y \leq 2n + 1/2, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

halmaz pontjait. Vegyük az egész pontok által meghatározott rács $3/10^6$ -szeresét és a K konfiguráció álljon a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ négyzetbe eső 10^{12} rácspontból.



10. ábra. Erdősék piros-kék színezése és 10^{12} pontú konfigurációjuk

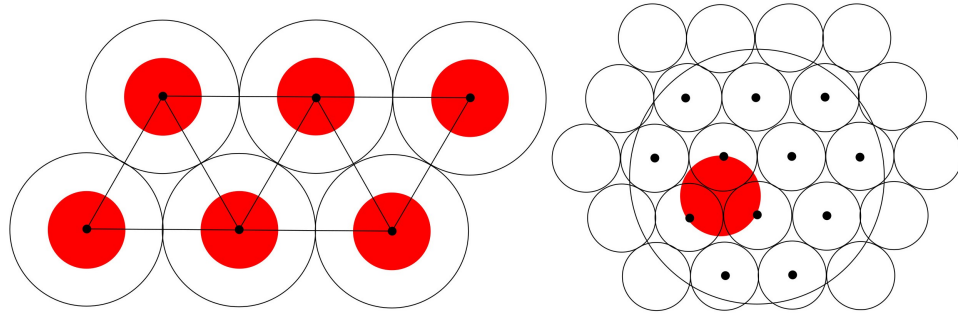
Könnyen ellenőrizhető, hogy a színezés megengedett és minden K -val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. \square

Javítva Erdősék tételén Juhász a már említett cikkében 12 pontú ellenpéldát mutatott.

4.5. Tétel (Juhász [37]). *Létezik egy 12 pontból álló K konfiguráció és \mathbb{R}^2 -nek olyan piros-kék színezése, mely nem tartalmaz egységtávolságú piros pontpárt és minden K -val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Vagyis létezik 12 pontú K konfiguráció, melyre $\mathbb{R}^2 \not\rightarrow (P_1, K)$.*

Bizonyítás. Színezzük pirosra az $\{1/2 \text{Int } B_2 + \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ halmaz pontjait, ahol Λ a 2 oldalú szabályos háromszögrács pontjainak halmaza, $\text{Int } B_2$ pedig a nyílt Euklideszi egységkört jelöli. Ez megengedett piros-kék színezést határoz meg, hiszen az $\text{Int } B_2 + \Lambda$ halmazcsalád pakolást alkot, azaz tagjai páronként diszjunktak. Világos, hogy a piros halmaz struktúrája alapján olyan konfigurációt kell keresni, melynek pontjai köré írt $1/2$ sugarú nyílt körök uniója mindenképp tartalmaz Λ -beli pontot. Fontos megfigyelés, hogy egy $2/\sqrt{3}$ sugarú kör minden eltoltja tartalmazza a Λ rácst legalább egy pontját, hiszen egy 2 oldalú szabályos háromszög körülírható körének sugara éppen $2/\sqrt{3}$. Legyen C egy $1/2 + (2/\sqrt{3})$ sugarú kör. Az előző megfigyelés alapján C minden eltoltja tartalmazza

a színezés egy teljes piros körét. Tekintsük a Λ rács $\sqrt{3}/4$ -szeresét, azaz a $\sqrt{3}/2$ oldalú háromszög által meghatározott Λ' rácsot és a K konfiguráció álljon a Λ' rács C körbe eső 12 pontjából.

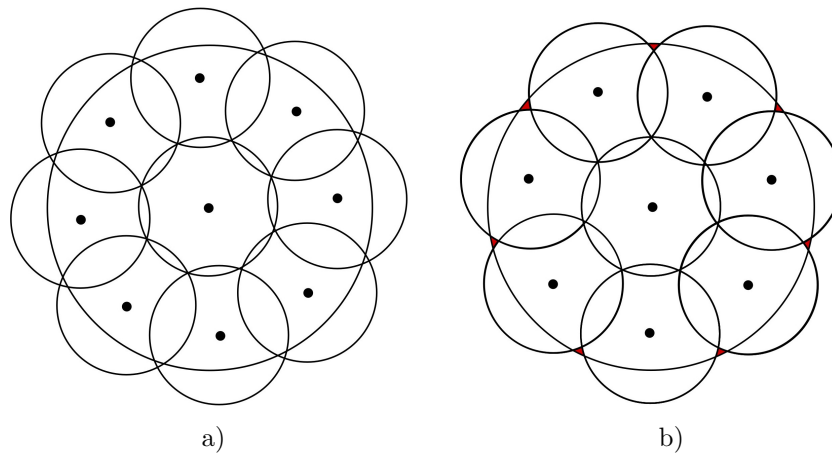


11. ábra. Juhász piros-kék színezése és 12 pontú konfigurációja

Az előzőhöz hasonlóan egy tetszőleges $1/2$ sugarú kör minden eltoltja tartalmazza a Λ' rács legalább egy pontját. Tehát a C kör megfelelő eltoltjába eső $1/2$ sugarú piros kör tartalmazza K legalább egyik pontját, amivel az állítást beláttuk. \square

Egy egyszerű megfigyeléssel 9-re csökkenthetjük a pontkonfigurációnk számát:

Használjuk a fenti tételben szereplő piros-kék színezést, amit az egyszerűség kedvéért a továbbiakban nevezünk standard piros-kék színezésnek. Azt már megállapítottuk, hogy olyan konfigurációt kell konstruálni, melyre teljesül, hogy pontjai köré írt $1/2$ sugarú nyílt körök uniója tartalmaz Λ -beli pontot. Másrészt azt is láttuk, hogy egy $2/\sqrt{3}$ sugarú C kör minden eltoltja tartalmaz Λ -beli pontot. Tehát elegendő olyan konfigurációt adni, melynek pontjai köré írt $1/2$ sugarú nyílt körök uniója lefedi C kör egy eltoltját. Fejes Tóth [22] tétele alapján az ehhez szükséges nyílt körök száma éppen 9: C lefedhető 9 nyílt kör segítségével (12.a ábra), amiből az állítás adódik. Azonban megfigyelhetjük, hogy már 8 kör is majdnem elegendő: a 12.b ábrán látható elrendezésben egyedül a pirossal jelölt kicsiny terület marad fedetlenül.



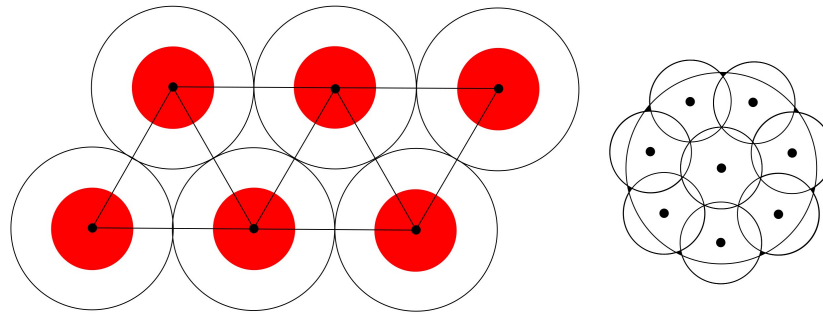
12. ábra. A $2/\sqrt{3}$ sugarú kör lefedhető 9 db $1/2$ sugarú nyílt körrel, de 8-al éppen nem

Ennél trükkösebb gondoltmenet segítségével Csizmadia és Tóth megmutatták, hogy a fenti 8 pontú konfiguráció is megfelelő, ezzel övéké az eddig ismert legjobb konstrukció:

4.6. Tétel (Csizmadia-Tóth [12]). *Létezik egy 8 pontú K konfiguráció és \mathbb{R}^2 -nek egy olyan piros-kék színezése, mely nem tartalmaz egységtávolságú piros pontpárt és minden K -val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Vagyis létezik 8 pontú K konfiguráció, melyre $\mathbb{R}^2 \not\rightarrow (P_1, K)$.*

Bizonyítás. (Vázlat)

Az eddigiekhez hasonlóan tekintsük a standard piros-kék színezést a konfiguráció pedig legyen a 12.b ábrán látható 8 kör középpontja, azaz: Vegyünk egy szabályos hétszöget, melynek körülírt körének sugara 0.9 és a K konfiguráció álljon a hétszög csúcaiból, illetve a körülírt körének középpontjából.



13. ábra. Csizmadia és Tóth piros-kék színezése és 8 pontú konfigurációjuk

Tekintsünk egy tetszőleges K -val egybevágó K' konfigurációt és a hétszög középpontja köré írt $2/\sqrt{3}$ sugarú C kört. Az előző megfigyelések alapján C mindenképp tartalmaz egy z rácspontot. Ha z beleesik a K' konfiguráció pontjai köré írt $1/2$ sugarú nyílt körök uniójába, készen vagyunk. Csizmadia és Tóth megmutatták, ellenkező esetben a z ponton kívül található egy másik Λ -beli pont C -ben, ami pedig a K' konfiguráció pontjai köré írt $1/2$ sugarú nyílt körök uniójába esik, ezzel belátva az állítást. \square

A feladatot magasabb dimenziós Euklideszi terekben is vizsgálhatjuk. Egy természetes kérdés, hogy a 4.2. állítás miként erősíthető magas dimenzióban: ezzel kapcsolatban több eredmény is született az elmúlt néhány évben. A tételek kimondása érdekében vezessük be a P_m jelölést, ami az $(m-1)$ egymást $1-1$ távolságra követő kollineáris pontok halmazát jelöli. Egyrészt Arman és Tsaturian [2,3] igazolták, hogy tetszőleges $k \geq 3$ -ra $\mathbb{R}^k \rightarrow (P_1, P_{k+2})$ fennáll. A másik irányból elindulva pedig Conlon és Fox mutattak ellenpéldát. Tételük egy kicsit gyengített változata a következő:

4.7. Tétel (Conlon-Fox [10]). *Legyen $m = 10^{5n} - 1$. Ekkor tetszőleges n esetén \mathbb{R}^n -nek létezik olyan megengedett piros-kék színezése, melyben a kék halmaz nem tartalmaz P_m -el egybevágó konfigurációt.*

A későbbiekben látjuk, hogy m értéke konstanstól eltekintve optimális.

Tovább általánosíthatjuk a feladatot Minkowski terekre. Emlékeztetőül:

4.2. Definíció (Minkowski tér). *Legyen C egy n -dimenziós origóra középpontosan szimmetrikus konvex test. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont C által meghatározott $\|x\|_C$ normája a $\min\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \lambda C\}$ érték és az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ párt Minkowski térnek nevezzük.*

Adott $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ Minkowski tér esetén egy piros-kék színezést nevezzünk megengedettnek, ha nem tartalmaz C norma szerinti egységtávolságú pontpárt, azaz, ha minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ piros pontpárra $\|x - y\|_C \neq 1$ teljesül. Jelölje $k_n(C)$ azt a legnagyobb k értéket, melyre teljesül, hogy tetszőleges k pontú K konfiguráció esetén $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ minden megengedett piros-kék színezésében létezik K -val izometrikus egyszínű kék konfiguráció. Az Euklideszi norma esetén egyszerűen a k_n jelölést használjuk, továbbá $*$ -gal jelöljük, ha az egybevágósági transzformációk helyett csak eltolásra szorítkozunk. A továbbiakban $k_n(C)$ és $k_n^*(C)$ értékeit vizsgáljuk, kitérve néhány speciális esetre. Az előzőek alapján $4 \leq k_2 < 8$ ismert (4.3. tétel és 4.6. tétel), illetve azt is tudjuk, k_n legfeljebb exponenciálisan növekedhet (4.7. tétel).

4.1. Monokromatikus eltoltak

Adott Minkowski tér esetén $k_n(C)$ alsó becsléséhez olyan k értéket keresünk, hogy egy tetszőleges k pontú konfiguráció esetén a C test által meghatározott Minkowski tér minden megengedett piros-kék színezése tartalmazzon vele izometrikus kék példányt. A $k_n^*(C)$ alsó becsléséhez ennél többet követelünk meg: ez esetben a konfigurációk eltoltjai közt kell monokromatikus példányt biztosítanunk.

Az utóbbi feladatot először Szlam vizsgálta, aki észrevette, a feladat szoros kapcsolatban áll a sík, illetve a tér kromatikus számával. Emlékeztetőül, $\chi(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ azt a legkisebb k értéket jelöli, melyre teljesül, hogy \mathbb{R}^n kiszínezhető k színnel úgy, hogy egyik színosztály se tartalmazzon C norma szerinti egységtávolságú pontpárt. A 2.3. de Bruijn-Erdős tétel alapján tetszőleges normált tér kromatikus száma megegyezik a beágyazható véges egységtávolság gráfok kromatikus számának legnagyobb értékével. Általában az egységtávolság gráf kromatikus számát az (n/α) hányados segítségével becsüljük alulról, ahol n a csúcsok számát, α pedig a legnagyobb független csúcshalmaz elemszámát jelöli.

Egy apró megfigyelés, hogy egységtávolság gráfok segítségével egyszerűen kereshetünk viszonylag nagy elemszámú monokromatikus eltoltakat:

4.8. Állítás. *Legyen G egy n csúcsszámú, α függetlenségi számú egységtávolság gráf \mathbb{R}^n -ben és legyen K egy tetszőleges $k < n/\alpha$ pontú konfiguráció. Ekkor \mathbb{R}^n minden megengedett piros-kék színezése tartalmazza K egy kék eltoltját.*

Bizonyítás. A G gráfot toljuk el K pontjainak eltolás vektoraiival. G minden eltoltjában maximum α piros pont lehet, így a k érték választása miatt G -nek lesz olyan pontja, amely mind a $|K|$ eltoltjában kék színt kapott. □

Szlam a fenténél erősebb alsó korlátot adott: Megmutatta, hogy ha adott \mathbb{R}^n -nek egy megengedett piros-kék színezése és egy olyan k pontú konfiguráció, melynek minden eltoltjának legalább az egyik pontja piros, akkor a színezés-konfiguráció pár segítségével megadhatjuk \mathbb{R}^n -nek egy megfelelő k -színezését, azaz egy olyan k színosztályból álló színezését, melyben egyik színosztály sem tartalmaz egységtávolságú pontpárt.

4.9. Lemma (Szlam I. [71]). *Tetszőleges n esetén $\chi(\mathbb{R}^n) \leq k_n^* + 1$.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy megengedett piros-kék színezést és egy olyan $K = \{a_1, \dots, a_k\}$ konfigurációt, melynek minden eltoltja tartalmaz piros pontot. Ez alapján megadjuk \mathbb{R}^n -nek egy megfelelő k -színezését: A feltételek alapján a sík egy tetszőleges p pontja esetén létezik olyan i index, melyre $p + a_i$ piros, színezzük a p pontot a legkisebb ilyen indexű színnel. Azt állítjuk, hogy ez egy megfelelő k -színezést határoz meg: Indirekt tegyük fel, hogy az i . színosztály tartalmaz egy $p_1 - p_2$ egységtávolságú pontpárt. Ez viszont azt jelentené, hogy $a_i + p_1$ és $a_i + p_2$ is piros volt a piros-kék színezésünkben, ami ellentmond a színezés megengedettségének. \square

Szlam I. lemmájának sokféle általánosítását, alkalmazását vizsgálták, például a [7, 30, 41, 47] cikkekben. Többek között megfigyelhető, hogy Szlam lemmája minden eltolás-invariáns normált térre, így Minkowski terekre is általánosítható. Tehát a kromatikus számmal való szoros kapcsolat Minkowski terek esetén is fennáll:

4.10. Lemma. *Tetszőleges középpontosan szimmetrikus konvex $C \subseteq \mathbb{R}^n$ test által meghatározott Minkowski tér esetén: $\chi((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)) \leq k_n^*(C) + 1$.*

A fenti megfigyelések alapján $k_n^*(C)$ értékének alsó becsléséhez elegendő alsó korlátot adni a C test által meghatározott tér kromatikus számára, vagyis azt kell megvizsgálunk, hogy milyen egységtávolság gráfok ágyazhatóak be az Euklideszi, illetve Minkowski terekbe.

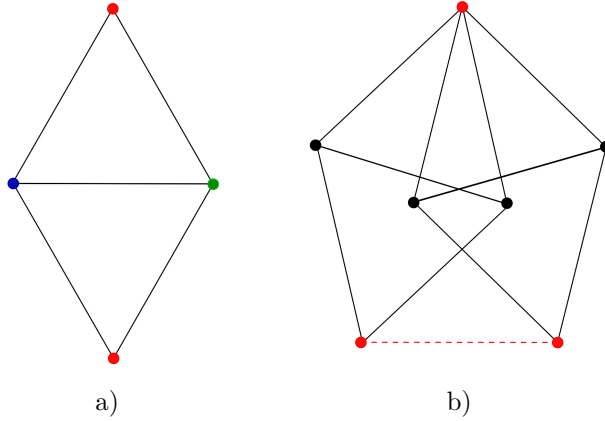
Egységtávolság gráfok

Síkban a legegyszerűbb egységtávolság gráfok közé tartozik az egyégtávolságú csúcspár, melynek kromatikus száma 2, illetve a szabályos egység oldalú háromszög, melynek kromatikus száma 3. Sőt, egyszerűen konstruálhatunk 4 kromatikus számú egyégtávolság gráfot is:

4.11. Állítás (Moser [50]). *Az Euklideszi síkban létezik 4 kromatikus számú egységtávolság, azaz*

$$\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4.$$

Bizonyítás. Legyen R egy olyan rombusz, melynek oldalai, illetve a rövidebb átlója egység hosszú. Vegyük észre, egy tetszőleges 3-színezésben a szabályos egység oldalú háromszög csúcsai biztosan különböző színeket kaptak, amiből pedig következik, hogy az R rombusz hosszabbik átlójának 2 végpontja azonos színt kapott (14.a ábra). R két példányát ragasszuk össze az egyik hegyesszög-nél lévő csúcuknál fogva úgy, hogy a másik hegyesszögnél lévő csúcspár éppen egységtávolságot határozzon meg, a 14.b ábrán látható módon.



14. ábra. Moser gráf

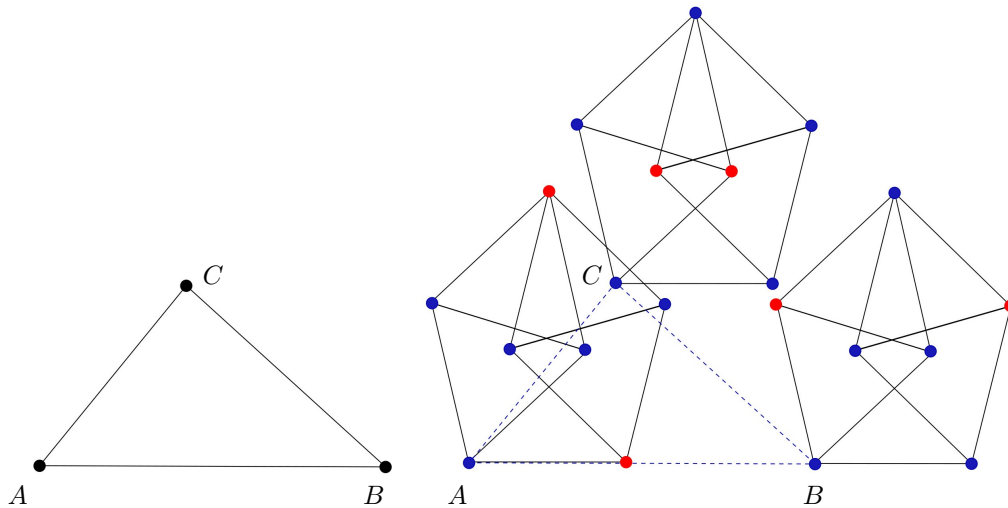
Az előző megfigyelés alapján az így kapott Moser gráfnak nevezett egységtávolság gráf kromatikus száma 4. □

Triviálisan, az egység oldalú szabályos háromszög tetszőleges Minkowski síkba beágyazható. Ezen észrevétel alapján Chilakamarri Minkowski síkokra általánosította a 4.11. állítást:

4.12. Tétel (Chilakamarri [9]). *Legyen C egy tetszőleges kétdimenziós szimmetrikus korlátos konvex C tartomány. Ekkor:*

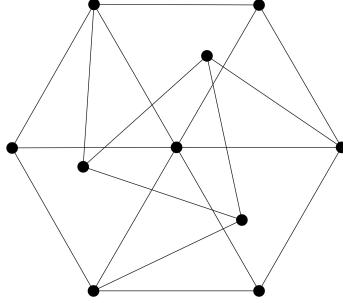
$$\chi(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_C) \geq 4.$$

A 4.8. állításból azonnal következik, hogy minden megengedett piros-kék színezésben egy tetszőleges 3 pontú konfigurációnak létezik kék eltoltja, hiszen a Moser gráfnak 7 csúcsa van, a legnagyobb független csúcshalmaz mérete 2. Ez erősebb a 4.1. állításnál. Továbbá azt is megfigyelhetjük, hogy az állítás segítségével egy véges tanúhalmazt is konstruálhatunk:



15. ábra. Egy ABC háromszögnek a sík minden megengedett piros-kék színezésében van kék eltoltja és ezt egy véges tanúhalmaz igazolja

Az évek során a Moser gráf mellett több 4 kromatikus számmal rendelkező egységtávolság gráfot találtak, ilyen például a 16. ábrán látható Golomb gráf. Azonban több mint 60 éven át nem sikerült javítani a $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ korláton.



16. ábra. Golomb gráf

2018-ban viszont hatalmas előrelépés történt a feladattal kapcsolatban, amikor de Grey biológus, illetve nem sokkal később Exoo és Ismailescu 5 kromatikus számú egységtávolság gráfot konstruáltak:

4.13. Tétel (de Grey [34], Exoo és Ismailescu [20]).

$$\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5.$$

A tételből adódik, hogy minden megengedett piros-kék színezésben egy tetszőleges 4 pontú konfigurációnak létezik kék eltoltja, azaz $k_2^* \geq 4$, ami Juhász 4.3. tételénél is erősebb.

A 2018-as áttörés számtalan további kérdést vet fel: de-Grey eredeti bizonyításában egy 1581 csúcshoz tartozó egységtávolsággráfot mutatott, melynek kromatikus száma 5, illetve Exoo és Ismailescu gráfja is hasonló méretű volt. Azóta több javítást sikerült elérni, a jelenleg ismert legkisebb példa 509 csúcshoz rendelkezik [52]. Kérdés, mennyit lehet még ezen tovább javítani. Egy másik felmerülő kérdés, hogy az Euklideszi síkon kívül mely Minkowski síkba ágyazható be 5 kromatikus számú egységtávolság gráf. A Minkowski síkok egy érdekes osztályát alkotják azon normált terek, melyeknek egységköre egy páros sok csúcshoz tartozó szabályos sokszög. Ahogy Chilakamarri [9] megfigyelte, a szabályos 4- és 6-szög esetén létezik megfelelő 4-színezés, így az általuk meghatározott Minkowski síkok kromatikus száma éppen 4. Nagyobb csúcshoz tartozó esetben azonban más a helyzet: Nemrég Ismailescu és társai [21] a szabályos 8-, 10-, illetve 12-szög esetén 5-kromatikus számú egységtávolság gráfot konstruáltak, vagyis az Euklideszi síkhoz hasonlóan ezekben az esetekben is legalább 5 szín szükséges. Tehát a 4.15. lemmából adódik a következő állítás:

4.14. Következmény. *Legyen C egy tetszőleges korlátos szimmetrikus konvex tartomány. Ekkor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_C)$ minden megengedett piros-kék színezésben egy tetszőleges 3 pontú konfigurációnak létezik kék eltoltja. Továbbá, ha C egy szabályos 8-, 10- 12-szög, vagy az Euklideszi egységkör, ak-*

kor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_C)$ minden megengedett piros-kék színezésben egy tetszőleges 4 pontú konfigurációnak is létezik kék eltoltja.

Magas dimenziós Euklideszi térben tekintsük Frankl és Wilson 2.6. tételében definiált G gráfot. Ahogy láttuk, Frankl és Wilson azt bizonyították, hogy a $|V|/\alpha(G)$ hányados exponenciálisan nő, tehát a 4.8. állításból azonnal következik, hogy k_n^* és így k_n legalább exponenciálisan növekszik. Minkowski terekben azonban sokkal rosszabb a helyzet: meglepő módon a szabályos szimplex által adott konstrukciónál egyelőre nem ismert jobb, így a legjobb korlátot Swanepoel és Villa 3.20. tétele adja: létezik c konstans, hogy:

$$\chi(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C) \geq \exp\left(c\sqrt{\log n}\right).$$

Tehát a 4.10. lemma alapján $k_n^*(C)$ sem korlátos n függvényében.

4.2. Nem monokromatikus eltoltak

A továbbiakban célunk felső korlátot adni $k_n^*(C)$, illetve később $k_n(C)$ értékére. Először az egyszerűbb feladattal foglalkozunk, tehát olyan piros-kék színezést és – minél kevesebb pontszámú – K konfigurációt keresünk, melyre teljesül, hogy a piros színosztály nem tartalmaz C norma szerinti egységtávolságú pontpárt, még a kék színosztály nem tartalmazza K eltoltjait.

Vizsgálataink kulsgondolata Szlam-tól származik, aki megmutatta, hogy 4.9. lemmája részben, az úgynevezett reguláris színezések osztályán megfordítható:

4.3. Definíció. $A C_1, C_2 \dots C_k$ színosztályokból álló megfelelő k -színezést nevezzünk regulárisnak, ha a színosztályok egymás eltoltjai, azaz minden $i = 1 \dots k$ indexre létezik olyan v_i vektor, melyre $C_i = C_1 + v_i$ teljesül.

4.15. Lemma (Szlam II. [71]). *Tetszőleges n és k egészre, ha \mathbb{R}^n -nek létezik reguláris k -színezése, akkor $k_n^* < k$.*

Bizonyítás. Legyen adott egy reguláris k -színezés, melynek színosztályai $C_1, \dots C_k$, ahol $C_i = C_1 + v_i$ teljesül minden $i = 1 \dots k$ indexre. Feltehető, hogy $v_1 \equiv 0$. Megengedett piros-kék színezést kapunk, ha pirosra színezzük C_1 pontjait, hiszen egy megfelelő k -színezés egyik színosztálya sem tartalmaz egységtávolságot. Álljon a konfiguráció az eltolás vektorokból, azaz $K := \{v_1, \dots v_k\}$. Tekintsük K konfigurációnak egy tetszőleges $K' = K + p$ eltoltját. Ekkor K' a k -színezés minden színosztályából pontosan 1-1 pontot tartalmaz: Indirekt tegyük fel, hogy léteznek i, j indexek, melyekre $p + v_i$ és $p + v_j$ ugyanabban a C_a színosztályban vannak. A k -színezés regularitásából adódóan létezik v_a vektor, melyre $C_a = C_1 + v_a$. Vagyis $(p + v_i - v_a)$ és $(p + v_j - v_a)$ is C_1 -ben van. Ekkor a $(p + v_i - v_a) + v_j = (p + v_j - v_a) + v_i$ pont az egyenlőség bal oldala alapján C_j , a jobb oldala alapján pedig C_i szintű, ami ellentmondás. Tehát K' valóban mind a k színosztályból, így a pirosnak választott C_1 színosztályból is tartalmaz pontot. \square

Ahogy például Johnson és Szlam, illetve Krizan [30, 42] is megfigyelte, a lemma Minkowski terekre is kiterjeszthető, hiszen Szlam bizonyítása változtatás nélkül működik.

Azonban a lemma bizonyítása hiába rövid és egyszerű, némileg félrevezető. Vegyük észre, hogy Szlam 4.9 lemmájának bizonyításában definiált színezés nem reguláris: a színosztályokat az egységtávolságot nem tartalmazó piros halmaz eltoltjainak részhalmazai határozzák meg. Nevezzük az ilyen struktúrával rendelkező színezéseket szubregulárisnak. Pontosabban:

4.4. Definíció. *A $C_1, C_2 \dots C_k$ színosztályokból álló megfelelő k -színezést nevezzük szubregulárisnak, ha minden $i = 1 \dots k$ indexre létezik olyan v_i vektor, hogy C_i részhalmazát képi a $C_1 + v_i$ halmaznak.*

A 4.15 lemmánál sokkal természetesebb állítást kapunk, ha reguláris színezések helyett szubreguláris színezéseket tekintünk. A bizonyítás Szlam lemmáihoz hasonlóan az Euklideszi norma tulajdonságai közül kizárólag az eltolás-invarianciát használja, így a lemmát rögtön Minkowski terekre fogalmazzuk meg:

4.16. Lemma. *Legyen $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ egy tetszőleges Minkowski tér és tegyük fel, hogy $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ -nek létezik szubreguláris k -színezése. Ekkor $k_n^*(C) < k$.*

Bizonyítás. A szubreguláris színezés színosztályai legyenek C_1, \dots, C_k , ahol tehát minden $i = 1 \dots k$ indexre létezik v_i vektor, melyre $C_i \subseteq C_1 + v_i$ teljesül. Színezzük pirosra C_1 pontjait és tekintsük a $K = \{-v_1, -v_2, \dots, -v_k\}$ konfigurációt. Azt szeretnénk megmutatni, hogy tetszőleges p vektorra $K+p$ eltoltnak legalább az egyik pontja C_1 -be esik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $v_1 \equiv 0$, így a $p \in C_1$ esetben nincs mit bizonyítani. Tegyük fel tehát, hogy $p \notin C_1$. Ekkor létezik egy i index, melyre $p \in C_1 + v_i$ teljesül, amiből $-v_i + p \in C_1$ következik. \square

A 4.10. és a 4.16. lemmák alapján tehát megengedett piros-kék színezésben monokromatikus eltoltak keresésének feladata ekvivalens a szubreguláris színezés megadásával. Az alacsony dimenzióban ismert legkevesebb szint használó megfelelő színezések általában regulárisak, míg magas dimenzióban csak szubregulárisak. A továbbiakban ezen színezések konstrukcióit mutatjuk be.

4.2.1. Reguláris színezések alacsony dimenziós terekben

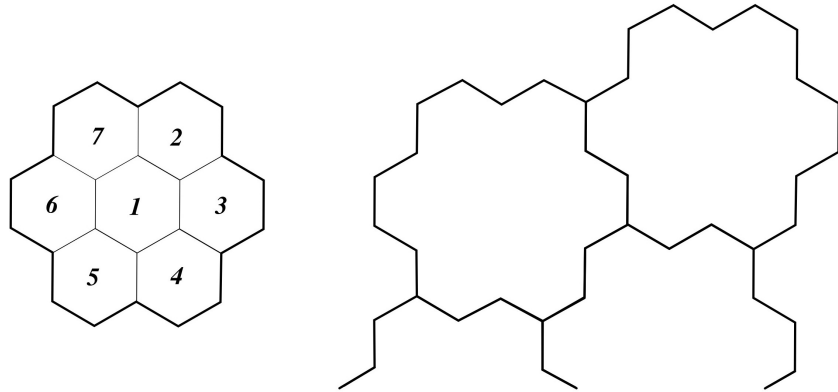
A Hadwiger-Nelson probléma megjelenésével szinte egyidőben már ismert volt, hogy az Euklideszi síknak létezik megfelelő 7-színezése, ami ráadásul reguláris:

4.17. Tétel (Isbell [35]). *Az Euklideszi síknak létezik olyan reguláris színezése, mely 7 szintet használ, azaz*

$$\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Bizonyítás. Legyen H egy 1 átmérőjű, azaz $1/2$ oldalhosszú szabályos hatszög. Hagyjuk el baloldali határpontjait, így két H -beli pont biztosan nem határoz meg egységtávolságot. Az így kapott félig nyílt hatszöget az egyszerűség kedvéért továbbra is jelöljük H -val.

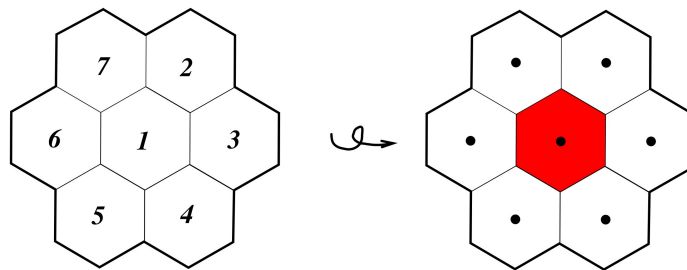
Csempézzük ki a síkot H hatszög eltoltjaival, majd a hatszögeket színezzük 7 színnel, a 17. ábrán látható periodikus minta szerint:



17. ábra. Isbell reguláris 7–színezése

Mivel H nem tartalmaz egységtávolságot, annak igazolásához, hogy a színezés megfelelő csak azt kell ellenőrizni, két egyszínű hatszög elég távol helyezkedik el egymástól ahhoz, hogy egységtávolságú pontpárt hozzanak létre. Egyszerű számolással igazolható, hogy két egyszínű hatszög középpontjának távolsága nagyobb mint 2, így a színezés valóban megfelelő. \square

Példaképp nézzünk meg, milyen színezés-konfiguráció párt kapunk Szlam 4.15. lemmájának segítségével. A színezés reguláris, így a 7–színezés tetszőleges színosztályát választhatjuk pirosnak. Vegyük észre, hogy a reguláris (illetve szubreguláris) színezés definíciójában szereplő v_i eltolás vektorok nem egyértelműek, így a konfiguráció sem az. Egy lehetséges választás például a következő:



18. ábra. Szlam lemmáját alkalmazva Isbell 7–színezésére

A probléma felmerülése óta számtalan más (reguláris és nem reguláris) 7–színezést mutattak, például a [53, 69] cikkekben. A szükséges színszám csökkentésére is rengeteg kísérlet indult, ám ezek mindeddig sikertelenek voltak. Mégis sokszor ezen próbálkozások vezettek el a problémakör újabb és újabb izgalmas változatához. Érdekes megfigyelés, hogy Isbell 7–színezésében a színosztályok nem csak az egységtávolságot, hanem az $[1, \sqrt{7}/2]$ intervallumba eső összes távolságot elkerülik. Emellett további felmerülő kérdés lehet, hogy a sík mekkora része színezhető 6 vagy ennél is kevesebb színnel, illetve, hogy milyen sűrű lehet egy egységtávolságot nem tartalmazó halmaz.

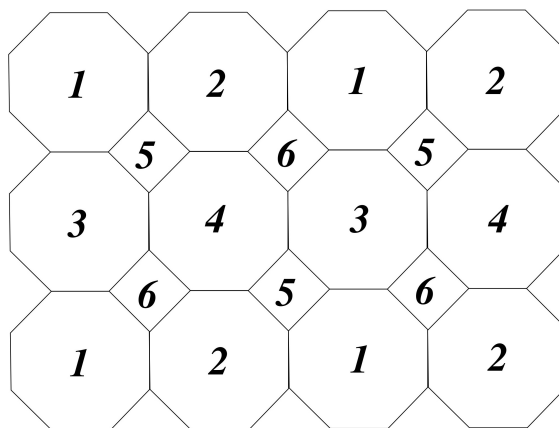
Térjünk át a Minkowski síkok vizsgálatára. A témakör legfontosabb tétele Chilakamarritól származik, aki Isbell konstrukcióját általánosítva megmutatta, hogy az Euklideszi esethez hasonlóan hatszögekkel való csempézés segítségével tetszőleges Minkowski síknak is megadható reguláris 7-színezése. Később tőle függetlenül Kristiansen újra belátta az állítást.

4.18. Tétel (Chilakamarri [9], Kristiansen [40]). *Legyen C egy kétdimenziós szimmetrikus korlátos konvex tartomány. Ekkor \mathbb{R}^2 -nek létezik olyan reguláris színezése, mely 7 színt használ, azaz*

$$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_C) \leq 7.$$

Bizonyításukban az $1/2$ sugarú egységkörbe írt szimmetrikus hatszöget definiáltak, majd Isbell 4.17. tételében definiált periodikus színezést alkalmazták. Ahogy például Krizan [42] is megfigyelte, a színezés regularitásából $k_2^*(C) < 7$ adódik.

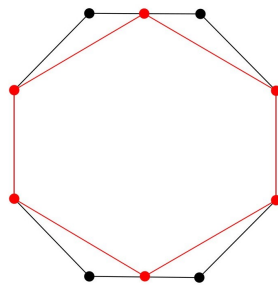
Csak kevés további eredmény ismert Minkowski síkok kromatikus számára vonatkozóan, ezeket az 1. táblázatban foglaltuk össze. Ezen eredmények mindegyike azzal a speciális esettel foglalkozik, amikor a Minkowski síkot meghatározó C tartomány egy páros csúcsszámú szabályos sokszög. Pontosabban, mivel a probléma affin invariáns, szabályos sokszög helyett tekinthetjük a szabályos sokszögek tetszőleges affin képét is, ez a kromatikus számon nem változtat. Ezen Minkowski síkok kromatikus számának tanulmányozását is Chilakamarri indította el, aki a szimmetrikus 4-, 6- és 8-szögek által meghatározott Minkowski síkok kromatikus számát vizsgálta. Ahogy már említettük, szimmetrikus 4- és 6-szög esetén egy egyszerű 4 színt használó csempézéssel igazolta, a kromatikus szám ezen esetekben éppen 4. A színezésben egy színosztály $1/2$ sugarú C egységkörök uniójából áll elő, a többi színosztály pedig ennek eltoltja, vagyis a színezés reguláris. A szimmetrikus 8-szög esetén pedig a következő 6-színezést mutatta: Vegyük a nyolcszög $1/2$ -szeresének egy pakolását a 19. ábrán látható elrendezésben.



19. ábra. Chilakamarri 6-színezése a szimmetrikus nyolcszög által meghatározott Minkowski sík esetén

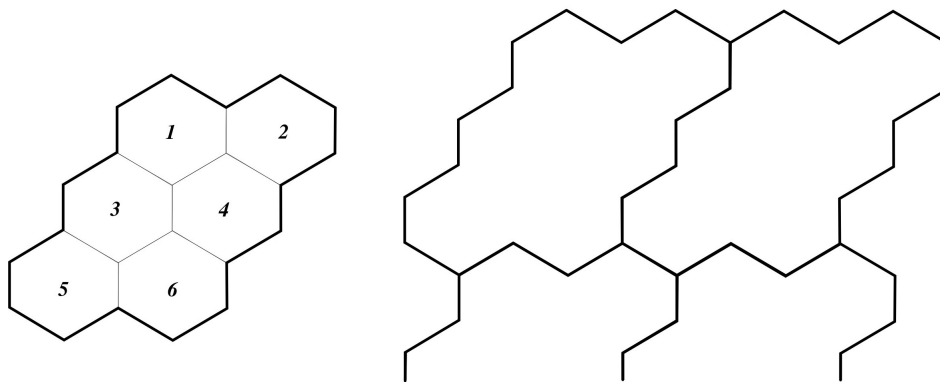
Ekkor a pakolást alkotó nyolcszögek színezéséhez elegendő 4 szín, egyedül a határpontok színezésével kell óvatosnak lenni, hogy két egymással szemben lévő csúcspár színe ne egyezzen meg. A kimaradt négyszögekhez pedig elegendő további két szín használata.

A színezés megfelelő, de nem reguláris, sőt nem is szubreguláris. Megmutatjuk, hogy a szabályos 8-szög esetén reguláris 6-színezés is adható: Legyen C egy szabályos nyolcszög, és tekintsük a következő $C/2$ -be írt hatszöget: Válasszuk ki $C/2$ két szemközti oldalát, majd az őket összekötő törött vonalak felezőpontjainak segítségével hozzunk létre egy H hatszöget.



20. ábra. A szabályos 8-szög esetén választott $C/2$ -be beírt szimmetrikus hatszög

Ahhoz, hogy H ne tartalmazzon egységtávolságot a C norma szerint, hagyjuk el baloldali határpontjait. Az így kapott félig nyílt hatszöget az egyszerűség kedvéért továbbra is H -val jelöljük. Csempézzük ki a síkot H hatszög eltoltjaival, majd a hatszögeket színezzük 6 színnel, az ábrán látható periodikus minta szerint.



21. ábra. Színosztályok

A fő különbség Chilakamarri 7-színezése és a fenti 6-színezés között a következő: mivel esetünkben a C egységkör nem szigorúan konvex, a H hatszöget választhatjuk úgy, hogy 2 oldala azonos legyen $C/2$ két oldalával, így a csempézésben az erre merőleges irányban elegendő két azonos színű hatszöget mindössze egy más színnel rendelkező hatszöggel elválasztani.

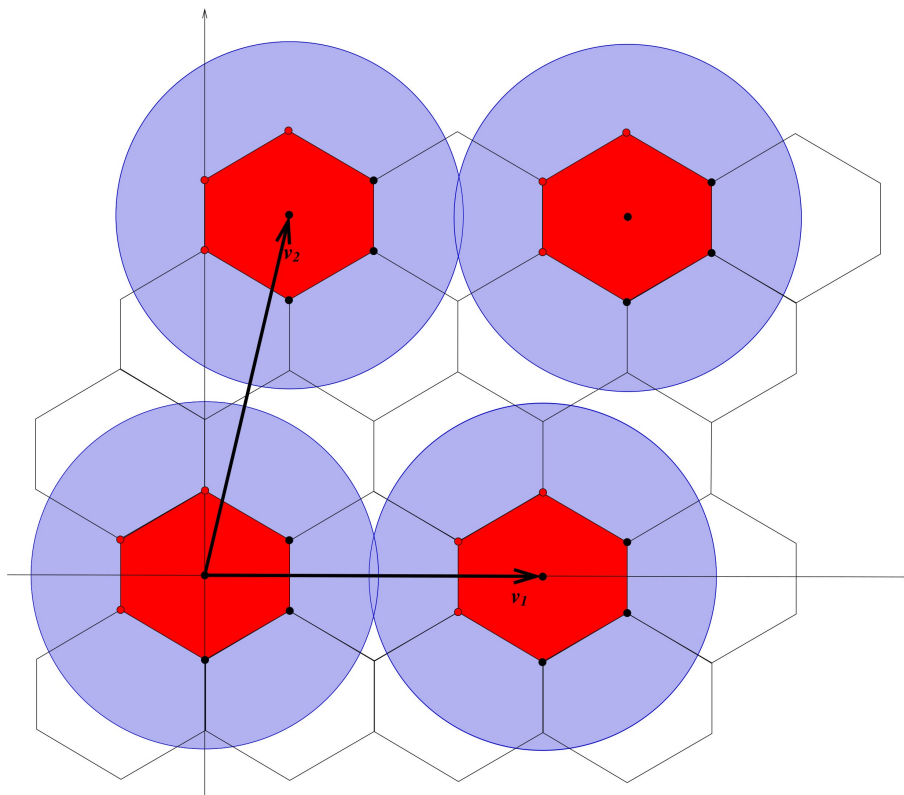
Megmutatjuk, az így kapott színezés megfelelő: Azt már láttuk, hogy H nem tartalmaz egységtávolságot, így egyedül azt kell ellenőrizni, hogy két egyszínű hatszög megfelelően távol helyezkedik el egymástól ahhoz, hogy C norma szerinti egységtávolságú pontpárt határozzanak meg. Mivel a színezés reguláris, elegendő egyetlen színosztályra belátni az állítást. Jelölje Λ a csempézéshez tartozó rácsot, Λ' pedig a kiválasztott színosztályhoz tartozó részrácsot. C szimmetriája alapján elég azt megmutatni, hogy a $\Lambda' + C/2 \oplus H$ sokszögek pakolást alkotnak, ahol \oplus két sokszög Minkowski összegét jelöli, azaz a

$$C/2 \oplus H = \{c + h \mid c \in C/2, h \in H\}$$

sokszöget. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy C körülírt körének sugara 1. A színezés struktúrájából adódóan $C/2 \oplus H$ és $\pm v_1 + C/2 \oplus H$ nem metszik egymást, ahol v_1 a $C/2$ és H közös oldalára merőleges legrövidebb rácsvektort jelöli. Definíció alapján $H \subseteq C/2$, így:

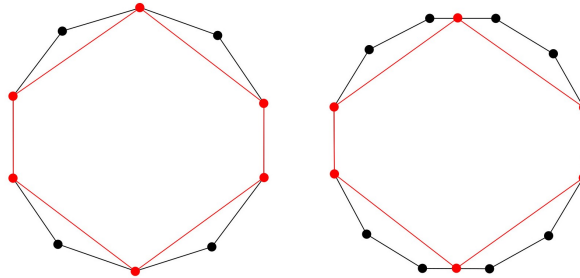
$$H \oplus C/2 \subseteq C/2 \oplus C/2 = C.$$

Tehát $H \oplus C/2$ átmérője is maximum 1, így elég azt ellenőrizni, hogy v_1 és $-v_1$ kivételével minden rácsvektor Euklideszi hossza legalább 2. Ahogy a 22. ábrán látható, ez a feltétel nyilvánvalóan teljesül, hiszen a megfelelő rácspont-párok köré írt $1/2$ sugarú Euklideszi körök diszjunktak. Ezzel pedig beláttuk, hogy a színezésünk megfelelő.



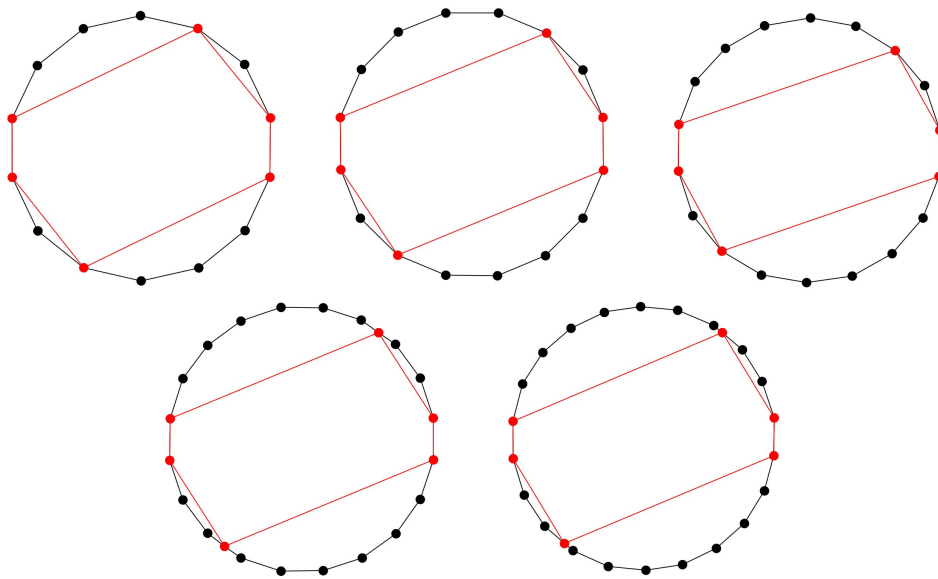
22. ábra. A v_1 (és $-v_1$) kivételével minden Λ' -beli rácsvektor Euklideszi hossza legalább 2

Felmerül a kérdés, hogy a fenti színezési séma vajon több csúccsal rendelkező szabályos sokszög esetén is alkalmazható-e. Azt vettük észre, hogy a sémát apróbb módosításokkal követve a szabályos 10, 12, 14, 16, 18, 20 és 22 csúcsú szabályos sokszögek esetén is megfelelő (és reguláris) 6-színezés kapunk. Az esetek közti egyedüli különbséget az $1/2$ sugarú C egységkörbe írt szimmetrikus H hatszög definiálása jelenti: Két oldal mindig választható úgy, hogy megegyezzen $C/2$ egy szomszédos oldalpárjával, a maradék két pontot viszont olykor óvatosabban kell választani. Igaz, a szabályos 10- és 12-szög esetén még jó választásnak bizonyul a 2 párhuzamos oldalt összekötő törött vonalak felezőpontjai által meghatározott hatszög.



23. ábra. A szabályos 10- és 12-szög esetén választott $C/2$ -be beírt szimmetrikus hatszög

A fennmaradó esetekben azonban a megfelelő színezés meghatározásához laposabb hatszöget kell definiálnunk. A szabályos 14-, 16- és 18-szög esetében a $C/2$ csúcsai közül választottunk megfelelő pontokat. A végső két esetben viszont csak egyéb határpontok bizonyultak megfelelőnek: a 20-szög esetében oldalfelező pontokat választottunk, míg a 22-szög esetében $0.68 : 0.32$ arányú osztópontot választottunk (a részletek a 24 ábrán láthatóak).

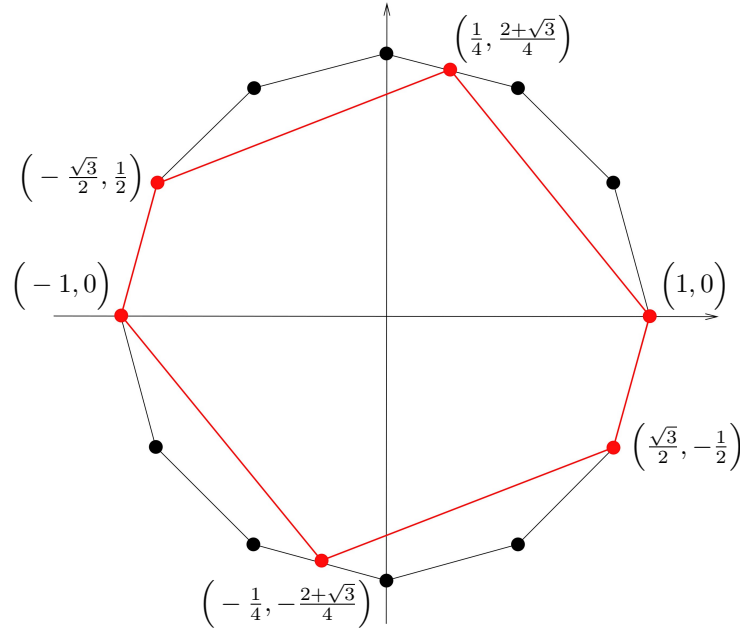


24. ábra. A szabályos 14-, 16-, 18-, 20- és 22-szög esetén választott $C/2$ -be beírt hatszög

Példaképp lássuk a részletes számolásokat a szabályos 12–szög esetén. Legyen C egy origó közép-pontú szabályos 12–szög, melynek körülírható körének sugara 2, csúcsainak koordinátái pedig:

$$\left(\pm 1, \pm\sqrt{3}\right), \left(\pm\sqrt{3}, \pm 1\right), \left(\pm 2, 0\right), \left(0, \pm 2\right).$$

Definiáljunk $C/2$ -ben egy szimmetrikus konvex hatszöget a már ismertetett módon. Jelöljük ki $C/2$ két szemközti oldalát, például válasszuk a $(2 - \sqrt{3}, 1)$ irányvektorú oldalt, majd egészítsük ki őket egy hatszöggé úgy, hogy a fennmaradó 2 csúcs a kiválasztott 2 oldalt összekötő törött vonalak felezőpontjai legyenek. Az így kapott hatszög koordinátái a 25. ábráról olvashatóak le.



25. ábra. $C/2$ -be írt szimmetrikus H hatszög

A sík H hatszöggel való csempézése megfelel az $\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4}, \frac{4+\sqrt{3}}{4}\right)$ és $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ vektorok által meghatározott Λ rácsnak. Egy adott színesztályhoz tartozó Λ' részrács bázis vektorai pedig a

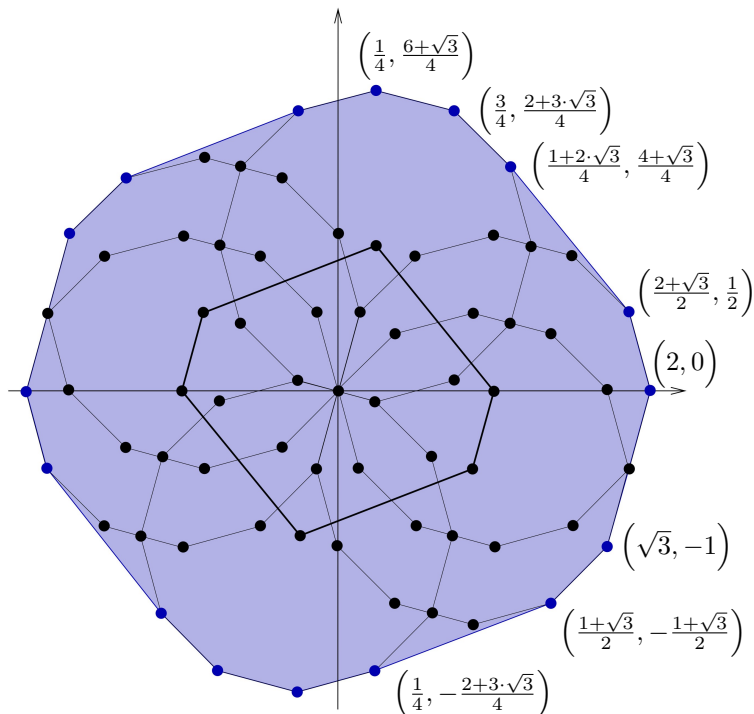
- $v_1 = \left(\frac{3-6\sqrt{3}}{4}, \frac{12+3\sqrt{3}}{4}\right)$
- $v_2 = (2 + \sqrt{3}, -1)$ vektorok.

Ahogy már említettük, azt kell megmutatni, hogy a $\Lambda' + C/2 \oplus H$ sokszögek családja pakolást alkot. $C/2 \oplus H$ csúcsainak koordinátái:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{6+\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{2+3\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{1+2\sqrt{3}}{4}, \frac{4+\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(2, 0\right), \left(\sqrt{3}, -1\right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{2+3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ stb.}$$

A maradék csúcsok koordinátái szimmetria segítségével meghatározhatóak a 26. ábra alapján.



26. ábra. H és $C/2$ Minkowski összege

A színezés regularitása alapján elegendő például az origó körüli H hatszöget vizsgálni és megmutatni, hogy minden $\lambda' \neq 0$ Λ' -beli rácsvektor esetén $H \oplus 1/2C$ és $\lambda' + H \oplus 1/2C$ diszjunktak.

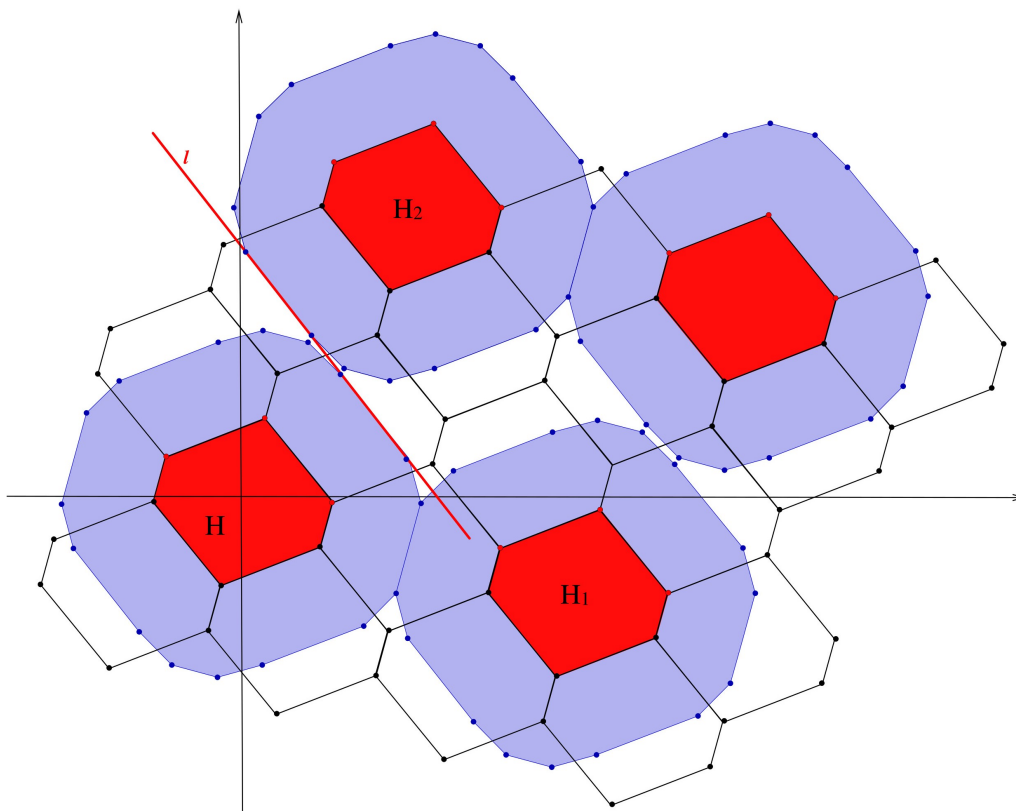
Definícióból adódóan $H \oplus C/2$ átmérője 2. A 2 sugarú Euklideszi kör belsejében az origón kívül 4 Λ' -beli rácspontra található, elegendő a hozzájuk tartozó hatszögeket tekinteni, sőt szimmetria okok miatt csupán két hatszöget kell vizsgálnunk, mégpedig a

- $H_1 := H + v_2$
- $H_2 := H + v_1 + v_2$

hatszögeket. A H és H_1 hatszöget egy különböző színű hatszög választja el, ami megfelelő, hiszen v_2 merőleges H és $C/2$ közös oldalegyenesére. Annak igazolásához, hogy H és H_2 hatszögek sem metszik egymást, tekintsük például a következő l egyenest (látsd 27. ábra):

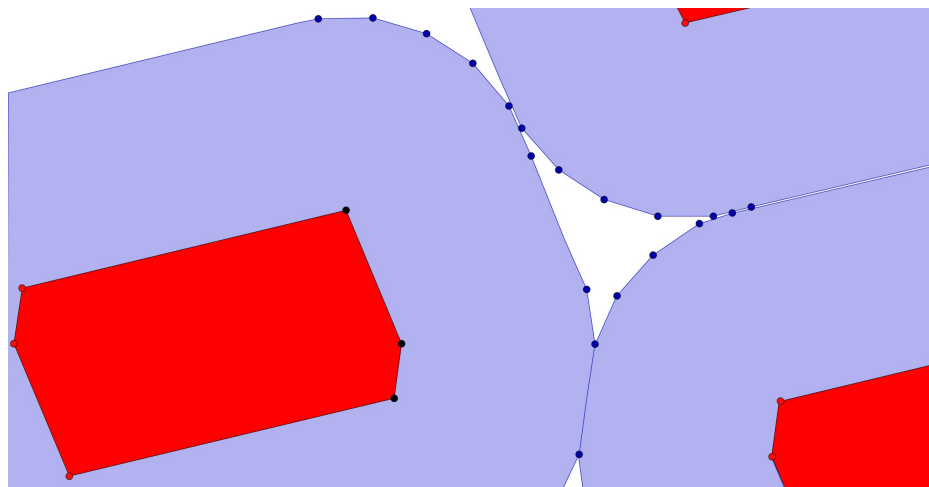
$$y = -\frac{2 + \sqrt{3}}{3}x + \frac{5 + 2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az l egyenes a $H \oplus C/2$ és $H_2 \oplus C/2$ egy-egy szemközti oldalegyenesére illeszkedik és $H \oplus C/2$ minden további pontja l egyenes alatt helyezkedik el, még $H_2 \oplus C/2$ csúcsai az egyenes felett vannak. Tehát $H \oplus C/2$ és $H_2 \oplus C/2$ valóban diszjunktak, amiből következik, hogy a színezésünk megfelelő.



27. ábra. Az l egyenes elválasztja a $H \oplus C/2$ és $H_2 \oplus C/2$ sokszögeket

A többi eset nagyon hasonlóan, de egyre hosszadalmasabb számolás segítségével igazolható, így ezeket nem részletezzük. Érdekes azonban megjegyezni, hogy az imént tekintett 12–szög esetén a H hatszög koordinátáit többféleképpen is választhattuk volna, ugyanakkor a nagyobb csúcsszámú eseteknél a választások lehetősége nagymértékben leszűkül. Például a 28. ábrán látható, hogy a szabályos 22–szögnél a színezésünk szinte teljesen merev.



28. ábra. A 22–szög esetén a monokromatikus hatszögek épphogy csak megfelelően távol helyezkednek el

Az 1. táblázatban összefoglaltuk az ismert eredményeket:

C egységkör	$\chi(\mathbb{R}^2; \ \cdot\ _C)$
Paralelogramma, középpontosan szimmetrikus hatszög (látsd [9])	4
Szabályos 8–, 10– és 12–szög (látsd [21], ill. a jelen dolgozat)	5 vagy 6
Szabályos 14–, 16–, 18–, 20–, 22–szög (látsd [9] ill. a jelen dolgozat)	4, 5 vagy 6
Középpontosan szimmetrikus 8–szög (látsd [9])	4, 5 vagy 6
Euklideszi kör (látsd [34], [20] és [52] ill. [35])	5, 6 vagy 7
Tetszőleges korlátos konvex tartomány (látsd [9])	4, 5, 6 vagy 7

1. táblázat. Ismert korlátok Minkowski síkok kromatikus számára

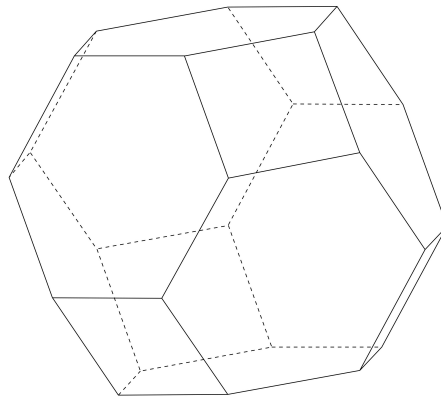
A táblázatban a 4. sor kivételével az összes felső korlátot reguláris színezés adja, így ezen értékek megegyeznek a legkisebb ellenpélda elemszámának, azaz $k_2^*(C) + 1$ lehetséges értékeivel.

A sík mellett az alacsony dimenziós Euklideszi terek kromatikus számának vizsgálata is kiemelt figyelemben részesült. A 3–dimenziós tér esetén a legjobb felső korlátot Radoičić és Tóth, illetve szinte egyidőben, tőlük függetlenül Coulson [11] adta.

4.19. Tétel (Radoičić és Tóth [56]). *A 3–dimenziós Euklideszi térnek létezik megfelelő 15–színezése, azaz:*

$$\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15.$$

Bizonyításukban az 29. ábrán látható 14 oldalú K testet tekintették, melynek csúcsait a $(1, 2, 3, 4)$ vektor koordinátáinak permutációi adják. Tekintsük a tér csempézését K eltoltjaival és színezzük



29. ábra. Az $(1, 2, 3, 4)$ vektor permutációinak konvex burka

K -t és szomszédjait 15 különböző színűre, majd ezt ismételjük periodikusan. Radoičić és Tóth megmutatták, az így kapott színezés megengedett. A határpontok színét megfelelően választva színezésük regulárisrá tehető, így $k_3^* < 15$ adódik.

4.2.2. Szubreguláris színezések magas dimenziós terekben

Először tekintsünk egy színezési sémát, amit a magas dimenziós terek kromatikus számának felső becslésére szoktak alkalmazni: Legyen Λ egy n -dimenziós rács, azaz n lineárisan független vektor egész együtthatós kombinációinak halmaza. Definiáljunk továbbá egy $V \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt, melyre teljesül, hogy:

- V átmérője kisebb mint 1, azaz $\forall x_1, x_2 \in V : \|x_1 - x_2\|_C < 1$,
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, \lambda_1 \neq \lambda_2$ rácspont esetén $\forall x \in V + \lambda_1, \forall y \in V + \lambda_2 : \|x - y\|_C > 1$.

Az egyik színsztályt válasszuk az:

$$S_0 := \bigcup_{x \in \Lambda} V + x$$

halmaznak. Továbbá válasszunk $v_1 \dots v_k$ vektorokat úgy, hogy az $S_0 + v_i$ halmazcsalád lefedje a \mathbb{R}^n tér pontjait. Ekkor a $C_i = S_0 + v_i$ halmazok egy megengedett, ráadásul szubreguláris k -színezést határoznak meg. A már ismertetett alacsony dimenziós terek színezései is a fenti módszert alkalmazták, ezekben az esetekben V a Λ rács által meghatározott Voronoi poliéder volt, azaz a

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq |x - \lambda| \forall \lambda \in \Lambda\}$$

halmaz. Coulson [11] megmutatta, hogy az Euklideszi esetben ezen választás mellett nem kaphatunk $(2^{n+1} - 1)$ -nél kevesebb színt igénylő színezést. Soifer [68] bátor sejtése szerint a korlát éles, azaz minden n esetén $\chi(\mathbb{R}^n) = (2^{n+1} - 1)$. Azonban egyelőre egyedül a síkban és a 3-dimenziós térben ismertek ilyen konstrukciók.

Magas dimenziós Euklideszi térben a legjobb korlátot Larman és Rogers színezése adja, akik $(3 + o(1))^n$ színt használó szubreguláris színezést mutattak. Minkowski tér kromatikus számára először Füredi és Kang [32] mutattak exponenciális felső korlátot, színezésük azonban nem szubreguláris. Az ő eredményükön javított Kupavskii [43], aki egy $(4 + o(1))^n$ színt használó szubreguláris színezést definiált. Konstrukciójuk bemutatásához némi előkészület szükséges.

Egy halmazcsaládra azt mondjuk, hogy pakolást határoznak meg, ha a tagjai páronként diszjunktak, illetve azt mondjuk, hogy fedést alkotnak, ha a tér minden pontja legalább az egyik halmaz által fedve van. Továbbá, ha az eltolás vektorok rácsot alkotnak, akkor rácspakolásról, illetve rácshederéről beszélünk. Egy halmazcsalád pedig pontosan akkor particionálja a teret, ha egyszerre alkot pakolást és fedést.

Egy természetes ötlet, hogy az egységtávolságot elkerülő S_0 halmazt egy sűrű pakolás segítségével határozzuk meg, majd minél gazdaságosabban próbáljuk meg vele lefedni a teret. Először is definiáljuk egy halmazcsalád sűrűségét:

4.5. Definíció. Legyen \mathcal{F} \mathbb{R}^n -beli konvex testek egy családja.

\mathcal{F} felső sűrűsége:

$$\bar{d}(\mathcal{F}) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{F \in \mathcal{F}, F \subseteq rB} \text{vol}(F)}{\text{vol}(rB)}$$

\mathcal{F} alsó sűrűsége:

$$\underline{d}(\mathcal{F}) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{F \in \mathcal{F}, F \subseteq rB} \text{vol}(F)}{\text{vol}(rB)}$$

Amennyiben $\bar{d}(\mathcal{F})$ és $\underline{d}(\mathcal{F})$ megegyezik, ezt az értéket az \mathcal{F} sűrűségének nevezzük és $d(\mathcal{F})$ -el jelöljük.

Vegyük észre, egy Λ rács és egy V halmaz által meghatározott ráccspakolás sűrűsége megegyezik V és a Λ rácshoz tartozó fundamentális tartomány térfogat-hányadosával, ahol a fundamentális tartomány alatt a rács bázis vektorai által kifeszített paralelepipedont értjük. Röviden tekintsük át a fedésekkel, illetve pakolásokkal kapcsolatos ismereteket.

Fedési és pakolási tételkör

Első kérdés, hogy egy adott C konvex testet milyen sűrűn lehet pakolni, azaz a tér mekkora részét tudjuk kitölteni C eltoltjainak diszjunkt példányaival. A legjobb ilyen (rács)elrendezés $\delta(C)$, illetve $\delta^*(C)$ sűrűségét nevezzük pakolási sűrűségnek, azaz:

4.6. Definíció (Pakolási sűrűség). Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test. C pakolási, illetve rács-pakolási sűrűsége legyen:

$$\delta(C) = \max \{d(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = C + X \text{ pakolás, } X \text{ tetszőleges diszkrét halmaz}\}, \text{ illetve}$$

$$\delta^*(C) = \max \{d(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = C + \Lambda \text{ pakolás, } \Lambda \text{ rács}\}.$$

Definíció alapján tetszőleges C konvex testre $\delta^*(C) \leq \delta(C) \leq 1$ teljesül. A $\delta^*(C)$ és $\delta(C)$ aszimptotikus viselkedése mellett a problémát alacsony dimenzióban is sokat vizsgálták, mégis számos kérdés a mai napig megválaszolatlan maradt. Rogers például [64] könyvében már a háromdimenziós C konvex test esetén is félelmetesen nehéz feladatnak nevezte $\delta^*(C)$ pontos meghatározását. Mégis, milyen alsó korlátot tudunk adni $\delta^*(C)$, illetve $\delta(C)$ értékére?

Egy egyszerű, de fontos megfigyelés a következő:

Vegyük a C test egy maximális (tovább nem bővíthető) $C + X$ pakolását. Ekkor $2C + X$ lefedi \mathbb{R}^n -et, hiszen ellenkező esetben találnánk olyan $x \in \mathbb{R}^n$ pontot, hogy $x + 2C$ nem tartalmaz X -beli pontot, tehát az $C + (X \cup \{x\})$ is pakolást határoz meg, ami viszont ellentmond az $C + X$ pakolás maximalitásának. Azaz tetszőleges szimmetrikus konvex test esetén

$$\delta(C) \geq (1/2)^n.$$

A fenti korlát szinte triviális, mégis csak kevés jobb eredmény ismert. Az első ilyen eredményt a témakör leghíresebb tétele, az úgynevezett Minkowski-Hlawka tétel adta, amit először Minkowski Euklideszi gömbökre bizonyított. Igaz, azt is sejtette, hogy tétele más konvex testekre is igaz, de ezt csak több mint 30 évvel később bizonyította Hlawka. A tételnek több alakja ismert, az egyik legegyszerűbb (gyengített) megfogalmazása a következő:

4.20. Tétel (Minkowski-Hlawka [36]). *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ egy szimmetrikus konvex test. Ekkor:*

$$\delta^*(C) \geq \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}}$$

teljesül, ahol $\zeta(n)$ a Riemann-Zeta függvény, azaz:

$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \rightarrow 1.$$

Azóta csak kis javítások születtek a tétellel kapcsolatban, a legjobb ismert eredmény Schmidt-től származik:

4.21. Tétel (Schmidt [67]). *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ egy szimmetrikus konvex test, ahol n megfelelően nagy. Ekkor:*

$$\delta^*(C) \geq \frac{c \cdot n}{2^n}$$

teljesül, ahol $c < \ln 2$ konstans.

Térjünk át a duális kérdésre, azaz egy adott C konvex test eltoltjaival szeretnénk gazdaságosan lefedni a teret. A (rács)pakolási sűrűséghez hasonlóan bevezethetjük a (rács)fedési sűrűséget:

4.7. Definíció (Fedési sűrűség). *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test. C fedési, illetve rács-fedési sűrűsége:*

$$\theta(C) = \min \{d(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = C + X = \mathbb{R}^n, X \text{ tetszőleges diszkrét halmaz}\}, \text{ illetve}$$

$$\theta^*(C) = \min \{d(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = C + \Lambda = \mathbb{R}^n, \Lambda \text{ rács}\}.$$

Definíció alapján $1 \leq \theta(C) \leq \theta^*(C)$ teljesül. Milyen felső korlátot tudunk adni $\theta(C)$, illetve $\theta^*(C)$ értékére? Az első eredmény Rogerstől származik:

4.22. Tétel (Rogers [62]). *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test, ahol $n \rightarrow \infty$. Ekkor létezik $c > 0$ konstans, melyre:*

$$\theta^*(C) \leq n^{\log \log n + c}$$

teljesül.

Sokáig Rogers tétele adta a legjobb korlátot, nemrég azonban nagy előrelépés történt a feladattal kapcsolatban:

4.23. Tétel (Ordentlich, Regev, Weiss [51]). *Legyen n tetszőleges és $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor létezik $c > 0$ konstans, hogy:*

$$\theta^*(C) \leq c \cdot n^2.$$

Ha viszont nem csak rácselrendezéseket vizsgálunk, még jobb korlát adható; az első nem exponenciális felső korlát szintén Rogerstól származik:

4.24. Tétel (Rogers [61]). *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test, ahol $n \geq 3$. Ekkor:*

$$\theta(C) \leq n \log n + n \log \log n + 5n.$$

A tétel meglehetősen meglepő, hiszen azt állítja, tetszőleges konvex testtel viszonylag kis sűrűséggel lefedhető a tér. A kis sűrűség persze nem garantálja, hogy minden pont lefedettségi multiplicitása kicsi. Sőt, vegyük észre, a lefedettségi multiplicitás semmiképp sem lehet nagyon kicsi: például Euklideszi egységgömbök által meghatározott fedésben mindig lesz olyan pont, mely legalább $(n+1)$ gömb által is fedve van (gondoljunk például a középpontok által meghatározott Voronoi poliéder egy csúcsára). Erdős és Rogers később megmutatták, létezik olyan gazdaságos fedés, melyben ráadásul a pontok lefedettségi multiplicitása is relatíve kicsi:

4.25. Tétel (Erdős-Rogers [19]). *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor \mathbb{R}^n -nek létezik egy C eltoltjaiból álló fedése, melyre:*

- $\theta(C) \leq n \log n + n \log \log n + 4n$,
- \mathbb{R}^n pontjának lefedettségi multiplicitása kisebb mint $e(n \log n + n \log \log n + 5n)$.

Az elmúlt 65 évben több tétel született, melyek kis javításokat eredményeztek: a legjobb ismert korlát Fejes Tóth [23] eredménye, aki Rogers 4.24. tételében szereplő $5n$ -et $o(n)$ -re csökkentette. Kis szépséghiba, hogy a fenti tételek bizonyítása nem konstruktív, mindegyik valószínűségi módszeren alapszik. Az első kombinatorikus bizonyítást – Rogers tételének megjelenését követően közel 60 év elteltével – Naszódi [48] adta.

A fenti tételek tehát azt állítják, hogy adott konvex test eltoltjaival kis sűrűségű fedést határozhatunk meg. Mi azonban egy rácspakolás fedési sűrűségére leszünk kíváncsiak, így fontos megfigyelés, hogy Erdős és Rogers módszere erre az esetre is alkalmazható:

4.26. Tétel. *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test, Λ rács. Tegyük fel, hogy $X := C + \Lambda$ halmazcsalád pakolás, melynek sűrűsége $d(X) = (c + \varphi(n))^{-n}$, ahol $c > 1$ konstans és $\varphi(n) \rightarrow 0$. Ekkor \mathbb{R}^n lefedhető az X halmaz $z(n)$ példányával, ahol*

$$z(n) = [n \log n + n \log \log n + 4n] \cdot (c + \varphi(n))^n.$$

Az állításnak egy rövidebb bizonyítása a [43] cikkben található.

Eddig azt láttuk, hogy adott konvex test esetén mindig létezik sűrű pakolás, illetve gazdaságos fedés is. Kérdés, létezik-e olyan elrendezés, ami egyszerre rendelkezik mindkét jó tulajdonsággal: Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi az a legkisebb $\gamma(C)$ érték, melyre teljesül, hogy létezik olyan $C + X$ pakolás, melynek tagjait $\gamma(C)$ -szeresére növelve uniójuk lefedi a teret. Pontosabban:

4.8. Definíció. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ egy középpontosan szimmetrikus konvex test. A C test szimultán (rács) pakolási és fedési konstansa:

$$\gamma(C) = \min_X \{r \mid C + X \text{ pakolás, } rC + X = \mathbb{R}^n, X \text{ tetszőleges diszkrét halmaz}\}, \text{ illetve}$$

$$\gamma^*(C) = \min_\Lambda \{r \mid C + \Lambda \text{ pakolás, } rC + \Lambda = \mathbb{R}^n, \Lambda \text{ rács}\}.$$

Ezen konstansok más területeken is igen hasznosnak bizonyultak, ennek köszönhetően nagy figyelemben részesültek az elmúlt időkben. Ennek ellenére csak kevés eredmény született velük kapcsolatban. Definícióból adódóan $1 \leq \gamma(C) \leq \gamma^*(C)$.

Azt már láttuk, hogy $\gamma(C) \leq 2$, hiszen egy maximális pakolásban minden testet kétszeresére növelve fedést kapunk. A feladat lényegesen nehezebbé válik, ha megköveteljük a rács tulajdonságot is, az erre vonatkozó első felső korlát Rogerstől [60] származik, aki megmutatta: $\gamma^*(C) < 3$. Később Butler javított ezen:

4.27. Tétel (Butler [8]). Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor létezik c konstans, hogy:

$$\gamma^*(C) \leq \left(\frac{\text{vol}(C - C)}{\text{vol}(C)} n^{\log_2 \ln(n) + c} \right)^{1/n}$$

teljesül.

Speciálisan, ha C szimmetrikus akkor a tétel a következőképp egyszerűsödik:

4.28. Következmény. Nagy n esetén tetszőleges n -dimenziós szimmetrikus konvex C testre:

$$\gamma^*(C) \leq 2 + o(1).$$

Bizonyítás. C középpontos szimetriája alapján $C = -C$, így a fenti tétel alapján:

$$\gamma^*(C) \leq \left(\frac{\text{vol}(2C)}{\text{vol}(C)} n^{\log_2 \ln(n) + c} \right)^{1/n} = (2^n \cdot n^{\log_2 \ln(n) + c})^{1/n} = 2 + o(1).$$

□

Ordentlich, Regev és Weiss 4.23. tételük következményeként megmutatták, a fenti tételben szereplő hibateg $(\log n/n)$ -re csökkenthető.

Az előkészületek után készen állunk a magas dimenziós terek szubreguláris színezésének bemutatására. Először Larman és Rogers tételét ismertetjük, akik az említett fedési és pakolási tételek segítségével exponenciális felső korlátot adtak az Euklideszi tér kromatikus számára. Megjegyezzük, mivel Rogers módszere nem konstruktív, Larman és Rogers színezése sem az. Nemrég Naszodi kombinatorikus módszerét alkalmazva Prosanov [55] új, konstruktívabb bizonyítást publikált Larman és Rogers tételére.

4.29. Tétel (Larman-Rogers [45]). Nagy n dimenziószám esetén \mathbb{R}^n -nek létezik $(3 + o(1))^n$ színosztályból álló szubreguláris színezése, azaz:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Bizonyítás. Butler 4.27. tétele alapján $\gamma^*(B_n) \leq 2 + o(1)$. Vagyis létezik olyan Λ rács, melyre a

$$\{B_n + x \mid x \in \Lambda\}$$

halmazcsalád pakolást határoz meg, még a

$$\{(2 + o(1))B_n + x \mid x \in \Lambda\}$$

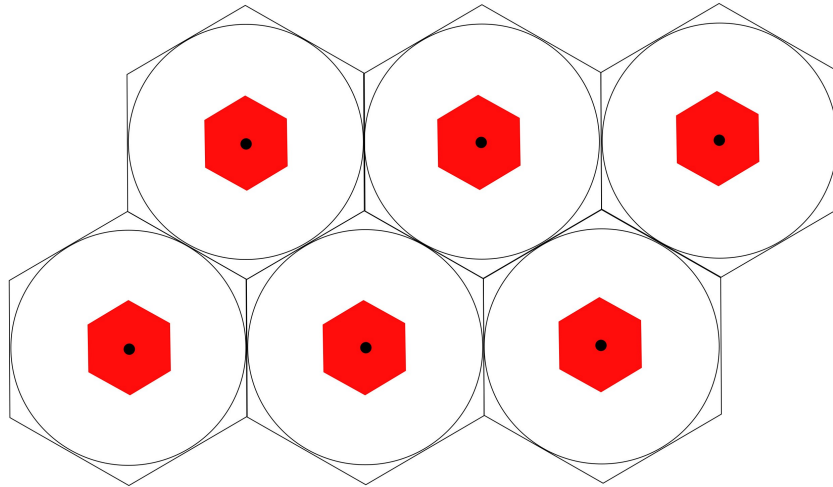
halmazcsalád lefedi \mathbb{R}^n pontjait. Először egy olyan színezést adunk meg, ahol egyik színosztályban sincs $4/3$ távolságú pontpár. Jelölje V a Λ rácshoz tartozó Voronoi poliédert és az egyik színosztály legyen:

$$S_0 := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{3 + o(1)}V + \lambda \right\}.$$

S_0 valóban nem tartalmaz $4/3$ távolságú pontpárt: Egyrészt mivel a V poliéder átmérője legfeljebb $2\gamma^*(B)$, így $V/(3 + o(1))$ átmérője kisebb mint $4/3$. Másrészt, mivel a $B \subseteq V$,

$$V/3 \oplus (2/3)B \subseteq V/3 \oplus (2/3)V = V$$

teljesül. Tehát a $V/3 \oplus (2/3)B + \Lambda$ halmazcsalád pakolást határoz meg, így S_0 valóban elkerüli a $4/3$ távolságot.



30. ábra. Illusztráció a $4/3$ távolságot nem tartalmazó S_0 halmaz konstrukciójához

Az is világos, hogy definíciójából adódóan S_0 sűrűsége éppen:

$$\left(\frac{1}{3 + o(1)} \right)^n.$$

A Voronoi poliéder konvex, így alkalmazhatjuk a 4.26. tételt, vagyis Erdős és Rogers módszerével \mathbb{R}^n lefedhető az S_0 halmaz $z(n)$ eltoltjával, ahol

$$z(n) \leq [n \log n + n \log \log n + 4n] \cdot (3 + o(1))^n.$$

Tehát nagy n esetén S_0 eltoltjainak segítségével nagyságrendileg $(3 + o(1))^n$ színosztályból álló megfelelő színezést határozhatunk meg. Átskálázással elérhetjük, hogy a színosztályok $4/3$ helyett egységtávolságot ne tartalmazzanak, ezzel pedig az állítást beláttuk. \square

4.30. Következmény. *Megfelelően nagy n esetén az n -dimenziós Euklideszi térben létezik olyan $(3 + o(1))^n$ pontú K halmaz és \mathbb{R}^n -nek egy olyan megengedett piros-kék színezése, hogy K minden eltoltjának legalább az egyik pontja piros. Azaz nagy n esetén: $k_n^* < (3 + o(1))^n$ adódik.*

Figyeljük meg, hogy a tétel bizonyítását nem emelhetjük át változtatás nélkül Minkowski terekre, ugyanis az Euklideszi esettel ellentétben a Voronoi poliéder nem feltétlenül konvex. Így más egységtávolságot elkerülő halmazt kell használnunk, a legjobb ismert konstrukció Kupavskii-tól származik:

4.31. Tétel (Kupavskii [43]). *Nagy n esetén egy középpontosan szimmetrikus konvex $C \subseteq \mathbb{R}^n$ test által meghatározott Minkowski térnek létezik $(4 + o(1))^n$ színosztályból álló szubreguláris színezése, azaz:*

$$\chi(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_C) \leq (4 + o(1))^n.$$

Bizonyítás. (Vázlat)

Legyen Λ Schmidt 4.21. tétele által garantált C -hez tartozó rács és az egyik színosztályt válasszuk az

$$S_0 := \bigcup_{x \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{2 + o(1)} C + x \right\}$$

halmaznak. Ekkor S_0 nem tartalmaz egységtávolságú pontpárt és sűrűsége legalább

$$\left(\frac{1}{4 + o(1)} \right)^n.$$

Az egységömb szimmetrikus és konvex, így alkalmazhatjuk a 4.26. tételt, vagyis Erdős és Rogers módszerével \mathbb{R}^n lefedhető az S_0 halmaz $z(n)$ eltoltjával, ahol

$$z(n) \leq [n \log n + n \log \log n + 4n] \cdot (4 + o(1))^n.$$

Tehát nagy n esetén S_0 eltoltjainak segítségével nagyságrendileg $(4 + o(1))^n$ színosztályból álló megfelelő színezést határozhatunk meg. \square

4.32. Következmény. *Megfelelően nagy n esetén tetszőleges n -dimenziós Minkowski térben létezik olyan $(4 + o(1))^n$ pontú K halmaz és $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ -nek olyan megengedett piros-kék színezése, hogy K minden eltoltjának legalább az egyik pontja piros. Azaz nagy n esetén $k_n^*(C) < (4 + o(1))^n$ adódik.*

4.3. Nem monokromatikus izometrikus példányok

A k_n , illetve $k_n(C)$ értékének felső becsléséhez olyan megengedett piros-kék színezést, illetve –minél kevesebb pontszámú – K konfigurációt szeretnénk definiálni, melyre teljesül, hogy a színezésben minden K -val egybevágó, illetve K -val izometrikus halmaz tartalmaz piros pontot.

Első megfigyelésként elmondhatjuk, hogy $k_n(C)$ véges: Legyen $\chi(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C) = k$. A 2.3. de Bruijn-Erdős tétel alapján létezik egy véges K tanúhalmaz, azaz egy olyan K konfiguráció, hogy minden vele izometrikus halmaz egy megfelelő k -színezés minden színosztályaiból legalább egy-egy pontot tartalmaz. Válasszuk pirosnak a k -színezés egyik színosztályát, így $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C) \not\rightarrow (P_1, K)$ teljesül. Érdekes kitérni néhány egyszerű esetre, amikor ismerjük a kromatikus szám pontos értékét, illetve az ezt tanúsító véges halmazt: Először tekintsük az (\mathbb{R}^n, l_∞) normált teret, melynek egységgömbjét jelölje P_n . Ekkor $\chi(\mathbb{R}^n, l_\infty) = 2^n$, a tanúhalmaz pedig a 2^n pontból álló szabályos szimplex. Tehát ebben az esetben

$$\chi(\mathbb{R}^n, l_\infty) = k_n^*(P_n) + 1 = k_n(P_n) + 1 = 2^n.$$

Egy másik egyszerű síkbeli eset, amikor az egységgömb egy origóra szimmetrikus H hatszög. Ekkor ugyanis $\chi(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_H) = 4$, az ezt tanúsító halmaz pedig a 7 csúcsból álló Moser gráf (14. ábra), tehát

$$k_2(H) < 7.$$

Már azt is láttuk, hogy az Euklideszi esetben ismert exponenciális felső korlát k_n értékére (Conlon 4.7. tétel). Azonban, ha nem szükséges, hogy a konfigurációnk pontjai egy egyenesre essenek, akkor kisebb konfiguráció is egyszerűen adható: Megmutatjuk, nagy n -re $k_n < (4 + o(1))^n$ teljesül. Minkowski terek esetében az izometrikus példányok nehezebben kezelhetőek, így óvatosabb konstrukcióra van szükségünk, de ebben az esetben is exponenciális felső korlátot adunk.

4.3.1. Euklideszi terekben

Az Euklideszi síkban már több példát is láttunk megfelelő konfigurációra, vizsgáljuk meg, miképp általánosíthatók a síkban leírt gondolatok, konstrukciók magasabb dimenziós Euklideszi terekre. A legkisebb síkbeli példa 8 pontból állt (4.6. tétel), ám ennek bizonyítása nehezen (vagy talán egyáltalán nem) emelhető át magas dimenziós terekre. A 9 pontú konfigurációhoz szükséges észrevételek azonban egyszerűen általánosíthatóak:

Tekintsük először is a standard piros-kék színezés általánosítását, azaz színezzük pirosra az

$$\{1/2 \text{Int } B_n + \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

halmaz pontjait, ahol $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$, melyre $\gamma(B_n)$ felveszi a minimumát. Ez valóban a síkban definiált standard színezés általánosítása, ugyanis

$$\gamma(B_2) = \gamma^*(B_2) = 2/\sqrt{3}$$

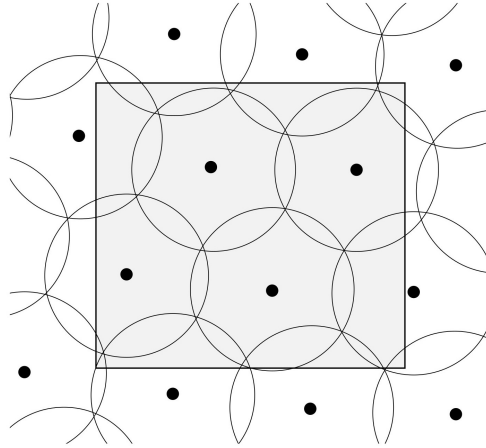
és a legjobb elrendezést a 2 oldalú szabályos háromszögrács pontjaira írt egységkörök adják.

A standard piros-kék színezés struktúrája alapján olyan K konfigurációt kell keresünk, melyre teljesül, hogy pontjai köré írt $1/2$ sugarú nyílt gömbök uniója legalább egy Λ -beli pontot tartalmaz. Például legyen $K = \{a_1, \dots, a_k\}$ olyan konfiguráció, hogy pontjai köré írt $1/2$ sugarú nyílt gömbök uniója lefedi a $\gamma(B_N)B_N$ halmazt. Ez valóban megfelelő, hiszen definícióból adódóan $\gamma(B_N)B_N$ legalább egy Λ -beli pontot tartalmaz.

Vizsgáljuk meg az így kapott konfiguráció pontszámát: Kicsit általánosabb megfogalmazva a problémát legyen adott C_1 és $C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test és jelölük $N(C_1, C_2)$ -vel azt a legkisebb k értéket, melyre teljesül, hogy C_1 lefedhető a C_2 test k db eltoltjával. Értékére a C_2 test fedési sűrűsége segítségével adhatunk felső becslést, a következő ötlet alapján: fedjük le \mathbb{R}^n -et a C_2 test eltoltjaival, kis fedési sűrűséggel, azaz definiáljunk egy X halmazt úgy, hogy:

- $C_2 + X = \mathbb{R}^n$ és
- $d(C_2 + X) = \theta(C_2)$

teljesüljön. Természetesen $C_2 + X$ a C_1 testet (és minden eltoltját) is lefedi. A C_1 testnek minden $C_1 + t$ eltoltjához definiáljuk a $C_2 + X$ halmazcsaládnak egy legszűkebb $C_2 + X'$ részcsaládját, ami lefedi őt. Ekkor $x \in X$ pontosan akkor eleme X' -nek, ha $x \in C_1 - C_2 + t$.



31. ábra. Ötlet a fedési szám felső becslésére

Rogers és Zong megmutatták, hogy C_1 -nek van olyan $C_1 + t$ eltoltja, melyre $|X'|$ kicsi, azaz C_1 fedésében a C_2 testnek relatíve kevés eltoltja vesz részt:

4.33. Tétel (Rogers-Zong [65]). *Legyen $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor*

$$N(C_1, C_2) \leq \frac{\text{vol}(C_1 - C_2)}{\text{vol}(C_2)} \cdot \theta(C_2).$$

Speciálisan, ha egy szimmetrikus konvex testet szeretnénk kicsinyített példányaival lefedni, akkor a fenti tétel a következőképp egyszerűsödik:

4.34. Következmény. *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex test. Ekkor minden $0 < r < 1$ érték esetén:*

$$N(C, rC) \leq (1 + 1/r)^n \cdot \theta(C).$$

Euklideszi gömb fedési számára ennél jobb korlát is ismert:

4.35. Tétel (Rogers [63]). *Létezik $c > 0$ konstans, hogy minden $r > 1/2$ és $n \geq 9$ esetén:*

$$N(rB, B/2) \leq c \cdot n^{5/2} (2r)^n$$

Mivel $\gamma(B_n) \leq 2$ fennáll, a konfigurációnk elemszáma legfeljebb $N(2B_N, 1/2 \text{ Int } B_N) < (4 + o(1))^n$

4.36. Következmény. *Megfelelően nagy n esetén az n -dimenziós Euklideszi térben létezik olyan $(4 + o(1))^n$ pontú K halmaz és \mathbb{R}^n -nek olyan megengedett piros-kék színezése, melyben minden K -val egybevágó halmaznak legalább az egyik pontja piros. Azaz nagy n esetén: $k_n < (4 + o(1))^n$.*

Egy érdekesség, hogy a fenti módszert alkalmazva k_n értékére nem kaphatunk $(2 \cdot 2^{0.599} + o(1))^n \approx (3.03 + o(1))^n$ -nél jobb felső korlátot, mert ismert, hogy $\gamma(B_n) \geq 2^{0.599} + o(1)$. A monokromatikus eltoltak esetében viszont már láttuk: $k_n^* < (3 + o(1))^n$.

4.3.2. Minkowski terekben

Minkowski térben az Euklideszinél óvatosabban kell eljárjunk. Két konstrukciót mutatunk: Az elsőben feltesszük, hogy C szigorúan konvex. Vegyük észre, hogy a 3.1. állítást tetszőleges szigorúan konvex egységömbbel rendelkező Minkowski térre kiterjeszthetjük. Tehát, ha egy metrikus tér 3 pontja egyenlőséggel teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, akkor a metrikus tér minden beágyazásában ezen 3 pont egy egyenesre esik.

A konstrukcióban továbbá fontos szerepet fog játszani John már említett tétele, mely egy tetszőleges konvex test ellipszoiddal való approximálhatóságáról szól. Emlékeztetőül a tétel legegyszerűbb, egyben legismertebb alakja a következő:

4.37. Tétel (John [29]). *Legyen C egy n -dimenziós origóra szimmetrikus konvex test. Ekkor C és az n -dimenziós Euklideszi egységömb Banach-Mazur távolsága legfeljebb \sqrt{n} , azaz:*

$$d(C, B_n) \leq \sqrt{n}.$$

John tétele a feladatunk kapcsán igen hasznos, hiszen segítségével könnyebben kezelhetjük egy-egy rácyszerű halmaz izometrikus példányaik lehetséges Euklideszi beágyazásait. A következő gondolatmenetben a tétel segítségével nyilvántartjuk konfigurációnk minden lehetséges beágyazását, illetve a pontjai közt fellépő Euklideszi távolságokat.

4.38. Állítás. *Legyen C egy szigorúan konvex középpontosan szimmetrikus test. Ekkor a C által meghatározott Minkowski tér esetén létezik olyan $O(n^n)$ pontú K halmaz és $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ -nek egy olyan megengedett piros-kék színezése, hogy minden K -val izometrikus halmaznak legalább az egyik pontja piros.*

Bizonyítás. A feladat affin invariáns, így feltehető, hogy $B_n \subseteq C \subseteq \sqrt{n}B_n$. Tekintsük a standard piros-kék színezés Minkowski terekre való általánosítását, azaz színezzük pirosra az

$$\{1/2 \text{ Int } C + \lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

halmaz pontjait, ahol $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$, melyre $\gamma(C)$ felveszi a minimumát. A K konfigurációnk pontjait válasszuk úgy, hogy legyen olyan Euklideszi beágyazása, melyben pontjai egy $4n \times \dots \times 4n$ méretű $1/(2n)$ oldalú kockákból álló rács pontjainak feleljenek meg. Az első megfigyelés alapján K minden beágyazásában az eredeti kockarács affin képének, vagyis egy részrácsnak felel meg. Először megmutatjuk, ezen részrácsok pontjainak konvex burka tartalmaz Λ -beli pontot:

Definíció alapján K -nak van olyan beágyazása, melyben pontjainak konvex burka $4n$ magasságú kocka. Így John 4.37. tétele alapján egy tetszőleges beágyazásban a pontok konvex burka által meghatározott paralelepipedon magassága legalább $4\sqrt{n}$, tehát tartalmaz $2\sqrt{n}$ sugarú Euklideszi gömböt. A színezés választásából adódóan $2C$, így $2\sqrt{n}B_n$ is tartalmaz Λ -beli pontot.

Másrészt, a konvex burokba eső Λ -beli ponthoz van $1/2$ -nél közelebb lévő K -beli pont: A részrács által meghatározott korlátos Voronoi tartományok olyan paralelepipedonok, melyek körülírható gömbjének sugara legfeljebb $\sqrt{n}/(2n) \cdot \sqrt{n} = 1/2$, vagyis egy adott paralelepipedonba eső pont maximum $1/2$ távol lehet valamely csúcstól.

A fentiek alapján K minden izometrikus beágyazásában lesz olyan pont, ami a piros halmazba esik. K elemszáma pedig $(8n^2 + 1)^n = O(n^n)$. □

A fenti tételből adódó korlát tovább javítható: az Euklideszi esetben adott konstrukcióhoz hasonló, de kicsit óvatosabb módszerrel megmutatjuk, $k_n(C)$ is legfeljebb exponenciálisan növekszik:

4.39. Állítás. *Tetszőleges n -dimenziós, C egységgömbbel rendelkező Minkowski tér esetén létezik olyan 9^n pontú K halmaz és $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ -nek egy olyan megengedett piros-kék színezése, hogy minden K -val izometrikus halmaznak legalább az egyik pontja piros. Azaz $k_n(C) < 9^n$.*

Bizonyítás. Ismételten tekintsük a térnek egy standard piros-kék színezését, azaz színezzük pirosra az $\{1/2 \text{ Int } C + \lambda | \lambda \in \Lambda\}$ halmaz pontjait, ahol $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$, melyre $\gamma(C)$ felveszi a minimumát. Ekkor $2C$ minden eltoltja tartalmaz Λ -beli pontot.

Az Euklideszi esethez hasonlóan olyan K konfigurációt keresünk, hogy minden K -val izometrikus $K' = \{x_1, \dots, x_k\}$ példányra teljesüljön, hogy $\cup_{x_i \in K'} \{x_i + rC\}$ lefedje $2C$ egy eltoltját. Definiáljuk a K halmazt a következőképp: Vegyük az $(1/4)$ sugarú nyílt egységgömb egy maximális elemszámú pakolását a $(2 + 1/4)$ sugarú egységgömbben úgy, hogy az egyik test középpontja az origó legyen.

A K konfiguráció álljon a pakolást alkotó testek középpontjaiból. Ekkor K egy izometrikus K' példányára továbbra is fennáll, hogy a pontjai köré írt $1/4$ sugarú nyílt egységömbök maximális elemszámú pakolást alkotnak a $(2 + 1/4)$ sugarú egységömb valamely eltoltjában, hiszen K' pontjai maximum 2 távol lehetnek az origó képétől, egymástól pedig legalább $1/2$ távolságra vannak. Így a K' pontjai körüli $1/2$ sugarú nyílt egységömbök uniója tartalmaz egy legalább 2 sugarú egységömböt. Térfogat szerinti becslés alapján a pakolásban maximum

$$\left(\frac{2 + 1/4}{1/4}\right)^n = 9^n$$

test vehet részt, így $|K| \leq 9^n$. □

Egy apró észrevétel a következő: Jelölje $\chi(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_C [1, a])$ azt a legkisebb k értéket, melyre teljesül, hogy \mathbb{R}^n kiszínezhető k színnel úgy, hogy egyik színosztály se tartalmazzon olyan pontpárt, melyek C norma szerinti távolsága az $[1, a]$ intervallumba esik. A fenti állításban definiált halmaz pontjai egymástól legalább $1/2$, de legfeljebb 4 távolságra vannak, így $|K|$ alsó korlátot ad $\chi(\mathbb{R}^n; [1, 8])$ értékére, vagyis az eddigiek alapján:

$$\chi(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_C) \leq k_n(C) \leq \chi(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_C [1, 8]).$$

Végül röviden térjünk ki, a síkbeli esetre. Világos, hogy 4.39. állításban definiált konstrukció tetszőleges dimenzióban, így a síkban is megfelelő. Az állításban azt használtuk, hogy tetszőleges C szimmetrikus konvex testre $\gamma(C) \leq 2$. A síkbeli középpontosan szimmetrikus konvex tartományok szimultán fedési és pakolási konstansára ennél jobb korlát ismert, a legjobb eredmény Zongtól származik:

4.40. Tétel (Zong [75]). *Legyen C egy középpontosan szimmetrikus konvex tartomány a síkban.*

Ekkor:

$$\gamma(C) = \gamma^*(C) \leq 2 \left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 1.17157.$$

Zong tételét felhasználva a fenti gondolatmenetből $k_2 < 32$ adódik. Azonban megjegyezzük, valószínűleg ez közel sem ad éles korlátot.

4.4. Összefoglalás

A dolgozat ezen fejezetének kiindulási kérdése egy síkbeli aszimmetrikus Ramsey probléma volt, amelyet Erdősék vetettek fel az 1970-es években: Milyen K konfigurációkra teljesül, hogy a sík minden megengedett (azaz piros egységtávolságot nem tartalmazó) piros-kék színezésében található K -val egybevágó egyszínű kék konfiguráció? Juhász tétele szerint minden 4 vagy kevesebb pontú konfiguráció megfelelő. Csizmadia és Tóth pedig egy 8 pontú ellenpéldát találtak, ezzel megmutatva, hogy Juhász tételében szereplő elemszám nem növelhető 8-ra.

Szlam észrevétele alapján tetszőleges n -re minden $\chi(\mathbb{R}^n)$ -nél kisebb pontszámú konfiguráció is megfelelő. Frankl és Wilson tétele szerint az Euklideszi tér kromatikus száma exponenciálisan nő, vagyis biztosan nem reménykedhetünk kis elemszámú ellenpéldában. Megfigyelhető, hogy Szlam lemmája tetszőleges dimenziószámú Minkowski térre is általánosítható, azonban normált terek kromatikus számáról meglepően kevés eredmény ismert, a legjobb alsó korlátot a szabályos szimplexek adják.

A dolgozatban azt vizsgáltuk, Csizmadia és Tóth tétele miképp általánosítható magasabb dimenziós Euklideszi terekre, illetve Minkowski terekre. Először egy egyszerűbb feladatot tekintettünk, egybevágósági transzformációk helyett kizárólag eltolást engedtünk meg: Adott $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_C)$ Minkowski tér esetén olyan megengedett piros-kék színezést és K konfigurációt kerestünk, melyben a kék színhalmaz nem tartalmazza K eltoltjait. Azt vettük észre, hogy pontosan akkor létezik ennek megfelelő k pontú konfiguráció és színezés, ha $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_C)$ -nek létezik szubreguláris k -színezése. A megfelelő színezések alacsony dimenzióban tipikusan regulárisak, magas dimenzióban szubregulárisak. Így az ismert eredmények segítségével a kívánt tulajdonságokat teljesítő exponenciális méretű konfigurációkat tudtunk mutatni.

Végül olyan megengedett piros-kék színezést és K konfigurációt kerestünk, melyre az is teljesül, hogy minden K -val izometrikus konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Magas dimenziós Euklideszi terekben ismert fedési tételek segítségével tudtunk viszonylag kis méretű konfigurációt meghatározni. Minkowski terek esetén azonban óvatosabbnak kellett lenni, de ebben az esetben is sikerült exponenciálisan sok pontú konfigurációt adni.

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az ismert eredményeket, a jelen dolgozatban adott korlátottak kiegészítve.

	síkban	nagy n esetén
k_n	8 [12]	$(4 + o(1))^n$
k_n^*	7 [71]	$(3 + o(1))^n$
$k_n(C)$	32	9^n
$k_n^*(C)$	7 [42]	$(4 + o(1))^n$

2. táblázat. Legkisebb ismert nem monokromatikus halmazok elemszámai

Végül érdemes megemlíteni, hogy a maximum norma esetén a feladat triviálissá válik, más normált tér esetén (beleértve az Euklideszi teret) azonban a pontos érték meghatározása reménytelen feladatnak tűnik.

Hivatkozások

- [1] N. Alon, V. D. Milman *Embedding of l_∞^k in finite dimensional Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics (1983), 45(4), 265 – 280.
- [2] A. Arman, S. Tsaturian *Equally spaced collinear points in Euclidean Ramsey theory*, arXiv preprint arXiv:1705.04640, 2017.
- [3] A. Arman, S. Tsaturian *A result in asymmetric Euclidean Ramsey theory*, Discrete Mathematics (2018), 341(5), 1502 – 1508.
- [4] K. Ball *Isometric embedding in l_p -spaces* European Journal of Combinatorics (1990), 11(4), 305 – 311.
- [5] P. Brass *On equilateral simplices in normed spaces*, Beiträge Algebra Geom. (1999) 40, no. 2, 303 – 307. MR1720106 (2000i : 52012)
- [6] N. de Bruijn, P. Erdős *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Indagationes Mathematicae (1951), 13, 371 – 373.
- [7] J. Burkert, P. Johnson *Szlam’s lemma: mutant offspring of a Euclidean Ramsey problem from 1973, with numerous applications.*, In Ramsey theory (2011) pp. 97 – 113, Birkhäuser, Boston, MA.
- [8] G. J. Butler *Simultaneous packing and covering in Euclidean space*, Proc. London Math. Soc. (1972), 25, 721 – 735.
- [9] K. B. Chilakamarri *Unit-distance graphs in Minkowski metric spaces*, Geometriae Dedicata, 37.3 (1991) 345 – 356.
- [10] D. Conlon, J. Fox *Lines in Euclidean Ramsey theory*, Discrete & Computational Geometry, 61(1), (2019), 218 – 225.
- [11] D. Coulson *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*, Discrete Mathematics 256 (2001), 83 – 90.
- [12] Gy. Csizmadia, G. Tóth *Note on a Ramsey-type problem in geometry*, Journal of Combinatorial Theory, Series A (1994), 65(2), 302 – 306.
- [13] B. V. Dekster *Simplexes with prescribed edge lengths in Minkowski and Banach spaces*, Acta Mathematica Hungarica (2000), 86(4), 343 – 358.
- [14] M. Deza, M. Laurent *Geometry of Cuts and Metrics* (1996).
- [15] A. Dvoretzky *Some results on convex bodies and Banach spaces Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces*, Jerusalem 1960 Jerusalem Academic Press (1961), Jerusalem.

- [16] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus *Euclidean Ramsey Theorems*, J. Combin. Theory (1973) A14 : 341 – 363.
- [17] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus *Euclidean Ramsey Theorems II.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol. 10 (1975), Infinite and Finite Sets: 529 – 557, North-Holland, Amsterdam.
- [18] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus *Euclidean Ramsey Theorems III.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol.10 , Infinite and Finite Sets (1975), 559 – 583, North-Holland, Amsterdam.
- [19] P. Erdős, C. A. Rogers *Covering space with convex bodies*, Acta Arithmetica 7.3 (1962), 281 – 285.
- [20] G. Exoo, D. Ismailescu *The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof*, Discrete & Computational Geometry (2020), 1 – 11.
- [21] G. Exoo, D. Fisher, D. Ismailescu *The chromatic number of the Minkowski plane – the regular polygon case*, arXiv preprint arXiv:2108.12861, 2021.
- [22] G. Fejes Tóth *Thinnest covering of a circle by eight, nine, or ten congruent circles*, Combinatorial and computational geometry (2005), 52(361), 59.
- [23] G. Fejes Tóth *A note on covering by convex bodies*, Canadian Mathematical Bulletin (2009), 52(3), 361 – 365.
- [24] P. Frankl, V. Rödl *All Triangles Are Ramsey*, Transactions of the American Mathematical Society (1986), vol. 297, no. 2, 1986, pp. 777 – 779.
- [25] P. Frankl, V. Rödl *Forbidden intersections*, Transactions of the American Mathematical Society (1987), 300(1), 259 – 286.
- [26] P. Frankl, V. Rödl *A partition property of simplices in Euclidean space* Journal of the American Mathematical Society (1990), 3(1), 1 – 7.
- [27] P. Frankl, R. M. Wilson *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica (1981), 1(4), 357 – 368.
- [28] N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev *Max-norm Ramsey Theory*, arXiv preprint arXiv:2111.08949, 2021.
- [29] J. Fritz *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies and Essays Presented to R, 187 – 204 (1948), Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y.

- [30] P. Johnson, A. D. Szlam *A new connection between two kinds of Euclidean coloring problems* Geombinatorics (2001), 10(4), 172 – 178.
- [31] B. Fichet *L_p -spaces in data analysis* Classification and related methods of data analysis (1988), HH Bock ed., North Holland, 439 – 444.
- [32] Z. Füredi, J-H. Kang *Covering the n -space by convex bodies and its chromatic number* (2008), Discrete mathematics 308.19, 4495 – 4500.
- [33] R. L. Graham *Recent trends in Euclidean Ramsey theory*, Discrete Mathematics (1994), 136(1–3), 119 – 127.
- [34] A. de Grey *The Chromatic Number of the Plane Is at least 5*, Geombinatorics, 28, (2018) 5–18.
- [35] H. Hadwiger, H. DeBrunner, V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1964.
- [36] E. Hlawka *Zur Geometrie der Zahlen*, Math. Zeitschrift, vol. 49 (1943), pp. 285 – 312.
- [37] R. Juhász *Ramsey type theorems in the plane*, Journal of Combinatorial Theory (1979), Series A, 27(2), 152 – 160.
- [38] M. Karamanlis *Simplices and Regular Polygonal Tori in Euclidean Ramsey Theory*, arXiv preprint arXiv:2105.07689, 2021.
- [39] T. Kobos *Equilateral dimension of certain classes of normed spaces*, Numerical Functional Analysis and Optimization (2014), 35(10), 1340 – 1358.
- [40] G. K. Kristiansen *Distance one graph in the plane*, Fjordparken, Denmark, 2001.
- [41] I. Kříž *Permutation groups in Euclidean Ramsey theory*, Proceedings of the American Mathematical Society (1991), 112(3), 899 – 907.
- [42] C. Krizan *Euclidean Szlam Numbers* PhD Dissertation, Auburn University, 2016.
- [43] A. Kupavskii *On the chromatic number of \mathbb{R}^n with an arbitrary norm*, Discrete Math. (2011), 311(6) : 437 – 440.
- [44] A. Kupavskii, A. A. Sagdeev *All finite sets are Ramsey in the maximum norm*, In Forum of Mathematics (2021), Sigma (Vol. 9). Cambridge University Press.
- [45] D. G. Larman, C. A. Rogers *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika (1972), 19(1), 1 – 24.
- [46] I. Leader, P. A. Russell, M. Walters *Transitive sets in Euclidean Ramsey theory* Journal of Combinatorial Theory (2012), Series A 119.2, 382 – 396.

- [47] A. Li, M. Plummer, A. Shapiro, K. Weatherspoon *An Assortment of Euclidean Coloring Problems*, 2021.
- [48] M. Naszódi *On some covering problems in geometry*, Proceedings of the American Mathematical Society (2016), 144(8), 3555-3562.
- [49] J. Matoušek *Lectures on Discrete Geometry*, Springer-Verlag New York, 2002.
- [50] L. Moser, W. Moser *Solution to problem 10*, Can. Math. Bull. (1961), 4, 187 – 189.
- [51] O. Ordentlich, O. Regev, B. Weiss *New bounds on the density of lattice coverings*, Journal of the American Mathematical Society (2022), 35(1), 295 – 308.
- [52] J. Parts *Graph minimization, focusing on the example of 5-chromatic unitdistance graphs in the plane*, Geombinatorics (2020), 29, no. 3, 137 – 166.
- [53] J. Parts *What percent of the plane can be properly 5- and 6-colored?* arXiv preprint arXiv:2010.12668, 2020.
- [54] C. M. Petty *Equilateral sets in Minkowski spaces* Proceedings of the American Mathematical Society (1971), 29(2), 369 – 374.
- [55] R. Prosanov *A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space*, Discrete Applied Mathematics (2020) 276, 115 – 120.
- [56] R. Radoičić, G. Tóth *Note on the chromatic number of the space*, Discrete and computational geometry (2003), Springer, Berlin, Heidelberg, 695 – 698.
- [57] A. M. Raigorodskii *On the chromatic number of a space*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk (2000) 55.2, 147 – 148.
- [58] A. M. Raigorodskii *The chromatic number of a space with the metric l_q* , Uspekhi Matematicheskikh Nauk (2004), 59(5), 161 – 162.
- [59] F. P. Ramsey *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30, 264 – 286, 1930.
- [60] C. A. Rogers *A note on coverings and packings* Journal of the London Mathematical Society 1(4) (1950), 327 – 331.
- [61] C. A. Rogers *A note on coverings* Mathematika 4(1) (1957), 1 – 6.
- [62] C. A. Rogers *Lattice coverings of space* Mathematika 6(1) (1959), 33 – 39.
- [63] C. A. Rogers *Covering a sphere with spheres*, Mathematika 10 (1963), 157 – 164.
- [64] C. A. Rogers *Packing and Covering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.

- [65] C. A. Rogers, C. Zong *Covering convex bodies by translates of convex bodies*, *Mathematika* 44.1 (1997), 215 – 218.
- [66] A. A. Sagdeev *Exponentially Ramsey sets*, *Problems of Information Transmission* (2018), 54(4), 372 – 396.
- [67] W. M. Schmidt *On the Minkowski-Hlawka theorem*, *Illinois Journal of Mathematics* (1963), 7(1), 18 – 23.
- [68] A. Soifer *The Mathematical Coloring Book*, Springer-Verlag New York, 2009.
- [69] L. A. Székely *Remarks on the chromatic number of geometric graphs*, *Graphs and other combinatorial topics* (1982), 59, 312 – 315.
- [70] K. Swanepoel, R. Villa *A lower bound for the equilateral number of normed spaces*, *Proceedings of the American Mathematical Society* (2008), 136(1), 127 – 131.
- [71] A. D. Szlam *Monochromatic translates of configurations in the plane*, *Journal of combinatorial theory* (2001) Series A, 93(1), 173 – 176.
- [72] S. Tsaturian *A Euclidean Ramsey result in the plane*, arXiv preprint arXiv:1703.10723, 2017.
- [73] H. S. Witsenhausen *Minimum dimension embedding of finite metric spaces* *Journal of Combinatorial Theory* (1986), Series A, 42(2), 184 – 199.
- [74] D. Wolfe *Imbedding a finite metric set in an N -dimensional Minkowski space* In *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* (1967) Vol. 70, pp. 136 – 140.
- [75] C. Zong *The simultaneous packing and covering constants in the plane*, *Advances in Mathematics* (2008) 218.3, 653 – 672.