NYILATKOZAT

Név: Borbényi Márton

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematikus MSc

NEPTUN azonosító: GX3X9C

Szakdolgozat címe:
Klaszter kifejtés

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.31

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudomonyi Kar

Borbényi Márton

KLASZTER KIFEJTÉS

MSc Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:

Csikvári Péter

Számítástudományi Tanszék

Budapest, 2022

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Csikvári Péternek, az elmúlt 5 év közös munkájáért, hogy idejét nem sajnálva segítette a szakmai előremenetelemet. Rengeteget tanultam tőle az évek során, amiért rendkívül hálás vagyok.

Köszönettel tartozom Bencs Ferencnek a közös munkáért és a sok segítségért, amit tőle kaptam.

Továbbá szeretném megköszönni családomnak és barátnőmnek a támogatást, biztatást és hogy mindig számíthattam rájuk.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozat során gráfok úgynevezett függetlenségi polinomjával, illetve a klaszter kifejtésével foglalkozunk. A klaszter kifejtés nem más, mint a függetlenségi polinom logaritmusának sorbafejtése a 0 körül. Ezt a módszert a statisztikus fizikusok találták ki, gyakran nevezik magas hőmérsékletű kifejtésnek, vagy Mayer kifejtésnek is.

Az első két fejezet során a függetlenségi polinommal foglalkozunk, mutatunk egy gyökmentes tartományát a 0 körül Dobrushin lemmája segítségével, majd látni fogjuk, hogy milyen sok polinom és paraméter írható fel függetlenségi polinomként. Ez a két fejezet [3] és [4] alapján készült.

A 3. fejezetben explicit képletet adunk a logaritmus hatványsorára, illetve mutatunk a Dobrushin-lemmánál kicsit gyengébb, de gyakran használhatóbb tételt, ami ugyancsak a függetlenségi polinom egy gyökmentes tartományát adja meg.

Az 4. fejezetben a klaszter kifejtés egy kombinatorikai alkalmazásával foglalkozunk. Ewan Davies, Matthew Jenssen és Will Perkins eredménye [5] alapján bebizonyítunk egy becslést a d-reguláris gráfok független halmazai és párosításainak számára.

Bármely X gráf esetén $V(X)$ jelöli a csúcsok, $E(X)$ pedig az élek halmazát, $v(X)$, $e(X)$ pedig ezek számát. Amennyiben a gráfot G-vel jelöljük, akkor ha nem is írjuk ki, $G = (V, E)$, illetve $v(G) = n$. Amennyiben $S \subseteq V$, akkor S gráf alatt az S csúcs által feszített részgráfját értjük G-nek. Hasonlóan, ha $F \subset E$, akkor F gráf alatt a (V, F) gráfot értjük.

1. fejezet

Függetlenségi polinom és Dobrushin-lemma

Ebben a fejezetben bevezetjük a függetlenségi polinomot, és bebizonyítjuk a Dobrushin-lemmát, ami megadja függetlenségi polinom egy gyökmentes tartományát a 0 körül.

1.1. Függetlenségi polinom

1.1.1. Definíció. *Legyen G gráf n csúcson, ekkor legyen $I(G, \lambda)$ a függetetlenségi polinom:*

$$I(G, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} i_k(G)\lambda^k,$$

ahol $i_k(G)$ a k méretű független csúcshalmazok száma, $i_0(G) = 1$.

1.1.2. Állítás. *A függetlenségi polinom multiplikatív, azaz minden G_1, G_2 gráfra*

$$I(G_1 \sqcup G_2, \lambda) = I(G_1, \lambda)I(G_2, \lambda),$$

ahol $\sqcup$ a diszjunkt úniót jelöli.

Ezt írhatjuk más alakban is.

1.1.3. Definíció. *G gráf, jelölje $\mathcal{I}(G) = \{I \subseteq V(G) |\ I$ független csúcshalmaz$\}$. Ekkor*

$$I(G, \lambda) = \sum_{I \in \mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|}.$$

Ez a két definíció ekvivalens, ám az első kényelmesebb, míg a második pedig általánosodik csúcssúlyozott gráfokra.

1.1.4. Definíció. *Legyen G gráf n csúcson, minden $v \in V(G)$ csúcshoz rendelünk egy w_v változót/súlyt. Ekkor a többváltozós/súlyozott függetlenségi polinom az alábbi:*

$$I(G, \underline{w}) = \sum_{I \in \mathcal{I}(G)} \prod_{v \in I} w_v.$$

Az üres szorzat értéke 1. *Feltehető, és fel is tesszük, hogy semelyik súly sem* 0.

1.1.5. Megjegyzés. Amennyiben $\underline{w}$ az azonosan λ vektor, akkor $I(G, \underline{w}) = I(G, \lambda)$.

1.1.6. Lemma. *Legyen G gráf $\underline{w}$ csúcssúlyozással, $v \in V(G)$. Ekkor $I(G, \underline{w}) = I(G - v, \underline{w}) + w_v I(G - N(v) - v, \underline{w})$, ahol $N(v)$ a v-vel szomszédos csúcsok halmaza.*

Bizonyítás. Szétbontjuk a független halmazokat két részre attól függően, hogy v bennük van-e, vagy nincs. □

A függetlenségi polinom közel áll statisztikus fizikában az úgynevezett hard core modelhez. A gráf csúcsai a részecskék (általában gázmolekulák) lehetséges helyeik, az élek pedig azt jelképezik, hogy ezek a helyek közel vannak egymáshoz (például $\mathbb{Z}^d$). Ekkor a részecskéinkre úgy tekintünk, mint egy tömör, nem deformálható anyag, akkor a szomszédos csúcsokban nem tudunk lehelyezni részecskéket, ugyanis nem férnének el egymás mellett, csak független csúcshalmazokba tudjuk elhelyezni őket. Ekkor egy elhelyezéshez (azaz független csúcshalmazhoz) mértéket tudunk rendleni, az úgynevezett Gibbs-mértéket:

$$\mathbb{P}(\mathbf{I} = I) = \frac{\prod_{v \in I} w_v}{I(G, \underline{w})}.$$

Ennek a modellnek a partíciós függvénye a függetlenségi polinom.

1.2. Gyökmentes tartomány

A klaszter kifejtés egyik fontosabb eredménye egy gyökmentes tartományok meghatározása a függetlenségi polinomra. Bár Dobrushin bizonyítása már nem használja a klaszter kifejtést, ám klaszter kifejtés nélkül aligha születhetett volna meg ez a bizonyítás. Ez a szekció [4] alapján készült.

1.2.1. Tétel. (Dobrushin-lemma [8]) *Legyen $\underline{w}$ a csúcsok egy súlyozása. Ha $r : V(G) \to \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra*

$$|w_v| \leq (1 - r(v)) \prod_{u \in N(v)} r(u).$$

Ekkor bármely $A \subseteq B \subseteq V(G)$ esetén

$$\frac{|I(A, \underline{w})|}{|I(B, \underline{w})|} \leq \left(\prod_{u \in B - A} r(u) \right)^{-1}.$$

Itt $I(S, \underline{w}) = I(G[S], \underline{w})$, ahol $G[S]$ az S által feszített részgráf. Speciálisan minden $A \subseteq V(G)$-re $I(A, \underline{w}) \neq 0$.

1.2.2. Megjegyzés. A tételből igazából az is következik, hogy bármely $\underline{w}'$ vektorra, amit abszolútértékben dominál a fenti $\underline{w}$ (azaz bármely v csúcsra $|w'_v| \leq |w_v|$), nem lehet gyöke semmilyen $A \subseteq V(G)$-re az $I(A, \underline{w}')$ egyenletnek. Azaz kaptunk egy gyökmentes tartományt 0 körül.

1.2.3. Megjegyzés. Dobrushin a lemmáját nem klaszter kifejtésnek (non-klaszter expansion) hívta. Ennek oka, hogy a bizonyítás már nem használja a klaszter kifejtést, "kiirtotta" belőle, az ötlet és módszer viszont onnan jön.

Bizonyítás. [Dobrushin-lemma] Indukció $|B|$-re. Ekkor indukció miatt $v \in B - A$ esetén

$$\frac{|I(A, \underline{w})|}{|I(B, \underline{w})|} \leq \frac{|I(A, \underline{w})|}{|I(B - v, \underline{w})|} \frac{|I(B - v, \underline{w})|}{|I(B, \underline{w})|} \leq \left(\prod_{u \in B - A - v} r(u) \right)^{-1} \frac{|I(B - v, \underline{w})|}{|I(B, \underline{w})|}.$$

Azaz elég belátni

$$\frac{|I(B - v, \underline{w})|}{|I(B, \underline{w})|} \leq \frac{1}{r(v)}.$$

Legyen $C = B - v$. Reciprokot véve

$$\frac{I(C \cup v, \underline{w})}{I(C, \underline{w})} = \frac{I(C, \underline{w}) + w_v I(C - N(v), \underline{w})}{I(C, \underline{w})} = 1 + w_v \frac{I(C - N(v), \underline{w})}{I(C, \underline{w})}.$$

Abszolútértéket véve, használva a feltételt, illetve az indukciós feltevést kapjuk, hogy

$$\frac{|I(C \cup v, \underline{w})|}{|I(C, \underline{w})|} \geq 1 - |w_v| \frac{|I(C - N(v), \underline{w})|}{|I(C, \underline{w})|} \geq 1 - |w_v| \left(\prod_{u \in N(v)} r(u) \right)^{-1} \geq$$

$$1 - (1 - r(v)) \prod_{u \in N(v)} r(u) \left(\prod_{u \in N(v)} r(u) \right)^{-1} = 1 - (1 - r(v)) = r(v).$$

□

1.2.4. Lemma. *Legyen $a : V(G) \to \mathbb{R}^+$ függvény olyan, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra*

$$\sum_{u \in N(v) \cup \{v\}} \log(1 + |w_u| e^{a(u)}) \leq a(v),$$

akkor $I(G, \underline{w}) \neq 0$.
Speciálisan, ha $a : V(G) \to \mathbb{R}^+$ függvény olyan, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra

$$\sum_{u \in N(v) \cup \{v\}} |w_u| e^{a(u)} \leq a(v),$$

akkor $I(G, \underline{w}) \neq 0$.

Bizonyítás. A második állítás következik az elsőből a $\log(1+|w_u|e^{a(u)}) \leq |w_u|e^{a(u)}$ egyenlőtlenség segítségével.
Az első állítás pedig pont a Dubroshin-lemma egy jó helyettesítéssel. Legyen $r(v) = \frac{1}{1+|w_v|e^{a(v)}}$. Ekkor a Dubroshin-lemma feltétele teljesül, mivel

$$(1 - r(v)) \prod_{u \in N(v)} r(u) = \left(1 - \frac{1}{1 + |w_v| e^{a(v)}}\right) \prod_{u \in N(v)} \frac{1}{1 + |w_u| e^{a(u)}} =$$

$$|w_v| e^{a(v)} \prod_{u \in N(v) \cup \{v\}} \frac{1}{1 + |w_u| e^{a(u)}} = |w_v| e^{a(v)} e^{-\sum\limits_{u \in N(v) \cup \{v\}} \log(1+|w_u|e^{a(u)})} \geq$$

$$\geq |w_v| e^{a(v)} e^{-a(v)} = |w_v|.$$

Tehát használhatjuk a Dubroshin-lemmát, azaz $I(G, \underline{w}) \neq 0$. $\square$

1.3. Penrose-egyenlőtlenség

A Penrose-egyenlőtlenség egy fontos egyenlőtlenség volt a klaszter kifejtésben Dobrushin-lemma előtt. Ennek a segítségével becsülték a klaszter kifejtés konvergenciáját, és ebből kaptak egy gyökmentes tartományát a függetlenségi polinomnak. Dobrushin lemmája pont máshogyan működik: a függetlenségi polinomra megad egy gyökmentes tartományt, és ebből következik a polinom logaritmusának sorbafejtésének a konvergenciája.

Ám máig sokszor használják az alábbi lemmát, ami szükséges az egyenlőtlenség bizonyításához is. Legyen C_G az összefüggő, τ_G a fa feszítő élrészhalmazok családja.

1.3.1. Lemma. *Létezik egy $P : \tau_G \to C_G$ függvény az alábbi módon:*

1. *Bármely $\tau \in \tau_G$ esetén $\tau \subseteq P(\tau)$.*

2. Amennyiben $A \subseteq B \subseteq E$, akkor jelöljük $[A, B] = \{X|\ A \subseteq X \subseteq B\}$. Ekkor $\bigsqcup_{\tau \in \tau_G} [\tau, P(\tau)]$ egy partíciója a C_G halmaznak.

Az ilyen partíciókat hívjuk Penrose-partícióknak.

Bizonyítás. [16] Elég mutatni egy olyan $F : C_G \to \tau_G$ függvényt, amire ha $A \in C_G$, $B \in [F(A), A]$, akkor $F(B) = F(A)$; illetve ha $F(A) = F(B)$, akkor $F(A) = F(A \cup B)$. Azért elég ennyit találni, mert ekkor

$$P(\tau) = \bigcup_{F(A)=\tau} A = \max_{F(A)=\tau} A$$

egy jó partíció. És ilyen pedig van, például ha egy olyan élsúlyozást független élsúlyozást rakunk $E(G)$-re, hogy minden él súlya különböző, akkor ha F éppen a minimális feszítőfát választja; ez egy ilyen tulajdonságú függvény a mohó algoritmus miatt. $\square$

1.3.2. Tétel. (Penrose-egyenlőtlenség [14]) *Adott G gráf $w : E \to \mathbb{C}$ élsúlyozással úgy, hogy $|1 + w_e| \leq 1$ minden e élre. Ekkor*

$$\left| \sum_{F \in C_G} \prod_{e \in F} w_e \right| \leq \sum_{F \in \tau_G} \prod_{e \in F} |w_e|.$$

Bizonyítás. Ennek a tételnek a bizonyítása a fenti partíción múlik partíción.

$$\left| \sum_{F \in C_G} \prod_{e \in F} w_e \right| = \left| \sum_{\tau \in \tau_G} \sum_{F \in [\tau, \tau_G]} \prod_{e \in F} w_e \right| = \left| \sum_{\tau \in \tau_G} \prod_{e \in \tau} w_e \prod_{e \in P(\tau) - \tau} (1 + w_e) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\tau \in \tau_G} \prod_{e \in \tau} |w_e| \prod_{e \in P(\tau) \setminus \tau} |1 + w_e| \leq \sum_{\tau \in \tau_G} \prod_{e \in \tau} |w_e| \prod_{e \in P(\tau) \setminus \tau} 1 = \sum_{\tau \in \tau_G} \prod_{e \in \tau} |w_e|$$

$\square$

1.3.3. Következmény. Ammenyiben az $w_e = -1$-re használjuk fenti ötletet, azt kapjuk hogy

$$\sum_{F \in C_G} (-1)^{|F|} = \sum_{F \in C_G} \prod_{e \in F} (-1) = \sum_{\tau \in \tau_G} \prod_{e \in \tau} (-1) \prod_{e \in P(\tau) \setminus \tau} (1 - 1) =$$

$$= \sum_{\tau = P(\tau)} (-1)^{v(G)-1} = (-1)^{v(G)-1} |P_\tau|,$$

ahol P_τ az olyan fák halmaza, amik P fixpontjai. Ezeket nevezzük Penrose-fáknak. A fenti egyenlet mutatja, hogy az ilyen fák száma független a P függvénytől, illetve ennek a kifejezésnek az előjele csakis a csúcsok számától függ. Speciálisan

$$\left| \sum_{F \in C_G} (-1)^{|F|} \right| \leq |\tau_G|.$$

2. fejezet

Exponenciális típusú polinomok

Ebben a szekcióban az exponenciális típusú polinomokkal foglalkozunk. Az előbb definiált függetlenségi polinom nem ilyen, ám fontos kapcsolat van közöttük.

2.1. Példák

2.1.1. Definíció. *G gráf, ekkor $f(G, x)$ egy exponenciális típusú polinomfüggvény, ha $f(\emptyset, x) = 1$ és*

$$f(G, x + y) = \sum_{S_1 \sqcup S_2 = V(G)} f(S_1, x) f(S_2, y),$$

ahol $\sqcup$ a diszjunkt uniót jelöli, illetve $S \subseteq V(G)$ esetén $f(S, x) = f(G[S], x)$, ahol $G[S]$ az S csúcshalmaz által feszített részgráf.

2.1.2. Megjegyzés. Itt az S_1, S_2 rendezett párokról beszélünk, azaz a szumma tartalmazza az $S_1 \sqcup S_2$ illetve az $S_2 \sqcup S_1$ felbontást is. Ezt azért is fontos tisztázni, mert később lesz olyan, hogy csak a partíciók számítanak, azon belüli sorrend nem. Ezt majd másképpen is fogjuk jelölni.

Sok polinom ilyen alakú, vagy kis alakítással ilyenné tehető.

2.1.3. Definíció. *Adott G gráf, akkor $x \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{ch}(G, x)$ jelölje a G gráf x darab színnel való szinezéseinek számát. Ezt nevezzük a kromatikus polinomnak.*

2.1.4. Állítás. $\mathrm{ch}(G, x)$ *egy egészegyütthatós polinom x-ben.*

Bizonyítás. Következik a $\mathrm{ch}(G,x) = \mathrm{ch}(G-e,x) - \mathrm{ch}(G/e,x)$ azonosságból, ahol $G-e$ a G gráf az e élt eltávolítva, G/e pedig úgy kapjuk, hogy a G gráfnak az e élét egy csúccsá hozzuk össze (ekkor létrejöhetnek többszörös élek, de ez most nem is számít, a hurokéleket töröljük). □

2.1.5. Állítás. *A kromatikus polinom exponenciális típusú.*

Bizonyítás. Elég csak pozitív egész x, y-ra bizonyítani az állítást. Ott pedig ez a szétbontást pont azt jelöli, hogy a csúcsok színei vagy az első x, vagy az utolsó y darab szín közül kerül ki. □

2.1.6. Definíció. *Adott G gráf, ekkor legyen $M(G,\lambda)$ a párosítások generátorfüggvénye:*

$$M(G,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} m_k(G)\lambda^k,$$

ahol $m_k(G)$ a k élű párosítások száma.

2.1.7. Megjegyzés. Mint ahogyan a függetlenségi polinomnál csináltuk, ebből is lehet csinálni egy többváltozós, súlyozott változatot, ám itt az éleket súlyozzuk. Legyen $w : E(G) \to \mathbb{R}$ élsúlyozás, ekkor

$$M(G,\underline{w}) = \sum_{M \in \mathcal{M}(G)} \prod_{e \in M} w_e,$$

ahol $\mathcal{M}(G)$ jelöli a G gráfban az összes párosítás halmazát.

2.1.8. Állítás. *A módosított párosítási polinom ($\hat{\mu}(G,x)$) exponenciális típusú, ahol*

$$\hat{\mu}(G,x) = x^n - m_1(G)x^{n-1} + m_2(G)x^{n-2} + ... + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(G)x^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

$n = v(G)$ pedig a csúcsok száma.

2.1.9. Definíció. *A*

$$Z_G(q,w) = \sum_{A \subseteq E} q^{k(A)} w^{|A|}$$

függvényt hívjuk a véletlen klaszter modell partíciós függvényének. Itt $k(A)$ a (V,A) gráf összefüggőségi komponenseinek száma.

2.1.10. Állítás. *A $Z_G(q,w_0)$ is exponenciális típusú minden w_0 értékre.*

Az előző két állítást majd a következő szekcióban bizonyítjuk.

2.1.11. Megjegyzés. A módosított párosítási polinomot könnyen megkaphajuk a párosítási generátorfüggvényből: $\hat{\mu}(G,x) = x^n M(G, -\frac{1}{x})$.
A párosítási polinom pedig az alábbi polinom:

$$\mu(G,x) = x^n - m_1(G)x^{n-2} + m_2(G)x^{n-4} + ... + (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} m_{\lfloor n/2 \rfloor}(G) x^{n-2\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Ezen alakok könnyen áttranszformálható egymásba, a használat módja mondja meg, melyiket használjuk. A párosítási polinom például sok kapcsolatot mutat a karakterisztikus polinommal.

2.2. Másfajta alak

Az exponenciális típusú polinomokat máshogyan is lehet írni. Ez segíthet akár megállapítani egy polinomról, hogy ilyen tulajdonságú, de használni fogjuk a Dobrushin-lemmához is. Ez az alak jobban rá fog mutatni a függetlenségi polinommal való kapcsolatra.
Legyen b egy függvény a véges gráfok osztályából a komplex számokba. Látni fogjuk, hogy ezen függvények egy az egyben megfeleltethetőek az exponenciális típusú polinomoknak ($b(\emptyset) = 0$).

2.2.1. Definíció. *Legyen*

$$a_k(G) = \sum_{\{V_1, V_2, \dots, V_k\} \in \Pi_k} \prod_{m=1}^{k} b(V_m),$$

ahol Π_k jelöli a $V(G)$ csúcshalmaz k nem üres diszjunkt részre való felbontását, Π pedig az összes partícióját. Illetve legyen

$$f_b(G,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(G)x^k = \sum_{\pi \in \Pi} x^{|\pi|} \prod_{S \in \pi} b(S).$$

2.2.2. Tétel. *1. Bármely b függvényre $f_b(G,x)$ exponenciális típusú.*

2. Minden exponenciális típusú f függvényhez van egy jó b függvény, amire $f_b = f$.

Bizonyítás.

1.

$$\sum_{S_1 \sqcup S_2} f(S_1,x)f(S_2,y) =$$

$$\sum_{S_1 \sqcup S_2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{V_1,\dots,V_k\} \in \Pi_k(S_1)} x^k \prod_{m=1}^{k} b(V_m) \sum_{l=1}^{n} \sum_{\{U_1,\dots,U_l\} \in \Pi_k(S_2)} y^l \prod_{m=1}^{l} b(U_m) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x^k y^l \sum_{S_1 \sqcup S_2} \sum_{\{V_1,\dots,V_k\} \in \Pi_k(S_1)} \sum_{\{U_1,\dots,U_l\} \in \Pi_k(S_2)} \prod_{m=1}^{k} b(V_m) \prod_{m=1}^{l} b(U_m) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x^k y^l \binom{k+l}{k} \sum_{\{W_1,\dots,W_{k+l}\} \in \Pi_{k+l}(G)} \prod_{m=1}^{k+l} b(W_m) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\{W_1,\dots,W_j\} \in \Pi_j(G)} (x+y)^j \prod_{m=1}^{j} b(W_m) = f_b(G, x+y)$$

2. Fontos észrevétel, hogy $f_b(G,x)$-ben a lineáris tag együtthatója $b(G)$. Ennek megfelelően legyen $b(G)$ az $f(G,x)$ elsőfokú tagjának az együtthatója. A csúcsok számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk be, hogy $f_b = f$. Az üres gráfra triviális az állítás. Ezután indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f(G,x+y) - f(G,x) - f(G,y) = \sum_{S_1 \sqcup S_2, S_1, S_2 \neq \emptyset} f(S_1,x)f(S_2,y) =$$

$$\sum_{S_1 \sqcup S_2, S_1, S_2 \neq \emptyset} f_b(S_1,x)f_b(S_2,y) = f_b(G,x+y) - f_b(G,x) - f_b(G,y).$$

Azaz a $g(x) = f(G,x) - f_b(G,x)$-re teljesül a $g(x+y) = g(x)+g(y)$ azonosság, illetve egy polinom, tehát $g(x) = cx$ valamely c valósra. Ám b-t pont úgy lőttük be, hogy f és f_b lineáris tagja megegyezzen, tehát $c = 0$. Így teljesül az $f(G,x) = f_b(G,x)$ minden G gráfra.

□

Ennek a tételnek a segítségével több polinomról is könnyedén meg tudjuk mutatni, hogy exponenciális típusúak.

2.2.3. Állítás. *$\hat{\mu}(G,x)$ exponenciális típusú.*

Bizonyítás. Legyen $b(K_1) = 1$, illetve $b(K_2) = -1$, többi H gráfra pedig $b(H) = 0$. Hasonlóan ennek a polinomnak az a módosítása, amikor nem váltakozó előjellel vesszük a tagokat is exponenciális típusú, csupán $b(K_2) = 1$. □

2.2.4. Állítás. *Legyen L_G a G gráf Laplace-mátrixa, azaz az a $n \times n$ mátrix, aminek i. átlós eleme éppen az i csúcs foka, ezen kívül pedig i. sor j. eleme pontosan akkor -1, ha van i és j között él a gráfban, egyébként 0. Illetve legyen $L(G, x)$ ennek a mátrixnak a karakterisztikus polinomja. Ekkor $L(G, x)$ is exponenciális típusú.*

Bizonyítás. $L(G, x)$ helyett nézzük inkább $\hat{L}(G, x) = \det(xI + L_G)$ polinomot. Amennyiben $\hat{L}(G, x)$ exponenciális típusú $b_{\hat{L}}$ függvénnyel, akkor az L polinom exponenciális típusú lesz a $b_L(H) = (-1)^{v(H)-1} b_{\hat{L}}$ függvénnyel.
Ám $\hat{L}(G, x)$ polinomnak van más jelentése is. Gondolhatunk rá úgy, mint egy $\hat{G}$ gráfban a feszítőfák száma, ahol $\hat{G}$ gráfot úgy kapjuk meg G-ből, hogy hozzárakunk egy új csúcsot, és minden csúccsal összekötjük egy x súlyú éllel. Ugyanis ekkor $\hat{G}$ Laplace mátrixából ha kitöröljük az új csúcshoz tartozó sort és oszlopot, akkor $xI + L_G$ mátrixot kapjuk me, aminek determinánsa éppen $\hat{G}$ feszítőfáinak száma, $\tau(\hat{G})$.
A $\hat{G}$ gráf feszítőfáit csoportosítjuk aszerint, hogy milyen csúcsokból álló komponensekre esik szét a fa, ha kivesszük a hozzáadott új csúcsot. Egy ilyen k elemű $V_1, V_2, ..., V_k$ csúcspartíció szerinti fák száma éppen $\prod_i x|V_i|\tau(V_i)$ (ha V_i nem összefüggő, akkor $\tau(V_i) = 0$), mivel minden osztályt csúcsszám fajta éllel köthetjük az új csúcshoz, ennek az élnek a súlya x, illetve benne ki tudunk választani $\tau(V_i)$ darab feszítőfából egyet. Azaz x^k együtthatója éppen az összes k elemű partícióra kell összegezni ezt a kifejezést. Azaz $b_{\hat{L}}(H) = v(H)\tau(H)$. Tehát $L(G, x) = f_{b_L}(x)$, ahol $b(H) = (-1)^{v(H)-1} v(H)\tau(H)$. $\square$

2.2.5. Definíció. *Legyen $a_k(G)$ a G gráf k darab klikkre való felbontásainak száma. Ekkor $h(G, x) = \sum_k (-1)^{n-k} a_k(G) x^k$ az adjungált polinom.*

2.2.6. Állítás. *Az adjungált polinom is exponenciális típusú.*

Bizonyítás. Legyen $b(K_l) = (-1)^{l-1}$, 0 egyébként. $\square$

2.2.7. Állítás. *A $Z_G(q, w_0)$ is exponenciális típusú minden w_0 értékre.*

Bizonyítás. Legyen $b(G) = \sum\limits_{F \subseteq E(G) \text{ öf}} w_0^{|F|}$. $\square$

A kromatikus polnimról láttuk, hogy exponenciális típusú, ám nem láttuk a hozzá tartozó b együtthatókat. Most azokat fogjuk meghatározni.

2.2.8. Tétel.

$$\mathrm{ch}(G, x) = \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|F|} x^{c(F)},$$

ahol $c(F)$ az F által feszített összefüggőségi komponensek száma.

Bizonyítás. Mivel mindkettő oldal polinom, elég belátni pozitív x értékekre. A szita formulát szeretnénk alkalmazni. Jelölje K az összes x színnel színezését a $V(G)$ csúcshalmaznak. Ekkor $|K| = x^n$. Minden $e \in E(G)$ élre legyen $A_e \subseteq K$ az a halmaz, ahol az él két végpontja azonos színű. Ekkor a jó színezések halmaza éppen

$$\bigcup_{e \in E} A_e^c.$$

Ám bármely $F = \{e_1, e_2, .., e_k\} \subseteq E$ esetén

$$\left| \bigcap_{l=1}^{k} A_{e_k} \right| = x^{c(F)},$$

így szita formulát alkalmazva bebizonyítottuk az állítást. $\square$

2.2.9. Következmény. $Z_G(q, -1) = \mathrm{ch}(G, q)$. Azaz

$$b(S) = \sum_{F \subseteq E(S) \text{ öf}} (-1)^{|F|}$$

esetén $f_b(G, x) = \mathrm{ch}(G, x)$.

2.3. Kapcsolat a függetlenségi polinommal

Először is tegyük fel, hogy $b(K_1) = 1$. Ez a fenti példáknál mindig így volt. Amennyiben $b(K_1)$ értéke nem nulla, akkor a b függvény helyett a $\hat{b}(H) = \frac{b(H)}{b(K_1)}$ függvényt véve egy hasonló, kicsit átparaméterezett függvényt kapunk: $f_b(x) = f_{\hat{b}}(b(K_1)x)$. Ebben a szekcióban megmutatjuk, hogy minden olyan exponenciális típusú polinom, amire $b(K_1) = 1$, valójában egy gráf többváltozós függetlenségi polinomjának egy transzformáltja.

Adott egy G gráf, illetve egy f_b fenti exponenciális típusú függvény. Ekkor legyen $\hat{G}$ az a gráf, aminek csúcsai az $S \subseteq V(G)$ legalább 2 elemű részhalmazai, és kettő között akkor húzunk be élt, ha nem diszjunktak. Ekkor $S_1, S_2, ..., S_k \in V(\hat{G})$ független pontosan akkor, ha diszjunktak. Azaz egy $P \in \Pi(G)$ partíciója V-nek megfelel egy független halmaznak $\hat{G}$-ben úgy, hogy Π-ből elhagyjuk az egyelemű osztályokat. Legyen ez a hozzárendelés I_P, illetve inverze, amikor egy I független halmazhoz adunk egyelemű osztályokat, és így lesz egy partíciónk, hívjuk P_I.

Most ennek a gráfnak nézzük a súlyozott függetlenségi polinomját

$$w(S) = \frac{b(S)}{x^{|S|-1}}$$

súllyal. Azaz ekkor egy független halmaz $I = \{S_1, .., S_l\}$ súlya

$$\prod_{S\in I}\frac{b(S)}{x^{|S|-1}} = \prod_{S\in P_I}\frac{b(S)}{x^{|S|-1}} = x^{-n}x^{|P_I|}\prod_{S\in P_I} b(S)$$

használva hogy $b(K_1) = 1$. Azaz ekkor

$$I(G, \underline{w}) = \sum_{I\in \mathbf{I}(\hat{G})}\prod_{S\in I}\frac{b(S)}{x^{|S|-1}} = \sum_{I\in \mathbf{I}(\hat{G})}\prod_{S\in P_I}\frac{b(S)}{x^{|S|-1}} = x^{-n}\sum_{I\in \mathbf{I}(\hat{G})} x^{|P_I|}\prod_{S\in P_I} b(S) =$$
$$x^{-n}\sum_{\pi\in\Pi(G)} x^{|\pi|}\prod_{S\in R} b(S) = x^{-n} f_b(G, x).$$

Ám ez a x^{-n}-es szorzó a gyökmentes tartományt nem befolyásolja (kivéve $x = 0$ eset, de az ottani érték könnyen számolható), azaz $f_b(x)$ gyökmentes régiójának a kérdését visszavezettük a többváltozós függetlenségi polinomnak gyökmentes régiójának keresésére.

2.4. Gyökmentes tartomány

Fenti megfigyelésből, illetve a 1.2.4 Lemmából kaphatunk egy gyökmentes tartományát $f_b(G, x)$-nek.

2.4.1. Lemma. *Legyen a olyan pozitív valós, amire minden $v \in V(G)$ esetén*

$$\sum_{v\in S\in V(\hat{G})} |b(S)| \left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{|S|-1} \leq ae^{-a}.$$

Ekkor $f_b(G, x) \neq 0$.

Bizonyítás. A 1.2.4 Lemmát fogjuk használni az $I(\hat{G}, \underline{w})$ függvényre, ahol $w(S) = \frac{b(S)}{x^{|S|-1}}$ illetve $a(S) = a|S|$. Az kell, hogy minden $T \in V(\hat{G})$ esetén

$$\sum_{(T,S)\in E(\hat{G})} |w(S)|e^{a|S|} \leq a|T|.$$

Ám ez igaz, mivel minden $T \in V(\hat{G})$ esetén

$$\sum_{(T,S)\in E(\hat{G})} |w(S)|e^{a|S|} \leq \sum_{v\in T}\sum_{v\in S} |w(S)|e^{a|S|} = \sum_{v\in T}\sum_{v\in S}\frac{b(S)}{x^{|S|-1}}e^{a|S|}$$
$$= \sum_{v\in T} e^a \sum_{v\in S} |b(S)| \left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{|S|-1} \leq \sum_{v\in T} e^a \cdot ae^{-a} = a|T|.$$

tehát használhatjuk a 1.2.4 Lemmát, így $f_b(G, x) \neq 0$. $\square$

2.4.2. Tétel. *Legyen G legnagyobb foka Δ. Ekkor*

1. *$\hat{\mu}(G,x)$-nak nincs $2e\Delta$-nál nagyobb abszolútértékű gyöke.*

2. *A $h(G,x)$ adjungált polinomnak nincs $\inf_{a\geq 0} K_h(a)\Delta \approx 6.21\Delta$-nél nagyobb gyöke, ahol $a \geq 0$ esetén*
$$K_h(a) = \frac{e^a}{\log(1+ae^{-a})}.$$

3. *$\mathrm{ch}(G,x)$-nek nincs $\inf_{a\geq 0} K_{\mathrm{ch}}(a)\Delta \approx 7.96\Delta$-nél nagyobb gyöke, ahol $a \geq 0$ esetén*
$$K_{\mathrm{ch}}(a) = \frac{a+e^a}{\log(1+ae^{-a})}.$$

Bizonyítás.

1. Tudjuk, hogy $|b(H)| = 1$ ha $H = K_1, K_2$ és 0 egyébként. Ekkor
$$\sum_{v\in S\in V(\hat{G})} |b(S)| \left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{|S|-1} \leq 1 + \Delta\frac{e^a}{|x|}.$$
Azaz ha
$$\Delta\frac{e^a}{|x|} \leq ae^{-a},$$
akkor $\hat{\mu}(G,x) \neq 0$. És $a = 1/2$ helyettesítéssel éppen a bizonyítandót kapjuk.

2. Itt $|b(H)| = 1$ ha H teljes gráf, 0 egyébként. Ekkor
$$\sum_{v\in S\in \hat{G}} |b(S)| \left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{|S|-1} = \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{v\in S, |S|=k} |b(S)|\right)\left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{k-1}$$
$$\leq \sum_{k=2}^{n}\binom{\Delta}{k-1}\left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{k-1} = \left(1+\frac{e^a}{|x|}\right)^{\Delta} - 1 \leq e^{\frac{\Delta e^a}{|x|}} - 1,$$
ugyanis egy adott v csúcs legfeljebb $\binom{d_v}{k-1} \leq \binom{\Delta}{k-1}$ darab $k-1$ méretű klikkben lehet benn. Amennyiben $e^{\frac{\Delta e^a}{|x|}} - 1 \leq ae^{-a}$, akkor $h(G,x)$-nek nincs gyöke. Ez pedig teljesül, ha $|x| \geq K_h(a)\Delta$.

3. Ennek a bizonyítása már több munkát igényel. Ez Huijben és Regts [12] bizonyítása. Először is szükségünk van egy tételre.

2.4.3. Tétel. (Huijben-Regts) *Jelöljük $\mathcal{T}_{v,G}$ az olyan fák halmazát, amik tartalmazzák v-t, és részgráfjai G-nek. Nem kell feszítőnek lenniük, lehet kevesebb élük, tartalmazhat kevesebb csúcsot. Illetve legyen*

$$T_{v,G}(c) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{v,G}} c^{e(T)}.$$

Ekkor $\alpha \geq 1$ esetén $T_{v,G}(\frac{\log \alpha}{\Delta \alpha}) \leq \alpha$.

Bizonyítás. Indukciózni fogunk a csúcsok számára. Ammennyiben $v(G) = 1$, akkor igaz az állítás, mivel ekkor egy részfa van, élszáma 0. Az indukció során aszerint bontjuk szét a fák halmazát, hogy v mely szomszédjait tartalmazzák, legyen ez S. Ekkor ha kivesszük a v csúcsot, a T fa $|S|$ különböző fára esik szét. Azaz $c > 0$ esetén

$$T_{v,G}(c) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{v,G}} c^{e(T)} \leq \sum_{S \subseteq N(v)} c^{|S|} \prod_{u \in S} T_{u,G-v}(c).$$

Azaz $c = \frac{\log \alpha}{\Delta \alpha}$-ra alkalmazva, és használva az indukciós feltételt, azt kapjuk hogy

$$T_{v,G}\left(\frac{\log \alpha}{\Delta \alpha}\right) \leq \sum_{S \subseteq N(v)} \left(\frac{\log \alpha}{\Delta \alpha}\right)^{|S|} \prod_{u \in S} T_{u,G-v}\left(\frac{\log \alpha}{\Delta \alpha}\right) \leq$$
$$\leq \sum_{S \subseteq N(v)} \left(\frac{\log \alpha}{\Delta \alpha}\right)^{|S|} \alpha^{|S|} = \sum_{S \subseteq N(v)} \left(\frac{\log \alpha}{\Delta}\right)^{|S|} = \left(1 + \frac{\log \alpha}{\Delta}\right)^{d_v} \leq$$
$$\leq \left(1 + \frac{\log \alpha}{\Delta}\right)^{\Delta} \leq e^{\frac{\log \alpha}{\Delta}\Delta} = \alpha.$$

ahol d_v a v csúcs foka a G gráfban. □

Most a fenti 2.4.1. Lemmát szeretnénk használni. Az kell nekünk, hogy

$$\sum_{v \in S \in V(\hat{G})} |b(S)| \left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{|S|-1} \leq ae^{-a}.$$

Ekkor 1.3.3. Következmény miatt, $z = \frac{1}{x}$-et írva, használva az előbb bebizonyított tételt $\alpha = ae^{-a} + 1$-re, illetve hogy $|b(S)| \leq |\tau_G|$, és S elemszáma legalább 2, azt kapjuk hogy

$$\sum_{v \in S \in V(\hat{G})} |b(S)| \left(\frac{e^a}{|x|}\right)^{|S|-1} \leq \sum_{v \in S \in V(\hat{G})} |\tau_S|(|z|e^a)^{|S|-1} = T_{v,G}(|z|e^a) - 1 \leq$$

$$\leq T_{v,G}(\frac{\log \alpha}{\Delta\alpha}) \leq (\alpha - 1) = ae^{-a},$$

amennyiben

$$|z|e^a \leq \frac{\log(\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Tehát csak azt kell megvizsgálnunk, hogy mikor

$$|z|e^a \leq \frac{\log(\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Ez máshogyan mondva

$$|z| \leq \frac{\log(ae^{-a}+1)}{e^a\Delta(ae^{-a}+1)} = \frac{\log(ae^{-a}+1)}{\Delta(a+e^a)} = \frac{1}{\Delta}\frac{\log(ae^{-a}+1)}{a+e^a}.$$

Tehát ha valamely a-ra igaz a fenti egyenlőtlenség, akkor használhatjuk 2.4.1. Lemmát, így ilyen tulajdonságú z nem lehet gyök. Tehát ha z olyan, hogy

$$|z| \leq \frac{1}{\Delta} \sup_{a \geq 0} \frac{\log(ae^{-a}+1)}{a+e^a}$$

akkor $x = 1/z$ nem lehet gyöke a kromatikus polinomnak. Azaz amennyiben x gyöke a kromatikus polinomnak, akkor $|x| \leq \inf_{a\geq 0} \frac{a+e^a}{\log(1+ae^{-a})}$.

□

2.4.4. Megjegyzés. A $\hat{\mu}(G,x)$ polinomra pontosabb becslés is ismert. Amennyiben G egy d-reguláris gráf, akkor minden gyök abszolútértéke kisebb, mint $4(d-1)$. Ez pedig éles, ezt az értéket tetszőlegesen meg tudjuk közelíteni.

2.4.5. Megjegyzés. A kromatikus polinom gyökeinek becslése hasonlít Sokal eredményére [17], de időközben le lett egyszerűsítve. A konstans érdekes módon ugyanaz, mint Sokal eredménye, a két érték egyenlősége meg van említve itt [2]. Mi itt valójában a Dobrushin-lemma egy gyengítet változatát használtuk, ami igazából pont Koteck? és Preiss tétele egy jó helyettesítéssel, 3.1.9. Tétel. Amennyiben erősebb tételeket használunk (ilyet találhatunk [9]), akkor a konstanst le lehet ezzel a módszerrel csökkenteni 6.91-re.

3. fejezet

Koteckŷ-Preiss-tétel és az absztrakt polymer model

Előző fejezetben a Dobrushin-lemmát használtuk a gyökmentes tartomány becslésére. A Koteckŷ-Preiss egy gyengébb de gyakran használhatóbb becslés a gyökmentes tartomány méretére. Történelmileg ez volt előbb, Dobrushin később bizonyította be a lemmáját.

3.1. Sorfejtés

3.1.1. Definíció. *Adott egy H gráf. Ekkor a*

$$\phi(H) = \frac{1}{v(H)!} \sum_{F \subseteq E \text{ öf}} (-1)^{|F|}$$

függvényt nevezzük Ursell-függvénynek.

3.1.2. Definíció. *Klaszternek nevezzük csúcsok olyan sorozatát (egy csúcs szerepelhet többször is), amik által feszített részgráf összefüggő. A Γ klaszter nagysága $|\Gamma|$ éppen a sorozat hossza. Illetve Γ klaszter esetén legyen $H(\Gamma)$ az a gráf, aminek csúcsai a Γ elemei, és két elem akkor van összekötve, ha ugyanazt a G-beli csúcsot jelölik, vagy már G-ben is össze voltak kötve. Ezen kívül ha $\underline{w}$ a csúcsok egy súlyozása, akkor $w_\gamma = \prod_{v \in \Gamma} w_v$.*

3.1.3. Tétel.

$$\log I(G, \underline{w}) = \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \phi(H(\Gamma)) w_\Gamma,$$

mint formális hatványsorok.

Bizonyítás. [10]

3.1.4. Definíció. *Adott $G = (V, E)$ gráf, jelölje $G^\circ = (V, E^\circ)$ azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy G-hez hozzáadunk minden csúcsban egy hurokélt.*

$$
\begin{aligned}
I(G, \underline{w}) &= \sum_{k\geq 0} \sum_{\{v_1,\dots,v_k\}\in\binom{V}{k}} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} \prod_{i\neq j} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\notin E} = \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{(v_1,\dots,v_k)\in V^k} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} \prod_{1\leq i<j\leq k} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\notin E^\circ}
\end{aligned}
$$

Ez az alak már kezd hasonlítani egy exponenciális függvényhez. Jelöljük $K_k = ([k], E_k)$ a teljes k csúcsú gráfot. Még azonban az $1 = 1 - 1 + 1$ ötletre szükségünk van:

$$
\begin{aligned}
\prod_{1\leq i<j\leq k} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\notin E^\circ} &= \prod_{1\leq i<j\leq k} \left(1 - \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ}\right) = \sum_{F\subseteq E_k} \prod_{(i,j)\in F} \left(-\mathbb{1}_{(i,j)\in E^\circ}\right) \prod_{(i,j)\notin F} 1 = \\
&= \sum_{F\subseteq E_k} \prod_{(i,j)\in F} \left(-\mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ}\right) = \sum_{F\subseteq E_k} (-1)^{|F|} \prod_{(i,j)\in F} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ}
\end{aligned}
$$

Azaz

$$
\begin{aligned}
I(G, \underline{w}) &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{(v_1,\dots,v_k)\in V^k} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} \prod_{1\leq i<j\leq k} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\notin E^\circ} = \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{(v_1,\dots,v_k)\in V^k} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} \sum_{F\subseteq E_k} (-1)^{|F|} \prod_{(i,j)\in F} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} = \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{F\subseteq E_k} \sum_{(v_1,\dots,v_k)\in V^k} (-1)^{|F|} \prod_{(i,j)\in F} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} = \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{H\subseteq K_k} \sum_{(v_1,\dots,v_k)\in V^k} (-1)^{e(H)} \prod_{(i,j)\in E(H)} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} = \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{H\subseteq K_k} Q[H].
\end{aligned}
$$

Az utolsó előtti lépésben annyi történik, hogy az $F \subseteq E_k$ élrészhalmaz helyett a $H = ([k], F) \subseteq K_k$ részgráfot vesszük. Az utolsóban pedig annyi, hogy azt a hosszú kifejezést elnevezzük $Q[H]$-val. Most egy kicsit jobban megértjük $Q[H]$-t.

3.1.5. Definíció. *G gráf, $N \in \mathbb{C}^{k\times k}$ szimmetrikus, $\nu \in \mathbb{C}^k$. Ekkor*

$$
\hom(G, (N, \nu)) = \sum_{f:V(G)\to[k]} \prod_{v\in V} \nu_{f(v)} \prod_{(v,u)\in E} N_{f(v),f(u)}.
$$

3.1.6. Megfigyelés. $Q[H] = \hom(H, (N, w))$, ahol $N = -A_{G^\circ}$ (-1-szerese a G° gráf adjacenciamátrixának).

3.1.7. Megfigyelés. Amennyiben H összefüggőségi komponensei $H_1, ..., H_l$, akkor

$$Q[H] = \prod_{i=1}^{l} Q[H_l].$$

Azaz ekkor

$$\sum_{H\subseteq K_k} Q[H] = \sum_{l=1}^{k} \sum_{\substack{H\subseteq K_k \\ H=(H_1,..,H_l)}} \prod_{i=1}^{l} Q[H_i] =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{\substack{m_1,...m_l \\ m_1+...+m_l=k}} \binom{k}{m_1, m_2, ..., m_l} \sum_{\substack{H_1\subseteq K_{m_1} \\ \text{öf}}} \sum_{\substack{H_2\subseteq K_{m_2} \\ \text{öf}}} ... \sum_{\substack{H_l\subseteq K_{m_l} \\ \text{öf}}} \prod_{i=1}^{l} Q[H_l].$$

A $\binom{n}{m_1, m_2, ..., m_l}$ multimonális együttható azért jelenik meg, mert ennyi féle képpen lehet kiválasztani a $K_{m_1}, ..., K_{m_l}$ részgráfokat. Azaz

$$\sum_{H\subseteq K_k} Q[H] = k! \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{\substack{m_1,...m_l \\ m_1+...+m_l=k}} \sum_{\substack{H_1\subseteq K_{m_1} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_1!} Q[H_1] \sum_{\substack{H_2\subseteq K_{m_2} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_2!} Q[H_2] ... \sum_{\substack{H_l\subseteq K_{m_l} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_l!} Q[H_l].$$

Tehát

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{H\subseteq K_k} Q[H] =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{\substack{m_1,...m_l \\ m_1+...+m_l=k}} \sum_{\substack{H_1\subseteq K_{m_1} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_1!} Q[H_1] \sum_{\substack{H_2\subseteq K_{m_2} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_2!} Q[H_2] ... \sum_{\substack{H_l\subseteq K_{m_l} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_l!} Q[H_l] =$$

$$= \sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!} \sum_{(m_1,...,m_l)} \sum_{\substack{H_1\subseteq K_{m_1} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_1!} Q[H_1] \sum_{\substack{H_2\subseteq K_{m_2} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_2!} Q[H_2] ... \sum_{\substack{H_l\subseteq K_{m_l} \\ \text{öf}}} \frac{1}{m_l!} Q[H_l] =$$

$$\sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!} \left(\sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [v(H)] \text{ csúcshalmazon}}} \frac{1}{v(H)!} Q[H] \right)^{l} = \exp \left(\sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [v(H)] \text{ csúcshalmazon}}} \frac{1}{v(H)!} Q[H] \right)$$

Azaz már csak az alábbi állítás hiányzik.

3.1.8. Állítás.

$$\sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [v(H)] \text{ csúcshalmazon}}} \frac{1}{v(H)!} Q[H] = \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \phi(H(\Gamma)) \prod_{v\in\Gamma} w_v.$$

Bizonyítás.

$$\sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [v(H)] \text{ csúcshalmazon}}} \frac{1}{v(H)!} Q[H] =$$

$$= \sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [v(H)] \text{ csúcshalmazon}}} \frac{1}{v(H)!} \sum_{(v_1,\dots,v_{v(H)}) \in V^{v(H)}} (-1)^{e(H)} \prod_{(i,j)\in E(H)} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} \prod_{j\in[v(H)]} w_{v_j} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [k] \text{ csúcshalmazon}}} \frac{1}{k!} \sum_{(v_1,\dots,v_k)\in V^k} (-1)^{e(H)} \prod_{(i,j)\in E(H)} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{(v_1,\dots,v_k)\in V^k} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} \sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [k] \text{ csúcshalmazon}}} (-1)^{e(H)} \prod_{(i,j)\in E(H)} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{(v_1,\dots,v_k)\in V^k \\ H(v_1,\dots,v_k) \text{ öf}}} \prod_{j\in[k]} w_{v_j} \sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [k] \text{ csúcshalmazon}}} (-1)^{e(H)} \prod_{(i,j)\in E(H)} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} =$$

$$= \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \frac{1}{v(H(\Gamma))!} \prod_{v\in\Gamma} w_v \sum_{\substack{H \text{ összefüggő a} \\ [|\Gamma|] \text{ csúcshalmazon}}} (-1)^{e(H)} \prod_{(i,j)\in E(H)} \mathbb{1}_{(v_i,v_j)\in E^\circ} =$$

$$= \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \frac{1}{v(H(\Gamma))!} \prod_{v\in\Gamma} w_v \sum_{\substack{F\subseteq E(H(\Gamma)) \\ F \text{ öf}}} (-1)^{|E|} = \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \phi(H(\Gamma)) \prod_{v\in\Gamma} w_v.$$

□

Tehát bebizonyítottuk, hogy $\exp(\log(I(G,\underline{w}))) = I(G,\underline{w})$ formálisan, 0 körül. □

3.1.9. Tétel. (Kotecký, Preiss [13]) *A G gráfon adott egy $\underline{w}$ komplex csúcssúlyozás. Amennyiben léteznek $a, b : V(G) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ úgy, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra*

$$\sum_{u\in N(v)\cup\{v\}} |w_u| e^{a(u)+b(u)} \leq a(v).$$

Ekkor a $\log(I(G,\underline{w}))$ sor abszolút konvergens, illetve minden v csúcsra

$$\sum_{\Gamma,\ d(v,\Gamma)\leq 1} |\phi(H(\Gamma)) e^{b(\Gamma)} w_\Gamma| \leq a(v),$$

ahol $b(\Gamma) = \sum_{u\in\Gamma} b(u)$.

3.1.10. Következmény. Gyakran használják az alábbi becslést a sor farkának a becslésére:

$$\sum_{\substack{d(v,\Gamma)\leq 1 \\ b(\Gamma)\geq t}} |\phi(H(\Gamma)) w_\Gamma| \leq a(v) e^{-t}.$$

Bizonyítás. [Következmény]

$$e^t \sum_{\substack{d(v,\Gamma)\le 1\\ b(\Gamma)\ge t}} |\phi(H(\Gamma))w_\Gamma| \le \sum_{\substack{d(v,\Gamma)\le 1\\ b(\Gamma)\ge t}} |\phi(H(\Gamma))e^{b(\Gamma)}w_\Gamma| \le \sum_{\Gamma,\ d(v,\Gamma)\le 1} |\phi(H(\Gamma))e^{b(\Gamma)}w_\Gamma| \le a(v).$$

□

Bizonyítás. [Tétel] Feltehetjük, hogy $b \equiv 0$, mivel ha $\hat{w}_u = w_u e^{b(u)}$, $\hat{b}(u) = 0$ helyettesítéssel tudjuk a tételt, akkor tudjuk a w és b függvényre is.

A tétel bizonyításához a Dobrushin-lemmát és a 1.2.4 Lemmát fogjuk használni. A 1.2.4 Lemma ezzel az a függvényre pontosan azt állítaná, hogy nincsen gyöke, sőt pozitív alsó becslés adható az $|I(G, \underline{w})|$ függvényre. Azaz abszolútkovergens a sorfejtés.

Már csak a tétel második fele van vissza. Ám előbb szükségünk van pár technikai észrevételre: mivel mindenhol $|w|$ szerepel, így feltehető, hogy minden w érték negatív. Illetve az Ursell függvény előjelét meg tudjuk mondani, $\phi(H(\Gamma))$ előjele éppen $(-1)^{|\Gamma|+1}$ 1.3.3. Következmény miatt. Azaz ekkor a sorfejtés minden tagjának az előjele negatív, tehát a tagonkénti abszolútérték helyett elég egy mínusz előjel.

Ehhez használjuk a 1.2.4 Lemma bizonyítását: legyen $r(v) = \frac{1}{1+|w_v|e^{a(v)}}$. Ekkor r teljesíti a Dobrushin-lemma feltételeit (ezt 1.2.4 Lemma bizonyításában látjuk be). Most a Dobrushin-lemma (1.2.1 Tétel) második állítását fogjuk használni a fenti r függvénnyel, az $A = V$ és $B = V - N(v) - v$ halmazokkal. Ekkor

$$\left|\frac{I(B,\underline{w})}{I(A,\underline{w})}\right| \le \left(r(v) \prod_{u \in N(v)} r(u) \right)^{-1}.$$

A kifejezés bal oldalának a logaritmusa éppen az, ami kell nekünk: $\log(I(A,\underline{w}))$ és $\log(I(B,\underline{w}))$ logaritmusának hatványsora is csak valós tagokat tartalmaz (minden tag negatív), így az abszolútérték elengedhető. Tehát

$$\begin{aligned}
\log\left|\frac{I(B,\underline{w})}{I(A,\underline{w})}\right| &= \log\left(\frac{I(B,\underline{w})}{I(A,\underline{w})}\right) = \log(I(B,\underline{w})) - \log(I(A,\underline{w})) = \\
&= \sum_{\Gamma \in B^{<\omega} \text{ klaszter}} \phi(H(\Gamma))w_\Gamma - \sum_{\Gamma \in A^{<\omega} \text{ klaszter}} \phi(H(\Gamma))w_\Gamma = \\
&= \sum_{\Gamma \cap (N(v)\cup\{v\}) \neq \emptyset} -\phi(H(\Gamma))w_\Gamma = \sum_{\Gamma,\ d(v,\Gamma)\le 1} |\phi(H(\Gamma))w_\Gamma|
\end{aligned}$$

A jobb oldalt pedig becsülhetjük, mivel az r függvényre teljesül a Dobrushin-lemma feltétele.

$$\left(r(v) \prod_{u \in N(v)} r(u) \right)^{-1} \le \frac{1}{|w_v|}\frac{1-r(v)}{r(v)} = \frac{1}{|w_v|}\left(\frac{1}{r(v)} - 1\right) = \frac{1}{|w_v|}|w_v|e^{a(v)} = e^{a(v)}.$$

Logaritmust véve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. $\square$

Amint láttuk, a Kotecký-Preiss tételhez erősebb feltétel kell, mint a Dobrushin-lemmához. Ennél gyengébb feltételek is elegek a konvergenciához, lásd [9], [11]. A klaszter kifejtést használják a többdimenziós gömbpakolási problémához becslésnek, ahol ezekkel az apró gyengítésékkel is jobb becslést lehet adni. Kombinatorikában nem mindig lehet a legoptimálisabb becsléseket használni, mivel nehéz kezelhető a, b függvényeket találni, így gyakran a Kotecký-Preiss tétel is elég szokott lenni.

3.2. Alkalmazás: Korrelációs lecsengés

Azt már láttuk, hogy a függetlenségi polinom segítségével lehet csinálni egy valószínűségi eloszlást a független halmazokon:

$$\mathbb{P}(\mathbf{I} = I) = \frac{\prod_{v \in I} w_v}{I(G, \underline{w})}.$$

Felmerül a kérdés, hogy milyen korreláció áll fenn a csúcsok között, mi a kapcsolat $\mathbb{P}(v \in \mathbf{I})\mathbb{P}(u \in \mathbf{I})$ és $\mathbb{P}(v, u \in \mathbf{I})$ között.
Azt tudjuk, hogy sem negatív, sem pozitív korreláció nem áll fenn közöttük általánosságban. Az alábbi tétel mutatja, páros gráf esetén attól függ a korreláció iránya, hogy azonos csúcsosztályban vannak-e.

3.2.1. Tétel. *Legyen $G = (A, B, E)$ páros gráf. Ekkor*

$$\mathbb{P}(v \in \mathbf{I})\mathbb{P}(u \in \mathbf{I}) \leq \mathbb{P}(v, u \in \mathbf{I})$$

ha u és v azonos;

$$\mathbb{P}(v, u \in \mathbf{I}) \leq \mathbb{P}(v \in \mathbf{I})\mathbb{P}(u \in \mathbf{I})$$

amennyiben különböző csúcsosztályban vannak.

Bencs Ferenc [1] kiszámolta, mik ezek a korrelációk pontosan.

3.2.2. Tétel. (Bencs Ferenc [1]) *Legyen G gráf (nem feltétlen páros), $u, v \in V(G)$. Illetve legyen $\mathcal{B}_{u,v}$ az olyan összefüggő feszítő részgráfok halmaza, amik tartalmazzák u-t, v-t, és párosak. Ekkor*

$$I(G-u,\lambda)I(G-v,\lambda) - I(G,\lambda)I(G-\{u,v\},\lambda) = \sum_{H \in \mathcal{B}_{u,v}} (-1)^{d_H(u,v)+1} \lambda^{v(H)} I(G - N[H], \lambda)$$

ahol $d_H(u,v)$ az u és v csúcs távolsága a H gráfban, $N[H] = H \cup N_G(H)$, azaz H csúcsai és azok szomszédjai.

A Kotecký-Preiss tétel segítségével azonban be lehet bizonyítani, hogy ha van is közöttük korreláció, az nem nagy.

3.2.3. Állítás. *G gráf esetén legyen*

$$I(G,\lambda,\underline{z}) = \sum_{I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{v\in I} e^{z_v}.$$

Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial z_v} \log(I(G,\lambda,\underline{z}))|_{\underline{z}=0} = \mathbb{P}(v\in\mathbf{I}),$$

illetve

$$\frac{\partial^2}{\partial z_v \partial z_u} \log(I(G,\lambda,\underline{z}))|_{\underline{z}=0} = \mathbb{P}(u,v\in\mathbf{I}) - \mathbb{P}(u\in\mathbf{I})\mathbb{P}(v\in\mathbf{I}).$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség bizonyítása:

$$\frac{\partial}{\partial z_v} \log(I(G,\lambda,\underline{z})) = \frac{\frac{\partial}{\partial z_v} I(G,\lambda,\underline{z})}{I(G,\lambda,\underline{z})} = \frac{\sum\limits_{v\in I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}}{\sum\limits_{I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}},$$

A második összefüggés bizonyítása:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_v \partial z_u} \log(I(G,\lambda,\underline{z})) = \frac{\partial}{\partial z_u} \frac{\sum\limits_{v\in I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{w\in I} e^{z_w}}{\sum\limits_{I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{u,v\in I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{w\in I} e^{z_w}\right)\left(\sum\limits_{I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}\right)}{\left(\sum\limits_{I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(\sum\limits_{u\in I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}\right)\left(\sum\limits_{v\in I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}\right)}{\left(\sum\limits_{I\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|I|} \prod_{u\in I} e^{z_u}\right)^2}.$$

Ez pedig $\underline{z}=0$-ra megszorítva éppen $\mathbb{P}(u,v\in\mathbf{I}) - \mathbb{P}(u\in\mathbf{I})\mathbb{P}(v\in\mathbf{I})$. $\square$

3.2.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy léteznek $a(v)=a>0$, $b(v)=b>0$ konstans függvények úgy, hogy teljesítsik a Kotecký-Preiss-tétel feltételét. Ekkor*

$$|\mathbb{P}(u,v\in\mathbf{I}) - \mathbb{P}(u\in\mathbf{I})\mathbb{P}(v\in\mathbf{I})| \le C^{-bd(u,v)},$$

ahol $d(u,v)$ u és v távolsága, $C=C(a,b)$.

Bizonyítás. [15]

Azt tudjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial z_v \partial z_u} \log(I(G,\lambda,\underline{z}))|_{\underline{z}=0} = \mathbb{P}(u,v \in \mathbf{I}) - \mathbb{P}(u \in \mathbf{I})\mathbb{P}(v \in \mathbf{I}).$$

Ám a bal oldalt ki tudjuk máshogyan is számolni a klaszter kifejtés segítségével. A bal oldal:

$$\sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \phi(H(\Gamma))\lambda^{|\Gamma|} m_u(\Gamma) m_v(\Gamma),$$

ahol $m_x(\Gamma)$ az x csúcs multiplicitása Γ-ban. Ez azt jelenti, hogy csak azon klaszterek számítanak, amikben u és v is megtalálható. De minden klaszter összefüggő, azaz az ilyen Γ-k hossza legalább $d(u,v) + m_u(\Gamma) + m_v(\Gamma) - 1$.
Azaz a Kotecký-Preiss 3.1.10. Következményéből azt kapjuk, hogy

$$|\mathbb{P}(u,v \in \mathbf{I}) - \mathbb{P}(u \in \mathbf{I})\mathbb{P}(v \in \mathbf{I})| = \left| \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \phi(H(\Gamma))\lambda^{|\Gamma|} m_u(\Gamma) m_v(\Gamma) \right| \leq$$
$$\leq \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} \left|\phi(H(\Gamma))\lambda^{|\Gamma|} m_u(\Gamma) m_v(\Gamma)\right| = \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ u,v \in \Gamma}} \left|\phi(H(\Gamma))\lambda^{|\Gamma|} m_u(\Gamma) m_v(\Gamma)\right| =$$
$$= \sum_{s,t \geq 1} st \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ m_u(\Gamma)=s,\ m_v(\Gamma)=t}} \left|\phi(H(\Gamma))\lambda^{|\Gamma|}\right| \leq \sum_{s,t \geq 1} st \sum_{\substack{d(\Gamma,v) \leq 1 \\ |\Gamma| \geq d(u,v)+s+t-1}} \left|\phi(H(\Gamma))\lambda^{|\Gamma|}\right| \leq$$
$$\leq \sum_{s,t \geq 1} stae^{-b(d(u,v)+s+t-1)} = e^{-bd(u,v)} \sum_{s,t \geq 1} aste^{-b(s+t-1)} = Ce^{-b \cdot d(u,v)}.$$

□

3.3. Absztrakt polymer modell

A statisztikus fizikában gyakran az absztrakt polymer modellt használják a függetlenségi polinom helyett. Mint látni fogjuk, ez valójában ugyanaz a modell, kicsit máshogy megfogalmazva.

3.3.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ polymerek egy véges halmaza. Minden γ polymernek van egy komplex súlya, w_γ. Illetve $\mathcal{C}$-n van egy szimmetrikus kétváltozós reláció, $\sim$. Amennyiben $\gamma_1 \sim \gamma_2$, akkor azt mondjuk, hogy kompatibilisek, ha $\gamma_1 \not\sim \gamma_2$, akkor pedig inkompatibilisek (γ mindig inkompatibilis önmagával). Ezt a $(\mathcal{C}, \sim, w)$ hármast nevezzük absztrakt polymer modellnek.*

3.3.2. Definíció. *A*

$$\Xi(\mathcal{C}, \sim, \underline{w}) = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{C} \\ \textit{kompatibilis}}} \prod_{\gamma \in X} w_\gamma.$$

függvényt hívjuk az absztrakt polymer modell partíciós függvényének.

Ez a modell semmivel sem több, mint a függetlenségi polinom. Annyival másabb, hogy ha van egy G gráfunk, aminek valamilyen paraméterét/polinomját szeretnénk megérteni, akkor gyakran az absztrakt polymer modell $\mathcal{P} = \{S|\ S \subseteq A, |S| \geq 2\}$ valamely A halmazra. Ekkor kényelmesebb erről beszélni, mint egy új gráf függetlenségi polinomjáról. Illetve ha úgy adjuk meg A hatványhalmazán egy súlyfüggvényt, hogy $w(S) = 1$, amennyiben $|S| = 1$, akkor

$$\Xi(\mathcal{C}, \sim, \underline{w}) = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{C} \\ \text{kompatibilis}}} \prod_{\gamma \in X} w_\Gamma = \sum_{\pi \in \Pi} \prod_{S \in \pi} w(S),$$

ahol Π jelöli az A halmaz partícióinak a halmazát.

Itt is elmondható a klaszter fogalma, illetve a Kotecký-Preiss tétel.
Legyen $\Gamma \in \mathcal{C}^k$ valamely k-ra. Ekkor legyen $H(\Gamma)$ az inkompatibilitási gráfja, azaz akkor van él két Γ-beli elem között, ha inkompatibilisek. Γ-t klaszternek hívjuk, ha $H(\Gamma)$ összefüggő.

3.3.3. Tétel. (Kotecký-Preiss [13]) *Adott egy* $(\mathcal{C}, \sim, w)$ *aszbtrakt polymer modell. Amennyiben léteznek* $a, b : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ *függvények, amikre minden* $\gamma' \in \mathcal{C}$ *esetén*

$$\sum_{\gamma \not\sim \gamma'} w_\gamma e^{a(\gamma)+b(\gamma)} \leq a(\gamma').$$

Ekkor $\log(\Xi(\mathcal{C}, \sim, w))$ *sor abszolút konvergens, illetve minden* v *csúcsra*

$$\sum_{v \not\sim \Gamma \ \textit{klaszter}} |\phi(H(\Gamma))e^{b(\Gamma)} w_\gamma| \leq a(\gamma),$$

ahol $b(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} b(\gamma)$.

4. fejezet

Alkalmazások: a felső párosítási és függetlenségi becslés

Ebben a fejezetben bemutatjuk a klaszter kifejtés egy kombinatorikai, extremális gráfelméleti alkalmazását.

4.1. Korábbi eredmények és sejtések

A probléma az alábbi: szeretnénk az $M(G,\lambda)$, $I(G,x)$, $m_k(G)$, $i_k(G)$ értékeire alsó és felső becslést adni.

4.1.1. Tétel. (Zhao [18]) *Minden G d-reguláris gráfra és $\lambda \geq 0$ esetén*

$$\frac{1}{v(G)}\log(I(G,\lambda)) \leq \frac{1}{2d}\log(I(K_{d,d},\lambda)).$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $\lambda = 0$ vagy G véges sok $K_{d,d}$ diszjunkt uniója.

A párosítások generátorfüggvényre is van egy teljesen hasonló állítás:

4.1.2. Tétel. ([6]) *Minden G d-reguláris gráfra és $\lambda \geq 0$ esetén*

$$\frac{1}{v(G)}\log(M(G,\lambda)) \leq \frac{1}{2d}\log(M(K_{d,d},\lambda)).$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $\lambda = 0$ vagy G véges sok $K_{d,d}$ diszjunkt uniója.

Amennyiben nem a polinom, hanem az együtthatókat szeretnénk becsülni, már nem ennyire megértett a helyzet.

4.1.3. Sejtés. Legyen G d-reguláris, n csúcsú gráf, ahol $2d$ osztja n-et. Ekkor

$$i_k(G) \leq i_k(H_{d,n}),$$

ahol $H_{d,n}$ az a gráf, ami n csúcsú és diszjunkt $K_{d,d}$ gráfok uniója.

4.1.4. Sejtés. Legyen G d-reguláris, n csúcsú gráf, ahol $2d$ osztja n-et. Ekkor

$$m_k(G) \leq m_k(H_{d,n}),$$

ahol $H_{d,n}$ az a gráf, ami n csúcsú és diszjunkt $K_{d,d}$ gráfok uniója.

Erre a sejtésre még csak gyengébb válaszok ismertek:

4.1.5. Tétel. ([5]) *Minden $d \geq 3$ létezik N úgy, hogy minden $n > N$-re, ami osztható $2d$-vel, ha G egy n csúcsú, d-reguláris gráf, akkor*

$$i_k(G) \leq i_k(H_{d,n}) \quad \textit{és} \quad m_k(G) \leq m_k(H_{d,n}).$$

Továbbá egyenlőség csak akkor lehet bármely $4 \leq k \leq n/2$ esetén, ha G izomorf $H_{d,n}$-nel.

Ebben a fejezetben a 4.1.5. Tétel bizonyításával fogunk foglalkozni, [5] alapján.

4.2. Előkészületek

4.2.1. Tétel. ([7]) *Minden $\varepsilon > 0$ valós és $d \geq 2$ egész számra létezik egy $N_1 = N_1(\varepsilon, d)$ úgy, hogy minden $n > N_1$ egészre, ami osztható $2d$-vel, amennyiben G egy d-reguláris, n csúcsú gráf, akkor minden $k \geq \varepsilon n$ esetén*

$$m_k(G) \leq m_k(H_{d,n}) \quad \textit{és} \quad i_k(G) \leq i_k(H_{d,n}).$$

Egyenlőség csakis akkor lehet $k \leq n/2$ esetén, ha G izomorf $H_{d,n}$-nel.

Ezt a tételt nem fogjuk bizonyítani, ugyanis a bizonyítás menete erősen eltér a szakdolgozat témájától. A klaszter kifejtésre majd $k \leq \varepsilon n$ esetben lesz szükség valamely jó $\varepsilon > 0$ értékre.

4.2.2. Definíció. *Amennyiben adott két gráf, G, H, akkor* $\hom(G, H)$*-val jelöljük a G-ből H-ba menő homomorfizmusok számát,* $\mathrm{inj}(G, H)$*-val pedig az injekciók számát. Ezen kívül* $t(G, H) = \frac{1}{v(H)^{v(H)}} \hom(G, H)$*-vel jelöljük a homomorfizmussűrűséget.*

4.2.3. Definíció. *Egy H gráfot (d, g)-optimálisnak hívunk, ha d-reguláris, bősége g és létezik $\eta = \eta(d, g) > 0$ úgy, hogy minden összefüggő G d-reguláris gráfra, aminek bősége legalább $g - 1$ és nem izomorf H-val, arra*

$$\frac{1}{v(G)}\mathrm{inj}(C_g, G) \leq \frac{1}{v(H)}\mathrm{inj}(C_g, H) - \eta.$$

Vagy ekvivalensen

$$\mathrm{inj}(C_g, G) \leq \frac{v(G)}{v(H)}\mathrm{inj}(C_g, H) - v(G)\eta.$$

4.2.4. Megjegyzés. Úgy is definiálhatnánk a (d, g)-optimálisságot, hogy $\exists\eta > 0$ úgy, hogy minden G d-reguláris gráfra, aminek nincs H-val izomorf összefüggőségi komponense

$$\frac{1}{v(G)}\mathrm{inj}(C_g, G) \leq \frac{1}{v(H)}\mathrm{inj}(C_g, H) - \eta.$$

Ugyanis $G = \sqcup_{j=1}^{r} G_j$ esetén $\mathrm{inj}(X, G) = \sum_j \mathrm{inj}(X, G_j)$ minden X összefüggő gráfra.

4.2.5. Állítás. *A $K_{d,d}$ gráfok $(d, 4)$-optimálisak.*

Bizonyítás. Legyen G összefüggő d-reguláris gráf, ami nem izomorf $K_{d,d}$-vel, illetve C_g csúcsai sorrendben v_1, v_2, v_3, v_4. Most számoljuk az olyan injekciókat, amik v_1-t egy kijelölt $v \in V(G)$-be viszi. Jelöljük az ilyenek számát $\mathrm{inj}_v(C_4, G)$-vel. Ekkor

$$\mathrm{inj}(C_4, G) = \frac{1}{v(G)} \sum_{v \in V(G)} \mathrm{inj}_v(C_4, G).$$

Az olyan injekciók, amik v_1-et v-be viszik, az alábbi féle képpen nézhetnek ki: v_2 mehet d csúcsba, v_4 mehet a maradék $d - 1$ bármelyikébe. Ezen kívül a v_3 csúcs olyan csúcsba mehet, ami össze van kötve v_2 és v_4 képével is, de nem a v_1 képe, ez lehet $d - 1$ fajta. Azaz $\mathrm{inj}_v(C_4, G) \leq d(d-1)^2$. Ám ennyi nem lehet, mivel a v_3 csúcs akkor mehetne minden (v_2, v_4) pár esetén $d - 1$ csúcsba, ha a v csúcs 2 sugarú környezete éppen úgy néz ki, mint $K_{d,d}$. Ám ez nem lehet, így $\mathrm{inj}_v \leq d(d-1)^2 - 2$. De bármely $v' \in V(K_{d,d})$ esetén $\mathrm{inj}_{v'}(C_4, K_{d,d}) = d(d-1)^2$. Azaz

$$\frac{1}{v(G)}\mathrm{inj}(C_4, G) \leq d(d-1)(d-1) - 2 = \frac{1}{2d}\mathrm{inj}(C_4, K_{d,d}) - 2.$$

□

4.2.6. Tétel. *[5] Legyen $g \geq 4$ páros, legyen H egy (d,g)-optimális gráf. Ekkor létezik $\varepsilon = \varepsilon(d,g)$ a következő feltételekkel: amennyiben G egy d-reguláris gráf, bősége legalább $g-1$, n csúcsú, ahol n osztható $v(H)$-val. Ekkor minden $k \leq \varepsilon n$-re*

$$i_k(G) \leq i_k(H_n) \quad \textit{és} \quad m_k(G) \leq m_k(H_n),$$

ahol H_n $n/v(H)$ darab H diszjunkt uniója. Illetve egyenlőség csak akkor lehet $k \geq g$ esetén, ha G izomorf H_n-nel.

4.2.7. Megjegyzés. Mi ezt a tételt csakis a függetlenségi polinom együtthatóira fogjuk bizonyítani.

4.2.8. Megjegyzés. Ebben az állításban nem szerepel, hogy csak nagy csúcsszámú gráfokra igaz, igaz minden gráfra. Bár ez valójában ez semmivel sem mond többet, mivel ha ε-t tetszőlegesen kicsinek megválasztjuk, ekkor kis n-re semmit mondó az állítás.

Bizonyítás. [4.1.5. Tétel bizonyítása] Mivel $K_{d,d}$ $(d,4)$ optimális, ezért 4.2.1. illetve 4.2.6. Tételből következik a bizonyítandó állítás. $\square$

Tehát elég lenne 4.2.6. Tételt bebizonyítanunk. Ehhez szükségünk lesz a klaszter kifejtésere. Illetve csak függetlenségi együtthatókra látjuk be az állítást, a párosításokkal most nem foglalkozunk.

4.2.9. Lemma. *Legyen G d-reguláris gráf n csúcson, F pedig egy fa. Ekkor*

$$t(F, G^\circ) = \left(\frac{d+1}{n}\right)^{v(F)-2}.$$

Bizonyítás. F csúcsszámára való indukció, $t(F, G^\circ) = \frac{d+1}{n} t(F - v, G^\circ)$, ahol v egy levél F-ben. $\square$

4.3. Partíciós függvény

Az a célunk, hogy a $G = (V, E)$ gráfban felírjuk $i_k(G)$-t, mint egy absztrakt polymer modell partíciós függvénye, hogy alkalmazhassuk rá a Kotecký-Preiss tételt. Emlékeztetőül, jelöljük $K_k = ([k], E_k)$ a teljes gráf k csúcson.

4.3.1. Állítás. *Bármely G gráfra és k egészre*

$$i_k(G) = \frac{n^k}{k!} \sum_{\pi \in \Pi} \prod_{S \in \pi} \sum_{F \in \mathcal{C}_S} (-1)^{e(F)} t(F, G^\circ).$$

Bizonyítás.

$$i_k(G) = \frac{1}{k!} \sum_{\varphi:[k]\to V} \prod_{(i,j)\in E_k} \mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\notin E^\circ} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\varphi:[k]\to V} \prod_{(i,j)\in E_k} \left(1 + \mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\notin E^\circ} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\varphi:[k]\to V} \sum_{F\subseteq E_k} \prod_{(i,j)\in F} \left(-\mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ}\right).$$

Jelöljük Π-vel a $[k]$ halmaz partícióinak halmazát. $S \subseteq [k]$ esetén jelöljük $\mathcal{C}_S$-sel az összes összefüggő gráfot, aminek csúcshalmaza S. Ekkor egy adott $\varphi : [k] \to V$ függvényre

$$\sum_{F\subseteq E_k} \prod_{(i,j)\in F} \left(-\mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ}\right) = \sum_{\pi\in\Pi} \prod_{S\in\pi} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} \prod_{(i,j)\in E(F)} \left(-\mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ}\right).$$

Ekkor $S \subseteq V$ esetén legyen

$$w_G(S) = \frac{1}{n^{|S|}} \sum_{\varphi:S\to V} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} \prod_{(i,j)\in E(S)} \left(-\mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ}\right) = \sum_{F\in\mathcal{C}_S} (-1)^{e(S)} t(F, G^\circ).$$

Ekkor

$$i_k(G) = \frac{n^k}{k!} \sum_{\pi\in\Pi} \prod_{S\in\pi} w_G(S),$$

ugyanis a $\varphi : [k] \to S$ függvényt feltördelhetjük $\varphi|_S : S \to V$ függvényekre $\forall S \in \Pi$. $\square$

Mivel $w(S) = 1$, ha $|S| = 1$, így valójában ez egy absztrakt polymer modell, ahol $\mathcal{C} = \{S \subseteq [k] \mid |S| \geq 2\}$; akkor kompatibilisek, ha diszjunktak; a w_G súly fentebb adott. Jelöjük ezt a polymer modellt $(\mathcal{C}, \sim, w_G)$-vel. Illetve legyen $\Xi(\mathcal{C}, \sim, w_G) = \Xi_k(G)$. Ekkor

$$i_k(G) = \frac{n^k}{k!} \sum_{\pi\in\Pi} \prod_{S\in\pi} w_G(S) = \frac{n^k}{k!} \sum_{\substack{X\subseteq\mathcal{C} \\ \text{kompatibilis}}} \prod_{S\in X} w_G(S) = \frac{n^k}{k!} \Xi_k(G).$$

Azaz

$$i_k(G) = \frac{n^k}{k!} \Xi_k(G).$$

Most pedig az a célunk, hogy a Kotecký-Preiss tételt használjuk.

4.3.2. Állítás.

$$|w(S)| \leq |S|^{|S|-2}\left(\frac{d+1}{n}\right)^{|S|-1}.$$

Bizonyítás.

$$w_G(S) = \frac{1}{n^{|S|}} \sum_{\varphi:S\to V} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} \prod_{(i,j)\in E(F)} \left(-\mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ}\right).$$

Azaz a Penrose-egyenlőtlenséget (1.3.2. Tétel) használva a $w_e = -\mathbb{1}_{\varphi(e)\in E^\circ}$ függvényre azt kapjuk, hogy

$$|w_G(S)| \leq \frac{1}{n^{|S|}} \sum_{\varphi:S\to V} \left| \sum_{F\in\mathcal{C}_S} \prod_{(i,j)\in E(F)} \left(-\mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{|S|}} \sum_{\varphi:S\to V} \sum_{F\in\tau_S} \prod_{(i,j)\in E(F)} \left|-\mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ}\right| = \frac{1}{n^{|S|}} \sum_{\varphi:S\to V} \sum_{F\in\tau_S} \prod_{(i,j)\in E(F)} \mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ} =$$

$$= \frac{1}{n^{|S|}} \sum_{F\in\tau_S} \sum_{\varphi:S\to V} \prod_{(i,j)\in E(F)} \mathbb{1}_{(\varphi(i),\varphi(j))\in E^\circ} = \frac{1}{n^{|S|}} \sum_{F\in\tau_S} \hom(F,G^\circ) =$$

$$= \sum_{F\in\tau_S} \frac{1}{n^{|S|}} \hom(F,G^\circ) = \sum_{F\in\tau_S} t(F,G^\circ).$$

Ez pedig a 4.2.9. Lemma és a Cayley-formula miatt éppen

$$\sum_{F\in\tau_S} t(F,G^\circ) = |S|^{|S|-2}\left(\frac{d+1}{n}\right)^{|S|-1}$$

□

4.3.3. Állítás. *Az $a(S) = |S|$ és $b(S) = K(|S|-1)$, ahol $K = \log\frac{n}{(d+1)e^5k} \geq 0$ függvények választásával teljesül a Kotecký-Preiss tétel feltétele, azaz*

$$\sum_{S\not\sim S'} |w(S)|e^{(K+1)|S|-K} \leq |S'|.$$

Bizonyítás. Elég belátni, hogy

$$\sum_{v\in S} |w(S)|e^{(K+1)|S|-K} \leq 1,$$

ugyanis ezt összeadhatjuk minden $v\in S'$-re. Megnézzük, hány $v\in S$-van, és ezeknek mekkora a súlya.

$$\sum_{v\in S} |w(S)|e^{(K+1)|S|-K} = \sum_{l=2}^{k} \sum_{\substack{v\in S\\ |S|=l}} |w(S)|e^{(K+1)|S|-K} \leq$$

$$\leq \sum_{l=2}^{k} \binom{k-1}{l-1} l^{l-2} \left(\frac{d+1}{n}\right)^{l-1} e^{(K+1)l-K} \leq \sum_{l=2}^{k} \binom{k}{l-1} l^{l-2} \left(\frac{(d+1)e^K}{n}\right)^{l-1} e^l \leq$$

$$\leq \sum_{l=2}^{k} \left(\frac{ek}{l-1}\right)^{l-1} l^{l-2} \left(\frac{(d+1)e^{K+1}}{n}\right)^{l-1} e = e \sum_{l=2}^{k} \frac{l^{l-2}}{(l-1)^{l-1}} \left(\frac{(d+1)ke^{K+2}}{n}\right)^{l-1} =$$

$$= e \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l} \left(1 + \frac{1}{l-1}\right)^{l-1} \left(\frac{(d+1)ke^{K+2}}{n}\right)^{l-1} \leq e \sum_{l=2}^{k} 1 \cdot e \left(e^K \frac{(d+1)ke^2}{n}\right)^{l-1} =$$

$$= e^2 \sum_{l=2}^{k} \left(\frac{n}{(d+1)e^5 k} \frac{(d+1)ke^2}{n}\right)^{l-1} = e^2 \sum_{l=2}^{k} e^{-3(l-1)} \leq e^2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-3l} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-3}} \approx 0,37 < 1.$$

□

Tehát használhatjuk a Kotecký-Preiss tételt, azaz $\log \Xi_k(G)$ sorfejtés konvergál, illetve

$$\sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ \Gamma \not\sim S}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| e^{b(\Gamma)} \leq a(S).$$

Jelöljük $|\Gamma| = \sum_{S \in \Gamma} 1$-val a Γ hosszát, $||\Gamma|| = \sum_{S \in \Gamma} |S|$-val pedig a tagjainak méretének az összegét (emlékeztetőül $a(S) = |S|$).

4.3.4. Lemma.

$$\sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma|| - |\Gamma| \geq t}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| \leq k\gamma^t,$$

ahol $\gamma = e^{-K} \leq 1$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a

$$\sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ \Gamma \not\sim S}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| e^{b(\Gamma)} \leq a(S)$$

becslést az $S = [k]$ halmazra. Ezzel az S-sel az összes polymer inkompatibilis, azaz az összes klaszter is, tehát azt kapjuk, hogy

$$\sum_{\Gamma \text{ klaszter}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| e^{b(\Gamma)} = \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| e^{K(||\Gamma|| - |\Gamma|)} \leq k.$$

$$k \geq \sum_{\Gamma \text{ klaszter}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| e^{K(||\Gamma|| - |\Gamma|)} \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma|| - |\Gamma| \geq t}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| e^{K(||\Gamma|| - |\Gamma|)} \geq \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma|| - |\Gamma| \geq t}} |\varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma)| e^{tK},$$

azaz

$$\sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma||-|\Gamma|\geq t}} |\varphi(H(\Gamma))w_G(\Gamma)| \leq k\left(e^{-K}\right)^t = k\gamma^t.$$

□

Most már rátérünk a 4.2.6. Tétel bizonyítására, a független halmaz esetére. Mostantól feltesszük, hogy H egy (d,g)-optimális gráf, H_n pedig H-k diszjunkt uniója úgy, hogy n csúcsa legyen.

4.4. Kis k értékek

A $0 \leq k \leq g-1$ értéket még klaszter kifejtés nélkül, a partíciós függvény segítségével meg tudjuk vizsgálni.

4.4.1. Definíció. *F gráf esetén legyen*

$$t(F) = t(F, H_n^\circ) - t(F, G^\circ).$$

4.4.2. Megfigyelés. Amennyiben F egy fa, akkor $t(F) = 0$, illetve mivel G bősége legalább $g-1$, míg H_n-nek g, így $t(C_{g-1}) \leq 0$, illetve ha $v(F) \leq g-2$, akkor $t(F) = 0$.

Azt tudjuk, hogy

$$i_k(G) = \frac{n^k}{k!}\sum_{\pi\in\Pi}\prod_{S\in\pi} w_G(S) = \frac{n^k}{k!}\sum_{\pi\in\Pi}\prod_{S\in\pi}\sum_{F\in\mathcal{C}_S}(-1)^{e(F)}t(F,G^\circ).$$

4.4.3. Állítás. *Ha g páros, akkor $k \leq g-2$, esetén $i_k(H_n) = i_k(G)$, illetve $k = g-1$ esetén pedig $i_{g-1}(H_n) \geq i_{g-1}(G)$, egyenlőség pontosan akkor, ha G bősége is g.*

4.4.4. Megjegyzés. Valójában azt bizonyítottuk, hogy az $i_k(G)$ független halmazok száma egy lokálisan kiszámolható érték, azaz ha ismerjük a csúcsok $\lceil k/2 \rceil$ sugarú környezetét, akkor tudjuk az $i_k(G)$ értékét. És $k \leq g-2$ esetén ezek a környezetek ugyanolyanok. Kis k értékekre triviális: $i_1(G) = v(G)$, $i_2(G) = \binom{n}{2} - e(G)$, ... Az absztrakt polymer modell pedig megmutatja, hogy ilyen képleteket tudunk gyártani nagyobb k-ra is.

Bizonyítás.

$$i_k(H_n) - i_k(G) = \frac{n^k}{k!}(\Xi_k(H_n) - \Xi_k(G)) =$$

$$= \frac{n^k}{k!} \sum_{\pi\in\Pi} \prod_{S\in\pi} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} (-1)^{e(F)} t(F, H_n^\circ) - \frac{n^k}{k!} \sum_{\pi\in\Pi} \prod_{S\in\pi} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} (-1)^{e(F)} t(F, G^\circ) =$$
$$= \frac{n^k}{k!} \sum_{\substack{\pi\in\Pi \\ |\pi|\geq 2}} \prod_{S\in\pi} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} (-1)^{e(F)} t(F, H_n^\circ) - \frac{n^k}{k!} \sum_{\substack{\pi\in\Pi \\ |\pi|\geq 2}} \prod_{S\in\pi} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} (-1)^{e(F)} t(F, G^\circ) +$$
$$+ \frac{n^k}{k!} \sum_{F\in\mathcal{C}_{[k]}} (-1)^{e(F)} t(F, H_n^\circ) - \frac{n^k}{k!} \sum_{F\in\mathcal{C}_{[k]}} (-1)^{e(F)} t(F, G^\circ).$$

Ekkor

$$\frac{n^k}{k!} \sum_{\substack{\pi\in\Pi \\ |\pi|\geq 2}} \prod_{S\in\pi} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} (-1)^{e(F)} t(F, H_n^\circ) - \frac{n^k}{k!} \sum_{\substack{\pi\in\Pi \\ |\pi|\geq 2}} \prod_{S\in\pi} \sum_{F\in\mathcal{C}_S} (-1)^{e(F)} t(F, G^\circ) = 0,$$

mivel minden S csúcsszáma, amire nézzük $t(F, ..)$-t legfeljebb $k-1 \leq g-2$, így a megfigyelés miatt $t(F, H_n^\circ) = t(F, G^\circ)$.
Tehát marad

$$\sum_{F\in\mathcal{C}_{[k]}} (-1)^{e(F)} t(F, H_n^\circ) - \sum_{F\in\mathcal{C}_{[k]}} (-1)^{e(F)} t(F, G^\circ)$$

becslése. Ha F-nek van egy x levele, akkor $t(F, ..) = -\frac{d+1}{n} t(F-x, ..)$. És $F-x$-nek már legfeljebb $g-2$ csúcsa van, így itt is egyenlőség áll fenn. Amennyiben F-ben van egy legfeljebb $g-2$ hosszú kör, akkor a G és H_n nagy bősége miatt csakis faszerű homomorfizmusunk (nullhomotóp leképezés) lehet, tehát minden csúcs képe egy rövid körbeli csúcs $(g-2)/2$ sugarú környezetébe képződik. Így marad az az eset, ha $F = C_{g-1}$. Ekkor pedig a fenti megfigyelés miatt $t(C_{g-1}) \leq 0$, így g párossága miatt kész vagyunk. $\square$

Tehát mostantól feltehető, hogy $k \geq g$. A bizonyítást két részre vágjuk attól függően, hogy a G gráf mennyire hasonlít H_n-hez. Legyen $G = G_0 \cup G_H$, ahol G_H a H-val izomorf összefüggőségi komponensek uniója, G_0 a többi komponens uniója. Hasonlóan $H_n = H_0 \cup G_H$. Illetve legyen

$$\alpha = \frac{v(G_0)}{n}.$$

A két eset, amiket külön fogunk kezelni, az alábbiak: $1/10 \leq \alpha$; $0 < \alpha < 1/10$.

4.5. $1/10 \leq \alpha$ eset

Ez az eset azt jelenti, hogy a G gráfunk jelentősen eltér a H-tól. Valójában itt fogjuk használni a klaszter kifejtést, a másik eset pedig az itteni eredményeket fogja használni.

Az 1/10 konstans választása teljesen tetszőleges, valójában bármilyen $(0,1)$-beli számot választhattunk volna.

4.5.1. Lemma. *Ha $\alpha \geq 1/10$, akkor létezik $\delta = \delta(d,g)$ úgy, hogy*

$$t(C_g) \geq \delta n^{1-g} + \frac{g}{n} t(C_{g-1}).$$

Bizonyítás.

4.5.2. Definíció. *Adott F gráf, $\pi \in \Pi(V(G))$. Ekkor F/π az a gráf, amit a π-beli csúcsosztályokat egyesítjük, a többszörös, illetve a hurokéleket töröljük.*

Ekkor

$$\hom(F, G^\circ) = \sum_{\pi \in \Pi(V(G))} \mathrm{inj}(F/\pi, G).$$

Legyen $F = C_g$. Mivel G és H_n bősége legalább $g-1$, így $\mathrm{inj}(F/\pi, ..) \neq 0$ akkor, ha C_G/π egy fa, vagy C_l, $l \in \{g-1, g\}$.

- Ha C_g/π egy fa, akkor legfeljebb $g/2$ éle lehet, így az injekcióinak száma H_n-be és G-be megegyezik.
- Ha $C_g/\pi = C_{g-1}$, ekkor H_n-be injekció 0, míg G-be lehet, hogy van. Ahhoz, hogy $C_g/\pi = C_{g-1}$ legyen, g-féle képpen választhatjuk ki a π-t.
- Ha $C_g/\pi = C_g$, akkor H_n-be van injekció, G-be meg lehet hogy van.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$t(C_g) = t(C_g, H_n^\circ) - t(C_g, G^\circ) = \frac{1}{n^g}\left(\mathrm{inj}(C_g, H_n) - \mathrm{inj}(C_g, G) - \mathrm{inj}(C_{g-1}, G) \cdot g\right).$$

Most használni szeretnénk H (d,g)-optimalitását. Tehát tudjuk, hogy

$$\mathrm{inj}(C_g, G) \leq \frac{n}{v(H)}\mathrm{inj}(C_g, H) - \alpha n \eta \leq \frac{n}{v(H_n)}\mathrm{inj}(C_g, H_n) - \frac{n}{10}\eta = \mathrm{inj}(C_g, H_n) - \frac{n}{10}\eta.$$

Az α onnan jön be, hogy az optimalitást csakis G_0-ra alkalmazhatjuk, a G_H részre egyenlőség van.

Azaz legyen $\delta = \eta/10$. Ekkor a fenti becslést használva

$$t(C_g) \geq \frac{1}{n^g}(n\delta - \mathrm{inj}(C_{g-1}, G)g) = \delta n^{1-g} + \frac{g}{n} t(C_{g-1}),$$

ugyanis $\frac{1}{n^{g-1}}\mathrm{inj}(C_{g-1}, G) = t(C_{g-1})$ igaz a 4.4.3. Állítás bizonyítása alapján. □

Most már közel vagyunk az $\alpha \geq 1/10$ eset bizonyításhoz:

4.5.3. Lemma. *Létezik* $\varepsilon_1 = \varepsilon(d,g) > 0$ *és* $c = c(d,g) > 0$ *úgy, hogy* $\alpha \geq 1/10$ *és* $g \leq k \leq \varepsilon_1 n$ *esetén*

$$i_k(G) \leq e^{-ck^g n^{1-g}} i_k(H_n).$$

Bizonyítás. Ehhez a bizonyításhoz fogjuk használni a klaszter kifejtést. Már beláttuk, hogy amennyiben $k \leq e^{-5}n/(d+1)$, akkor

$$\left| \log(\Xi_k(G)) - \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma||-|\Gamma| \leq g-1}} \varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma) \right| \leq k\gamma^g,$$

ahol $\gamma = (d+1)e^5 k/n$. Azaz

$$\log \frac{i_k(H_n)}{i_k(G)} = \log \frac{\Xi_k(H_n)}{\Xi_k(G)} \geq \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma||-|\Gamma| \leq g-1}} \varphi(H(\Gamma)) w_{H_n}(\Gamma) - \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma||-|\Gamma| \leq g-1}} \varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma) - 2k\gamma^k$$

Tehát elég csak a $||\Gamma||-|\Gamma| \leq g-1$ tulajdonságú klasztereket megértenünk. Ám tudjuk, hogy az ilyen klaszterek hogy nézhetnek ki:

1. Γ minden elemének mérete legfeljebb $g-2$.

2. $|\Gamma| = 1$, és $\Gamma = (S)$, akkor $|S| = g-1$ vagy g.

3. $|\Gamma| = 2$, $\Gamma = (S,T)$, egyik 2, másik $g-1$ elemű.

Ha Γ a legelső típusú, akkor $w_{H_n}(\Gamma) = w_G(\Gamma)$, a 4.4.3. Állítás alapján. A másik két lehetőségből pedig kevés klaszter van, már csak őket kell megvizsgálni.
Azaz

$$\sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma||-|\Gamma| \leq g-1}} \varphi(H(\Gamma)) w_{H_n}(\Gamma) - \sum_{\substack{\Gamma \text{ klaszter} \\ ||\Gamma||-|\Gamma| \leq g-1}} \varphi(H(\Gamma)) w_G(\Gamma) =$$

$$= \sum_{\substack{\Gamma=(S) \\ |S| \in \{g-1,g\}}} \varphi(H(\Gamma)) \left[w_{H_n}(\Gamma) - w_G(\Gamma) \right] + 2 \sum_{\substack{\Gamma=(S,T) \text{ klaszter} \\ |S|=2,\ |T|=g-1}} \varphi(H(\Gamma)) \left[w_{H_n}(\Gamma) - w_G(\Gamma) \right] =$$

$$= \sum_{|S| \in \{g-1,g\}} w_{H_n}(S) - w_G(S) + \sum_{\substack{|S|=2,\ |T|=g-1 \\ S \cap T \neq \emptyset}} \frac{-1}{2} \left[w_{H_n}(S) w_{H_n}(T) - w_G(S) w_G(T) \right].$$

- $\Gamma = (S)$, $|S| = g-1$. Ekkor $F \in \mathcal{C}_S$ esetén $t(F) = 0$ ha F egy fa, vagy tartalmaz $g-1$-nél kisebb kört. Azaz csak akkor lehet nem nulla, ha $F \cong C_{g-1}$, amit $\frac{(g-2)!}{2}$ féle képpen lehet,

$$w_{H_n}(S) - w_G(S) = (-1)^{g-1} \frac{(g-2)!}{2} t(C_{g-1}) = (-1) \frac{(g-2)!}{2} t(C_{g-1}),$$

mivel g páros szám.

- $\Gamma = (S)$, $|S| = g$. Ekkor már több lehetőség van olyan $F \in \mathcal{C}_S$-re, amire $t(F) \neq 0$. Lehetséges, hogy $F \cong C_g$, ez lehet $\frac{(g-1)!}{2}$ féle képpen. Az is lehet, hogy F egy C_{g-1} egy lelógó levéllel, ezek száma $\frac{g!}{2}$, ekkor 4.5.1. Lemma bizonyítása miatt

$$|t(F)| = n^{-g}[\text{inj}(F,G) + (g-1)\text{inj}(C_{g-1},G)] \leq$$
$$n^{-g}[(d-2)\text{inj}(C_{g-1},G) + (d+g)\text{inj}(C_{g-1},G)] \leq \frac{d+g}{n}|t(C_{g-1})| = O\left(\frac{1}{n}\right) t(C_{g-1}).$$

  Amennyiben $g \geq 6$, akkor a körön belülre nem lehet behúzni élt, mert lenne egy sokkal rövidebb kör, így csak faszerű homomorfizmusunk lehet. Ám ha $g = 4$, akkor még lehet két F gráf, amire $t(F) \neq 0$: K_4, és $K_4 - e$ valamely e élre. Ekkor könnyű végiggondolni, hogy

$$t(F) = O\left(\frac{1}{n}\right) t(C_3),$$

  illetve korlátos sok ilyen összefüggő részgráf van. Azaz

$$w_{H_n}(S) - w_G(S) =$$
$$(-1)^g \frac{(g-1)!}{2} t(C_g) + O\left(\frac{1}{n}\right) t(C_{g-1}) = \frac{(g-1)!}{2} t(C_g) + O\left(\frac{1}{n}\right) t(C_{g-1}).$$

- Maradt a $\Gamma = (S,T)$ eset, ahol $|S| = g-1$, $|T| = 2$. Ekkor, mivel $w_{H_n}(S)$ és $w_G(S)$ különbség ki lett számolva, $w(T)$ pedig $\frac{d+1}{2}$, így ekkor

$$w_{H_n}(S)w_{H_n}(T) - w_G(S)w_G(T) = \frac{(g-2)!}{2} t(C_{g-1}) \frac{d+1}{n}.$$

Tehát a becsülendő kifejezés

$$\geq \binom{k}{g-1}(-1)\frac{(g-2)!}{2} t(C_{g-1}) + \binom{k}{g}\left(\frac{(g-1)!}{2} t(C_g) + O\left(\frac{1}{n}\right) t(C_{g-1})\right) -$$
$$-\frac{(d+1)(g-2)!}{4n} t(C_{g-1}) - 2k\gamma^g =$$

g, d rögzített konstans, egy jó ε értéket szeretnénk találni úgy, hogy ha $k/n \leq \varepsilon$, akkor ez az érték pozitív. Tehát valójában k és n nagyságrendjét kellene megérteni az egyes tagokban. Itt ha $f = \Omega(g)$, ahol g pozitív, akkor f is az. O esetén nincs ilyen megkötés.

$$= -\Omega\left(k^{g-1}\right) t(C_{g-1}) + \Theta\left(k^g\right) t(C_g) + O\left(\frac{k^g}{n}\right) t(C_{g-1}) - O\left(\frac{k^{g+1}}{n^g}\right) \geq$$

$$\geq \Omega\left(k^g n^{1-g}\right) + O\left(\frac{k^g}{n}\right) t(C_{g-1}) - \Omega\left(k^{g-1}\right) t(C_{g-1}) + O\left(\frac{k^{g+1}}{n^g}\right).$$

Beírva $\varepsilon = k/n$-et, azt kapjuk hogy

$$= \Omega\left(\varepsilon^g n\right) + (-t(C_{g-1}))\left[\Omega\left(\varepsilon^{g-1} n^{g-1}\right) - O\left(\varepsilon^g n^{g-1}\right)\right] + O\left(\frac{\varepsilon^{g+1}}{n}\right).$$

Amennyiben ε-t elég kicsinek választjuk, akkor ennek értéke legalább $\Omega\left(k^g n^{1-g}\right)$, tehát pozitív bármely n, k párra, ahol $k/n \leq \varepsilon$. □

4.6. $0 < \alpha < 1/10$ eset

Már csak ez az eset van vissza, hogy bebizonyítsuk a tételt. A bizonyítás során használjuk az előző lemmát a G_0 és H_0 gráfokra, majd megadunk egy kis ε_2-t (ez még ε_1-hez képest is nagyon kicsi lesz), amire már $g \leq k \leq \varepsilon_2 n$ esetén $i_k(G) \leq i_k(H_n)$, akkor is ha $0 < \alpha < 1/10$. Ehhez pár kombinatorikus leszámlálásra lesz szükségünk.

4.6.1. Lemma. *G d-reguláris gráf, n csúcson. Ekkor*

$$\frac{t+1}{n-t} \leq \frac{i_t(G)}{i_{t+1}(G)} \leq \frac{t+1}{n-(d+1)t}.$$

Bizonyítás. Egy adott t nagyságú független halmazt legalább $n-(d+1)t$, legfeljebb $n-t$ féle képpen lehet kiegészíteni, hogy egy $t+1$ elemű független halmazt kapjuk. □

Tehát

$$i_k(G) = \sum_{j=0}^{k} i_j(G_0) i_{k-j}(G_H),$$
$$i_k(H_n) = \sum_{j=0}^{k} i_j(H_0) i_{k-j}(G_H).$$

Azt tudjuk 4.5.3. Lemmából, hogy $i_j(H_n) \geq i_j(G_H)$ $j \leq \varepsilon_1 \alpha n$ esetén. Így tudjuk, hogy

$$i_k(H_n) - i_k(G) \geq \sum_{j=\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}^{k} (i_j(H_0) - i_j(G_0)) i_{k-j}(G_H).$$

Tehát elég bizonyítani, hogy a kifejezés jobb oldala nemnegatív. Most két esetre bontjuk a bizonyítást attól függően, hogy g vagy $\varepsilon_1 \alpha n$ a kisebb.

1. eset: $\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor \le g$. Ekkor mivel tudjuk az állítást $k \le g-1$ esetén is, így elég belátni, hogy

$$\sum_{j=g-1}^{k} (i_j(H_0) - i_j(G_0)) i_{k-j}(G_H) \ge 0$$

vagy

$$\sum_{j=g}^{k} (i_j(H_0) - i_j(G_0)) i_{k-j}(G_H) \ge 0.$$

4.6.2. Állítás. *$i_{g-1}(H_0) > i_{g-1}(G_0)$ vagy $i_g(H_0) > i_g(G_0)$.*

Bizonyítás. 4.4.3. Állításból tudjuk, hogy $k \ge g-2$ esetén egyenlőség, $k = g-1$ esetén pedig $i_{g-1}(H_0) \ge i_{g-1}(G_0)$. Tegyük fel, hogy egyik állítás sem igaz, azaz minden $k \ge g-1$ esetén $i_k(H_0) = i_k(G_0)$ és $i_g(H_0) \le i_g(G_0)$. Ám ekkor minden l egész számra $i_g(lH_0) \le i_g(lG_0)$, ahol lG l darab G diszjunkt unióját jelöli. Ez a függetlenségi polinom multiplikativitásából következik. Ám ekkor használhatjuk 4.5.3. Lemmát, azaz $i_g(lH_0) > i_g(lG_0)$, ami ellentmondás. $\square$

Most legyen $a = 0$, ha $i_{g-1}(H_0) > i_{g-1}(G_0)$, és 1 egyébként. Elég belátni, hogy

$$(i_{g+a}(H_0) - i_{g+a}(G_0)) i_{k-g-a}(G_H) \ge \sum_{j=g+a+1}^{k} (i_j(G_0) - i_j(H_0)) i_{k-j}(G_H).$$

Ám mivel $i_{g+a}(H_0) - i_{g+a}(G_0)$ pozitív és egész, így legalább 1. Tehát elegendő bizonyítani a következő állítást:

$$i_{k-g+a}(G_H) \ge \sum_{j=g+a}^{k} (i_j(G_0) - i_j(H_0)) i_{k-j}(G_H).$$

Ám 4.6.1. Lemma miatt ha ε_2 kicsi, akkor $t \le \varepsilon_2 n$ esetén

$$\frac{i_{t-1}(G_H)}{i_t(G_H)} \le \frac{t}{(1-\alpha)n - (d+1)(t-1)} \le 2\varepsilon_2,$$

használva, hogy $\alpha < 1/10$. Ekkor ha $k \le \varepsilon_2 n$, akkor

$$\sum_{j=g+a}^{k} (i_j(H_0) - i_j(G_0)) i_{k-j}(G_H) \le \sum_{j=g+a}^{k} i_j(H_0) i_{k-j}(G_H) \le$$
$$\le \sum_{j=g+a}^{k} \binom{\alpha n}{j} i_{k-g} (2\varepsilon_2)^{j-g} \le \sum_{j=g+a}^{k} \binom{g/\varepsilon_1}{j} i_{k-g}(G)(2\varepsilon_2)^{j-g} <$$

$$< i_{k-g}(G_H)K_{g,d,\varepsilon_1}\sum_{j=1}^{\infty}(2\varepsilon_2)^j < i_{k-g}(G_H),$$

ha ε_2 elég kicsi.

2. eset: $g \le \lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor$. Ez a bizonyítás hasonló lesz az előzőhöz, 4.6.1. Lemma segítségével becsülünk. Ha $t \le k \le \varepsilon_2 n$, $t \le \alpha n$, akkor korábbi becsléseket használva azt kapjuk, hogy
$$\frac{i_{t+1}(G_0)i_{k-t-1}(G_H)}{i_t(G_0)i_{k-t}(G_H)} \le \frac{\alpha n - t}{t+1}\frac{k-t}{(1-\alpha)n-(d+1)(k-t-1)} \le \frac{\alpha n}{t+1}\frac{k}{(1-\alpha)n-(d+1)k}.$$
A jobb oldal monoton csökken, ha t nő, azaz $t \ge \varepsilon_1 \alpha n$ esetén a $t = \lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor$ egy felső becslés, azaz
$$\frac{i_{t+1}(G_0)i_{k-t-1}(G_H)}{i_t(G_0)i_{k-t}(G_H)} \le \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{k}{(1-\alpha)n-(d+1)k} \le 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$
Ez azt jelenti, hogy ha $0 \le j \le k - \lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor$, akkor
$$i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor + j}(G_0)i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor - j} \le \left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^j i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0)i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H).$$

Tehát
$$i_k(H_n) - i_k(G_n) = (i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) - i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0))i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(i_{j+\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) - i_{j+\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0))i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor - j}(G_H) \ge$$
$$\ge (i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) - i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0))i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H) - \sum_{j=1}^{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor} i_{j+\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0)i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor - j}(G_H) \ge$$
$$\ge (i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) - i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0))i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H) - \sum_{j=1}^{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^j i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0)i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H) \ge$$
$$\ge (i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) - i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0))i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H) - i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0)i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^j =$$
$$= (i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) - i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0))i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H) - \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2} i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0)i_{k-\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_H).$$
Azaz elég belátni, hogy ez a kifejezés nemnegatív, máshogyan mondva elég, hogy
$$i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) \ge \left(1 + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2}\right) i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0).$$

Ám a G_0 gráfban az $\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor$ méretű független halmazok számára használhatjuk a 4.5.3. Lemmát, mivel $g \le \lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor \le \varepsilon_1 \cdot \alpha n$, így
$$i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(H_0) \ge e^{c(\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor)^g (\alpha n)^{1-g}} i_{\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor}(G_0).$$

De $c(\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor)^g (\alpha n)^{1-g}$ elválasztható a 0-tól, mivel

$$c(\lfloor \varepsilon_1 \alpha n \rfloor)^g (\alpha n)^{1-g} \geq \frac{c}{2}\varepsilon_1 \alpha n \left(\frac{\varepsilon_1 \alpha n}{\alpha n}\right)^g \geq \frac{c}{2} g \varepsilon_1^g > c_1 > 0$$

valamely c_1 pozitív valósra. Azaz ha ε_2-t nagyon kicsinek választjuk, akkor

$$1 + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2} \leq e^{c_1},$$

tehát bebizonyítottuk az állítást.

Ezzel befejeztük a 4.2.6. Tétel bizonyítását a független halmazokra.

4.6.3. Megjegyzés. A párosításokra lévő állítása hasonló a függetlenségi halmazokra lévőre. Az ötlet az, hogy a G gráf helyett G élgráfját vesszük, ebben a k elemű független halmazok éppen a k elemű párosítások G-ben. Ezzel az ötlettel, illetve egy kis módosítással be lehet bizonyítani az állítást párosításokra is.

Irodalomjegyzék

[1] F. Bencs, *Christoffel–Darboux type identities for the independence polynomial*, Combinatorics, Probability and Computing, **27** (2018), pp. 716–724.

[2] C. Borgs, *Absence of zeros for the chromatic polynomial on bounded degree graphs*, Combinatorics, Probability and Computing, **15** (2006), pp. 63–74.

[3] P. Csikvári, *Zero–free region of the chromatic polynomial*, prepint.

[4] P. Csikvári and P. E. Frenkel, *Benjamini–Schramm continuity of root moments of graph polynomials*, European Journal of Combinatorics, **52** (2016), pp. 302–320.

[5] E. Davies, M. Jenssen, and W. Perkins, *A proof of the upper matching conjecture for large graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **151** (2021), pp. 393–416.

[6] E. Davies, M. Jenssen, W. Perkins, and B. Roberts, *Independent sets, matchings, and occupancy fractions*, Journal of the London Mathematical Society, **96** (2017), pp. 47–66.

[7] E. Davies, M. Jenssen, W. Perkins, and B. Roberts, *Tight bounds on the coefficients of partition functions via stability*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **160** (2018), pp. 1–30.

[8] R. L. Dobrushin, *Estimates of semi-invariants for the Ising model at low temperatures*, Translations of the American Mathematical Society-Series 2, **177** (1996), pp. 59–82.

[9] R. Fernández and A. Procacci, *Cluster expansion for abstract polymer models. new bounds from an old approach*, Communications in Mathematical Physics, **274** (2007), pp. 123–140.

[10] S. Friedli and Y. Velenik, *Statistical mechanics of lattice systems: a concrete mathematical introduction*, Cambridge University Press, 2017.

[11] S. Jansen and L. Kolesnikov, *Cluster expansions: Necessary and sufficient convergence conditions*, arXiv preprint arXiv:2112.13134, (2021).

[12] H. Jeroen and R. Guus, *Személyes kommunikáció*, (2022).

[13] R. Kotecký and D. Preiss, *Cluster expansion for abstract polymer models*, Communications in Mathematical Physics, **103** (1986), pp. 491–498.

[14] O. Penrose, *Convergence of fugacity expansions for classical systems*, Statistical mechanics: foundations and applications, (1967), p. 101.

[15] W. Perkins, *Five lectures on statistical mechanics methods in combinatorics*, (2020).

[16] A. D. Scott and A. D. Sokal, *The repulsive lattice gas, the independent-set polynomial, and the Lovász local lemma*, Journal of Statistical Physics, **118** (2005), pp. 1151–1261.

[17] A. D. Sokal, *Bounds on the complex zeros of (di) chromatic polynomials and potts-model partition functions*, Combinatorics, Probability and Computing, **10** (2001), pp. 41–77.

[18] Y. Zhao, *The number of independent sets in a regular graph*, Combinatorics, Probability and Computing, **19** (2010), pp. 315–320.