Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Schefler Barna

Modulusok standard filtrálása

MSc Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:

Ágoston István

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2022

NYILATKOZAT

Név: Schefler Barna

ELTE Természettudományi Kar, szak: Msc Matematikus

NEPTUN azonosító: ID3VDA

Szakdolgozat címe:

Modulusok standard filtrálása

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022 május

Schefler Barna

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet Ágoston István Tanár úrnak, aki elvállalta szakdolgozatom témavezetését. Hálával tartozok Neki az elmúlt négy félévért, amiért a gyűrűelmélet oktatása mellett lelkiismeretesen figyelte és segítette előrehaladásomat a mesteris tanulmányaim folyamán. Külön köszönet, hogy a szakmai munkán túl a személyemmel is foglalkozott: sokszor kezdtük úgy a konzultációt, hogy hosszasan beszélgettünk a mindennapok dolgairól. Hiszem, hogy ezáltal esélyünk lett jobban megismerni egymást, és emiatt könnyebbé vált a közös munka.
Köszönettel tartozom továbbá az összes egyetemi tanáromnak. Az olyan befogadó, tiszteletteljes, megértő közeg, amilyen a Matematika Intézetben van, a lehető legjobban segíti a hallgatók tanulmányait.
Köszönet a Márton Áron Szakkollégiumnak, mely támogatta a dolgozat létrejöttét.
Ezen felül meg kell említenem édesanyámat, Enikőt, iskolai matematikatanáromat Zitát, akik elindítottak az úton, valamint testvéremet Gergőt, aki rendíthetetlenül tapossa előttem az Utat. Köszönet a családom többi részének: Imolának, Tamásnak és Ervinnek, akik megteremtik a szükséges háttért, valamint köszönet a Pásztornak a szüntelen gondviselésért. Köszönet a barátaimnak, akik mindig kisegítettek egy-egy jó szóval, ha éppen akadozott a munka.
Azokra, akikre vonatkozik: köszönöm Nektek!

Előszó

A kváziöröklődő algebra egy viszonylag új fogalom a gyűrűelméletben, az 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott. A [6] cikk nyomán kváziöröklődőnek nevezünk egy olyan A algebrát, amelyben rekurzívan konstruálhatunk egy olyan A-ba felérő ideálláncot, melynek elemei adott tulajdonsággal rendelkező idempotens ideálok. A reprezentációelmélet szempontjából fontos állítás, hogy az ideállánc hosszából egy felső korlátot kapunk az algebra globális dimenziójára is. A kváziöröklődő algebrák témakörének egyik kulcsfontosságú összetevője a standard modulus fogalma.

A szakdolgozat a standardul rétegezett algebrák egy bizonyos filtráltsági feltételt teljesítő moduluskategóriájával foglalkozik. Standardul rétegezett algebrát úgy kaphatunk, ha a kváziöröklődő algebrák definíciójából kihagyjuk az egyik feltételt. Először Dlab és Ringel jellemezték axiomatikusan egy rögzített kváziöröklődő algebra fölött azon modulusok részkategóriáját, melyeknek létezik standard modulusokkal való filtrálása. Az axiómáknak eleget tevő rendszerek reprezentálását standardizálásnak nevezték.

Tizenöt évvel később Ágoston, Dlab és Lukács kiterjesztették Dlab és Ringel eljárását a standardul rétegezett algebrák osztályára is. Ez a jellemzés két olyan ekvivalenciát adott a véges dimenziós algebrákra, melynek osztályaiban pontosan egy standardul rétegezett algebra (vagy ilyennek az oppozitja) található. Hasonló konstrukciók találhatók Erdmann, Saenz, Marcos, Mendóza és mások cikkeiben. A szakdolgozat célja a fentebb felsorolt különböző konstrukciók vizsgálata, azok összehasonlítása.

A szakdolgozat három fejezetre tagolódik. Az első fejezet a standard modulusok tulajdonságainak felsorolásával kezdődik. A standard modulusokat az egyszerű modulusok projektív fedőjének egy speciális faktoraként definiáljuk. Itt vezetjük be a korábban már említett Dlab-Ringel féle standardizálást, mely egyben egy új módszert is ad kváziöröklődő algebrák gyártására: Dlab és Ringel egyik tétele szerint ([7] cikk, Theorem 2), ha A-modulusok egy halmazára teljesülnek bizonyos jól meghatározott tulajdonságok, akkor ezen modulusok úgy fognak viselkedni, mint egy alkalmasan megkonstruált kváziöröklődő algebra standard modulusai (A végig egy algebrailag zárt test felett értelmezett véges dimenziós algebrát jelöl). A valódi standard modulusokat a standard modulusok egy speciális faktoraként kapjuk. A fejezet végén rátérünk Ágoston-Dlab-Lukács szerzőhármas [1] szemléletére, mely a Dlab-Ringel féle standardizálást, és az ahhoz köthető eredményeket terjeszti ki a valódi standard modulusokra és a standardul rétegezett algebrákra.

A második fejezet E. Marcos, O. Mendoza és C. Sáenz munkáját követi nyomon. Ők a 2000-es évek elején kezdtek el foglalkozni a standardizálás témakörével ([8], [10], [11]). A munkájukat K. Erdmann és C. Sáenz 2003-as [8] cikke indította. Ebben az eredeti, Dlab-Ringel-féle standardizálásnál megjelenő feltételekhez hasonló összefüggésekből építik fel az elméletüket. Eredményeik egy része addigra már ismert volt, mégis olyan szempontból újítást vezettek be, hogy korábbi tételeket bizonyítottak be a saját elméletükre épülő eszközök segítségével.

Az utolsó fejezet a szakdolgozat legizgalmasabb része. Itt ugyanis példák és alkalmazások segítségével próbáltam könnyebben érthetőbbé tenni az első két fejezetben leírt elméleti anyagot. A korábban előforduló állítások, definíciók szemléltetésére a gráfalgebrák köréből ismeretes Loewy diagramokat használtam. Eleinte egyszerűbb példák vannak, melyek során kiszámoljuk egy gráfalgebra standard modulusait, vagy ellenőrizzük egy adott algebráról, hogy kváziöröklődő-e. Néhány sorban ellenőrizzük, hogy egy könnyebb állítás mit mond ki, vagy példát adunk a definíciókra. Ezek után következnek a komolyabb konstrukciók: egy-egy példán keresztül végigkövethetjük a kváziöröklődő algebrák, standardul rétegezett algebrák konstruálását. Ezek a számolások szépen megmutatják, hogyan is működik a Dlab-Ringel-féle standardizálás vagy milyen módosítások esetében alkalmazható Ágoston-Dlab-Lukács módszere.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Standard és valódi standard modulusok

Legyen k egy (algebrailag zárt, 0 karakterisztikájú) test, A pedig egy végesdimenziós bázisalgebra k fölött. A primitív ortogonális idempotenseinek egy rendezett halmazát jelölje $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

A_A jobb reguláris reprezentációja a következő: $A_A = \oplus_{i=1}^{n} e_i A$. Az $e_i A$ felbonthatatlan projektív (jobb) modulusokra bevezetjük a $P(i)$ jelölést. Ezek radikál szerinti faktoraként állnak elő az A algebrához tartozó egyszerű modulusok: $\operatorname{top} P(i) = P(i)/\operatorname{rad} P(i)$, melyekre az $S(i)$ jelölést fogjuk használni.

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt Ω_n-nel fogjuk rövidíteni. Ennek a halmaznak egy teljes rendezése egy rendezést indukál az $S(i)$ egyszerű modulusok között is. Az esetek nagy részében az Ω_n természetes rendezését vesszük (melyet $\leqslant$ jellel jelölünk), néha azonban használni fogjuk a természetes rendezés fordítottját is ($\leqslant^{op}$).

Egy M A-modulus esetén $[M : S(i)]$-vel jelöljük az $S(i)$ egyszerű modulus multiplicitását az M kompozícióláncában.

A dolgozat egyik fő objektumai az úgynevezett a standard modulusok: ezek az előbb bevezetett $P(i)$ projektív modulusok speciális faktoraként definiálhatóak (1.1.1 definíció):

1.0.1. Definíció. *$\Delta(i)$ a $P(i)$ legnagyobb olyan faktora, melyre a $[\Delta(i) : S(l)] = 0$ azonosság minden $l > i$-re teljesül. E faktormodulusra a (jobb) standard modulus elnevezést fogjuk használni. A $\{\Delta(1), \dots \Delta(n)\}$ halmazt gyakran csak Δ-val jelöljük.*

Ehhez hasonlóan definiáljuk a valódi standard modulusokat is (1.2.1 definíció):

1.0.2. Definíció. *$\bar{\Delta}(i)$ a $\Delta(i)$ legnagyobb olyan faktora, melyre a $[\bar{\Delta}(i) : S(i)] = 1$ egyenlőség teljesül. A $\bar{\Delta}(i)$ modulust (jobb) valódi standard modulusnak fogjuk nevezni.*

Azon A-modulusok részkategóriáját, melyeknek létezik olyan részmoduluslánca, hogy az összes faktor a fent definiált Δ halmazból kerül ki (1.1.9 definíció) Δ-filtrált modulusoknak nevezzük és $\mathcal{F}(\Delta)$-val jelöljük. Hasonlóan definiálható a $\bar{\Delta}$-filtrált modulusok $\mathcal{F}(\bar{\Delta})$ részkategóriája is (1.2.3 definíció). A fejezet fő célja a $\mathcal{F}(\Delta)$ és $\mathcal{F}(\bar{\Delta})$ részkategóriák megértése.

1.1. Standard modulusok

Abban a speciális esetben, mikor teljesül az $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$ tartalmazás, valamint minden i-re $\Delta(i) = \bar{\Delta}(i)$, az algebrát kváziöröklődőnek nevezzük. Az 1.1 alfejezetben főként a kváziöröklődő algebrák $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategóriájával fogunk foglalkozni. Az 1.1.1 szakaszban megvizsgáljuk a standard modulusokra vonatkozó homologikus feltételeket, majd a "tilting elmélet" segítségével fény derül a fent említett részkategória különböző tulajdonságaira (1.1.2 szakasz) (Az angol nyelvű szakirodalomban használt "tilting theory" és "tilting module" kifejezéseknek sajnos nincs még magyar neve). Ezekhez felhasználjuk a [13] és [7] cikkek eredményeit. A tilting elmélet kapcsán teszünk egy rövid kitérőt a Bongartz-lemma felé, melynek a bizonyítása során használt univerzális bővítés fontos lesz az egész dolgozat során (1.1.3 szakasz). Végezetül pedig, az 1.1.4 szakaszban a [7] cikkre építve megnézünk egy módszert, mellyel kváziöröklődő algebrákat lehet gyártani: ha megfelelő feltételrendszert szabunk A-modulusok egy $\Theta = \{\Theta(1), \ldots \Theta(n)\}$ halmazára, akkor ezen modulusok úgy fognak viselkedni, mint egy kváziöröklődő algebra standard modulusai. Így a rögzített $\Theta = \{\Theta(1), \ldots \Theta(n)\}$ halmazból konstruálható egy kváziöröklődő algebra.

1.1.1. A standard modulusok alapvető tulajdonságai

A standard modulusok definíciója

Ebben a szakaszban a standard modulusok tulajdonsgai közül sorolunk fel néhányat. A [7] és [13] cikkek eredményeit használjuk. A rend kedvéért a standard modulusok definíciójával kezdünk:

1.1.1. Definíció. *$\Delta(i)$ a $P(i)$ legnagyobb olyan faktora, melyre a $[\Delta(i) : S(l)] = 0$ azonosság minden $l > i$-re teljesül. E faktormodulusra a (jobb) standard modulus elnevezést fogjuk használni. A $\{\Delta(1), \ldots \Delta(n)\}$ halmazt gyakran csak Δ-val jelöljük.*

1.1.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy $\Delta(i)$ mindig létezik minden i-re:*

$$\Delta(i) \cong e_i A / e_i A(e_{i+1} + ... + e_n)A$$

Hasonlóan vezetjük be az előző fogalom duálisát, a kostandard modulusokat is:

1.1.3. Definíció. *$\nabla(i)$ az $I(i)$ legnagyobb olyan részmodulusa, melyre a $[\nabla(i) : S(l)] = 0$ azonosság minden $l > i$-re teljesül.*

Ezt az eljárást persze el lehet végezni akkor is, hogyha az algebra bal reguláris prezentációjából felépített projektív bal modulusokból indulunk ki: ${}_A A = \oplus_{i=1}^n Ae_i$. Ebben az esetben a kitevőbe egy $^\circ$ szimbólumot helyezünk: $S^\circ(i) = P^\circ(i)/\operatorname{rad} P^\circ(i)$, $P^\circ(i) = Ae_i$, $\Delta^\circ(i)$, $\nabla^\circ(i)$.

Mivel A végesdimenziós, k-ra vonatkozó duálist véve (ezt $D(-)$-vel fogjuk jelölni) megfeleltetést kapunk a jobb standard és bal kostandard modulusok között: $P(i)$ k-duálisa $I^\circ(i)$, $\Delta(i)$ a $P(i)$ legnagyobb olyan faktora, amelyben csak $j \leqslant i$ alakú egyszerű modulusok szerepelnek kompozíciófaktoraként, így ennek duálisa a legnagyobb olyan részmodulus, melyben szintén csak $j \leqslant i$ alakú egyszerű modulusok szerepelnek (kihasználtuk, hogy $S^\circ(i) = D(S(i))$). Vagyis $\Delta(i) = D(\nabla^\circ(i))$, hasonlóan $\nabla(i) = D(\Delta^\circ(i))$. Ez a megfigyelés természetesen azt is bizonyítja, hogy általános esetben a jobb és bal standard modulusok különböznek egymástól.

Innentől kezdve a legtöbb esetben jobb standard modulusokkal fogunk foglalkozni, hisz k-duálist véve akármikor áttérhetünk a baloldali struktúrára.

A későbbiekben szükségünk lesz a következő definíciókra:

1.1.4. Definíció. *Legyen $\mathcal{X}$ A modulusok egy halmaza, ekkor $M \in A\text{-}\mathrm{mod}$-ra $\eta_{\mathcal{X}} M$-el jelöljük az $\mathcal{X}$ által generált maximális részmodulust M-ben.*

1.1.5. Definíció. *$\operatorname{add} M$-mel jelöljük az olyan $\operatorname{mod} A$-beli modulusokat, melyek direkt összeg felbontásában csak olyan tagok szerepelnek, melyek M-nek is direkt összeadandói.*

Vezessük be a $\varepsilon_i = e_i + e_{i+1} + \ ... \ + e_n$ jelölést. Az 1.1.2 megjegyzés alapján: $\Delta(i) \cong e_i A / e_i A \varepsilon_i A$. Ezt egy kicsit kirészletezve kapjuk a standard modulusok alábbi jellemzését:

1.1.6. Állítás. *$M \in \operatorname{mod}\text{-}A$ esetén a következők ekvivalensek:*

1. *$M \cong \Delta(i)$*
2. *$\operatorname{top} M \cong S(i)$, ahol M összes kompozíciófaktora $S(j)$ alakú, melyre $j \leqslant i$, továbbá fennáll az $\operatorname{Ext}^1(M, S(l)) \neq 0 \Rightarrow l > i$ implikáció*

3. $M \cong P(i)/\eta_{\{P(l)|l>i\}}P(i)$

Bizonyítás. $1 \Leftrightarrow 3$: $\Delta(i)$ a definiáció szerint egy olyan maximális $P(i)/K$ faktor, melyre a kompozíciófaktorok között nem találunk $S(l)$ típusút $l > i$-re. Eszerint ha ilyen K létezik, akkor $e_iA\varepsilon_{i+1} \subseteq K$, és így $e_iA\varepsilon_{i+1}A \subseteq K$ is teljesül. Ugyanakkor $e_iA/e_iA\varepsilon_{i+1}A$ teljesíti, hogy kompozíciófaktorai $S(j)$ típusúak $j \leqslant i$-re. Mivel $\eta_{\{P(l)|l>i\}}P(i) = e_iA\varepsilon_{i+1}A$, ezekkel az irányokkal készen vagyunk.

$3 \Leftrightarrow 2$: Világos, hogy $\operatorname{top}(P(i)/K \cong S(i))$ minden $K \neq P(i)$-re, továbbá, hogy $\eta_{\{P(l)|l>i\}}P(i) \neq P(i)$. Láttuk az előbb, hogy $P(i)/\eta_{\{P(l)|l>i\}}P(i) \cong e_iA/e_iA\varepsilon_{i+1}A$ minden kompozíciófaktora $S(j)$ típusú $j \leqslant i$-re, mivel $e_iA\varepsilon_{i+1}A$ tartalmazza az összes $S(l)$-et $l > i$-re. $j \leqslant i$ esetén alkalmazzuk a $\operatorname{Hom}(-, S(j))$ funktort a $0 \to e_iA\varepsilon_{i+1}A \to P(i) \to \Delta(i) \to 0$ egzakt sorozaton. Az alábbi egzakt sorozatot kapjuk:

$$... \to \operatorname{Hom}(e_iA\varepsilon_{i+1}A, S(j)) \to \operatorname{Ext}^1(\Delta(i), S(j)) \to \operatorname{Ext}^1(P(i), S(j)) \to ...$$

$\operatorname{top}(e_iA\varepsilon_{i+1}A) \in \operatorname{add}\bigoplus_{l>i}S(l)$, így $\operatorname{Hom}(e_iA\varepsilon_{i+1}A, S(j)) = 0$, valamint $\operatorname{Ext}^1(P(i), S(j)) = 0$ a projektivitás miatt. Így az egzaktságból kapjuk, hogy $\operatorname{Ext}^1(\Delta(i), S(j)) = 0$.

2 $\Rightarrow$ *1*: A $\operatorname{top} M \cong S(i)$ feltétel miatt létezik $P(i) \to M$ epimorfizmus, azaz M előáll a $P(i)$ faktoraként: $M \cong P(i)/K$. A feltétel szerint M összes kompozíciófaktora $S(j)$ alakú, valamilyen $j \leqslant i$-re, és az $\operatorname{Ext}^1(M, S(j)) = 0$ feltétel miatt M a maximális ilyen faktora $P(i)$-nek. Ha ugyanis létezne $K_0 \lneqq K$, melyre $P(i)/K_0$ kompozíciófaktorai $S(j)$ típusúak $j \leqslant i$-re, akkor ez adna egy

$$0 \to S(j) \to P(i)/K_0' \to M \to 0$$

egzakt sorozatot, amely $P(i)$ lokális volta miatt nem fölhasadó. Így ez az irány is megvan. □

A standard modulusok egymáshoz való viszonya

A fent bizonyított észrevételek alapján készen állunk arra, hogy a standard modulusok egymáshoz való viszonyáról tegyünk néhány megállapítást. Kezdjük a homomorfizmusokra vonatkozó tulajdonságokkal:

1.1.7. Állítás. $M \in \operatorname{mod}\text{-}A$ *esetén igazak az alábbiak:*

1. $\operatorname{Hom}(\Delta(i), M) \neq 0 \Rightarrow [M : S(i)] \neq 0$

2. $\operatorname{Hom}(\Delta(i), \Delta(l)) \neq 0 \Rightarrow i \leqslant l$

3. $\mathrm{Hom}(\Delta(i), \nabla(j)) \neq 0 \Rightarrow i = j$

Bizonyítás. *1*: $\mathrm{top}\,\Delta(i) = S(i)$, így készen vagyunk.
2: következik az *1*.-ből, hisz $[\Delta(l) : S(i)] \neq 0 \Rightarrow i \leqslant l$.
3: következik az *1*.-ből, hisz egyrészt $i \leqslant j$, duális okok miatt pedig $j \leqslant i$, így $i = j$. □

A homomorfizmusokhoz hasonlóan bővítésekre vonatkozó tulajdonságokat is találunk:

1.1.8. Állítás. *$M \in \mathrm{mod}\text{-}A$ esetén:*

1. *Ha $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), M) \neq 0$, akkor $[M : S(l)] \neq 0$ valamely $l > i$-re.*
2. *Ha $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(l)) \neq 0$, akkor $i < l$*
3. *$\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \nabla(j)) = 0$*

Bizonyítás. *1*: $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), M) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ext}^1(\Delta(i), S(l)) \neq 0$ teljesül M valamely $S(l)$ kompozíciófaktorára. A 1.1.6 állítás *2*. része szerint azonban $l > i$.
2: $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(l)) \neq 0 \Rightarrow [\Delta(l) : S(l')] \neq 0$ valamely $l' > i$-re az *1*. alpont szerint. A standard modulus definíciójából következik, hogy $l' \leqslant l$, vagyis $i < l' \leqslant l$.
3: Hasonlóan kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \nabla(j)) \neq 0 \Rightarrow i < j$. Dualitás miatt pedig azt is kapjuk, hogy $i > j$, vagyis valóban $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \nabla(j)) = 0$. □

A Δ-filtrálás

Tekintsük az alábbi, kulcsfontosságú definíciót, mely a filtráltság fogalmát vezeti be:

1.1.9. Definíció. *Legyen Θ a $\mathrm{mod}\text{-}A$ egy osztálya. Ekkor $\mathcal{F}(\Theta)$ jelöli azon M A-modulusok osztályát, melyek Θ filtráltak, vagyis M-nek létezik egy:*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \geqslant \dots \geqslant M_t \geqslant \dots \geqslant M_m = 0$$

részmoduluslánca, melyre teljesül, hogy $M_{t-1}/M_t \in \Theta$ minden $1 \leqslant t < n$-re.

Ezen a ponton már minden adott ahhoz, hogy megértsük a Δ-filtrált modulusok fogalmát. $\mathcal{F}(\Delta)$ fogja jelölni az $\mathrm{mod}\text{-}A$ azon részkategóriáját, melyben olyan A-modulusok vannak, melynek létezik egy filtrálása a $\Delta = \{\Delta(1), \dots \Delta(n)\}$ halmazzal.
Innentől kezdve az $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategória megértésével fogunk foglalkozni.

A következő állítás a Δ-filtráltság egy ekvivalens jellemzését adja meg:

1.1.10. Lemma. *Legyen $M \in \operatorname{mod}\text{-}A$, és bármely $0 \leqslant i \leqslant n$-re legyen $\eta_i M = \eta_{\{P(l)|l>i\}} M$. Ekkor $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ pontosan akkor teljesül, ha minden $0 < i \leqslant n$-re az $\eta_{i-1}M/\eta_i M$ modulus $\Delta(i)$-k direkt összege.*

Bizonyítás. A 1.1.8 állítás *2.* része szerint ha $\operatorname{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(l)) \neq 0$, akkor $i < l$. Így nem létezik $\operatorname{Ext}^1(\Delta(n), \Delta(l))$ bővítés semely l-re sem. Vagyis kapjuk, hogy $\eta_{n-1}M = \oplus\Delta(n)$ (hisz $\Delta(n) = P(n)$). A/η_{n-1}-ben nem létezik $\operatorname{Ext}^1(\Delta(n-1), \Delta(l))$ bővítés semely l-re sem, így $M_{n-2} := \eta_{n-2}M$ választással $M_{n-2}/M_{n-1} = \oplus\Delta(n-1)$. Indukcióval adódik az $M = \eta_0 M \geqslant \eta_1 M \geqslant \eta_2 M \geqslant ... \geqslant \eta_n M = 0$ filtrálás, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant n$-re $\eta_{i-1}M/\eta_i M$ $\Delta(i)$-k direkt összegével izomorf. A másik irány triviális. □

Alapvető fontosságú megfigyelés, hogy az $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategória zárt az epimorfizmusok magjára.

1.1.11. Lemma. *$\mathcal{F}(\Delta)$ zárt az epimorfizmusok magjára.*

Bizonyítás.

$$\begin{tikzcd} & & & P(j) \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Legyen $X, Y \in \mathcal{F}(\Delta)$, és legyen $f : X \to Y$ epimorfizmus, melynek magja K. Ekkor $f(\eta_i X) = \eta_i Y$, (hisz egyrészt $f(\eta_i X) \subseteq \eta_Y$ nyilvánvaló, másrészt minden $P(j) \to Y$ leképezés felemelhető X-be $P(j)$ projektivitása miatt). Minden $1 \leqslant i \leqslant n$-re kapjuk a következő kommutatív diagramot ahol a sorok egzaktak (hisz ezek az f által indukált leképezések):

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \eta_i X \cap K \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & \eta_i X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_X"] & \eta_i Y \arrow[r] \arrow[d, "\iota_y"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \eta_{i-1} X \cap K \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & \eta_{i-1} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \eta_{i-1} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & X\langle i \rangle \arrow[r] \arrow[d] & Y\langle i \rangle \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Vezessük be az $X\langle i\rangle = \eta_{i-1}X/\eta_i X$, $Y\langle i\rangle = \eta_{i-1}Y/\eta_i Y$ jelöléseket, így Kígyó lemmával kapjuk a $0 \to K_i \to X\langle i\rangle \to Y\langle i\rangle \to 0$ egzakt sorozatot, ahol $K_i = (\eta_{i-1}X \cap K)/(\eta_i X \cap K)$. A 1.1.10 lemma alapján $X\langle i\rangle$ és $Y\langle i\rangle$ is $\Delta(i)$-k direkt összege, így K_i kompozíciófaktoraira igaz, hogy $S(j)$ alakúak, ahol $j \leqslant i$. Tudjuk azonban, hogy $j \leqslant i$-re $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), S(j)) = 0$, emiatt tehát a fenti egzakt sorozat hasad, azaz K_i is $\Delta(i)$-k direkt összege. Kapjuk tehát K-nak a $K = \eta_0 X \cap K \supseteq \eta_1 X \cap K \supseteq \ldots \eta_n X \cap K = 0$ filtrálását, ahonnan már látszik, hogy $K \in \mathcal{F}(\Delta)$. □

Kváziöröklődő algebrák

A későbbiekben különleges fontossággal bírnak majd azok a standard modulusok, melyeknek az endomorfizmusgyűrűje ferdetest (ebben az esetben a modulust Schur típusúnak nevezzük). A következő állításban az ilyen modulusok ekvivalens jellemzéseit vizsgáljuk:

1.1.12. Állítás. *A következő állítások ekvivalensek minden $i \in \Omega_n$-re:*

1. *$\Delta(i)$ Schur típusú modulus*
2. *$[\Delta(i) : S(i)] = 1$*
3. *Ha M olyan A-modulus, melynek mind a talpa, mind pedig a teteje $S(i)$-vel izomorf, és az is teljesül rá, hogy $[M : S(j)] \neq 0$ esetén $j \leqslant i$, akkor $M \cong S(i)$*

Bizonyítás. *1* ⇒ *2*: $[\Delta(i) : S(i)] > 1$ esetén lenne olyan nemtriviális $\Delta(i) \to \Delta(i)$ leképezés mely nem szürjektív, így az endomorfizmusgyűrű nem lehet ferdetest.
2 ⇒ *1*: $\mathrm{top}\,\Delta(i) = S(i)$, így a $[\Delta(i) : S(i)] = 1$ feltétel miatt $\Delta(i)$-ből csak olyan homomorfizmus vezet $\Delta(i)$-be, melynél $\mathrm{top}\,\Delta(i)$ $\mathrm{top}\,\Delta(i)$-be megy. Azaz $\Delta(i)$ Schur típusú.
2 ⇒ *3*: $\mathrm{top}\,M = S(i)$, így létezik egy szürjektív $P(i) \to M$ leképezés, mely keresztülvezethető $\Delta(i)$-n. Mivel $\mathrm{Soc}\,M = S(i)$, és $[\Delta(i) : S(i)] = 1$, kapjuk, hogy $\mathrm{Soc}\,M = M = S(i)$.
3 ⇒ *2*: A Tegyük fel, hogy M-re teljesülnek a *3.* pontban leírtak, de $[\Delta(i) : S(i)] > 1$. Ekkor - megfelelően faktorizálva - egy olyan modulust kapunk melyre teljesülnek a *3.* pontban leírtak. Ekkor mégis $[\Delta(i) : S(i)] = 1$. □

Vegyük észre, hogy az előző megfogalmazásban a *3.* feltétel önduális, így az első két feltétel duálisát véve szintén a Schur típusú modulus ekvivalens jellemzését kapjuk:

4. *$[\nabla(i) : S(i)] = 1$*
5. *$\nabla(i)$ Schur típusú modulus*

Az olyan algebrát, amely teljesíti a következő ekvivalens feltételek valamelyikét, kváziöröklődő algebrának nevezzük. A következő tétel megtalálható a [7] cikkben Theorem 1 név alatt:

1.1.13. Tétel. *Ha egy algebrában az összes standard modulus Schur típusú, akkor a következők ekvivalensek:*

1. $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$
2. $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \,|\, \operatorname{Ext}^1(X, \nabla) = 0\}$
3. $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \,|\, \operatorname{Ext}^i(X, \nabla) = 0$ *minden* $i \geqslant 1$*-re*$\}$
4. $\operatorname{Ext}^2(\Delta, \nabla) = 0$

Mivel a *4.* feltétel duálisa önmaga, felsoroljuk a többi állítás duálisát is:

5. $D({}_AA) \in \mathcal{F}(\nabla)$
6. $\mathcal{F}(\nabla) = \{Y \,|\, \operatorname{Ext}^1(\Delta, Y) = 0\}$
7. $\mathcal{F}(\nabla) = \{Y \,|\, \operatorname{Ext}^i(\Delta, Y) = 0$ *minden* $i \geqslant 1$*-re*$\}$

Bizonyítás. *3* $\Rightarrow$ *4*: triviális.

4 $\Rightarrow$ *2*: A 1.1.8 állítás *3.* alpontja szerint minden $X \in \mathcal{F}(\Delta)$-ra $\operatorname{Ext}^1(X, \nabla) = 0$. Bizonyítjuk a fordított tartalmazást is.

Ehhez legyen X olyan modulus, hogy $\operatorname{Ext}^1(X, \nabla) = 0$, és legyen i minimális úgy, hogy $\eta_i X = 0$. i-re vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy $X \in \mathcal{F}(\Delta)$. $i = 0$-ra a 0 modulusra nyilvánvalóan teljesül. $i \geqslant 1$ esetén legyen $X' = \eta_{i-1}X$, és $X'' = X/X'$. Ekkor i minimális választása miatt $0 \neq \eta_{i-1}X = \eta_{\{P(l)|l>i-1\}}X$, de $0 = \eta_i X = \eta_{\{P(l)|l>i\}}X$, így $P(i)$ generálja X'-t.

Először megmutatjuk, hogy $X'' \in \mathcal{F}(\Delta)$ teljesül. $s < i$ esetén: $P(i)$ generálja X'-t, és $[\nabla(s) : S(i)] = 0$ a ∇ definíciója szerint. Így kapjuk, hogy $\operatorname{Hom}(X', \nabla(s)) = 0$. $s > i$-re: $\eta_{s-1}X' = 0$ az i minimális választása miatt, így X'-ben nincs $S(s)$ alakú kompozíciófaktor, de ekkor $\operatorname{Hom}(X', \nabla(s)) = 0$: ha lenne nemtriviális homomorfizmus, az ráképződne $\operatorname{Soc}\nabla(s) = S(s)$-re. Vagyis $\operatorname{Hom}(X', \nabla(s)) = 0$ $s \neq i$-re.

Vegyük most a $\operatorname{Hom}(-, \nabla(s))$ kontravariáns funktor $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ egzakt sorozaton vett hatásából képzett hosszú egzakt sorozat alábbi részletét minden s-re:

$$\operatorname{Hom}(X', \nabla(s)) \to \operatorname{Ext}^1(X'', \nabla(s)) \to \operatorname{Ext}^1(X, \nabla(s))$$

Láttuk, hogy az első tag $s \neq i$-re 0, és feltevés szerint az utolsó tag mindig 0, így $\mathrm{Ext}^1(X'', \nabla(s)) = 0$ $s \neq i$-re. i választása miatt X'' kompozíciófaktorai $S(j)$ alakúak, ahol $j < i$, így a 1.1.6 állítás duálisa szerint $\mathrm{Ext}^1(X'', \nabla(s)) = 0$ azonosság $s = i$-re is teljesülni fog. Ekkor $\mathrm{Ext}^1(X'', \nabla) = 0$, sőt $\eta_{i-1}X'' = 0$, vagyis alkalmazható az indukció, ahonnan $X'' \in \mathcal{F}(\Delta)$.

A következő lépésben belátjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1(X', \nabla(s)) = 0$. Ehhez a már említett hosszú egzakt sorozat egy másik részét tekintjük:

$$\mathrm{Ext}^1(X, \nabla(s)) \to \mathrm{Ext}^1(X', \nabla(s)) \to \mathrm{Ext}^2(X'', \nabla(s))$$

Itt az első tag 0 a feltevés miatt, az utolsó pedig szintén 0, ez következik *4.* feltételből hiszen épp most láttuk be, hogy $X'' \in \mathcal{F}(\Delta)$. Vagyis $\mathrm{Ext}^1(X', \nabla(s)) = 0$.

$P(i)$ generálja X'-et, és $\eta_i X' = 0$ (mivel $\eta_i X = 0$, és $X' = \eta_{i-1}X$), így létezik egy $0 \to K \to Z \to X' \to 0$ egzakt sorozat, ahol Z $\Delta(i)$-k direkt összege, és $K \in \operatorname{rad} Z$. Tehát $\eta_{i-1}K = 0$. A $0 \to K \to Z \to X' \to 0$ egzakt sorozatból képzett hosszú egzakt sorozat egy része:

$$\mathrm{Hom}(Z, \nabla(s)) \to \mathrm{Hom}(K, \nabla(s)) \to \mathrm{Ext}^1(X', \nabla(s))$$

ahol az utolsó tagról már láttuk, hogy mindig 0. Továbbá, $s \neq i$-re az első tag is 0 a 1.1.7 állítás *3.* része alapján, vagyis $\mathrm{Hom}(K, \nabla(s)) = 0$ $s \neq i$-re. Mivel K kompozíció-faktorai $S(j)$ alakúak ($j < i$), a $\nabla(i)$ talpára vonatkozó korábbi ötlettel kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}(K, \nabla(i)) = 0$ is teljesül. Vagyis $\mathrm{Hom}(K, \nabla) = 0$ ahonnan $K = 0$ (ha $S(i_0) \leqslant \operatorname{top} K$ valamely $i_0 \in \Omega_n$-re, akkor $\mathrm{Hom}(K, \nabla(i_0)) \neq 0$). Tehát X' izomorf a $\Delta(i)$-k direkt összegével, így $X', X'' \in \mathcal{F}(\Delta)$, ahonnan $X \in \mathcal{F}(\Delta)$.

2 $\Rightarrow$ *1*: $\mathrm{Ext}^1(A_A, \nabla) = \mathrm{Ext}^1(\oplus P(i), \nabla) = \oplus\, \mathrm{Ext}^1(P(i), \nabla) = 0$.

1 $\Rightarrow$ *3*: $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$ esetén indukcióval megmutatjuk, hogy minden $X \in \mathcal{F}(\Delta)$-re és minden $i \geqslant 1$-re $\mathrm{Ext}^i(X, \nabla) = 0$. A 1.1.8 állítás *3.* része alapján $i = 1$-re készen vagyunk, így elég az $i \geqslant 2$ esetet vizsgálni. Vegyünk egy $0 \to X' \to P \to X \to 0$ egzakt sorozatot, ahol P egy szabad A modulus. Ekkor $P, X \in \mathcal{F}(\Delta)$, így $X' \in \mathcal{F}(\Delta)$ a 1.1.11 lemma szerint. Továbbá, mivel P szabad, így $\mathrm{Ext}^i(P, -) = 0$, vagyis ha vesszük a $\mathrm{Hom}(-, \nabla(j))$ funktor hatásával képzett hosszú egzakt sorozatot, akkor $i > 0$-ra minden harmadik tag 0 lesz. Emiatt kapjuk a $\mathrm{Ext}^i(X, \nabla(j)) \cong \mathrm{Ext}^{i-1}(X', \nabla(j))$ izomorfiákat, ahol indukció szerint a jobb oldal 0. Így

$$\mathcal{F}(\Delta) \subseteq \{X |\ \mathrm{Ext}^i(X, \nabla) = 0 \text{ minden } i \geqslant 1\text{-re}\} (\subseteq \{X |\ \mathrm{Ext}^1(X, \nabla) = 0\})$$

A fordított tartalmazás triviális, így készen vagyunk a bizonyítással. □

1.1.2. Az $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategória és a tilting elmélet

Innentől kezdve egy A kváziöröklődő algebra $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategóriájának megértésével foglalkozunk. Használni fogjuk a [13] cikk eredményeit.

Koföloldó részkategóriák és kovariánsan véges részkategóriák

Bevezetjük a föloldó és koföloldó részkategóriák fogalmát. (Az angol nyelvű irodalomban a fogalmak elnevezései: "resolving" és "coresolving". A magyar nyelvű irodalomban még nincs meghonosodott fordítása, a dolgozat folyamán a "föloldó" és "koföloldó" kifejezéseket fogom használni)

1.1.14. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ az $\mathrm{mod}-A$ egy teljes részkategóriája. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{C}$ részkategória föloldó, ha az alábbi feltételek teljesülnek: $A_A \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ zárt a bővítésekre és tartalmazza a $\mathcal{C}$-beli epimorfizmusok magjait.*
Ha feltételek duálisa teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a részkategória koföloldó.

Egy, az $\mathcal{F}(\Delta)$-ra tett korábbi megjegyzésünkből már könnyen adódik, hogy egy kváziöröklődő algebrára $\mathcal{F}(\Delta)$ az $\mathrm{mod}-A$ föloldó részkategóriája.

1.1.15. Állítás. *Ha A kváziöröklődő, akkor $\mathcal{F}(\Delta)$ az $\mathrm{mod}-A$ föloldó részkategóriája.*

Bizonyítás. $\mathcal{F}(\Delta)$ zárt a bővítésekre, mivel a részmodulus és a faktor $\mathcal{F}(\Delta)$-beli részmodulusláncai egybefűzhetőek. A kváziöröklődőség miatt $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$. Az 1.1.11 állítás szerint pedig a $\mathcal{F}(\Delta)$ zárt a szürjektív leképezések magjára. □

A fenti állítás duálisa is igaz:

1.1.16. Állítás. *Ha A kváziöröklődő, akkor $\mathcal{F}(\nabla)$ az $\mathrm{mod}-A$ koföloldó részkategóriája.*

A kovariánsan véges részkategóriák bevezetéséhez szükségunk lesz az approximáció fogalmára. Ezt az alábbi definícióban vezetjük be:

1.1.17. Definíció. *Legyen $\mathcal{X}$ az $\mathrm{mod}-A$ egy részkategóriája. Egy $M \in \mathrm{mod}-A$ bal $\mathcal{X}$-approximációja egy olyan $\beta : M \to X$ leképezés (itt $X \in \mathcal{X}$), melyre teljesül, hogy minden $\beta' : M \to X'$; $X' \in \mathcal{X}$ leképezésre létezik egy $\xi : X \to X'$ leképezés úgy, hogy $\beta' = \beta\xi$.*
$M \in \mathrm{mod}-A$ jobb $\mathcal{X}$-approximációja egy olyan $\gamma : Y \to M$; $Y \in \mathcal{X}$ leképezés, melyre minden $\gamma' : Y' \to M$; $Y' \in \mathcal{X}$ leképezésre létezik egy $\eta : Y' \to Y$ leképezés, melyre $\gamma' = \eta\gamma$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta'"] & X \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \\ X' & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, dashed, "\eta"] \arrow[d, "\gamma'"] \\ Y \arrow[r, "\gamma"] & M \end{tikzcd}$$

Most pedig már készen állunk a kovariánsan véges részkategória definiálására:

1.1.18. Definíció. *Legyen $\mathcal{X}$ az* $\mathrm{mod}-A$ *direkt összegre zárt részkategóriája. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{X}$ kovariánsan véges, ha minden A-modulusnak létezik egy bal $\mathcal{X}$-approximációja. $\mathcal{X}$ kontravariánsan véges, ha minden A-modulusnak létezik egy jobb $\mathcal{X}$-approximációja.*

Az $\mathcal{Y}(\Theta)$ részkategória

1.1.19. Jelölés. *Legyen $\mathcal{X}$ az* $\mathrm{mod}-A$ *egy részkategóriája, ekkor*

$$\mathcal{Y} = \{Y \in \mathrm{mod}-A \mid \mathrm{Ext}_A^1(X, Y) = 0 \textit{ minden } X \in \mathcal{X}\textit{-re}\}$$

Azt a speciális esetet fogjuk nézni, mikor $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\Theta)$ (a Θ-filtrált modulusok halmaza), ahol $\Theta = \{\Theta(1), \ldots \Theta(n)\}$ A modulusok egy olyan halmaza, melyre a $\mathrm{Ext}^1(\Theta(l), \Theta(i)) = 0$ azonosság teljesül minden $l \geqslant i$-re. Ebben az esetben fenti módon kapott részkategória:

$$\mathcal{Y}(\Theta) = \{Y \in \mathrm{mod}-A \mid \mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{F}(\Theta), Y) = 0\}$$

A következő célunk az lesz, hogy belássuk, hogy $\mathcal{Y}(\Theta)$ az $\mathrm{mod}-A$ kovariánsan véges részkategóriája. Ehhez azonban először szükségünk van az alábbi lemmákra:

1.1.20. Lemma. *Legyen adott az $0 \to Y \to X \xrightarrow{\gamma} M \to 0$ egzakt sorozat. $X \in \mathcal{X}$, és $Y \in \mathcal{Y}$. Ekkor γ az M jobb $\mathcal{X}$-approximációja.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $\gamma' : X' \to M$ leképezést, ahol $X' \in \mathcal{X}$. Mivel $Y \in \mathcal{Y}$, az egzakt sorozat hasad, így kapunk egy $\xi : X' \to X$ leképezést, melyre $\gamma' = \xi\gamma$.

$$\begin{tikzcd} & & & X' \arrow[dl, dashed, "\xi"] \arrow[d, "\gamma'"] & \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & X \arrow[r, "\gamma"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

A következő lemma bizonyításához szükségünk lesz a tilting elméletből ismeretes Bongartz lemma egyik következményére, az univerzális bővítésre. (A Bongartz lemmával a 1.1.3 szakaszban foglalkozunk részletesebben)

1.1.21. Lemma. *Legyen* $1 \leqslant t \leqslant n$, *$N$ egy A-modulus, melyre* $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N) = 0$ *teljesül minden* $j > t$*-re. Ekkor létezik egy* $0 \to N \to N' \to Q \to 0$ *egzakt sorozat, ahol* $Q \in \mathrm{add}\,\Theta(t)$*, továbbá* $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N') = 0$ *minden* $j \geqslant t$*-re.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon : 0 \to N \to N' \to Q \to 0$ az N felülről vett univerzális bővítése $\Theta(t)$-vel, az univerzális bővítés tulajdonsága miatt a $\delta : \mathrm{Hom}_A(\Theta(t), Q) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(t), N)$ leképezés szürjektív. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N') = 0$ minden $j \geqslant t$-re. Vegyük a

$$\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), Q) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N') \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), Q)$$

egzakt sorozatot. $j \geqslant t$-re $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), \Theta(t)^m) = 0$ a Θ definíciója alapján, míg $j > t$-re a feltevésből következik, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N) = 0$. Így $j > t$-re valóban $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N') = 0$. Végül, $j = t$-re kapjuk a δ leképezést, ami szürjektív. Így $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N') = 0$ minden $j \geqslant t$-re. □

Az előző lemma következményeként kapjuk, hogy a speciális Ext-feltételeket teljesítő N-hez konstruálható egy rövid egzakt sorozat, melyben a másik két tag (bizonyos szempontból tekintve) szép tulajdonsággal bír:

1.1.22. Lemma. *Legyen* $1 \leqslant t \leqslant n$, *$N$ egy A-modulus, melyre* $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N) = 0$ *teljesül minden* $j > t$*-re. Ekkor létezik az* $0 \to N \to Y \to X \to 0$ *rövid egzakt sorozat úgy, hogy* $X \in \mathcal{F}(\{\Theta(1), \ldots \Theta(t)\})$ *és* $Y \in \mathcal{Y}(\Theta)$*.*

Bizonyítás. Az 1.1.21 lemma segítségével rekurzívan konstruáljuk monomorfizmusok egy $N = N_{t+1} \xrightarrow{\mu_t} N_t \xrightarrow{\mu_{t-1}} \ldots \xrightarrow{\mu_1} N_1 = Y$ sorozatát, ahol $Q_i = \mathrm{Coker}\,\mu_i$ $\Theta(i)$-k direkt összege, és $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N_i) = 0$ minden $j \geqslant i$-re. Legyen $\mu = \mu_t \ldots \mu_1 : N \to Y$ és $X = \mathrm{Coker}\,\mu$. Ekkor $Y \in \mathcal{Y}(\Theta)$, és X-nek van egy megfelelő filtrálása, így mindkét feltétel teljesül. □

Az előző átfogalmazása $t = n$-re:

1.1.23. Lemma. *Minden* $N \in \mathrm{mod}-A$ *-ra létezik egy* $0 \to N \to Y \to X \to 0$ *egzakt sorozat, hogy* $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ *és* $Y \in \mathcal{Y}(\Theta)$*.*

Most pedig már bizonyítani tudjuk, hogy $\mathcal{Y}(\Theta)$ kovariánsan véges:

1.1.24. Állítás. *Az* $\mathcal{Y}(\Theta)$ *részkategória kovariánsan véges* $\mathrm{mod}-A$ *-ban.*

Bizonyítás. Az előzőek szerint $N \in \mathrm{mod}-A$ -ra létezik a $0 \to N \xrightarrow{\beta} Y \to X \to 0$ egzakt sorozat, ahol $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ és $Y \in \mathcal{Y}(\Theta)$. Mivel $\mathrm{Ext}^1(X, Y') = 0$ minden $Y' \in \mathcal{Y}(\Theta)$-ra, a 1.1.20 lemma duálisát felhasználva kapjuk, hogy β egy bal $Y \in \mathcal{Y}(\Theta)$-approximáció. □

Az előző állítás duálisa is igaz:

1.1.25. Állítás. $\mathcal{W}(\Theta) = \{W \in \mathrm{mod}-A | \ \mathrm{Ext}^1_A(W, \Theta(i)) = 0$ *minden* $1 \leqslant i \leqslant n$*-re*$\}$. *Ekkor* $\mathcal{W}(\Theta)$ *kontravariánsan véges részkategória* $\mathrm{mod}-A$ *-ban.*

Az általánosított tilting modulus

Az általánosított tilting modulus definíciójával folytatjuk:

1.1.26. Definíció. *T egy általánosított tilting A modulus, ha teljesülnek az alábbiak:*

1. *T projektív dimenziója véges*
2. $\mathrm{Ext}^i_A(T, T) = 0$ *minden $i > 0$-ra*
3. *létezik egy* $0 \to A_A \to T_0 \to T_1 \to \dots T_m \to 0$ *egzakt sorozat úgy, hogy* $T_j \in \mathrm{add}\, T$ *minden j-re.*

Az általánosított kotilting modulust ennek duálisaként definiáljuk.

A 1.1.8 állítás (valamint a duálisa) szerint kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1(\Delta(l), \Delta(i)) = 0$ $l \geqslant i$-re és $\mathrm{Ext}^1(\nabla(j), \nabla(i)) = 0$ $j \leqslant i$-re, így $\Theta = \Delta$ (vagy ∇ és $\leqslant^{op}$) választással alkalmazhatóak a fentebb bizonyított állítások. Az alábbiakban ezeket az eseteket fogjuk tekinteni.

Legyen $I_i = \eta_{\{P(l)|l \geqslant i\}} A$. Adódik a $A = I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} = 0$ lánc. A 1.1.10 lemma szerint egy M A modulusra pontosan akkor teljesül a $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ tartalmazás, ha minden i-re $I_i M / I_{i+1} M$ projektív, mint $A/I_{i+1}A$-modulus. Duálisan, a $M \in \mathcal{F}(\nabla)$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha minden i-re $I_i M / I_{i+1} M$ injektív, mint $A/I_{i+1}A$-modulus. Innen látszik, hogy $\mathcal{F}(\Delta)$ és $\mathcal{F}(\nabla)$ zártak a direkt összegre.

Legyen $\omega = \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$. Ha egy kváziöröklődő algebra Δ-iból és ∇-iból indulunk ki, akkor a 1.1.13 tétel szerint igazak az $\mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{W}(\nabla)$ és $\mathcal{Y}(\Delta) = \mathcal{F}(\nabla)$ egyenlőségek. Ez pedig azt jelenti, hogy egy $M \in \omega$-re teljesül az általánosított tilting modulus definíciójának *2.* pontja. Így természetesen adódik a kérdés, hogy egy $\omega = \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$ hozzá tudunk-e rendelni egy T általánosított tilting modulust. A továbbiakban ezzel fogunk foglalkozni. Ehhez előbb bizonyítjuk a következő lemmát:

1.1.27. Lemma. *Legyen* $\mathrm{gl\,dim}\, A = d$*. Ekkor* $X \in \mathcal{F}(\Delta)$*-ra létezik egy*

$$0 \to X \to T_0 \to T_1 \to \dots \to T_d \to 0$$

egzakt sorozat, ahol $T_i \in \omega$ *minden* $0 \leqslant i \leqslant d$*-re.*

Bizonyítás. Legyen $X_{-1} = X$. Induktívan használva a 1.1.23 lemmát kapjuk az alábbi egzakt sorozatokat: $\xi_i : 0 \to X_{i-1} \to T_i \to X_i \to 0$, melyekre $X_i \in \mathcal{F}(\Delta)$ és $T_i \in \mathcal{Y}(\Delta)$. Mivel $\mathcal{F}(\Delta)$ zárt a bővítésekre, és $X_{-1} \in \mathcal{F}(\Delta)$, kapjuk, hogy $T(i) \in \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{Y}(\Delta) = \omega$. Hattassuk most a $\mathrm{Hom}_A(X_d, -)$ funktort ξ_i-n, és kapjuk az alábbi sorozatot:

$$\mathrm{Ext}_A^j(X_d, T_i) \to \mathrm{Ext}_A^j(X_d, X_i) \to \mathrm{Ext}_A^{j+1}(X_d, X_{i-1}) \to \mathrm{Ext}_A^{j+1}(X_d, T_i)$$

Az két szélső tag eltűnik, mivel $X_d \in \mathcal{F}(\Delta)$ és $T_i \in \mathcal{Y}(\Delta)$. Kapjuk, hogy teljesül az $\mathrm{Ext}_A^1(X_d, X_{d-1}) \cong \mathrm{Ext}_A^{d+1}(X_d, X_{-1}) = 0$ izomorfia, vagyis ξ_d hasad, ahonnan $X_{d-1} \in \omega$. Összerakva az ξ_i egzakt sorozatokat, használva a $T_d = X_{d-1}$ jelölést, kapjuk a keresett sorozatot. □

Most pedig már választ tudunk adni a fenti kérdésre ([13] cikk, Theorem 5):

1.1.28. Tétel. *Legyen A kváziöröklődő, $\omega = \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$. Ekkor létezik egy (egyértelműen meghatározott) T bázismodulus, amelyre teljesül, hogy $\omega = \mathrm{add}\, T$, továbbá T általánosított tilting és általánosított kotilting modulus is egyben.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző lemmát $X = A_A$-ra, és képezzük a $T' = \bigoplus_{i=0}^d T(i)$ modulust. Ellenőrizhető, hogy T' egy általánosított tilting modulus, melyből kitörölve a többszörös összeadandókat egy $T \in \omega$ bázismodulust kapunk. Ha $M \in \omega$, akkor $T \oplus M$ is teljesíti az általánosított tilting modulusra vonatkozó axiómákat, így $M \in \mathrm{add}\, T$, vagyis $\omega = \mathrm{add}\, T$. Mivel a duális axiómák is teljesülnek, kapjuk, hogy T egyben egy általánosított kotilting modulus is. □

Az előző állítás során kapott T általánosított tilting bázismodulust az A-hoz rendelt karakterisztikus tilting modulusnak nevezzük. A karakterisztikus tilting modulus meghatározza $\mathcal{F}(\Delta)$ és $\mathcal{F}(\nabla)$ részkategóriákat:

1.1.29. Állítás. *Egy kváziöröklődő algebra esetében az alábbiak teljesülnek:*

$$\mathcal{F}(\Delta) = \{X |\ \mathrm{Ext}_A^i(X, T) = 0 \textit{ minden } i \geqslant 1\textit{-re} \}$$
$$\mathcal{F}(\nabla) = \{Y |\ \mathrm{Ext}_A^i(T, Y) = 0 \textit{ minden } i \geqslant 1\textit{-re} \}$$

Bizonyítás. Legyen M egy modulus, melyre $\mathrm{Ext}_A^i(T, M) = 0$ minden $i \geqslant 1$-re. A 1.1.23 lemma miatt kapjuk a $0 \to M \to Y \to X \to 0$ egzakt sorozatot, ahol $Y \in \mathcal{Y}(\Delta)$ és $X \in \mathcal{F}(\Delta)$. Ekkor a 1.1.27 lemma szerint konstruálunk egy $0 \to X \to T_0 \to T_1 \to \ldots \to T_m \to 0$ egzakt sorozatot, ahol minden $T_i \in \omega = \mathrm{add}\, T$.

Indukcióval belátjuk, hogy $\mathrm{Ext}_A^i(X, M) = 0$ is teljesül minden $i \geqslant 1$-re. $m = 0$-ra triviális. Az $m \geqslant 1$ esetben létezik egy $0 \to X \to T_0 \to X' \to 0$ egzakt sorozat, ahol az indukció miatt X'-re teljesül, hogy $\mathrm{Ext}_A^i(X', M) = 0$ minden $i \geqslant 1$-re. Ebből pedig minden $i \geqslant 1$-re kapjuk a $0 = \mathrm{Ext}_A^i(T_0, M) \to \mathrm{Ext}_A^i(X, M) \to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(X', M) = 0$ egzakt sorozatot. Így ezzel készen vagyunk.

Következik tehát, hogy a $0 \to M \to Y \to X \to 0$ egzakt sorozat hasad, vagyis teljesül az $M \in \mathcal{Y}(\Delta) = \mathcal{F}(\nabla)$ tartalmazás. Dualitást alkalmazva teljesül a másik állítás is. □

A következő állítás segítségével kapjuk az karakterisztikus tilting modulus tovább bonthatatlan direkt felbontását:

1.1.30. Állítás. *Az a T bázismodulus, melyre* $\mathrm{add}\, T = \omega$, $T = \oplus_{i=1}^n T(i)$ *alakban bontható fel, ahol $T(i)$ olyan felbonthatatlan modulusok, melyekre léteznek az alábbi egzakt sorozatok*

$$0 \to \Delta(i) \xrightarrow{\beta(i)} T(i) \to X(i) \to 0$$
$$0 \to Y(i) \to T(i) \xrightarrow{\gamma(i)} \nabla(i) \to 0$$

úgy, hogy $\beta(i)$ egy bal $\mathcal{F}(\nabla)$-approximáció, és $X(i) \in \mathcal{F}(\{\Delta(j) | j < i\})$, valamint $\gamma(i)$ egy jobb $\mathcal{F}(\Delta)$-approximáció, és $Y(i) \in \mathcal{F}(\{\nabla(j) | j < i\})$.

Bizonyítás. Rögzített i esetén $l \geqslant i$-re $\mathrm{Ext}_A^1(\Delta(l), \Delta(i)) = 0$, így alkalmazható a 1.1.22 lemma: kapunk egy $0 \to \Delta(i) \xrightarrow{\beta} Y \to X \to 0$ egzakt sorozatot, ahol $X \in \mathcal{F}(\{\Delta(j) | j < i\})$, és $Y \in \mathcal{Y}(\Delta) = \mathcal{F}(\nabla)$. Így tehát $[X : S(i)] = 0$, továbbá $[\Delta(i) : S(i)] = 1$, mert egy kváziöröklődő algebra Δ-iból indultunk ki, vagyis kapjuk, hogy $[Y : S(i)] = 1$. Feltehető, hogy $S(i) \in Y_1$, ahol $Y = \oplus_{s=1}^t Y_s$ egy tovább bonthatatlan felbontás. Mivel $\mathcal{F}(\Delta)$ zárt a bővítésekre, $T(i) := Y$ választással $Y \in \mathcal{F}(\Delta)$, vagyis $Y \in \omega$, azaz $T(i)$ a T egy direkt összeadandója. Az így kapott $T(i)$-k páronként nem izomorfak, mert minden i-re $T(i)$-nek van egy $S(i)$ kompozíciófaktora, a többinek pedig nincs. Így $T \cong \oplus_{i=1}^n T(i)$.
A másik állítás ennek duálisaként írható fel. □

A karakterisztikus tilting modulus endomorfizmusgyűrűje

Legyen ${}_AT = \oplus_{i=1}^n T(i)$ a karakterisztikus tilting modulus, és vezessük be a $A' = \mathrm{End}({}_AT)$ jelölést. Tekintsük az $F = \mathrm{Hom}_A(T, -) : \mathrm{mod} - A \to A' - \mathrm{mod}$ funktort.
A továbbiakban belátjuk, hogy ha egy A kváziöröklődő algebrából indulunk ki, akkor az $A \mapsto A'$ megfeleltetés során szintén egy kváziöröklődő algebrát kapunk. Sőt az eljárás második iteráltjaként visszakapjuk az eredeti A algebrát. Ehhez előbb kimondjuk a következő közismert lemmát, melyet a dolgozat folyamán sokszor fogunk még használni:

1.1.31. Lemma. *Legyenek R és S gyűrűk, valamint ${}_RM$; ${}_RW_S$; N_S modulusok. Ekkor fennáll a következő izomorfizmus:*

$$\eta : \mathrm{Hom}_R({}_RM, \mathrm{Hom}_S(N_S, {}_RW_S)) \cong \mathrm{Hom}_S(N_S, \mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RW_S)) \tag{1.1}$$

Bizonyítás. Ötlet: $[\eta(\gamma)](n) : m \mapsto [\gamma(m)](n)$ és $[\eta^{-1}(\alpha)](m) : n \mapsto [\alpha(n)](m)$. □

1.1.32. Állítás. *Legyen A kváziöröklődő, ${}_AT = \oplus_{i=1}^n T(i)$ a hozzá tartozó karakterisztikus tilting modulus, $A' = \mathrm{End}({}_AT)$ és $F = \mathrm{Hom}_A(T, -)$.*
Ekkor az A' gyűrű kváziöröklődő, a $\Delta' = \{F\nabla(i) | i \in \Omega_n\}$ standard modulusokkal. F egy ekvivalenciát határoz meg $\mathcal{F}(\nabla) \subseteq \mathrm{mod}-A$ és $\mathcal{F}(\Delta') \subseteq A' - \mathrm{mod}$ részkategóriák között.

Bizonyítás. (A [13] cikk Theorem 6 bizonyításának nyomán.)
Felhasználva [9] és [12] eredményeit, F az $\mathcal{F}(\nabla) \subseteq \mathrm{mod}-A$ részkategória egy egzakt és teljes beágyazása $A' - \mathrm{mod}$ egy olyan bővítésre zárt részkategóriájába, mely tartalmazza a projektív A' modulusokat. Legyen $\Delta'(i) = F\nabla(i')$ (itt $i' = n - i + 1$). Így $\mathcal{F}(\nabla)$ képe F-nél azon A' modulusok halmaza, melyeknek van Δ' filtrálása. Sőt, mivel ez a halmaz zárt a direkt összegre, így $\mathcal{F}(\Delta')$-val egyezik meg.

Jelölje $P'(i) = FT(i')$ a felbonthatatlan projektív A' modulusokat, továbbá jelölje $S'(i) = \mathrm{top}\, P'(i)$ az egyszerű A' modulusokat. Belátjuk, hogy $\mathrm{Hom}_{A'}(P'(l), \Delta'(i)) = 0$ minden $l > i$-re. Tudjuk, hogy $\mathrm{Hom}_A(T(l'), \nabla(i')) = 0$ minden $l' < i'$-re, hiszen $S(i')$ nem jelenik meg kompozíciófaktorként $T(l')$-ben, viszont $\nabla(i')$ talpa $S(i')$-vel izomorf. A fenti lemma, és a kétszer vett duálisra vonatkozó tulajdonság szerint pedig:

$$\mathrm{Hom}_{A'}(P'(l), \Delta'(i)) = \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(T, T(l')), \mathrm{Hom}_A(T, \nabla(i'))) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_A(T, \mathrm{Hom}_{A'}(\mathrm{Hom}_A(T, T(l')), \nabla(i'))) = \mathrm{Hom}_A(T(l'), \nabla(i')) = 0$$

Vagyis $\Delta'(i)$ kompozíciófaktorai $S'(j)$ alakúak, ahol $j \leqslant i$.

Az $F = \mathrm{Hom}_A(T, -)$ funktor egzakt az $\mathcal{F}(\nabla) = \{Y | \mathrm{Ext}_A^i(T, Y) = 0 \text{ minden } i \geqslant 1\text{-re}\}$ részkategórián, mivel a keletkező hosszú egzakt sorozatban az Ext-ek eltűnnek. Az 1.1.30 állítás szolgáltat egy $0 \to Y'(i) \to T(i') \to \nabla(i') \to 0$ egzakt sorozatot, ahol $Y(i') \in \mathcal{F}(\{\nabla(j') | l' < i'\})$. Így $Y'(i), T(i'), \nabla(i') \in \mathcal{F}(\nabla)$, tehát a fentiek szerint F hatásaként egy egzakt sorozatot kapunk: $0 \to FY'(i) \to P'(i) \to \Delta'(i) \to 0$. Erre teljesül, hogy $FY'(i) \in \mathcal{F}(\{\Delta'(l) | l > i\})$. Így pedig $\mathrm{top}\, \Delta'(i) = S'(i)$, sőt $FY'(i)$ tetejének a kompozíciófaktorai $S'(l)$ alakúak, ahol $l > i$.

A $\Delta'(i)$ kompozíciófaktoraira tett megállapítással összevetve kapjuk, hogy $\Delta'(i)$ a $P'(i)$ legnagyobb olyan faktormodulusa, hogy a kompozíciófaktorok $S'(j)$ alakúak, ahol $j \leqslant i$. Így pedig a $\Delta'(i)$-k valóban az A' standard modulusai.

$\mathrm{End}_{A'}(\Delta'(i)) \cong \mathrm{End}_A(\nabla(i'))$ (ismétcsak a lemmát és a kétszeres dualitást kihasználva). A kváziöröklődő, így a fenti endomorfizmusgyűrű ferdetest, tehát $[\Delta'(i) : S'(i)] = 1$. Mivel minden projektív A' modulus az $\mathcal{F}(\nabla)$ F általi képében van, A'-nek van egy Δ'-kel vett filtrálása. Vagyis A' kváziöröklődő, a $\Delta' = \{F\nabla(i) | i \in \Omega_n\}$ standard modulusokkal. □

Az $A' = \mathrm{End}(_A T)$ endomorfizmusgyűrűt szokás az A Ringel duálisának is nevezni. Az előző konstrukció folyamán vigyázni kell az Ω_n-en adott rendezéssel, hiszen A' a fordított sorrenddel lesz kváziöröklődő. A rendezést az indempotenseken adjuk meg, melyeket $\mathbf{e}$ jelöléssel rövidítünk. Ha tehát hangsúlyt akarunk fektetni arra, hogy mely sorrenddel kváziöröklődő egy adott algebra, akkor az $(A, \mathbf{e})$ jelölést fogjuk használni.

Az $(A, \mathbf{e})$ kváziöröklődő algebrából egy egyértelműen meghatározott $(A', \mathbf{e}')$ kváziöröklődő algebrát hoztunk létre. A lépés iteráltjaként kapjuk a T' karakterisztikus tilting modulust, majd az $(A'', \mathbf{e}'')$ kváziöröklődő algebrát.

1.1.33. Lemma. *Minden $i \in \Omega_n$-re $FI(i) = T'(i')$.*

Bizonyítás. Az $FI(i)$ modulus Ext-injektív $\mathcal{F}(\Delta')$-ben, így $FI(i) \cong T'(r)$ valamely r-re. Az 1.1.30 állítás szerint $\mathrm{Hom}_A(T(i), I(i)) \neq 0$, és $\mathrm{Hom}_A(T(j), I(i)) = 0$ $j < i$-re. Az F funktor hatása során áttérünk $A' - \mathrm{mod}$-ba, ahol a szokásos izomorfiát használva kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}_{A'}(P'(i'), T'(r)) \neq 0$, és $\mathrm{Hom}_{A'}(P'(j'), T'(r)) = 0$ $j < i$-re, vagyis $r = i'$. □

Innen már könnyen belátható, hogy $(A, \mathbf{e})$ és $(A'', \mathbf{e}'')$ megegyeznek:

1.1.34. Állítás. *Ha A bázisalgebra, akkor $(A, \mathbf{e})$ és $(A'', \mathbf{e}'')$ azonosítható.*

Bizonyítás. Legyen $I = \oplus I(i)$, ekkor $A \cong \mathrm{End}_A(I) \cong \mathrm{End}_{A'}(FI) = \mathrm{End}_{A'}(T') \cong A''$. □

1.1.3. A Bongartz lemma

Ebben szakaszban a Bongartz lemmával foglalkozunk, mely a tilting elmélet egy alapvető állítása (megtalálható például a [3] könyv VI fejezetének 2.4 lemmájaként). Számunkra nem is feltétlenül a lemma eredménye, hanem inkább a bizonyítása izgalmas: a dolgozat folyamán számos alkalommal fogjuk használni az itt megjelenő univerzális bővítést.

1.1.35. Definíció. *T egy parciális tilting A modulus, ha teljesülnek az alábbiak:*

1. $\mathrm{pd}\, T_A \leqslant 1$
2. $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$

1.1.36. Definíció. *T egy tilting modulus, ha az előzőek mellett ez a tulajdonság is teljesül:*

3. létezik egy $0 \to A_A \to T_0 \to T_1 \to 0$ egzakt sorozat úgy, hogy $T_0, T_1 \in \operatorname{add} T$.

Mostmár rátérhetünk a Bongartz lemmára:

1.1.37. Lemma. *Ha T_A egy parciális tilting modulus, akkor létezik egy E A-modulus úgy, hogy $T \oplus E$ egy tilting modulus.*

Bizonyítás. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_d$ az $\operatorname{Ext}^1_A(T, A)$ k-vektortér bázisa. Legyen a

$$e_i : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} T \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sorozat az e_i-t reprezentáló bővítés. Vegyük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
e : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & E \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ahol $f = \begin{bmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_d \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_d \end{bmatrix}$ és $k : A^d \to A$ a kodiagonális homomorfizmus: $k : \underline{a} = (a_1, a_2 \dots, a_n) \mapsto \sum a_i$. Legyen $e \in Ext^1_A(T^d, A)$ az az elem, amelyet az alsó egzakt sorozat reprezentál. Legyen $u_i : T \to T^d$ az i-edik koordinátába való beágyazás. Belátjuk, hogy $e_i = \operatorname{Ext}^1_A(u_i, A)e$ minden $1 \leqslant i \leqslant d$-re. Vegyük ehhez az alábbi, egzakt sorokkal rendelkező kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
e_i : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i''"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i'"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
e : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & E \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ahol u_i', u_i'' az i-edik koordinátába való beágyazás. $ku_i'' = 1_A$, így kapjuk a következő egzakt sorokkal rendelkező kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
e_i : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, equal, "1_A"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "uu_i'"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
e : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & E \arrow[r, "w"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ahonnan $e_i = \mathrm{Ext}^1_A(u_i, A)e$. Hattassuk most $\mathrm{Hom}_A(T, -)$-t az e egzakt sorozatra:

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_A(T, T^d) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_A(T, A) \to \mathrm{Ext}^1_A(T, E) \to \mathrm{Ext}^1_A(T, T^d) = 0$$

Mivel $e_i = \mathrm{Ext}^1_A(u_i, A)e = \delta(u_i)$, kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(T, A)$ minden báziseleme a δ képében van, így az szürjektív. Tehát $\mathrm{Ext}^1_A(T, E) = 0$. Hattatva most $\mathrm{Hom}_A(-, T)$, majd $\mathrm{Hom}_A(-, E)$-t e-re a következőket kapjuk:

$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(T^d, T) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, T) \to \mathrm{Ext}^1_A(A, T) = 0$$
$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(T^d, E) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_A(A, E) = 0$$

Innen kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(E \oplus T, E \oplus T) = 0$. Az e egzakt sorozatból kapjuk, hogy $\mathrm{pd}\, E \leqslant 1$, ahonnan pd $(T \oplus E) \leqslant 1$, továbbá szintén az e egzakt sorozat mutatja, hogy a $(T \oplus E)$ modulus teljesíti a harmadik axiómát is. Így pedig készen vagyunk. $\square$

1.1.4. A standardizálás

Az alfejezet végén az $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategória egy lehetséges általánosítását vizsgáljuk meg. Az 1.1.1 szakasz elején megjelenő Δ-kra vonatkozó homologikus tulajdonságok mintájára Dlab és Ringel [7] meghatározott egy feltételrendszert, amely alapján egy olyan részkategóriát lehet felépíteni, mely rendelkezik az $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategória tulajdonságaival. Az eljárást standardizálásnak nevezték el. A módszer újítása, hogy ezúttal előbb a $\Theta = \{\Theta(i) | i \in I\}$ modulusok egy halmazát adjuk meg (ezek felelnek majd meg a standard mosulusoknak). Ezután próbálunk egy olyan kváziöröklődő algebrát konstruálni, melyeknek az adott $\Theta(i)$ modulusok lesznek a standard modulusai. Dlab és Ringel tétele szerint ([7] cikk, Theorem 2), ha a Θ halmazra teljesülnek bizonyos jól meghatározott tulajdonságok, akkor a keresett kváziöröklődő algebra mindig létezik. Az egész szakasz során ezen tétel bizonyítását fogjuk nyomon követni.

Tekintsük tehát a standardizálás eredeti, Dlab-Ringel szerinti definícióját ([7] cikk, 3. szakasz):

1.1.38. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ egy k-kategória, és $\Theta = \{\Theta(i) | i \in I\}$ $\mathcal{C}$-beli objektumok véges halmaza. Azt mondjuk, hogy Θ standardizálható, ha teljesülnek a következő feltételek:*

1. $\dim_k \mathrm{Hom}(\Theta(i), \Theta(j)) < \infty$, *és* $\dim_k \mathrm{Ext}^1(\Theta(i), \Theta(j)) < \infty$ *minden* $i, j \in I$*-re.*
2. *Képezzünk egy gráfot a következő módon: a csúcsok az I elemei; i és j csúcs között akkor van (pontosan egy) él, ha* $\mathrm{rad}(\Theta(i), \Theta(j)) \neq 0$, *vagy* $\mathrm{Ext}^1 \Theta(i), \Theta(j)) \neq 0$. *A második feltétel az, hogy ebben a gráfban nincs (irányított) kör.*

1.1.39. Megjegyzés. *A második feltétel azt kéri, hogy minden $\Theta(i)$ Schur típusú legyen, és egyiknek se legyen bővítése önmagával.*
Vegyük észre továbbá, hogy egy adott Θ standardizálható halmaz I indexhalmazán a második feltétel meghatároz egy parciális rendezést: $i \preceq j$, ha létezik a nyilaknak egy $i = \lambda_0 \to \lambda_1 \to ... \to \lambda_m = j$ sorozata.

Az eredeti definíció átfogalmazása sokkal kényelmesebb feltételrendszert ad meg, így a későbbiekben inkább erre fogunk hivatkozni:

1.1.40. Definíció. *A $\Theta = \{\Theta(i)|\ i \in I\}$ halmaz standardizálható, ha a következő feltételek teljesülnek:*

1. $\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *minden* $1 \leqslant j < i \leqslant n$*-re*
2. $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$ *minden* $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$*-re*
3. $\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), \Theta(i))$ *ferdetest minden* $1 \leqslant i \leqslant n$*-re*

1.1.41. Megjegyzés. *A 1.1.7 állítás 2. alpontjából és a 1.1.8 állítás 2. alpontjából egyből adódik, hogy egy tetszőleges algebra standard modulusai teljesítik a standardizálhatósághoz szükséges első két feltételt. Az is könnyen látszik, hogy egy kváziöröklődő algebra standard modulusai mindhárom feltételt teljesítik.*

Mielőtt továbbmennénk, emlékeztetünk a következő definícióra:

1.1.42. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ a $\mathrm{mod}-A$ egy részkategóriája. Ha egy $M \in \mathcal{C}$ modulusra $\mathrm{Ext}^1_A(M, -)|_{\mathcal{C}} = 0$, akkor azt mondjuk, hogy M Ext-projektív $\mathcal{C}$-ben.*
Ha egy $N \in \mathcal{C}$ modulusra $\mathrm{Ext}^1_A(-, N)|_{\mathcal{C}} = 0$, akkor azt mondjuk, hogy N Ext-injektív $\mathcal{C}$-ben.

Most pedig rátérhetünk a már említett tétel bizonyítására ([7] cikk, Theorem 2):

1.1.43. Tétel. *Legyen Θ a $\mathcal{C}$ kategória objektumainak egy standardizálható halmaza. Ekkor létezik egy (Morita ekvivalencia erejéig egyértelmű) A kváziöröklődő algebra úgy, hogy a $\mathcal{C}$-beli Θ-filtrált modulusok $\mathcal{F}(\Theta)$ részkategóriája ekvivalens a Δ-filtrált A modulusok $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ részkategóriájával.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $I = \Omega_n = \{1, 2 ... n\}$ a természetes rendezésével. A bizonyítást részállításokra bontjuk a könnyebb érthetőség kedvéért.

1.1.44. Állítás. *Minden $i \in \Omega_n$-re létezik egy felbonthatatlan Ext-projektív $P_\Theta(i) \in \mathcal{F}(\Theta)$ objektum, melyre a $P_\Theta(i) \to \Theta(i)$ epimorfizmus magja $\mathcal{F}(\Theta)$-ben van.*

Bizonyítás. Rögzítjük i-t, majd minden $i \leqslant m \leqslant n$-re induktívan konstruálunk olyan felbonthatatlan $P(i,m)$ objektumokat, melyekre léteznek az

$$0 \to K(i,m) \to P(i,m) \to \Theta(i) \to 0$$

egzakt sorozatok, ahol $K(i,m) \in \mathcal{F}(\Theta(i+1), \ldots, \Theta(m))$, továbbá minden $1 \leqslant j \leqslant m$-re az $\mathrm{Ext}^1(P(i,m), \Theta(j)) = 0$ azonosság is teljesül.

$i = m$ esetből indulunk. Legyen $P(i,i) = \Theta(i)$, így $K(i,i) = 0$. A 1.1.40 definció *2.* pontja miatt $\mathrm{Ext}^1(P(i,i), \Theta(j)) = 0$, így a $P(i,i)$-re szabott Ext feltétel is teljesül. Így $P(i,i)$ teljesíti mindhárom kívánt tulajdonságot, vagyis ebből valóban kiindulhatunk.

Ezután legyen $i < m$, és tegyük fel, hogy $P(i, m-1)$ és $K(i, m-1)$ már definiálva vannak. Legyen $d(i,m) = \dim \mathrm{Ext}^1 P(i, m-1), \Theta(m))$. Ekkor univerzális bővítést véve kapjuk a következő egzakt sorozatot:

$$0 \to \Theta(m)^{d(i,m)} \to P(i,m) \to P(i,m-1) \to 0 \tag{1.2}$$

ahol a $\mathrm{Hom}(\Theta(m)^{d(i,m)}, \Theta(m)) \to \mathrm{Ext}^1(P(i,m-1), \Theta(m))$ indukált leképezés szürjektivitását a Bongartz lemma bizonyítása során láttuk. A $\mathrm{Hom}(-, \Theta(j))$ funktor hatása során adódik a következő hosszú egzakt sorozat részlet:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^1(P(i,m-1), \Theta(j)) \to \mathrm{Ext}^1(P(i,m), \Theta(j)) \to \mathrm{Ext}^1(\Theta(m)^{d(i,m)}, \Theta(j)) \to \ldots$$

Itt az első tag indukció miatt, az utolsó tag a 1.1.40 definíció miatt lesz 0. Így az $\mathrm{Ext}^1(P(i,m), \Theta(j)) = 0$ azonosság is teljesül minden $j \leqslant m$-re. Továbbá, indukció szerint az is igaz, hogy $P(i,m-1) \in \mathcal{F}(\Theta(i), \ldots, \Theta(m-1))$, a 1.1.40 definíció miatt pedig $Hom(\Theta(m), P(i,m-1)) = 0$. Így az is következik, hogy $P(i,m)$ felbonthatatlan. $K(i,m)$-et pedig a következő egzakt sorokkal rendelkező kommutatív diagram segítségével definiáljuk:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Theta(m)^{d(i,m)} & \longrightarrow & K(i,m) & \longrightarrow & K(i,m-1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Theta(m)^{d(i,m)} & \longrightarrow & P(i,m) & \longrightarrow & P(i,m-1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \Theta(i) & = & \Theta(i) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Így $K(i,m)$ a $K(i,m-1)$ bővítése $\Theta(m)^{d(i,m)}$-val, vagyis tudjuk garantálni, hogy $K(i,m) \in \mathcal{F}(\Theta(i+1), \dots, \Theta(m))$ teljesüljön. Ezzel megvagyunk az indukciós lépéssel.

Végezetül pedig legyen $P_\Theta(i) = P(i,n)$. □

1.1.45. Állítás. *Legyen adott egy $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ objektum. Ekkor létezik egy*

$$0 \to X' \to P_0(X) \to X \to 0$$

rövid egzakt sorozat, ahol $P_0(X) \in add\ P_\Theta$, és $X' \in \mathcal{F}(\Theta)$.

Bizonyítás. $X = \Theta(i)$-re legyen $P_0(\Theta(i)) = P_\Theta(i)$. A többi esetben indukciót alkalmazunk.

Feltétetelezzük tehát, hogy $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ adott, melynek létezik egy $U \neq 0$ valódi részmodulusa úgy, hogy $U \in \mathcal{F}(\Theta)$, valamint $Y = X/U \in \mathcal{F}(\Theta)$. Az indukció miatt léteznek $\epsilon_U : P_0(U) \to U$ és $\epsilon_Y : P_0(Y) \to Y$ epimorfizmusok úgy, hogy a ϵ_U, ϵ_Y leképezések magjaira $U', Y' \in \mathcal{F}(\Theta)$ teljesül (itt $P_0(U), P_0(Y) \in add\ P_\Theta$). Legyen $\iota : U \to X$ a beágyazás, és $\pi : X \to Y$ a vetítés. A $P_\Theta(i)$-k Ext-projektívek az $\mathcal{F}(\Theta)$ részkategórián, $U \in \mathcal{F}(\Theta)$, $P_0(Y) \in add\ P_\Theta$, így $\mathrm{Ext}^1(P_0(Y), U) = 0$. Vegyük most a $\mathrm{Hom}(P_0(Y), -)$ funktor hatását a $0 \to U \to X \to Y \to 0$ rövid egzakt sorozaton. A keletkezett hosszú egzakt sorozat egy része:

$$\dots \to \mathrm{Hom}(P_0(Y), X) \xrightarrow{Hom(\pi)} \mathrm{Hom}(P_0(Y), Y) \to \mathrm{Ext}^1(P_0(Y), U) \to \dots$$

A fentiek szerint tehát a $\mathrm{Hom}(\pi)$ leképezés szürjektív, tehát létezik egy $\alpha : P_0(Y) \to X$ leképezés úgy, hogy $\pi\alpha = \epsilon_Y \in \mathrm{Hom}(P_0(Y), Y)$. Ekkor $[\iota\epsilon_U, \alpha] : P_0(U) \oplus P_0(Y) \to X$ szürjektív, a magja pedig az U' bővítése Y'-tel. Vagyis a $P_0(U) \oplus P_0(Y) \to X$ leképezés magjára: $X' \in \mathcal{F}(\Theta)$.

(Tulajdonképpen beláttuk, hogy az létezik az alábbi egzakt sorokkal rendelkező kommutatív diagram)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0(U) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_U"] & P_0(U) \oplus P_0(Y) \arrow[r] \arrow[d] & P_0(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_Y"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

□

Legyen $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_\Theta(i)$, ennek endomorfizmusgyűrűje pedig A. Tekinthetjük ekkor az $F = \mathrm{Hom}(P, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{mod}-A$ funktort. Legyen továbbá $P_A(i) = F(P_\Theta(i))$, és minden $1 \leqslant i \leqslant n$-re vezessük be a $\Delta(i) = F(\Theta(i))$ jelöléseket. $l_\Theta(M)$-mel jelöljük az M egy kompozícióláncában előforduló $\Theta(i)$ modulusok számát, mely egy Hölder típusú bizonyítás szerint egyértelmű.

1.1.46. Állítás. *Az F funktor az $\mathcal{F}(\Theta)$ részkategóriát $\mathcal{F}({}_A\Delta)$-ra képezi.*

Bizonyítás. Korábban már láttuk, hogy $X \in \mathcal{F}(\Theta)$-ra $\mathrm{Ext}^1(P, X) = 0$, így F egzakt az olyan $\mathcal{C}$-beli $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt sorozatokon, ahol $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ (a hosszú egzakt sorozatban az első Ext eltűnik).

Legyen $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. $l_\Theta(M)$-ra vonatkozó indukció szerint bizonyítunk. Létezik egy $0 \to \Theta(i) \to M \to N \to 0$ rövid egzakt sorozat egy megfelelő i-re, és $N \in \mathcal{F}(\Theta)$-ra. Sőt, $l_\Theta(N) < l_\Theta(M)$. A fenti megfigyelés alapján kapjuk a $0 \to \Delta(i) \to F(M) \to F(N) \to 0$ rövid egzakt sorozatot, ahol indukció alapján tudjuk, hogy $F(N) \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$, de így $F(M) \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$ is teljesül. □

1.1.47. Állítás. *F megszorítása $\mathcal{F}(\Theta)$-ra hűséges és teljes.*

Bizonyítás. Világos, hogy F megszorítása $\mathrm{add}\, P_\Theta$-ra hűséges és teljes.

Általános esetben legyen $X \in \mathcal{F}(\Theta)$. Bontsuk fel az X egy projektív feloldását rövid egzakt sorozatokra. A 1.1.45 állítást felhasználva kapjuk, hogy a megjelenő syzygy modulusok mind $\mathcal{F}(\Theta)$-beliek. Láttuk már, hogy F egy $\mathcal{F}(\Theta)$-beli rövid egzakt sorozatot rövid egzakt sorozatba visz, így pedig X projektív feloldásának a képe F-nél $F(X)$ projektív feloldása lesz. ($\delta_X : P_1(X) \to P_0(X)$-vel és $\epsilon_X : P_0(X) \to X$-vel jelöljük a leképezéseket)

A hűségesség megmutatásához tegyük fel, hogy adott $f : X \to Y$ úgy, hogy $F(f) = 0$, és $X, Y \in \mathcal{F}(\Theta)$. Mivel $\mathrm{Ext}^1(P_0(X), Y') = 0$, és $\mathrm{Ext}^1(P_1(X), Y'') = 0$, így a 1.1.45 állítás bizonyítása során látott módszerhez hasonlóan ismét szürjektív leképezéseket kapunk:

$$\mathrm{Hom}(P_0(X), P_0(Y)) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\epsilon_Y)} \mathrm{Hom}(P_0(X), Y)$$
$$\mathrm{Hom}(P_1(X), P_1(Y)) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\delta_Y)} \mathrm{Hom}(P_1(X), Y')$$

$f\epsilon_X \in \mathrm{Hom}(P_0(X), Y)$, így létezik $f_0 \in \mathrm{Hom}(P_0(X), P_0(Y))$, hogy $\epsilon_Y f_0 = f\epsilon_X$. $f_0\delta_X \in \mathrm{Hom}(P_1(X), P_0(Y))$, de $\epsilon_Y f_0 \Delta_X = f\epsilon_X\delta_X = 0$, így $f_0\delta_X \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}(\epsilon_Y)$, vagyis kihasználva a $P_0(Y)$-beli egzaktságot, $f_0\delta_X\, \mathrm{Hom}(P_1(X), Y')$. Innen pedig már használhatjuk a szürjektivitást, és adódik az $f_1 \in \mathrm{Hom}(P_1(X), P_1(Y))$ leképezés, melyre $\delta_Y f_1 = f_0\delta_X$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & F(P_1(X)) \arrow[rr, "F(\delta_X)"] \arrow[dr] \arrow[dddr, "F(f_1)"'] & & F(P_0(X)) \arrow[r, "F(\epsilon_X)"] \arrow[dddr, "F(f_0)"] \arrow[dddl, dashed, "g_0"'] & F(X) \arrow[r] \arrow[dddr, "F(f)"] & 0 & \\
& F(X'') \arrow[ur] & & F(X') \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & \\
& \cdots \arrow[rr] & & F(P_1(Y)) \arrow[rr, "F(\delta_Y)"] \arrow[dr] & & F(P_0(Y)) \arrow[r, "F(\epsilon_Y)"] & F(Y) \arrow[r] & 0 \\
& & F(Y'') \arrow[ur] & & F(Y') \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$F(f) = 0$, így $F(\epsilon_Y)F(f_0) = F(\epsilon_Y f_0) = F(f\epsilon_X) = F(f)F(\epsilon_X) = 0$, vagyis teljesül, hogy $\mathrm{Im}F(f_0) \subseteq \mathrm{Ker}F(\epsilon_Y) = \mathrm{Im}F(\delta_Y)$ (használtuk, hogy a lenti sorozat egzakt). Mivel $F(P_0(X))$ projektív, létezik egy

$$g_0 : F(P_0(X)) \to F(P_1(Y))$$

hozzárendelés, mely az az $F(\delta_Y) : F(P_1(Y)) \to \mathrm{Im}F(\delta_Y)$ szürjekciónál vett felemeltje az $F(f_0) : F(P_0(X)) \to \mathrm{Im}F(\delta_Y)$ leképezésnek. g_0 kommutatívvá teszi a diagramot, így $F(\delta_Y)g_0 = F(f_0)$. Azt már láttuk, hogy F megszorítása $\operatorname{add} P_\Theta$-ra hűséges és teljes, így kapunk egy $g : P_0(X) \to P_1(Y)$ leképezést, melyre $g_0 = F(g)$. Ekkor $F(\delta_Y g) = F(f_0)$, vagyis $F(\delta_Y g - f_0) = 0$, de mivel $\operatorname{add} P_\Theta$-re F hűséges és teljes (és $F(\delta_Y g - f_0) : F(P_0(X)) \to F(P_0(Y))$), kapjuk, hogy $\delta_Y g - f_0 = 0$, azaz $f_0 = \delta_Y g$. Így tehát $f\epsilon_X = \epsilon_Y f_0 = \epsilon_Y \delta_Y g = 0$, vagyis $f = 0$, hisz ϵ_X szürjektív. Kaptuk tehát, hogy F megszorítása $\mathcal{F}(\Theta)$-ra egy hűséges funktor.

Hátravan még a teljesség. F megszorítása $\operatorname{add} P_\Theta$-ra hűséges és teljes, így $F(P_0(X))$ projektív, vagyis $\operatorname{Ext}^1(F(P_0(X)), F(Y')) = 0$. A korábbi eljárást ismét alkalmazva, kapunk egy $f_0' : F(P_0(X)) \to F(P_0(Y))$ leképezést úgy, hogy $F(\epsilon_Y)f_0' = f'F(\epsilon_X)$. Hasonlóan adódik a $f_1' : F(P_1(X)) \to F(P_1(Y))$ leképezés is, melyre $F(\delta_Y)f_1' = f_0'F(\delta_X)$.

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & P_1(X) \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "f_1"] & P_0(X) \arrow[r, "\epsilon_X"] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \\
... \arrow[r] & P_1(Y) \arrow[r, "\delta_Y"] & P_0(Y) \arrow[r, "\epsilon_Y"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ismét használva, hogy F megszorítása $\operatorname{add} P_\Theta$-ra hűséges és teljes, azt kapjuk, hogy $f_i' = F(f_i)$, ahol $f_i : P_i(X) \to P_i(Y)$, továbbá $\delta_Y f_1 = f_0 \delta_X$. A féligegzaktság és a kommutativitás miatt $\epsilon_Y f_0 \delta_X = \epsilon_Y \delta_Y f_1 = 0$. Definiáljuk az $f : X \to Y$ leképezést a következőképpen: $x \mapsto \epsilon_Y f_0(x')$, ahol x' az $x \in X$ egy őse az ϵ_X szürjekciónál. Ez a leképezés azért jóldefiniált, mert egy másik x'' ősre $\epsilon_X(x' - x'') = 0$, így az egzaktság miatt $x' - x'' = \delta_X(x_1)$ egy $x_1 \in P_1(X)$-re. Vagyis $\epsilon_Y f_0(x' - x'') = \epsilon_Y f_0 \delta_X(x_1) = 0$. Tehát f jóldefiniált, és teljesül rá az $\epsilon_Y f_0 = f\epsilon_X$ azonosság. Alkalmazva F-et kapjuk, hogy $F(f)F(\epsilon_X) = F(\epsilon_Y f_0) = f'F(\epsilon_X)$, vagyis $F(f) = f'$, mivel $F(\epsilon_X)$ epimorfizmus. Így tehát a teljesség is megvan, vagyis F megszorítása $\mathcal{F}(\Theta)$-ra hűséges és teljes. $\square$

1.1.48. Állítás. *$A = \operatorname{End}(\bigoplus_{i=1}^n P_\Theta(i))$ kváziöröklődő az $\{1, 2 \ldots n\}$ sorrenddel, továbbá $\Delta(i) = F(\Theta(i))$-k a standard modulusok.*

Vegyük észre, hogy $P_\Theta(i)$ konstruálásából adódóan $P_A(i) = F(P_\Theta(i))$-nak van egy Δ-filtrálása úgy, hogy a felső faktor $\Delta(i)$, a többi pedig $\Delta(j)$ alakú $j > i$-re. Így $\Delta(i)$ teteje egyszerű: $S(i)$. Ugyancsak $P_\Theta(i)$ konstrukciójából, és a Θ-ákra vonatkozó tulajdonságokból tudjuk, hogy $\operatorname{Hom}(P_A(j), \Delta(i)) \neq 0$ csak $j \leqslant i$-re teljesülhet, így $\Delta(i)$ a $P_A(i)$ maximális olyan faktormodulusa, ahol a kompozíciófaktorok $S(j)$ alakúak $j \leqslant i$-re.

Be kell még látni, hogy minden $\mathcal{F}({}_A\Delta)$-beli A modulus $F(X)$ alakú, ahol $X \in \mathcal{F}(\Theta)$. Ehhez legyen $0 \neq M \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$, és U pedig egy részmodulus, mely alkalmas i-re $\Delta(i)$-vel izomorf úgy, hogy $M/U \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Legyen $\iota : \Delta(i) \to M$ beágyazás, melynek képe U, valamint $\pi : M \to M/U$ a projekció. $l_\Delta(M)$ hosszára vonatkozó indukcióval kapjuk, hogy van olyan $Y \in \mathcal{F}(\Theta)$ objektum, melyre $F(Y) = M/U$.

Vegyük a $0 \to Y' \xrightarrow{u} P_0(Y) \xrightarrow{\epsilon_Y} Y \to 0$ rövid egzakt sorozatot, ahol $P_0(Y) \in \operatorname{add} P_\Theta$, és így $Y' \in \mathcal{F}(\Theta)$ is teljesül. Mivel $F(P_0(Y))$ projektív, létezik egy $\alpha : F(P_0(Y)) \to M$ leképezés, hogy $\pi\alpha = F(\epsilon_Y)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & F(Y') \arrow[r, equal] \arrow[d, "{[\phi, F(u)]}"] & F(Y') \arrow[d, "F(u)"] & \\
0 \arrow[r] & \Delta(i) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Delta(i) \oplus F(P_0(Y)) \arrow[r] \arrow[d, "{[\iota,\alpha]}"] & F(P_0(Y)) \arrow[r] \arrow[d, "F(\epsilon_Y)"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Delta(i) \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & F(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Ekkor a $[\iota, \alpha] : \Delta(i) \oplus F(P_0(Y)) \to M$ szürjektív, magja pedig $F(Y')$-vel izomorf a Kígyó lemma szerint. A mag beágyazása $[\phi, F(u)] : F(Y') \to \Delta(i) \oplus F(P_0(Y))$ alakú, ahol $\phi : F(Y') \to \Delta(i)$. Az $F(Y')$ és $\Delta(i) = F(\Theta(i))$ objektumok F képei, F teljes $\mathcal{F}(\Theta)$-n, így létezik egy $h : Y' \to \Theta(i)$ leképezés, melyre $F(h) = \phi$. $[h, u] : Y' \to \Theta(i) \oplus P_0(Y)$ szintén monomorfizmus, legyen X a komagja.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & Y' \arrow[r, equal] \arrow[d, "{[h,u]}"] & Y' \arrow[d, "u"] & \\
0 \arrow[r] & \Theta(i) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Theta(i) \oplus P_0(Y) \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d] & P_0(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta(i) \arrow[r] & X \arrow[r, "e"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Mivel $u = [h, u] \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, a $[h, u]$ X komagja az u komagjára, Y-ra képződik az $e : X \to Y$ leképezésnél. Az e magja ugyanaz, mint a $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ magja, vagyis $\Theta(i)$. Látszik tehát, hogy X az $Y \in \mathcal{F}(\Theta)$ bővítése $\Theta(i) \in \mathcal{F}(\Theta)$-val (valójában ez is Kígyó lemma). A

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{[h,u]} \Theta(i) \oplus P_0(Y) \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat képe F-nél egy egzakt sorozat, hiszen $Y' \in \mathcal{F}(\Theta)$ (és ilyen esetben F egzakt), tehát $F(X)$ izomorf $F([h, u]) = [\phi, F(u)]$ komagjával, vagyis M-mel. Így készen vagyunk. □

1.2. Valódi standard modulusok

A standard modulusok egy speciális faktoraként kapjuk a valódi standard modulusokat (ezeket $\bar{\Delta}$-val fogjuk jelölni). Ismét tekinthetjük a Δ-filtrált algebrák fogalmát: ezek azon algebrák, melyeknek jobb reguláris prezentációjuk Δ-filtrált. Ez persze a kváziöröklődő algebra általánosítása (annyi különbséggel, hogy nem követeljük meg, hogy a standard mosulusok Schur tipusuak legyenek), így a célunk az lesz, hogy az előző alfejezetben megjelenő tételeket értsük meg Δ-filtrált algebrák esetében is. A felépítés hasonló lesz: előbb a valódi standard modulusok homologikus tulajdonságait viszgáljuk (1.2.1 szakasz), majd ugyancsak a tilting elmélet segítségével jobban megértjük a $\mathcal{F}(\bar{\Delta})$ és $\mathcal{F}(\bar{\bar{\nabla}})$ részkategóriákat (1.2.2 szakasz). Ezekhez a [2] és [5] cikkek eredményeiből indulunk ki. Végezetül pedig ismét egy konstrukciót nézünk meg: a [1] cikk alapján egy tetszőleges végesdimenziós $(A, \mathbf{e})$ algebrához konstruálunk olyan $(C, \mathbf{g})$ $\bar{\Delta}$-filtrált algebrát, hogy a két algebrában megjelenő valódi standard modulusok egymásnak feleljenek meg (1.2.3 szakasz).

1.2.1. A valódi standard modulusok alapvető tulajdonságai

A 1.1.1 szakasz mintájára itt is a valódi standard modulusok tulajdonságainak felsorolásával kezdünk. A bizonyításokat néha elhagyjuk, mert nagyon hasonló a korábbiakhoz.

A valódi standard modulusok

A valódi standard modulusok definíciója után átveszünk néhány alapvető tulajdonságot. Kezdjük tehát a definícióval:

1.2.1. Definíció. $\bar{\Delta}(i)$ *a* $\Delta(i)$ *legnagyobb olyan faktora, hogy* $[\bar{\Delta}(i) : S(i)] = 1$ *egyenlőség teljesül. E faktormodulust ezentúl (jobb) valódi standard modulusnak fogjuk nevezni, valamint használjuk a* $\bar{\Delta} = \{\bar{\Delta}(1), \bar{\Delta}(2) \dots \bar{\Delta}(n)\}$ *jelölést is.*

A valódi kostandard modulusok definíciója:

1.2.2. Definíció. $\bar{\nabla}(i)$ *a* $\nabla(i)$ *legnagyobb olyan részmodulusa, melyre az* $[\bar{\nabla}(i) : S(i)] = 1$ *egyenlőség teljesül.*

Vegyük észre, hogy az $\varepsilon_i = e_i + e_{i+1} + \dots + e_n$ jelölést használva $\bar{\Delta}(i) = e_iA/e_i \operatorname{rad} A\varepsilon_i A$. Sőt, az is látszik, hogy $\operatorname{End}_A(\bar{\Delta}(i)) = k$, vagyis minden i-re $\bar{\Delta}(i)$ Schur típusú. Ez pedig azt is mutatja, hogy egy kváziöröklődő algebra esetében $\Delta(i) = \bar{\Delta}(i)$ minden i-re.

Persze itt is tekinthettük volna a bal reguláris reprezentációt, ahonnan a $\bar{\Delta}^{\circ}(i) = D(\bar{\nabla}(i))$ és $\bar{\nabla}^{\circ}(i) = D(\bar{\Delta}(i))$ modulusokat kaptuk volna. Úgyhogy többnyire ismét csak a jobb modulusokat fogjuk tekinteni.

Emlékezzünk vissza, hogy az mod $-A$ egy $\mathcal{C}$ osztályára $\mathcal{F}(\mathcal{C})$-vel jelöljük mod $-A$ azon teljes részkategóriáját, amelyben az összes modulus $\mathcal{C}$-filtrált. A további célunk a $\mathcal{F}(\Delta)$, $\mathcal{F}(\bar{\Delta})$, $\mathcal{F}(\nabla)$ és $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ részkategóriák vizsgálata.

1.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $(A, \mathbf{e})$ Δ*-filtrált, ha* $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$ *(az irodalom használja a standardul rétegezett kifejezést is). Hasonlóan definiáljuk a* $\bar{\Delta}$*-filtrált (valódi standardul rétegezett),* ∇*-filtrált és* $\bar{\nabla}$*-filtrált algebrákat.*

A Δ-filtrált algebrák a kváziöröklődő algebrák általánosításai, annyi különbséggel, hogy ebben az esetben nem követeljük meg, hogy a standard modulusok Schur típusúak legyenek.

A jobb és baloldali struktúrák között létezik az alábbi átmenet:

1.2.4. Állítás. $(A_A, \mathbf{e})$ *pontosan akkor* Δ*-filtrált, ha* $((DA)_A, \mathbf{e})$ $\bar{\nabla}$*-filtrált.*

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy $D(\bar{\nabla}(i)) = \bar{\Delta}^{\circ}(i)$. Előbb belátjuk a következő lemmát:

1.2.5. Lemma. $\dim_k Ae_nA \leqslant \dim_k \bar{\Delta}^{\circ}(n) \dim_k \Delta(n)$.
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $(Ae_nA)_A$ *jobb modulus projektív (azaz* $\Delta(n)$*-filtrált). Persze ez azzal is ekvivalens, hogy az* ${}_A(Ae_nA)$ *bal modulus* $\bar{\Delta}^{\circ}(n)$ *filtrált.*
Sőt, az is teljesül, hogy $[\Delta^{\circ}(n) : \bar{\Delta}^{\circ}(n)] = [Ae_nAe_i : \bar{\Delta}^{\circ}(n)] = \dim_k e_nAe_n$.

Bizonyítás. $\forall X \in A$-mod-ra minden i-re $[X : S(i)] = \dim_k Xe_i$. Kapjuk tehát, hogy

$$[A/Ae_n \operatorname{rad} Ae_nA : S(n)] = \dim_k Ae_n/Ae_n \operatorname{rad} Ae_n = \dim_k \bar{\Delta}^\circ(n) \Rightarrow$$
$$\dim_k Ae_nA \leqslant [A/Ae_n \text{ rad } Ae_nA : S(n)] \cdot \dim_k e_nA \Rightarrow$$
$$\dim_k Ae_nA \leqslant \dim_k \bar{\Delta}^\circ(n) \cdot \dim_k \Delta(n)$$

Az egyenlőség azt jelenti, hogy $(Ae_nA)_A$ $\Delta(n)$-ek direkt összegére bomlik, azaz $(Ae_nA)_A$ projektív. Tekintve a

$$\Delta(n) \bigotimes_A \bar{\Delta}^\circ(n) \to Ae_nA$$

izomorfizmust, kapjuk az ${}_A(Ae_nA)$ egy $\bar{\Delta}^\circ(n)$ filtrálását. Fordítva pedig, a filtrálás létezése bizonyítja, hogy a fenti leképezés egy izomorfizmus. Továbbá, $[Ae_nAe_i : \bar{\Delta}^\circ(n)] = \dim_k e_nAe_n$ minden i-re. □

Innen már egyszerű a tétel bizonyítása:
Az előző lemmát indukcióval alkalmazva kapjuk ${}_AA$ egy $\bar{\Delta}^\circ$ filtrálását. □

A valódi standard modulusokat a következő állítás segítségével tudjuk jellemezni:

1.2.6. Lemma. *Legyen adott* $(A, \mathbf{e})$. *Az* A *modulusok egy* $\{D(i), \dots, D(n)\}$ *halmazán minden* i*-re teljesüljön, hogy* $\operatorname{top} D(i) \cong S(i)$. *Tegyük fel továbbá, hogy* $[D(i) : S(i)] = 1$, *és* $[D(i) : S(l)] = 0$ *minden* $l > i$*-re, valamint hogy* $P(i) \in \mathcal{F}(D(1), \dots, D(n))$ *minden* i*-re. Ekkor* $D(i) \cong \bar{\Delta}(i)$ *minden* i*-re.*

Bizonyítás. Mivel $\operatorname{top} P(i) \cong S(i)$, és $\operatorname{top} D(j) \cong S(j)$, a $P(i) \in \mathcal{F}(D(i), \dots, D(n))$ feltételből következik, hogy létezik egy $0 \to K_i \to P(i) \to D(i) \to 0$ egzakt sorozat, ahol $K_i \in \mathcal{F}(D(i), \dots, D(n))$. A $D(i)$-re vonatkozó multiplicitási feltétel, valamint a $\bar{\Delta}(i)$ definíciójából következik, hogy a $P(i) \to D(i)$ leképezés keresztülvezethető $\bar{\Delta}(i)$-n, vagyis kapjuk a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & P(i) \arrow[r] \arrow[d] & D(i) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{K}_i \arrow[r] & \bar{\Delta}(i) \arrow[r] & D(i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ahol a függőleges leképezések szürjektívek. Ha $\bar{K}_i \neq 0$, akkor létezik egy $j < i$ szám, hogy $\operatorname{Hom}(\bar{K}_i, S(j)) \neq 0$, így pedig $\operatorname{Hom}(K_i, S(j)) \neq 0$ is teljesül. Ez viszont ellentmond annak a feltevésnek, hogy $K_i \in \mathcal{F}(D(i), \dots, D(n))$ és $\operatorname{Hom}(D(l), S(j)) = 0$ minden $j < i \leqslant l$-re. Vagyis $\bar{K}_i = 0$, ahonnan $D(i) \cong \bar{\Delta}(i)$ minden i-re. □

Homologikus tulajdonságok átismétlése

A továbbiakban a 1.1.1 szakaszban bizonyított, Δ és ∇-ra vonatkozó homologikus feltételek hasonmásait bizonyítás nélkül soroljuk fel $\bar{\Delta}$ és $\bar{\nabla}$ esetében:

1.2.7. Állítás. *A következő tulajdonságok teljesülnek:*

1. $\mathrm{Hom}_A(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$ *minden* $i > j$*-re*
2. $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$ *minden* $i \geqslant j$*-re*
3. $\mathrm{Hom}_A(\bar{\nabla}(i), \bar{\nabla}(l)) = 0$ *minden* $i < l$*-re*
4. $\mathrm{Ext}^1_A(\bar{\nabla}(i), \bar{\nabla}(l)) = 0$ *minden* $i < l$*-re*
5. $\mathrm{Hom}_A(\Delta(i), \bar{\nabla}(j)) = 0$ *minden* $i \neq j$*-re*
6. $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(i), \bar{\nabla}(j)) = 0$ *minden* i, j*-re*
   Ha $(A, \mathbf{e})$ Δ*-filtrált, akkor a 2. 4. 6. feltételek* Ext^m*-re is igazak* $m > 1$ *esetén.*

Vezessük be a $\bar{\Delta}_i = \{\bar{\Delta}(1), \ldots \bar{\Delta}(i)\}$ jelöléseket, (ugyanígy definiáljuk ∇_i-t $\bar{\Delta}_i$-t és $\bar{\nabla}_i$-t is). Legyen továbbá $A_i = A/A\varepsilon_{i+1}A$, ahol $\varepsilon_i = \sum_{j=i}^n e_j$. Könnyen adódik a következő állítás:

1.2.8. Állítás. *Egy* $(A, \mathbf{e})$ *algebrára igazak a következők:*

1. $\Delta_{A_i}(j) = \Delta_A(j)$ *ha* $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$
2. $\bar{\nabla}_{A_i}(j) = \bar{\nabla}_A(j)$ *ha* $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$
3. $\mathcal{F}(\Delta_{A_i}) = \mathcal{F}(\Delta_A) \cap A_i - \mathrm{mod} = \mathcal{F}(\Delta_i)$
4. $\mathcal{F}(\bar{\nabla}_{A_i}) = \mathcal{F}(\bar{\nabla}_A) \cap A_i - \mathrm{mod} = \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$
5. $\mathcal{F}(\Delta_{A_i}) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}_{A_i}) = \mathcal{F}(\Delta_i) \cap A_i - \mathrm{mod} = \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$

Az előző alfejezetben látottakhoz hasonlóan kapjuk az alábbi állítást is:

1.2.9. Állítás. *Egy* $(A, \mathbf{e})$ Δ*-filtrált algebrára igazak a következőek:*

1. $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \in \mathrm{mod}-A \ |\mathrm{Ext}^1_A(X, \mathcal{F}(\bar{\nabla})) = 0\}$
2. $\mathcal{F}(\bar{\nabla}) = \{Y \in \mathrm{mod}-A \ |\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}(\Delta), Y) = 0\}$
3. $\mathcal{F}(\Delta)$ *az* $\mathrm{mod}-A$ *kovariánsan véges föloldó részkategóriája*
4. $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ *az* $\mathrm{mod}-A$ *kontravariánsan véges koföloldó részkategóriája*

Bizonyítás. Vázlat. *1.-2.* Az 1.1.13 állítás mintájára.

3.-4. Az 1.1.15 és 1.1.16 állítások mintájára kapjuk, hogy a megfelelő részkategória föloldó illetve koföloldó.
Az 1.1.24 és 1.1.25 állítások igazak A modulusok olyan $\Theta = \{\Theta(1), \ldots \Theta(n)\}$ halmazára, melyre a $\operatorname{Ext}^1(\Theta(l), \Theta(i)) = 0$ azonosság teljesül minden $l \geqslant i$-re. A $\Delta, \bar{\nabla}$ halmazok teljesítik ezeket a feltételeket az 1.2.7 állítás szerint, így az előző két alpont szerint készen vagyunk. $\square$

Szükségünk lesz a későbbiekben a következő lemmára:

1.2.10. Lemma. *Legyen $X \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$ és tegyük fel, hogy létezik egy $f \in \operatorname{Hom}_A(X, \bar{\nabla}(i))$ nemnulla homomorfizmus. Ekkor f szürjektív, és $\operatorname{Ker} f \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$.*

Bizonyítás. Legyen $K = \operatorname{Ker} f$, és legyen $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_s = X$ az X egy $\bar{\nabla}_i$-kkel vett filtrálása. Az 1.2.7 állítás *4.* része alapján feltehetjük, hogy a $\bar{\nabla}(i)$ alakú faktorok a legnagyobb indexű X_k-k között vannak. Ha $r = \max\{j | X_j \subseteq K\}$, akkor az f megszorítása X_{r+1}-re adja az $\bar{f} : X_{r+1}/X_r \to \bar{\nabla}(i)$ leképezést. Mivel $\operatorname{Hom}_A(\bar{\nabla}(j), \bar{\nabla}(i)) = 0$ minden $j < i$-re, kapjuk, hogy $X_{r+1}/X_r \cong \bar{\nabla}(i)$, és mivel $\bar{\nabla}(i)$ Schur típusú, kapjuk, hogy f szürjektív.

$[X : \bar{\nabla}(i)] = t$ szerinti indukcióval mutatjuk meg, hogy $K \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$. $t = 1$ esetén $K = X_{s-1}$, így $K \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$. $t > 1$ esetén feltehetjük, hogy $X_{s-1} \neq K$. Kapunk egy nemnulla (és így szürjektív) $\iota f : X_{s-1} \to \bar{\nabla}(i)$ leképezést. Vagyis kapjuk a következő kommutatív diagramot:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & \bar{\nabla}(i) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{s-1} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota f"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \bar{\nabla}(i) \arrow[r] & 0 \\
 & \bar{\nabla}(i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \bar{\nabla}(i) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Vegyük észre, hogy $[X_{s-1} : \bar{\nabla}(i)] < [X : \bar{\nabla}(i)]$, így indukcióval kapjuk, hogy $K' \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$. K a K' modulus $(\bar{\nabla}(i))$-val vett bővítése, így pedig készen vagyunk. $\square$

1.2.2. Valódi standard modulusok és a tilting elmélet

Az 1.1.2 szakasz mintájára az $\mathcal{F}(\Delta)$, $\mathcal{F}(\nabla)$, $\mathcal{F}(\bar{\Delta})$ és $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ részkategóriák tanulmányozásához segítségül hívjuk a tilting elméletet. Hasonló jellegű állításokat fogunk bizonyítani itt is, mint a 1.1.2 szakaszban: tulajdonképpen a kváziöröklődő algebrák tulajdonságait általánosítjuk az Δ-filtrált algebrák esetére.

Kotilting bázismodulusok koföloldó részkategóriák közötti bijekció

A 1.2.9 állítás szerint kapjuk, hogy $\mathcal{F}(\bar{\nabla}) = \{Y \in \operatorname{mod} - A \mid \operatorname{Ext}^1_A(\mathcal{F}(\Delta), Y) = 0\}$. A továbbiakban ezt a tulajdonságot szeretnénk egy kicsit jobban megvizsgálni. Ennek érdekében bevezetjük a következő fogalmakat:

1.2.11. Jelölés. *Legyen $X \in A$-mod. Vezessük be a következő jelöléseket:*

$$X^{\perp} := \{Y \in \operatorname{mod} - A \mid \operatorname{Ext}^i_A(X, Y) = 0 \textit{ minden } i > 0\textit{-ra}\}$$
$${}^{\perp}X := \{Y \in \operatorname{mod} - A \mid \operatorname{Ext}^i_A(Y, X) = 0 \textit{ minden } i > 0\textit{-ra}\}$$

1.2.12. Jelölés. *Egy $\mathcal{C}$ $\operatorname{mod} - A$-beli osztályra jelölje $\hat{\mathcal{C}}$ azon teljes részkategóriát, melyben a véges $\mathcal{C}$-feloldással rendelkező modulusok vannak, azaz olyan X-ek, melyekre létezik a*

$$0 \to X_s \to \ldots \to X_1 \to X_0 \to X \to 0$$

egzakt sorozat, ahol $X_i \in \mathcal{C}$ minden $0 \leqslant i \leqslant s$-re.
Ennek duálisa, $\check{\mathcal{C}}$ a véges $\mathcal{C}$-kofeloldással rendelkező modulusok teljes részkategóriája.

1.2.13. Jelölés. $\operatorname{fac} X$ *a* $\operatorname{mod} - A$ *azon teljes részkategóriája, amelyet olyan Y modulusok alkotnak, melyek* $\operatorname{add} X$*-beli modulusok epimorf képeiként állnak elő.*

Egy általánosított tilting modulusra $T^{\perp} \subseteq \operatorname{fac} T$

Az alábbiakban bizonyítás nélkül közöljük Auslander és Reiten eredményét, mely összekapcsolja a tilting modulusok elméletét a kovariánsan véges koföloldó részkategóriák tanulmányozásával. Így pedig értelmet nyer a 1.1.24 állítás is, melyben azt láttuk be, hogy az $\mathcal{Y}(\Theta)$ részkategória kovariánsan véges A-mod-ban. Vegyük tehát Auslander és Reiten tételét ([4] cikk, Theorem 5.5):

1.2.14. Tétel. *Legyen T egy olyan A-modulus, melyre* $\operatorname{Ext}^i(T, T) = 0$ *minden $i > 0$-ra. Ekkor igazak a következők:*

1. *a $T \mapsto {}^{\perp}T$ megfeleltetés egy bijekció a kotilting bázismodulusok izomorfiaosztályai, és az olyan $\mathcal{X}$ kovariánsan véges koföloldó részkategóriák között, melyekre teljesül, hogy $\hat{\mathcal{X}} = \mathrm{mod}-A$.*
2. *a $T \mapsto \hat{\mathrm{add}}\, T$ megfeleltetés egy bijekció a kotilting bázismodulusok izomorfiaosztályai, és az $\mathcal{I}^{\infty}(A)$ kovariánsan véges koföloldó részkategóriái között.*

Az eredetileg kitűzött cél (a $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ részkategória vizsgálata) eléréshez szükségünk van még a következő állításra:

1.2.15. Állítás. *Egy $(A, \mathbf{e})$ Δ-filtrált algebrára* $\sup\{\mathrm{pd}\, X \mid X \in \mathcal{F}(\Delta)\} \leqslant n-1$.

Most pedig megmutatjuk, hogy a $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ részkategória előállítható egy tilting modulus és az ortogonalitás segítségével:

1.2.16. Állítás. *Legyen $(A, \mathbf{e})$ egy Δ-filtrált algebra. Ekkor létezik egy ${}_AT$ tilting modulus, melyre $\mathcal{F}(\bar{\nabla}) = T^{\perp}$.*

Bizonyítás. Az 1.2.9 állítás miatt tudjuk, hogy $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ az $\mathrm{mod}-A$ egy kovariánsan véges, koföloldó részkategóriája. Az 1.2.14 állítás duálisát véve elég megmutassuk, hogy minden $X \in A$-mod-ra létezik egy $0 \to X \to F_1 \to \ldots \to F_t \to 0$ egzakt sorozat, ahol $F_i \in \mathcal{F}(\bar{\nabla})$.

Mivel $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ koföloldó, tartalmazza az összes injektív A modulust, vagyis elég megmutatni, hogy minden $X \in \mathrm{mod}-A$-ra létezik egy d egész, hogy a d-edik kosyzygy modulusra is teljesül a $K_d \in \mathcal{F}(\bar{\nabla})$ tartalmazás. Az 1.2.9 állítás miatt elég azt belátnunk, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}(\Delta), K_d) = 0$ valamely d-re.

Ha $Z \in \mathcal{F}(\Delta)$, akkor az 1.2.15 állítás miatt $\mathrm{pd}_A Z \leqslant n-1$, így $\mathrm{Ext}^n_A(Z, X) = 0$ minden $X \in \mathrm{mod}-A$-ra. Mivel $\mathrm{Ext}^n_A(Z, X) \cong \mathrm{Ext}^1_A(Z, K_{n+1})$, az 1.2.9 állításból kapjuk, hogy $K_{n+1} \in \mathcal{F}(\bar{\nabla})$, amit bizonyítani akartunk. □

Az $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}) = \mathrm{add}\, T$ egyenlőség bizonyítása

Az 1.1.28 tétel szerint egy kváziöröklődő algebra esetében $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla) = \mathrm{add}\, T$ egy jól meghatározott T tilting modulusra. Szeretnénk ennek az állításnak a megfelelőjét bizonyítani Δ-filtrált algebrák esetében is. Ebben segítségünkre lesz, az előbb meghatározott T tilting modulus. Ki fog derülni azonban, hogy a Δ-filtrált algebrák esetében az $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla})$ részkategóriát kell tekinteni. Szükségünk lesz a tilting elmélet egy alapvető eredményére, a Wakamatsu lemmára, melynek bizonyítása megtalálható a [14] cikkben.

A Wakamatsu lemma bevezetéséhez szükségünk van a minimális approximáció fogalmára. Az approximációt a 1.1.17 definícióban vezettük be, most következzen hát a minimális leképezések definíciója:

1.2.17. Definíció. *Minimális leképezés*

- *Egy* $f : L \to M$ *leképezés bal-minimális, ha minden* $h \in \operatorname{End} M$*-re melyre* $hf = f$*,* h *automorfizmus.*
- *Egy* $g : M \to N$ *leképezés jobb-minimális, ha minden* $k \in \operatorname{End} M$*-re melyre* $gk = k$*,* k *automorfizmus.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "k"] & N \\ & M \arrow[u, "g"] \end{tikzcd}$$

Bizonyítás nélkül közlünk egy ide vonatkozó állítást:

1.2.18. Állítás. *Legyen* $f : M \to N$ *morfizmus. Ekkor létezik egy* $M = M_1 \oplus M_2$ *direkt összeg felbontás úgy, hogy* $f|_{M_1}$ *jobb minimális és* $f|_{M_2} = 0$*.*

Könnyen látszik, hogy egy $\gamma : Y \to M$ jobb-$\mathcal{X}$ approximáció esetén az előző felbontás szerint $\gamma_{Y_1} : Y_1 \to M$ is egy jobb-$\mathcal{X}$ approximáció: az eredeti jobb-$\mathcal{X}$ approximációból kapunk egy η leképezést, vegyük ennek az Y_1-be képező részét.

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "\gamma'"] \arrow[dl, dashed, "\eta"'] \\ Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r, "\gamma"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "\gamma'"] \arrow[dl, dashed, "\eta_1"'] \\ Y_1 \arrow[r, "\gamma_1"] & M \end{tikzcd}$$

1.2.19. Definíció. *Egy* $f : X \to C$ *jobb-*$\mathcal{X}$ *approximáció minimális, ha* f *egyben egy jobb-minimális leképezés. (A bal minimális approximáció ugyanígy adódik)*

Az előző megfigyelés szerint pedig ha egy C modulusnak van jobb-$\mathcal{X}$ approximációja, akkor van jobb minimális $\mathcal{X}$ approximációja is.

Most pedig már rátérhetünk a Wakamatsu lemmára.

1.2.20. Lemma. *(Wakamatsu) Legyen* $\mathcal{X}$ *a* $\operatorname{mod}-A$ *bővítésekre zárt részkategóriája,* C *pedig egy tetszőleges* A*-modulus. Igazak a következőek:*

1. *Ha a* $0 \to Y \to X \xrightarrow{f} C$ *sorozat egzakt, ahol* f *a* C *egy jobb minimális* $\mathcal{X}$*-approximációja, akkor* $\operatorname{Ext}^1_A(\mathcal{X}, Y) = 0$
2. *Ha a* $C \xrightarrow{g} X \to Z \to 0$ *sorozat egzakt, ahol* g *a* C *egy bal minimális* $\mathcal{X}$*-approximációja, akkor* $\operatorname{Ext}^1_A(Z, \mathcal{X}) = 0$.

Most pedig rátérhetünk a korábban beharangozott állítás bizonyítására:

1.2.21. Állítás. *Legyen* $(A, \mathbf{e})$ *egy* Δ*-filtrált algebra,* T *a 1.2.16 állítás által szolgáltatott karakterisztikus tilting modulus. A következő állítások igazak:*

1. $\mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}) = \operatorname{add} T$
2. $\mathcal{F}(\Delta) \subseteq {}^{\perp}T$
3. $\mathcal{F}(\Delta) = \widetilde{\operatorname{add} T}$

Bizonyítás. 1. Az 1.2.16 állítás alapján a T tilting modulust az $\mathcal{F}(\bar{\nabla}) = T^{\perp}$ egyenlőség segítségével jött létre. $T^{\perp} = \{Y \in A\text{-mod} | \operatorname{Ext}^i_A(T, Y) = 0 \text{ minden } i > 0\text{-ra}\}$, így a tilting modulus definíciójának (1.1.26) második pontja alapján $T \in \mathcal{F}(\bar{\nabla})$. Az 1.2.9 állításban láttuk, hogy $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \in \operatorname{mod} - A \mid \operatorname{Ext}^1_A(X, \mathcal{F}(\bar{\nabla})) = 0\}$. Továbbá azt is tudjuk, hogy $\operatorname{Ext}^1_A(T, \mathcal{F}(\bar{\nabla})) = \operatorname{Ext}^1_A(T, T^{\perp}) = 0$ definíció szerint, így $T \in \mathcal{F}(\Delta)$ is teljesül. Tehát az $\operatorname{add} T \subseteq \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla})$ tartalmazást beláttuk (így az is kiderül, hogy $\operatorname{add} T$ ko- és kontravariánsan véges).

A fordított tartalmazáshoz legyen $X \in \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla})$. Ekkor egy korábbi megjegyzés miatt $X \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}) = T^{\perp} \subseteq \operatorname{fac} T$. Legyen $\xi : 0 \to K \to \bar{T} \to X \to 0$ az X minimális $\operatorname{add} T$ approximációja (ez létezik az előző megfigyelés miatt). A Wakamatsu lemma (1.2.20) miatt $\operatorname{Ext}^1_A(T, K) = 0$. Mivel $X, \bar{T} \in T^{\perp}$, a hosszú egzakt sorozatban $\operatorname{Ext}^i_A(T, K)$ két 0 tag között fog szerepelni, így maga is 0. Vagyis $K \in T^{\perp} = \mathcal{F}(\bar{\nabla})$. $X \in \mathcal{F}(\Delta)$, így a 1.2.9 állítás miatt $\operatorname{Ext}^1_A(X, K) = 0$, tehát ξ hasad, így pedig $X \in \operatorname{add} T$, ahonnan készen vagyunk.

2. Legyen $X \in \mathcal{F}(\Delta)$. Az *1.* alpont szerint $T \in \mathcal{F}(\bar{\nabla})$, így a 1.2.7 állítás *6.* alpontja szerint $\operatorname{Ext}^i(X, T) = 0$ minden i-re, vagyis $X \in {}^{\perp}T$.

3. Legyen $X \in \mathcal{F}(\Delta)$. $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$ kovariánsan véges és koföloldó részkategória az 1.2.9 állítás szerint, így létezik egy $0 \to X \to F_X \to Q_X \to 0$ egzakt sorozat, ahol $F_X \in \mathcal{F}(\bar{\nabla})$. A Wakamatsu lemma miatt $\operatorname{Ext}^1_A(Q_X, \mathcal{F}(\bar{\nabla})) = 0$. $\mathcal{F}(\bar{\nabla}) =^{\perp} T$, így $Q_X \in \mathcal{F}(\Delta)$, és emiatt $F_X \in \mathcal{F}(\Delta)$, hisz $\mathcal{F}(\Delta)$ zárt a bővítésekre. Vagyis $F_X \in \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}) = \operatorname{add} T$ az *1.* alpont miatt. Ismételve az eljárást kapunk egy

$$0 \to X = X_0 \to T^0 \xrightarrow{f_0} T^1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{r-1}} T^r \xrightarrow{f_r} T^{r+1} \to \dots$$

egzakt sorozatot minden r természetes számra, ahol $T^i \in \operatorname{add} T$ és $X_i = \operatorname{Ker} f_i \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Legyen $d = \operatorname{pd}_A T$ ($d < \infty$ az 1.2.15 állítás miatt). Válasszunk egy $r = d$ hosszú feloldást. Dimenzió-eltolással minden $i > 0$-ra $\operatorname{Ext}^i_A(T, X_d) = \operatorname{Ext}^{d+i}_A(T, X_0) = 0$, tehát az 1.2.16 állítás miatt kapjuk, hogy $X_d \in T^\perp = \mathcal{F}(\bar{\nabla})$. Mivel az $X_d \in \mathcal{F}(\Delta)$ tartalmazás is teljesül a konstrukció miatt, így az *1.* alpont miatt kapjuk, hogy $X_d \in \operatorname{add} T$, így kaptunk egy véges hosszú feloldást.

A fordított tartalmazás triviális, mivel $\operatorname{add} T \subseteq \mathcal{F}(\Delta)$, és $\mathcal{F}(\Delta)$ zárt az epimorfizmusok magjára. □

A karakterisztikus tilting modulus endomorfizmusgyűrűje

A kváziöröklődő algebrákhoz hasonlóan egy A Δ-filtrált algebra esetében is bevezethetjük az $A' = \operatorname{End}_A T$ endomorfizmusgyűrűt. Be szeretnénk látni, hogy ez is rendelkezik egy filtráltsági tulajdonsággal. Ki fog derülni, hogy ${}_{A'}A' \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$. Továbbá azt is be fogjuk látni, hogy az eljárás második iteráltjaként visszakapjuk az eredeti A Δ-filtrált algebrát.

A kváziöröklődő esethez hasonlóan kapjuk a $T = \oplus_{i=1}^n T(i)$ direkt összeg felbontást. Itt a 1.2.8 valamint a 1.2.21 állítás alapján adódik, hogy $T(i) \in \mathcal{F}(\Delta_i) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$.

1.2.22. Állítás. *Legyen $(A, \mathbf{e})$ egy Δ-filtrált algebra, $T = \oplus_{i=1}^n T(i)$ a karakterisztikus tilting modulus. A következő állítások igazak:*

1. $[T(i) : \bar{\nabla}(l)] = 0$ *$i < l$-re, és* $[T(i) : \bar{\nabla}(i)] > 0$ *minden i-re*
2. $[T(i) : \Delta(l)] = 0$ *$i < l$-re, és* $[T(i) : \Delta(i)] > 0$ *minden i-re*
3. *minden i-re létezik egy* $0 \to X_i \to T(i) \to \bar{\nabla}(i) \to 0$ *egzakt sorozat, ahol* $X_i \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$
4. *minden i-re létezik egy* $0 \to \Delta(i) \to T(i) \to Y_i \to 0$ *egzakt sorozat, ahol* $Y_i \in \mathcal{F}(\Delta_{i-1})$
5. $\operatorname{Hom}_A(T(i), \bar{\nabla}(l)) = 0$ *minden $i < l$-re, és* $\dim_k \operatorname{Hom}_A(T(i), \bar{\nabla}(i)) = 1$ *minden i-re*
6. $\operatorname{Hom}_A(\Delta(l), T(i)) = 0$ *minden $i < l$-re*

Bizonyítás. Az *1.*, *2.* következik abból, $T(i) \in A_i - \operatorname{mod}$, de $T(i) \notin A_{i-1} - \operatorname{mod}$.

4. Az 1.2.7 állítás miatt átrendezhetjük a $T(i)$ Δ-filtrálását úgy, hogy megkapjuk a keresett egzakt sorozatot, és $Y_i \in \mathcal{F}(\Delta_i)$ teljesüljön. Belátjuk, hogy ekkor $[Y_i : \Delta(i)] = 0$ is igaz. Ehhez tegyük fel, hogy $[Y_i : \Delta(i)] > 0$. Az 1.2.7 állítás adja a következő egzakt sorozatot:

$$0 \to \Delta(i) \oplus \Delta(i) \to T(i) \to Y_i' \to 0$$

ahol $Y_i' \in \mathcal{F}(\Delta_i)$. A $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ hatásával, az 1.2.21 állítás *2.* alpontjából kapjuk a

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(Y_i',T) \to \mathrm{Hom}_A(T(i),T) \to \mathrm{Hom}_A(\Delta(i) \oplus \Delta(i),T) \to 0$$

egzakt sorozatot. Ez viszont ellentmondás, mivel $\mathrm{Hom}_A(T(i),T)$ egy felbonthatatlan projektív jobb $A' = \mathrm{End}_A(T)$ modulus. Vagyis kapjuk, hogy $[T(i) : \Delta(i)] = 1$, és így $Y_i \in \mathcal{F}(\Delta_{i-1})$. A *3.* állítás hasonlóan adódik.

5.-6. $T(i) \in A_i$-mod, $\bar{\nabla}(l)$-nek a talpa (valamint $\Delta(l)$-nek a teteje) $S(l)$-vel izomorf egyszerű, így $\mathrm{Hom}_A(T(i),\bar{\nabla}(l)) = \mathrm{Hom}_A(\Delta(l),T(i)) = 0$.

Hátravan még a $\dim_k \mathrm{Hom}_A(T(i),\bar{\nabla}(i)) = 1$ azonosság ellenőrzése. Ehhez tegyük fel, hogy az $f,g \in \mathrm{Hom}_A(T(i),\bar{\nabla}(i))$ leképezések lineárisan függetlenek $\mathrm{End}_A(\bar{\nabla}(i)) = k$ felett. Az 1.2.10 állítás szerint tudjuk, hogy mindkettő szürjektív, valamint hogy $X = \mathrm{Ker}\, f$ esetén $X, \mathrm{Ker}\, g \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$. A függetlenség miatt $X \not\subset \mathrm{Ker}\, g$. Így a g megszorítása X-re egy $\gamma : X \to \bar{\nabla}(i)$ nemnulla (az 1.2.10 állítás szerint megint csak szürjektív) leképezést ad meg, melynek magjára: $\mathrm{Ker}\,\gamma \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$. Ebből kapjuk az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\gamma \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(g,f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & T(i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(g,f)"] & \bar{\nabla}(i) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{\nabla}(i) \arrow[r, "\iota_1"] & \bar{\nabla}(i) \oplus \bar{\nabla}(i) \arrow[r, "\pi_2"] & \bar{\nabla}(i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ι_1 az első beágyazás, π_2 a második vetítés). Kapunk tehát egy $T(i) \xrightarrow{(g,f)} \bar{\nabla}(i) \oplus \bar{\nabla}(i)$ szürjekciót, melynek a magja a Kígyó lemma szerint $\mathrm{Ker}\,\gamma$-vel egyezik meg, így $\mathcal{F}(\bar{\nabla})$-beli. Hattatva a $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ funktort a $0 \to \mathrm{Ker}(g,f) \to T(i) \to \bar{\nabla}(i) \oplus \bar{\nabla}(i) \to 0$ egzakt sorozaton, egy $0 \to \mathrm{Hom}_A(T, \mathrm{Ker}(g,f)) \to \mathrm{Hom}_A(T,T(i)) \to \mathrm{Hom}_A(T, \bar{\nabla}(i) \oplus \bar{\nabla}(i)) \to 0$ egzakt sorozatot kapunk mivel $\mathrm{Ext}^1_A(T, \mathrm{Ker}(g,f)) = 0$ (hisz $\mathcal{F}(\bar{\nabla}) = {}^{\perp}(T)$). Így a felbonthatatlan projektív $\mathrm{Hom}_A(T,T(i))$ A' modulus két izomorf direkt összeadandóra bomlik, ami ellentmondás. Tehát készen vagyunk. □

A fent említett állítás kimondása előtt összegezzük a bizonyítás során felhasználandó jelöléseket: $F = \mathrm{Hom}_A(T,-)$, $G = D\ \mathrm{Hom}_A(-,T) : A - \mathrm{mod} \to A' - \mathrm{mod}$. Az $F(T(i'))$ projektív bal A' modulust $R(i)$-vel fogjuk jelölni. $F(\bar{\nabla}_A(i')) = D(i)$, $G(\Delta_A(i')) = N(i)$, ahol $i' = n + 1 - i$. Az ($A', \mathbf{e}'$-hoz használt rendezés: $\leqslant^{op}$).

1.2.23. Állítás. *Legyen* $(A, \mathbf{e})$ Δ*-filtrált,* T *a karakterisztikus tilting modulus, valamint legyen* $A' = \mathrm{End}_A T$*. A következőek igazak* $(A', \mathbf{e}')$*-re:*

1. $D(i) \cong \bar{\Delta}_{A'}(i)$ *minden* i*-re*
2. $N(i) \cong \nabla_{A'}(i)$ *minden* i*-re*
3. *az* F *funktor ekvivalenciát indukál* $\mathcal{F}(\bar{\nabla}_A)$ *és* $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$ *között*
4. *a* G *funktor ekvivalenciát indukál* $\mathcal{F}(\Delta_A)$ *és* $\mathcal{F}(\nabla_{A'})$ *között*
5. ${}_{A'}A' \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$*, vagyis* A'^{op} Δ*-filtrált.*
6. *a* $T' = F(D(A_A)) \in A' - \mathrm{mod}$ *egy kotilting modulus úgy, hogy* $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'}) = {}^{\perp}T'$*, és* $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'}) \cap \mathcal{F}(\nabla_{A'}) = \mathrm{add}\, T'$*, vagyis* T' *az* A' *karakterisztikus kotilting modulusa.*
7. $A \cong \mathrm{End}_{A'}(T')$*, és az* $\mathbf{e}''$*-hez tartozó rendezés megegyezik az* $\mathbf{e}$ *rendezésével.*

Bizonyítás. *1.-2.* Belátjuk, hogy $D(i)$-re teljesülnek az 1.2.6 állítás feltételei. Hattassuk az F funktort az 1.2.22 állítás *3.* alpontjában megjelenő

$$0 \to X_i \to T(j) \to \bar{\bar{\nabla}}(j) \to 0$$

egzakt sorozaton. $\mathcal{F}(\bar{\bar{\nabla}}_A) = T^{\perp}$ így kapunk egy $F(T(j)) \to F(\bar{\bar{\nabla}}(j)) \to 0$ epimorfizmust (ismét használjuk, hogy F egzakt az $\mathcal{F}(\bar{\bar{\nabla}}_A)$-beli egzakt sorozatokon). Itt j helyére i'-t írva adódik a $0 \to F(X_i) \to R(i) \to D(i) \to 0$ egzakt sorozat, ahonnan $D(i)$ egy lokális modulus, továbbá $\mathrm{top}\, D(i) \cong \mathrm{top}\, R(i)$. Az 1.2.22 állítás *5.* alpontjából kapjuk a $D(i)$-re vonatkozó multiplicitási feltételeket: $[D(i) : S(i)] = 1$, és $[D(i) : S(l)] = 0$ minden $l > i$-re. Az $R(i) \in \mathcal{F}(D(i), \ldots D(n))$ filtrálási feltételt a $T(i')$ (1.2.22 állítás *1.* és *3.* alpontjában leírt) filtrálási tulajdonságaiból nyerjük. Hasonló érvelés mutatja, hogy $N(i) \cong \nabla_{A'}(i)$.

3. F egzakt az $\mathcal{F}(\bar{\bar{\nabla}}_A)$-beli egzakt sorozatokon, így az *1.* alapján $\mathcal{F}(\bar{\bar{\nabla}}_A)$-t $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$-ba viszi. Tilting elméletből (például a [9] és [12] cikkek) kapjuk a részkategóriák közötti ekvivalenciát.

4. Az 1.2.21 állítás *2.* alpontjából kapjuk, hogy a G funktor egzakt $\mathcal{F}(\Delta_A)$-n (a hosszú egzakt sorozatban az első Ext^1 el fog tűnni), így az előzőhöz hasonlóan $\mathcal{F}(\Delta_A)$-t $\mathcal{F}(\nabla_{A'})$-ra képezi. Világos, hogy G hűséges és teljes $\mathrm{add}\, T$-n. Mivel minden $\mathcal{F}(\Delta)$-beli modulusnak van egy véges T-kofeloldása a 1.2.21 állítás *3.* alpontja miatt, kapjuk, hogy G hűséges és teljes $\mathcal{F}(\Delta)$-n. Belátjuk, hogy G sűrű, vagyis minden ${}_{A'}Y \in \mathcal{F}(\nabla_{A'})$ izomorf egy $G(X)$-szel, ahol $X \in \mathcal{F}(\Delta_A)$. Tilting elméletből tudjuk, hogy ${}_{A'}D(T)$ egy A' kotilting modulus. Így az 1.2.21 állítás duálisa miatt $\mathcal{F}(\nabla_{A'}) \subset D(T)^{\perp}$. Innen pedig már az is látszik, hogy a $G' = \mathrm{Hom}_{A'}(D(T), -)$ funktor lesz a G inverze.

5. A *3.* alpont miatt $T \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_A) \Rightarrow F(T) \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$. ${}_{A'}A' \cong F(T)$, így az 1.2.4 állítás duálisát használva készen vagyunk.

6. A *3.* alpont és az 1.2.4 állítás miatt kapjuk, hogy $T' \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$. Megmutatjuk, hogy T' Ext-injektív $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$-ben, azaz $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'}) \subseteq {}^{\perp}T'$. Legyen ehhez $Y \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$. Ekkor a *3.* alpont miatt létezik egy $X \in \mathcal{F}(\bar{\nabla}_A)$, hogy $Y = F(X)$. Tilting elméletből kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^i_{A'}(Y, T') = \mathrm{Ext}^i_{A'}(F(X), F(D(A_A))) \cong \mathrm{Ext}^i_A(X, D(A_A)) = 0$ minden $i > 0$-re. Vagyis T' Ext-injektív $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$-ben. Az 1.2.9 állítás duálisa szerint $T' \in \mathcal{F}(\nabla_{A'})$, így kapjuk az $\operatorname{add} T' \subseteq \mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'}) \cap \mathcal{F}(\nabla_{A'})$ tartalmazást. Ugyanakkor az *5.* alpont, és a 1.2.16 és 1.2.21 állítások duálisai miatt pedig kapjuk, hogy létezik egy T'' kotilting bázismodulus úgy, hogy $\operatorname{add} T'' = \mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'}) \cap \mathcal{F}(\nabla_{A'})$. Mivel a T' és T'' nem-izomorf felbonthatatlan direkt összeadandóinak száma megegyezik, így $T' \cong T''$, ahonnan készen vagyunk.

$\mathcal{F}(\bar{\nabla}_A)$ és $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_{A'})$ ekvivalens kategóriák a *3.* alpont szerint, így adódik a következő egyenlőség-lánc: $A \cong \mathrm{End}_A(D(A_A)) \cong \mathrm{End}_{A'}(F(D(A_A))) = \mathrm{End}_{A'}(T')$. Vegyük észre, hogy $\mathrm{Hom}_A(T(j), I(i)) = 0$ minden $j < i$ esetén (hiszen $\operatorname{Soc} I(i) = S(i)$ és $T(i) \in \mathcal{F}(\Delta_i) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}_i)$ így $[T(j) : S(i)] = 0$). Továbbá $\mathrm{Hom}_A(T(i), I(i)) \neq 0$ az 1.2.22 állítás *1.* alpontja miatt. Így pedig $T'(i) \cong F(I(i'))$. Vagyis az $\mathbf{e}''$-hez tartozó rendezés megegyezik az $\mathbf{e}$ rendezésével. Ezzel készen vagyunk. □

1.2.3. A standardizálás általánosabban

A 1.1.4 szakaszban tárgyalt 1.1.43 tételt két irányban is lehet általánosítani. Ott a standardizációt olyan modulusok halmazára alkalmaztuk, melyek teljesítették a 1.1.40 definíció mindhárom tulajdonságát (például, ha egy kváziöröklődő algebra standard modulusaiból indulunk ki). Ha elhagyjuk az utolsó feltételt, akkor a 1.1.41 megjegyzés szerint a megmaradó feltételeket tetszőleges algebra standard modulusai teljesítik. Ágoston-Dlab-Lukács szerzőhármas bizonyította, hogy a standardizálás menete az ilyen típusú modulusokra is teljesül. Sőt, azt is megmutatták, hogy ha a harmadik feltétel helyett a másodikat változtatjuk meg, és engedélyezzük az $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(i), \Theta(i))$ alakú bővítéseket, akkor a standardizálás folyamata továbbra is működni fog. Vegyük észre, hogy a valódi standard modulusok teljesítik az így meggyengített második feltételt - és persze az első és harmadikat is. Vagyis a standardizálás működik a valódi standard modulusokra is.

Ezen szakasz folyamán belátjuk tehát, hogy tetszőleges végesdimenziós $(A, \mathbf{e})$ algebra esetén tudunk egy olyan $(C, \mathbf{g})$ $\bar{\Delta}$-filtrált algebrát konstruálni, hogy a két algebrában megjelenő valódi standard modulusok egymásnak feleljenek meg egy jól meghatározott egzakt funktor által. A bizonyítás a már említett 1.1.43 tétel bizonyításán fog alapulni. Felhasználjuk az Ágoston-Dlab-Lukács szerzőhármas [1] cikkét, melyben a következő tétel szerepel (Theorem 2.3):

1.2.24. Tétel. *Legyen $(A, \mathbf{e})$ egy végesdimenziós algebra. Ekkor egyértelműen létezik egy $\bar{\Delta}$-filtrált $(C, \mathbf{g})$ bázisalgebra úgy, hogy az $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_A)$ és $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_C)$ kategóriák ekvivalensek egy egzakt funktor által. Ebben az esetben az egyszerű A- és az egyszerű C-modulusok izomorfia típusainak a száma megegyezik.*

Bizonyítás. A 1.1.43 tétel bizonyítását követjük. Minden $1 \leqslant i \leqslant n$-re olyan felbonthatatlan $N(i)$ modulusokat konstruálunk, melyek Ext-projektív objektumok $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_A)$-ban, és teljesítik az alábbi feltételeket:

- $N(i) \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}(i), \bar{\Delta}(i+1), \ldots \bar{\Delta}(n))$
- létezik egy $N(i) \to \bar{\Delta}(i)$ epimorfizmus
- $N(i)$ Ext-projektív $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_A)$-ban, azaz $\mathrm{Ext}^1_A(N(i), \bar{\Delta}(l)) = 0$ minden $1 \leqslant l \leqslant n$-re

Az $N(i)$-ket ismét rekurzívan definiáljuk, ehhez olyan $Q(i,j)$ $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ A-modulusokat fogunk konstruálni, melyek teljesítik az alábbi feltételeket:

1. $Q(i,j) \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}(i), \bar{\Delta}(i+1), \ldots \bar{\Delta}(j))$
2. létezik egy $Q(i,j) \to \bar{\Delta}(i)$ epimorfizmus
3. $\mathrm{Ext}^1_A(Q(i,j), \bar{\Delta}(l)) = 0$ minden $1 \leqslant l \leqslant n$-re

Legyen tehát $Q(i,i)$ a $\Delta(i)$ maximális olyan faktora, mely $\mathcal{F}(\bar{\Delta}(i))$-beli. Ez teljesíti az előző első két feltételt, így az utolsót kell ellenőriznünk. Mivel $\mathrm{Ext}^1_A(\bar{\Delta}(i), \bar{\Delta}(j)) = 0$ minden $j < i$-re, így csak az $\mathrm{Ext}^1_A(Q(i,i), \bar{\Delta}(i)) = 0$ azonossággal kell foglalkoznunk. Ehhez hattassuk az $0 \to Z \to \Delta(i) \to Q(i,i) \to 0$ egzakt sorozaton a $\mathrm{Hom}_A(-, S(j))$ funktort minden $1 \leqslant j \leqslant i-1$-re. Itt $\mathrm{top}(Z) \in \mathrm{add}\, S(i)$, hiszen $S(l)$ $l < i$ nem lehet, mert az benne lenne a fölötte levő $\bar{\Delta}(i)$-vel izomorf rész talpában a $\bar{\Delta}$ definíciója és a $Q(i,i)$ maximális választása miatt. Kapjuk tehát, hogy $\mathrm{Hom}_A(Z, S(j)) = 0$. Mivel $\bar{\Delta}(i)/\mathrm{rad}\ \bar{\Delta}(i)$-ben csak $S(j)$; $j < i$ kompozíciófaktorok vannak, a $\mathrm{Hom}(Z, \bar{\Delta}(i))$ térben csak olyan morfizmusok lehetnek, ahol $\mathrm{top}(Z)$-t $\mathrm{top}\ \bar{\Delta}(i)$-be képezzük. Ilyen leképezés viszont a $Q(i,i)$ maximális választása miatt nincs, így $\mathrm{Hom}(Z, \bar{\Delta}(i)) = 0$. Most hattatva a $\mathrm{Hom}_A(-, \bar{\Delta}(i))$ funktort is a fenti egzakt sorozatra, a kapott hosszú egzakt sorozat egy részlete:

$$... \to \mathrm{Hom}(Z, \bar{\Delta}(i)) \to \mathrm{Ext}^1_A(Q(i,i), \bar{\Delta}(i)) \to \mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \bar{\Delta}(i)) \to ...$$

$\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \bar{\Delta}(i)) = 0$ ($\Delta(i)$ definíciója miatt), így a két szélső tag 0, ahonnan a középső tag is: $\mathrm{Ext}^1_A(Q(i,i), \bar{\Delta}(i)) = 0$.

Az indukciós lépés során feltesszük, hogy $Q = Q(i, j-1)$ $i < j \leqslant n$-re már konstruálva van. Jelöljük U_1-gyel Q-nak a $\bar{\Delta}(j)$-vel vett univerzális bővítését:

$$0 \to X_1 = \bigoplus_{d_1} \bar{\Delta}(j) \to U_1 \to Q \to 0$$

(Itt $d_1 = \dim_{D_j} \mathrm{Ext}^1_A(Q, \bar{\Delta}(j))$, ahol $D_j = \mathrm{End}_A(\bar{\Delta}(j))$). Ekkor U_1 teljesíti az első két feltételt, és induktívan kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(U_1, \bar{\Delta}(l)) = 0$, ha $1 \leqslant l \leqslant j-1$. Azonban $\mathrm{Ext}^1_A(U_1, \bar{\Delta}(j)) = 0$ nem feltétlenül teljesül. Jelölje d_2 ennek a D_j feletti dimenzióját, és vegyük az U_1 univerzális bővítését $\bar{\Delta}(j)$-vel (ezt U_2-vel jelöljük):

$$0 \to X_2 = \bigoplus_{d_2} \bar{\Delta}(j) \to U_2 \to U_1 \to 0$$

Kapjuk a következő egzakt sorozatot: $0 \to \bar{X}_2 \to U_2 \to Q \to 0$, ahol $\bar{X}_2 \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}(j))$ az X_1-gyel vett bővítése az X_2-nek. Ha $\mathrm{Ext}^1_A(U_2, \bar{\Delta}(j)) \neq 0$, akkor folytatjuk ezt az eljárást. A t.-edik univerzális bővítés után kapjuk a következő egzakt sorozatot: $0 \to \bar{X}_t \to U_t \to Q \to 0$. (Igazából minden lépés során a következő pullback diagramot használjuk):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_t \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar{X}_t \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X}_{t-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\xi_t : 0 \arrow[r] & X_t \arrow[r] \arrow[d] & U_t \arrow[r] \arrow[d] & U_{t-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

A rekurzió miatt az első két feltétel, sőt az $\mathrm{Ext}^1_A(U_t, \bar{\Delta}(l)) = 0$ azonosság is teljesül $1 \leqslant l \leqslant j-1$-re.

Megmutatjuk, hogy a rekurzióban szereplő univerzális bővítésekre létezik olyan t_0, melyre: $\mathrm{Ext}^1_A(U_{t_0}, \bar{\Delta}(j)) = 0$. Ehhez indukcióval belátjuk, hogy teljesül a következő izomorfia: $\mathrm{Hom}_A(\bar{X}_t, \bar{\Delta}(j)) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(Q, \bar{\Delta}(j))$. $\bar{X}_1 = X_1$-re nyilvánvalóan teljesül a univerzális bővítésre vonatkozó szürjektivitási tulajdonág miatt. $t > 1$ esetben hattassuk a fenti diagramra a $\mathrm{Hom}_A(-,\bar{\Delta}(j))$ funktort. A kapott hosszú egzakt sorozatokat összefűzve jutunk az alábbi egzakt sorokkal és oszloppal rendelkező kommutatív diagramhoz ((X,Y) a $\mathrm{Hom}(X,Y)$ rövidítése):

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\bar{X}_{t-1},\bar{\Delta}(j)) \arrow[r, "\alpha"] & (\bar{X}_t,\bar{\Delta}(j)) \arrow[r] & (X_t,\bar{\Delta}(j)) \arrow[r, "\beta"] & Ext^1(\bar{X}_{t-1},\bar{\Delta}(j)) \\
0 \arrow[r] & (U_{t-1},\bar{\Delta}(j)) \arrow[r] \arrow[u] & (U_t,\bar{\Delta}(j)) \arrow[r] \arrow[u] & (X_t,\bar{\Delta}(j)) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, equal] & Ext^1(U_{t-1},\bar{\Delta}(j)) \arrow[u, "\delta"] \\
& & & & Ext^1(Q,\bar{\Delta}(j)) \arrow[u, "\epsilon"] \\
& & & & (\bar{X}_{t-1},\bar{\Delta}(j)) \arrow[u, "\varphi"]
\end{tikzcd}
$$

Itt γ izomorfizmus, hisz ξ_t egy univerzális bővítés, míg φ az indukció miatt szintén az. Így $\epsilon = 0$, vagyis δ injektív, de a kommutativitás miatt $\beta = \delta\gamma$, így ez is injektív kell, hogy legyen. Ekkor ismét egy 0 leképezést kapunk, vagyis α izomorfizmus, tehát használva az indukciós feltevést kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}_A(\bar{X}_t,\bar{\Delta}(j)) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(Q,\bar{\Delta}(j))$.

Az előző lépés során azt is láttuk, hogy $\mathrm{Hom}_A(\bar{X}_t,\bar{\Delta}(j)) \simeq \mathrm{Hom}_A(\bar{X}_1,\bar{\Delta}(j))$ minden t-re. $\bar{X}_t$ egy $\mathcal{F}(\bar{\Delta}(j))$-beli modulus bővítése $X_1 = \bigoplus_{d_1}\bar{\Delta}(j)$. Vagyis az előző izomorfizmus mutatja, hogy $\bar{X}_t$ homomorf képe $\bigoplus_{d_1}\bar{\Delta}(j)$-nek, így korlátos dimenziójú. Mivel $\dim X_1 < \dim \bar{X}_2 < \ldots \dim \bar{X}_t$, az univerzális bővítések sora véges sok lépésben stabilizálódik, így $\mathrm{Ext}^1_A(U_{t_0},\bar{\Delta}(j)) = 0$. Legyen ekkor $Q(i,j) = U_{t_0}$

$N(i) = Q(i,n)$ választással megkapjuk a keresett Ext-projektíveket, amik teljesítik az mindhárom feltételt. Ahhoz, hogy belássuk, hogy ezek felbonthatatlanok, szükségünk van az alábbi lemmára:

1.2.25. Lemma. *$M \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A)$ esetén* $\mathrm{add}\, M \subset \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A)$.

Bizonyítás. Legyen $U \oplus V = M \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A)$. Mivel $\mathrm{Ext}_A(\bar{\Delta}_A(n),\bar{\Delta}_A(i)) = 0$, $i \neq n$-re, kapjuk, hogy $Me_nA = Ue_nA \oplus Ve_nA \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(n))$ és $M/Me_nA \simeq U/Ue_nA \oplus V/V\ e_nA \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(1),\bar{\Delta}_A(2),\ldots\bar{\Delta}_A(n-1))$. Elég tehát belátni az állítást $Me_nA \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(n))$-ra, innen már a faktormodulusra is következik indukcióval. Tegyük fel tehát, hogy $M = Me_nA$.

$M \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(n)) \Rightarrow 0 \neq \mathrm{Hom}_A(M,\bar{\Delta}_A(n)) = \mathrm{Hom}_A(U,\bar{\Delta}_A(n)) \oplus \mathrm{Hom}_A(V,\bar{\Delta}_A(n))$, így tehát az egyik direkt összeadandóra (mondjuk $\mathrm{Hom}_A(U,\bar{\Delta}_A(n)) \neq 0$). De $\mathrm{top}\, U$, és így U minden homomorf képének teteje is $S(n)$-filtrált, vagyis egy nemnulla homomorfizmus U-ból $\bar{\Delta}_A(n)$-ba epimorfizmus kell, hogy legyen a 1.2.10 lemma miatt. Így $M/(U_1 \oplus V) \simeq \bar{\Delta}_A(n)$ valamely $U_1 \leqslant U$-ra, vagyis $(U_1 \oplus V) \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(n))$, mert $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(n))$ zárt az epimorfizmusok magjára. Mivel $U_1 \oplus V \lneqq U \oplus V$, indukcióval bizonyítható, hogy $U, V \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(n))$. □

Visszatérünk $N(i)$ felbonthatatlanságának bizonyítására. Ehhez azt látjuk be, hogy minden $Q(i,j)$ felbonthatatlan. $Q(i,i)$ az, hiszen a $\Delta(n)$ lokális modulus faktora. Tegyük fel, hogy $Q(i,j-1)$ felbonthatatlan $i < j \leqslant n$-re. $Q(i,j)$-t a $Q(i,j-1)$ modulus $X \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(j))$-szel vett bővítéseként kaptuk: $0 \to X \to Q(i,j) \to Q(i,j-1) \to 0$. Tudjuk továbbá, hogy az alábbi hosszú egzakt sorozatban:

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_A(Q(i,j), \bar{\Delta}_A(j)) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_A(X, \bar{\Delta}_A(j)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1_A(Q(i,j-1), \bar{\Delta}_A(j)) \to \ldots$$

α izomorfizmus. Így $\beta = 0$.

Tegyük fel, hogy $Q(i,j) = U \oplus V$. Mivel $X = Q(i,j)e_jA = Ue_jA \oplus Ve_jA$, kapjuk, hogy $Q(i,j-1) \simeq U/Ue_jA \oplus V/Ve_jA$. $Q(i,j-1)$ felbonthatatlansága miatt a fentiek közül az egyik 0. Feltehetjük, hogy U az, de ekkor $U \subseteq X$. A 1.2.25 lemma miatt $U \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}_A(j))$. Ekkor viszont egy U-ból $\bar{\Delta}_A(j)$-be menő epimorfizmus egy $\mathrm{Hom}_A(Q(i,j), \bar{\Delta}_A(j))$-beli homomorfizmust ad, aminek van egy nemnulla megszorítása X-re. Ez ellentmod annak, hogy $\beta = 0$. Így tehát minden $Q(i,j)$, vagyis $N(i)$ is felbonthatatlan.

Legyen most $N = \oplus_{i=1}^n N(i)$, és $C = \mathrm{End}_A(N)$. Ekkor a 1.1.43 tételhez hasonló bizonyítás szerint C bázisalgebra, $\bar{\Delta}$-filtrált, és a $\mathrm{Hom}_A(N, -)$ funktor ekvivalenciát indukál $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_A)$ és $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_C)$ között. □

2. fejezet

Rétegező rendszerek

E. Marcos, O. Mendoza és C. Sáenz a 2000-es évek elején kezdtek el foglalkozni a standardizálás témakörével. A munkájukat K. Erdmann és C. Sáenz 2003-as [8] cikke indította. Ebben az eredeti, Dlab-Ringel-féle standardizálásnál megjelenő feltételekhez hasonló összefüggésekből építik fel az elméletüket. A szerzőhármas célja az, hogy a θ-kra vonatkozó feltételek megértésével módszert adjanak arra, hogy hogyan lehet Δ-filtrált (adott esetben kváziöröklődő) algebrákat gyártani. Eredményeik egy része addigra már ismert volt, mégis olyan szempontból újítást vezettek be, hogy korábbi tételeket bizonyítottak be a saját elméletükre épülő eszközök segítségével.

Ebben a fejezetben főként a fent említett szerzők három cikkének ([8], [10], [11]) irányvonala mentén fogunk haladni. Ők a Dlab-Ringel féle standardizálható rendszerekhez nagyon hasonlóan definiálják a rétegező rendszereket, mely köré épül az elméletük:

2.0.1. Definíció. *Legyen R egy algebra, $\theta = \{\theta(1), \dots, \theta(n)\}$ direkt felbonthatatlan R-modulusok egy halmaza. Legyen $\preceq$ egy teljes rendezés az $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ halmazon. Azt mondjuk, hogy a $(\theta, \preceq)$ pár egy n-rétegező rendszer, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. $\mathrm{Hom}_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *minden* $j > i$*-re*
2. $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *minden* $j \geqslant i$*-re*

Vegyük észre, hogy egy algebra standard modulusai kielégítik a fenti feltételeket, vagyis a θ-k a Δ-k általánosításai. Az $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategória tulajdonságainak vizsgálásakor észrevettük, hogy a $\Delta(i)$ modulusokat minden algebrában lehet definiálni. Különös figyelmet kaptak a Δ-filtrált algebrák, (vagyis azon R algebrák, amelyekre ${}_RR$, mint önmaga feletti modulus Δ-filtrált volt). Ehhez hasonlóan standardnak fogjuk nevezni azokat a rétegező rendszereket, melyekre ${}_RR \in \mathcal{F}(\theta)$ teljesül:

2.0.2. Definíció. *Egy $(\theta, \preceq)$ méretű rétegező rendszer standard, ha ${}_R R \in \mathcal{F}(\theta)$. Duálisan, $(\theta, \preceq)$ kostandard, ha $D(R_R) \in \mathcal{F}(\theta)$.*

2.1. Ext-injektív rétegező rendszerek

Ebben az alfejezetben definiáljuk az Ext-injektív rétegező rendszereket (ezentúl az angolból eredő - ext-injective stratifying system - EISS rövidítést is használni fogjuk). Az alfejezet célja, hogy belássuk azt, hogy ezek gyakorlatilag megegyeznek a már definiált rétegező rendszerekkel, vagyis minden EISS-nek megfelel egy rétegező rendszer, és fordítva, minden rétegező rendszerből tudunk egy hozzá tartozó EISS-t konstruálni.

2.1.1. Az Ext-injektív rétegező rendszerek tulajdonságai

Ebben a szakaszban először bevezetjük az Ext-injektív rétegező rendszereket, majd megvizsgáljuk a közöttük haladó morfizmusokat, és néhány alapvető állítást bizonyítunk, melyre szükségünk lesz a későbbiekben.

Ext-injektív rétegező rendszerek

2.1.1. Definíció. *Legyen R egy algebra, $\theta = \{\theta(1), \dots, \theta(n)\}$ R-modulusok, továbbá legyen $\underline{Y} = \{Y(1), \dots Y(n)\}$ felbonthatatlan R-modulusok egy halmaza. Legyen adott egy $\preceq$ teljes rendezés $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$-en. A $(\theta, \underline{Y}, \preceq)$ hármast Ext-injektív n-rétegező rendszernek nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. $\mathrm{Hom}_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *minden $j \succ i$-re*
2. *Létezik egy $0 \to \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \to Z(i) \to 0$ egzakt sorozat, melyre igaz, hogy $Z(i)$ olyan $\theta(l)$ modulusokkal van filtrálva, melyekre $l \prec i$.*
3. $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$*, ahol $Y = \oplus_{i=1}^n Y(i)$, azaz Y Ext-injektív $\mathcal{F}(\theta)$-ban*

Megjegyezzük, hogy a legtöbb esetben a természetes rendezést (esetleg annak fordítottját) fogjuk venni Ω_n-en, ekkor a $\leqslant$, illetve $\leqslant^{op}$ jeleket fogjuk használni.

2.1.2. Megjegyzés. *Az előző definíció feltételeiből következik, hogy minden $j \succeq i$-re igaz az $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ egyenlőség.*

Bizonyítás. A $0 \to \theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$ rövid egzakt sorozatból a $\mathrm{Hom}_R(\theta(j), -)$ funktor hatásával képezzük a

$$... \to \mathrm{Hom}_R(\theta(j), Z(i)) \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), \theta(i)) \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), Y(i)) \to ...$$

hosszú egzakt sorozatot. Itt az utolsó tag a *3.* feltétel miatt 0. A *2.* feltétel miatt $Z(i)$-nek egy θ-filtrálásban csak olyan $\theta(l)$ faktorai vannak, melyekre $l < i$, így az *1.* feltétel miatt az első tag szintén 0. Emiatt a középső tag is 0 kell legyen, és ezt akartuk belátni. □

2.1.3. Megjegyzés. *Ezzel pedig beláttuk, hogy egy EISS-ben szereplő θ-k teljesítik a rétegező rendszerek axiómáit, vagyis minden EISS egyben rétegező rendszer is.*

2.1.4. Lemma. *Legyen $(\theta, \underline{Y}, \preceq)$ egy EISS. $M \in \mathcal{F}(\theta)$-ra a $\theta(i)$ előfordulásának a száma minden filtrálás során megegyezik.*

A lemma következménye, hogy értelmes az alábbi jelölés:

2.1.5. Jelölés. $[M : \theta(i)]$*-vel jelöljük a $\theta(i)$ multiplicitását egy tetszőleges filtrálásban.*

$M \in \mathcal{F}(\theta)$ esetén $l_\theta(M)$-mel jelöljük az M θ-hosszát, amit a $\sum_{i=1}^n [M : \theta(i)]$ összeg segítségével definiálunk.

A minimális approximáció

A továbbiakban szükségünk lesz az Ext-injektív, valamint Ext-projektív objektumok részkategóriájára, valamint bevezetjük a következő jelölést:

2.1.6. Jelölés. *Legyenek $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ részkategóriák* mod $-R$*-ben. Ekkor ha minden $X \in \mathcal{X}$ és $Y \in \mathcal{Y}$ esetén $\mathrm{Ext}^i_R(X, Y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathrm{Ext}^i_R(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$.*
*Egy $\mathcal{C} \subseteq R-$*mod *véges halmaz esetén $\mathcal{F}(\mathcal{C})$-vel jelöljük a $\mathcal{C}$-filtrált modulusok részkategóriáját. Bevezetjük az alábbi jelöléseket:*

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \{X \in mod\ R : \mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{F}(\mathcal{C}), X) = 0\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{X \in mod\ R : \mathrm{Ext}^1_R(X, \mathcal{F}(\mathcal{C})) = 0\}$$

2.1.7. Megjegyzés. *A 2.1.1 definíció 3. alpontja miatt $Y \in \mathcal{I}(\theta)$.*

Ezután pedig megmutatjuk, hogy az EISS definíciójában szereplő $\alpha_i : \theta(i) \to Y(i)$ leképezés egy bal minimális approximáció (1.2.19 definíció).

2.1.8. Lemma. *Legyen $\alpha_i : \theta(i) \to Y(i)$ az EISS definíciójában szereplő R-morfizmus. Ekkor α_i a $\theta(i)$ bal minimális $\mathcal{I}(\theta)$-approximációja.*

Bizonyítás. $Y(i)$ felbonthatatlan, így következik, hogy α_i bal minimális.
Legyen $X \in \mathcal{I}(\theta)$. Vegyük a $0 \to \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \to Z(i) \to 0$ rövid egzakt sorozatból $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ funktor hatásával képzett

$$... \to \mathrm{Hom}_R(Y(i), X) \xrightarrow{Hom(\alpha_i, X)} \mathrm{Hom}_R(\theta(i), X) \to \mathrm{Ext}^1_R(Z(i), X) \to ...$$

hosszú egzakt sorozatot. Mivel $Z(i)$ θ-filtrált, így $\mathrm{Ext}^1_R(Z(i), X) = 0$ az X választása miatt. Így tehát a $\mathrm{Hom}(\alpha_i, X)$ leképezés szürjektív, vagyis minden $\alpha : \theta(i) \to X$ leképezésre van egy $\xi : Y(i) \to X$ leképezés, hogy $\alpha = \alpha_i \xi$. Mivel a definíció *3.* feltétele miatt $Y(i) \in \mathcal{I}(\theta)$, így valóban egy bal $\mathcal{I}(\theta)$-approximációról van szó. □

EISS-ek közötti morfizmusok

Szeretnénk megérteni, hogy két EISS mikor azonos egymással. Ehhez definiáljuk az EISS-ek közötti izomorfizmust. Látni fogjuk, hogy egy rögzített θ már (izomorfia erejéig) meghatározza az EISS-t.

2.1.9. Definíció. *Legyenek $(\theta, \underline{Y}, \leq)$, és $(\theta', \underline{Y'}, \leq)$ n-EISS-ek.*
Ha R-morfizmusok egy $f = \{f_1(i), f_2(i)\}_{i=1}^n$ halmazára teljesül, hogy az $f_1(i) : \theta(i) \to \theta'(i)$ és $f_2(i) : Y(i) \to Y'(i)$ R-morfizmusokra igaz az $f_2(i)\alpha_i = \alpha'_i f_1(i)$ egyenlőség minden i-re, akkor azt mondjuk, hogy $f : (\theta, \underline{Y}, \leq) \to (\theta', \underline{Y'}, \leq)$ egy EISS-ek közötti morfizmus.
Az $f = \{f_1(i), f_2(i)\}_{i=1}^n : (\theta, \underline{Y}, \leq) \to (\theta', \underline{Y'}, \leq)$ leképezés egy EISS-ek közötti izomorfizmus, ha minden i-re $f_1(i)$ és $f_2(i)$ R-izomorfizmusok.

$$\begin{array}{ccc} \theta(i) & \xrightarrow{\alpha_i} & Y(i) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_1(i)} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_2(i)} \\ \theta'(i) & \xrightarrow{\alpha'_i} & Y'(i) \end{array}$$

2.1.10. Állítás. *Legyenek $(\theta, \underline{Y}, \leq)$ és $(\theta, \underline{Y'}, \leq)$ rétegező rendszerek. Ekkor $\forall i \in \Omega_n$-re létezik egy $f_i : Y(i) \to Y'(i)$, hogy az $f = \{1_{\theta(i)}, f_i\}_{i=1}^n : (\theta, \underline{Y}, \leq) \to (\theta, \underline{Y'}, \leq)$ leképezés egy EISS-ek közötti izomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyenek $\alpha_i : \theta(i) \to Y(i)$, valamint $\alpha'_i : \theta(i) \to Y'(i)$ a $\theta(i)$ és $\theta'(i)$ bal minimális $\mathcal{I}(\theta)$ approximációi. Így léteznek az $f_i : Y(i) \to Y'(i)$ és $g_i : Y'(i) \to Y(i)$ R-morfizmusok úgy, hogy $f_i\alpha_i = \alpha'_i$ és $g_i\alpha'_i = \alpha_i$ $\forall i \in \Omega_n$-re. Felhasználva, hogy α_i és α'_i bal-minimálisak, kapjuk, hogy $f_i g_i$ $g_i f_i$ izomorfizmusok minden i-re, így kapjuk az eredményt. □

Vegyük észre továbbá, hogy egy adott $(\theta, \underline{Y}, \leq)$ EISS esetén az $Y(1), \ldots, Y(n)$ R-modulusok páronként különbözőek, hisz $i \prec j$ esetén $[Y(i) : \theta(j)] = 0$, és $[Y(j) : \theta(j)] = 1$. Így az $A = \mathrm{End}(\oplus_{i=1}^{n} Y(i))$ egy bázisalgebra, és az egyszerű A-modulusok száma izomorfia erejéig n.

Ezzel pedig megkonstruáltunk egy θ-filtrált algebrát. Innentől kezdve az A algebra mindig az $\mathrm{End}(Y)$ endomorfizmusgyűrűt fogja jelölni (ahol Y a $\oplus_{i=1}^{n} Y(i)$ direkt összeget jelöli). A további célunk az lesz, hogy megértsük az A algebra szerkezetét.

2.1.2. Kontravariáns ekvivalencia a részkategóriák között

Ebben az alfejezetben azt szeretnénk belátni, hogy tudunk olyan algebrát konstruálni, amelyben az EISS-ben szereplő $\theta(i)$-k úgy viselkednek, mint az algebra standard modulusai (vagyis a $\Delta(i)$-k). Apró nehézséget okoz, hogy a θ-ák Ext-injektív modulusok részmodulusaként, míg a Δ-ák projektív modulusok faktoraként vannak definiálva. A megfeleltetés tehát egy jól megválasztott F kontravariáns funktor mentén fog történni.

Előkészületek

Bizonyítjuk az alábbi lemmát, melyet sokszor fogunk használni a későbbiekben:

2.1.11. Lemma. *Egy $(\theta, \underline{Y}, \leq)$ EISS esetén az $F = \mathrm{Hom}_R(-, Y)$ balegzakt funktor egzakt az $\mathcal{F}(\theta)$ részkategórián (ahol $Y = \oplus_{i=1}^{n} Y(i)$).*

Bizonyítás. Vegyük az $\mathcal{F}(\theta)$-beli $0 \to A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sorozatból a $\mathrm{Hom}_R(-, Y)$ funktor hatásával képzett hosszú egzakt sorozatot:

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_R(B, Y) \to \mathrm{Hom}_R(A, Y) \to \mathrm{Ext}^1_R(C, Y) \to \ldots$$

$C \in \mathcal{F}(\theta)$-filtrált, és $Y \in \mathcal{I}(\theta)$ a 2.1.7 megjegyzés szerint, így kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_R(C, Y) = 0$. Így F egzakt az $\mathcal{F}(\theta)$ részkategórián. $\square$

A későbbiek során szükségünk lesz az alábbi lemmákra, így a fontosabb eredmények előtt ezek bizonyításával folytatjuk:

2.1.12. Lemma. *Legyen $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Ekkor létezik egy $0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \ldots \to Y_k \to 0$ egzakt sorozat, ahol $Y_r \in \mathrm{add}\, Y$ és $k < n$.*

Bizonyítás. Jelöljük $\max M$-mel a legnagyobb olyan j-t, melyre $[M : \theta(j)] \neq 0$.

i-re vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy minden M-re, melyre $\max M = i$, létezik egy $0 \to M \to Y' \to M' \to 0$ rövid egzakt sorozat, ahol $Y' \in \operatorname{add} Y$ és $M' \in \mathcal{F}(\theta)$ úgy, hogy $\max M' < i$.

$\max M = 1$ esetén M-nek csak $\theta(1)$-gyel izomorf faktorai vannak. A 2.1.2 megjegyzés szerint $\theta(1)$-nek nincsenek bővítései önmagával, így M $\theta(1)$-ek direkt összegeként áll elő. $\theta(1) = Y(1) \in \operatorname{add} Y$ miatt ezzel az esettel készen vagyunk.

Az indukciós lépésben feltesszük, hogy $\max M = i$, és hogy az állítás igaz minden olyan $\mathcal{F}(\theta)$-beli M modulusra, melyre $\max M < i$. A 2.1.2 megjegyzés szerint $j < i$-re $\operatorname{Ext}^1_R(\theta(i), \theta(j)) = 0$, így van olyan filtrálás, amely során először a $\theta(i)$ modulusok szerint faktorizálunk. Ugyancsak e megjegyzés szerint $\theta(i)$-nek nincsenek bővítései önmagával, így kapjuk, hogy létezik egy $0 \to \theta(i)^a \to M \to N \to 0$ egzakt sorozat, ahol $N \in \mathcal{F}(\theta)$ és $\max N < i$. Az utóbbira teljesül tehát az indukciós feltevés, emiatt pedig létezik egy olyan $0 \to N \to \tilde{Y} \to \tilde{N} \to 0$ egzakt sorozat, ahol $\tilde{Y} \in \operatorname{add} Y$ és $\tilde{N} \in \mathcal{F}(\theta)$ úgy, hogy $\max \tilde{N} < \max N$.

Tekintsük a $\theta(i) \hookrightarrow Y(i)$ beágyazásból kapott alábbi pushout diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \theta(i)^a \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y(i)^a \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & Z(i)^a \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z(i)^a \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Mivel $N \in \mathcal{F}(\theta)$, és a 2.1.1 definíció *3.* alpontja szerint $\operatorname{Ext}^1_R(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$, a második sor felhasad. Így $W \cong Y(i)^a \oplus N$. A Kígyó lemma miatt kapjuk, hogy $M \hookrightarrow W$ egy beágyazás. Komponáljuk ezt a $W \hookrightarrow Y(i)^a \oplus \tilde{Y}$ beágyazással! Ekkor M-et ágyazzuk be a $Y(i)^a \oplus \tilde{Y} \in \operatorname{add} Y$-beli modulusba. A Kígyó lemma szerint $X = (Y(i)^a \oplus \tilde{Y})/M$ a $\tilde{N}$ bővítése $Z(i)^a$-val. Az elsőre igaz, hogy $\max \tilde{N} < \max N < i$, a másodikra pedig, hogy $\max Z(i)^a < i$ a $Z(i)$ az EISS 2.1.1 definíciójának *2.* pontja szerint.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & = & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Y(i)^a \oplus N & \longrightarrow & Y(i)^a \oplus \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{N} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z(i)^a & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tilde{N} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Így az $Y' = Y(i)^a \oplus \tilde{Y}$ és $M' = X$ választással kapjuk a keresett rövid egzakt sorozatot, melyeket összefűzve készen vagyunk. $\square$

2.1.13. Következmény. *Az $\epsilon_X \colon {}_R X \to {}_R \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_R(X,Y)_A, Y)$ leképezés izomorfizmus minden $X \in \mathcal{F}(\theta)$-re.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ϵ_X leképezés egy izomorfizmus lesz $X = Y$ választással, sőt ez igaz $X = \tilde{Y}$ esetén is bármely $\tilde{Y} \in \operatorname{add} Y$-ra.

Általános $X \in \mathcal{F}(\theta)$-ra az előző lemma szerint van egy

$$0 \to X \to Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_{s-1}} Y_s \to 0$$

egzakt sorozatunk úgy, hogy az f_i-nek a képére: $X_i \in \mathcal{F}(\theta)$, továbbá $Y_i \in \operatorname{add} Y$. A fenti egzakt sorozatot rövid egzakt sorozatokra bontva létezik egy $\epsilon_i : 0 \to X_{i-1} \to Y_i \to X_i \to 0$ rövid egzakt sorozat minden $0 \leqslant i \leqslant s-1$-re (ahol $X_{-1} = X$ és $X_{s-1} = Y_s$). Két lépésben kapjuk az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X_{s-2} & \longrightarrow & Y_{s-1} & \longrightarrow & Y_s & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{X_{s-2}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{Y_{s-1}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{Y_s}} & & \\
0 & \longrightarrow & G(F(X_{s-2})) & \longrightarrow & G(F(Y_{s-1})) & \longrightarrow & G(F(Y_s)) & &
\end{array}$$

Az első lépésben kihasználjuk, hogy a 2.1.11 lemma miatt az $F = \operatorname{Hom}_R(-,Y)$ funktor egzakt $\mathcal{F}(\theta)$-n, így egy egzakt sorozatot kapunk, amire ezután hattatjuk a $G = \operatorname{Hom}_A(-,Y)$ balegzakt funktort. A függőleges leképezéseknél éppen az egyes ϵ_{-} leképezések jelennek meg.

Mivel a fenti megjegyzés miatt $\epsilon_{Y_{s-1}}$ és ϵ_{Y_s} izomorfizmusok, $\epsilon_{X_{s-2}}$ is az kell, hogy legyen. Ha továbbmegyünk az $\epsilon_{s-2} : 0 \to X_{s-3} \to Y_{s-2} \to X_{s-2} \to 0$ rövid egzakt sorozatból kapott, a fentihez hasonló kommutatív diagramra, akkor $\epsilon_{Y_{s-2}}$ és $\epsilon_{X_{s-2}}$ izomorfizmusok lesznek, így $\epsilon_{X_{s-3}}$ is az kell, hogy legyen. Hasonló gondolatmenettel, induktívan láthatjuk, hogy ϵ_X izomorfizmus. $\square$

A 1.1.31 lemma következményeként kapjuk az alábbi eredményt:

2.1.14. Következmény. *Ha $V, W \in \mathcal{F}(\theta)$ R-modulusok, akkor az $F = \mathrm{Hom}(-, Y)$ funktor a következő izomorfizmust indukálja:*

$$\mathrm{Hom}_R(W, V) \cong \mathrm{Hom}_A(F(V), F(W)) \tag{2.1}$$

Bizonyítás. $V \in \mathcal{F}(\theta)$, így a 2.1.13 következmény szerint az ϵ_V leképezés izomorfizmus:

$$\mathrm{Hom}_A(F(V), Y) = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_R(V, Y), Y) \cong {}_RV$$

Írjuk vissza ezt most a $M := Y$; $S := A$; $N := F(V)$ választással felírt 1.1.31 lemma által adott (1.1) azonosság jobb oldalába:

$$\mathrm{Hom}_A(F(V), \mathrm{Hom}_R(W, Y)) \cong \mathrm{Hom}_R(W, \mathrm{Hom}_A(F(V), Y))$$

Így épp megkapjuk a bizonyítandó (2.1) azonosság bal oldalát. $\square$

A $\theta \leftrightarrow \Delta$ megfeleltetés

Most pedig rátérhetünk arra az eredményre, mely megmutatja, hogy az $A = \mathrm{End}_R(Y)$ algebrában a θ-k éppen a $\leqslant^{op}$ rendezés szerinti Δ-kkal egyeznek meg:

2.1.15. Állítás. *Legyen $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS. Ekkor az $A = \mathrm{End}_R(Y)$ endomorfizmusgyűrű (jobbról) Δ-filtrált az $\leqslant^{op}$ a természetes rendezés fordítottjával, továbbá az is igaz, hogy $\Delta(i) = \mathrm{Hom}_R(\theta(i), Y)$.*

Bizonyítás. Legyenek $P(i) = F(Y(i), Y)$ minden i-re a felbonthatatlan projektív jobb A-modulusok.

A 2.1.1 definíció *2.* része szerint $Z(i)$ olyan $\theta(j)$ modulusokkal van filtrálva, melyekre $j < i$, így induktívan kapjuk, hogy $F(Z(i))$-nek van olyan filtrálása, melyben a faktorok $F(\theta(j))$; $j < i$ alakúak. Ugyanez igaz $P(i) = F(Y(i), Y)$-re is, csak itt $j = i$ is megengedett. Elég tehát megmutatni, hogy $F(\theta(i)) = \Delta(i)$ a fordított rendezéssel.

Ehhez belátjuk, hogy $F(\theta(i))$ a $P(i)$ legnagyobb olyan faktora, ahol a kompozíciófaktorok $S(j)$; $j \geqslant i$ alakúak.

Használjuk az $U(i) = \eta_{\{P(j)|i<^{op}j\}}P(i)$ jelölést, és tekintsük a következő egzakt sorozatokat (az elsőről a 1.1.6 állítás során, a másodikról a 2.1.11 lemmában láttuk be, hogy egzakt):

$$0 \to U(i) \to P(i) \to \Delta(i) \to 0$$
$$0 \to F(Z(i)) \to F(Y(i)) \to F(\theta(i)) \to 0$$

Legyen $g : P(j) \to P(i)$ úgy, hogy $i <^{op} j$. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{Im} g \subseteq F(Z(i))$. Mivel $Y(i), Y(j) \in \mathcal{F}(\theta)$, a 2.1.14 következmény szerint az $F = \operatorname{Hom}(-, Y)$ funktor a következő izomorfizmust indukálja:

$$\operatorname{Hom}_R(Y(i), Y(j)) \cong \operatorname{Hom}_A(F(Y(j)), F(Y(i)))$$

Létezik tehát egy $h : Y(i) \to Y(j)$ úgy, hogy $F(h) = g$. A 2.1.1 definíció *2.* pontja miatt $Y(j)$ $\theta(t)$ filtrált $t \leqslant j$-re, így ugyanezen definíció *1.* pontja miatt $\operatorname{Hom}_R(\theta(i), Y(j)) = 0$ $j < i$-re. Következik, hogy $\alpha_i h \in \operatorname{Hom}_R(\theta(i), Y(j))$-re $\alpha_i h = 0$. Így pedig kapjuk, hogy $0 = F(\alpha_i h) = F(h)F(\alpha_i) = gF(\alpha_i)$, ahonnan $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker}((F(\alpha_i)) = F(Z(i))$. Ezért $U(i) \subseteq F(Z(i))$.

$F(\theta(j))$ a $P(j)$ faktora, így a tetejeik megegyeznek. Mivel $P(j)$ teteje egyszerű, kapjuk, hogy $\operatorname{top} F(\theta(j))$ is egyszerű. Fent már beláttuk, hogy $F(Z(i))$-nek van olyan filtrálása, melyben a faktorok $F(\theta(j))$; $j < i$ alakúak így $\operatorname{top} F(Z(i)) \subseteq \oplus S(j)^{a_j}$ $j < i$-re, ahonnan kapjuk, hogy $F(Z(i)) \subseteq \eta_{\{P(j)|i<^{op}j\}}P(i) = U(i)$ (hiszen most $\Delta(i)$-t a fordított rendezéssel vesszük). Így tehát $F(Z(i)) = U(i)$.

Összehasonlítva a két fenti egzakt sorozatot kapjuk, amit bizonyítani akartunk: $\Delta(i) = F(\theta(i)) = \operatorname{Hom}_R(\theta(i), Y)$ $\square$

Kontravariáns ekvivalencia a részkategóriák között

Valójában az előző állításnál még többet is tudunk mondani, tudniillik azt, hogy az $\mathcal{F}(\theta)$ és $\mathcal{F}(\Delta_A)$ részkategóriák egymásnak felelnek meg az $F = \operatorname{Hom}_R(-, Y)$ funktor hatásánál:

2.1.16. Tétel. *Az $\mathcal{F}(\theta)(\subseteq R-mod)$ kontravariánsan ekvivalens $\mathcal{F}(\Delta_A)(\subseteq mod-A)$-val.*

Bizonyítás. $W, V \in \mathcal{F}(\theta)$ esetén a 2.1.14 következmény szerint kapjuk a következő izomorfizmust:

$$\operatorname{Hom}_R(W, V) \cong \operatorname{Hom}_A(F(V), F(W))$$

A 2.1.15 állítás szerint $\mathcal{F}(\theta)$ képe F alatt $\mathcal{F}(\Delta_A)$-ban van, így elegendő belátnunk a fordított tartalmazást.

Előbb megmutatjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}(\Delta), Y) = 0$. Ehhez hattassuk az F funkort a 2.1.1 definíció *2.* részében szereplő egzakt sorozatra: a már korábban is előforduló

$$0 \to F(Z(i)) \to P(i) \to \Delta(i) \to 0$$

rövid egzakt sorozatot kapjuk. Ha most erre a $G = \mathrm{Hom}_A(-, Y)$ funkort hattatjuk, akkor kapjuk az ábrán a felső hosszú egzakt sorozatot (itt az utolsónak felírt tag: $\mathrm{Ext}^1_A(P(i), Y) = 0$, hisz $P(i)$ projektív $A = \mathrm{End}_R Y$-ban). Továbbá, a 2.1.13 következmény alapján az alábbi kommutatív diagramon a függőleges leképezések izomorfizmusok, hisz a 2.1.1 definíció *2.* részében szereplő egzakt sorozat elemei $\mathcal{F}(\theta)$-beliek:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G(\Delta(i)) & \longrightarrow & G(P(i)) & \longrightarrow & G(F(Z(i))) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_A(\Delta(i), Y) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \theta(i) & \longrightarrow & Y(i) & \longrightarrow & Z(i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Mivel alsó sor egzakt, így a felső is az, vagyis $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(i), Y) = 0$. Ebből már az is következik, hogy a G funktor egzakt $\mathcal{F}(\Delta)$-n.

A Δ-faktorok k számára vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy az F képe minden Δ-filtrált modulust tartalmaz. $k = 1$-re világos. Az indukciós lépéshez vegyük az $\mathcal{F}(\Delta_A)$-beli $0 \to W' \to W \to \Delta(i) \to 0$ egzakt sorozatot, és tegyük fel, hogy $W' = F(V')$, ahol $V' \in \mathcal{F}(\theta)$. Mivel az adott egzakt sorozat $\mathcal{F}(\Delta_A)$-beli, az előző megfigyelés szerint a G funktor itt egzakt, így kapjuk a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \to G(\Delta(i)) = \theta(i) \to G(W) \to G(W') \cong V' \to 0$$

Most F-et hattatva, kapjuk az egzakt sorokkal rendelkező kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & FG(W') & \longrightarrow & FG(W) & \longrightarrow & FG(\Delta(i)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \Delta(i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Vegyük most észre, hogy $X \in \mathcal{F}(\theta)$ esetén, $M_A = F({}_R X)$ jelöléssel a 2.1.13 következmény szerint $\epsilon'_M : M \to FG(M)$ izomorfizmus: $FG(M) = FGF(X) \cong F(X) = M$. Ez alkalmazható $\Delta(i)$ és W' esetben is, hisz $\Delta(i) = F(\theta(i))$; $W' = F(V')$.

A fenti kommutatív diagram esetében a függőleges leképezéseket a megfelelő ϵ leképezésből kapjuk, így az előző észrevétel szerint a két szélső függőleges leképezés izomorfizmus. Ekkor az 5-lemma miatt $W \cong FG(W)$, tehát $W \in \mathcal{F}(\Delta_A)$ valóban az F képében van. Ezzel beláttuk az állítást. □

Egyszerű következményként belátjuk, hogy $\theta(i)$ felbonthatatlan:

2.1.17. Következmény. *$\theta(i)$ felbonthatatlan.*

Bizonyítás. F egy gyűrűizomorfizmust indukál: $\mathrm{End}_R(\theta(i)) \cong \mathrm{End}_A(\Delta(i))$. $\Delta(i)$ felbonthatatlan (mivel a teteje egyszerű), így az endomorfizmusgyűrűje lokális, ahonnan kapjuk, hogy $\theta(i)$ is felbonthatatlan. □

A 2.1.16 tétel következményeként azt is be tudjuk látni, hogy az $\underline{Y}$ rögzítése már (izomorfia erejéig) meghatározza az EISS-t. Vagyis igaz az alábbi állítás:

2.1.18. Következmény. *Legyenek $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ és $(\theta', \underline{Y}, \leqslant)$ n méretű EISS-ek. Ekkor létezik közöttük egy $f : (\theta', Y, \leqslant) \to (\theta, Y, \leqslant)$ izomorfizmus.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a 2.1.16 tétel szerint minden $\mathcal{F}({}_A\Delta)$-beli leképezés előáll, mint egy $\mathcal{F}(\theta)$-beli leképezés F szerinti képe. A 2.1.15 állítás szerint adódnak az alábbi izomorfizmusok: $\Delta(n-i+1) \simeq F(\theta(i))$ és $\Delta(n-i+1) \simeq F(\theta'(i))$, vagyis minden i-re kapjuk a következő izomorfizmusokat:

$$F(\beta_i) : F(\theta(i)) \xrightarrow{\simeq} F(\theta'(i))$$

Legyenek $\alpha'_i : \theta'(i) \to Y(i)$ és $\alpha_i : \theta(i) \to Y(i)$ a bal minimális approximációk. Hattassuk mindkettőn az F kontravariáns funktort, majd a másodikra alkalmazzuk az előbb felállított $F(\beta_i)$ izomorfiát. Ekkor kapjuk az $F(\beta_i)F(\alpha_i)$ és $F(\alpha'_i)$ A-morfizmusokat, melyek bal-minimálisak $\forall i \in \Omega_n$-re. Felhasználva a minimális approximációk definícióját kapjuk az $F(f_i) : F(Y(i)) \to F(Y(i))$, valamint az $F(g_i) : F(Y(i)) \to F(Y(i))$ A-morfizmusokat, melyek egymás inverzei, sőt az $F(\beta_i)F(\alpha_i) = F(\alpha'_i)F(f_i)$ azonosság is teljesül $\forall i$-re.

$$\begin{tikzcd} F(Y(i)) \arrow[r, "F(\alpha_i)"] \arrow[d, shift right, "F(f_i)"'] & F(\theta(i)) \arrow[d, "F(\beta_i)"] \\ F(Y(i)) \arrow[r, "F(\alpha'_i)"] \arrow[u, shift right, "F(g_i)"'] & F(\theta'(i)) \end{tikzcd}$$

Így $f = \{\beta_i, f_i\}_{i=1}^t : (\theta', Y, \leqslant) \to (\theta, Y, \leqslant)$ egy EISS-ek közötti izomorfizmus. □

2.1.3. A rétegező rendszerek és az Ext-injektív rétegező rendszerek kapcsolata

Ennek az alfejezetnek a fő mozgatórugója az alábbi kérdés: legyenek a θ modulusok rögzítve. Keresünk olyan $\underline{Y}$ modulusokat, hogy a $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ hármas egy EISS-t alkot. Ez a kérdés tulajdonképpen a standardizálásnak felel meg: annyi különbséggel, hogy itt rögzített modulusokhoz keresünk olyan $Y(i)$-ket, hogy azok Ext-injektívek legyenek a keletkezett endomorfizmusgyűrűben. Be fogjuk látni, hogyha a θ-k teljesítik a rétegező rendszerek definiáló axiómáit, akkor minden esetben találunk megfelelő $\underline{Y}$ modulusokat. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges θ rétegező rendszerhez hozzá tudunk rendelni olyan $Y(i)$ modulusokat, hogy azokkal együtt a $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ hármas EISS legyen.
Ezek után rátérünk a másik irányú kérdésre is: rögzített $\underline{Y}$ modulusokhoz keresünk olyan θ modulusokat, amelyekkel $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS. Az alfejezet végére megadjuk azokat a pontos feltételeket, amelyek mellett ez a hozzárendelés is működni fog.

$\underline{Y}$-ok konstruálása rögzített θ-ákhoz

2.1.19. Tétel. *Legyenek $\theta(1)$, ... , $\theta(n)$ felbonthatatlan R modulusok úgy, hogy:*

1. $\mathrm{Hom}_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *minden $j > i$-re*
2. $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *minden $j \geqslant i$-re*

Ekkor léteznek $Y(i)$ modulusok úgy, hogy a $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ hármas egy EISS.

A tétel bizonyítása a [8] cikk *1.8* szakaszában található. Mivel tulajdonképpen a standardizálás folyamatát ellenőrizzük, az ötlet hasonló lesz a 1.1.43 tétel bizonyításában látottakhoz: ismét az univerzális bővítést fogjuk használni. A fő különbség a kontravarianciából ered: láttuk már, hogy a θ-k egy kontravariáns funktor által lesznek ekvivalensek a Δ-kkal, így ennek megfelelően fordítva kell építkeznünk. Vagyis vesszük azt az univerzális bővítést, amelyben a $\theta(i)$ fölé helyezzünk elegendően sok $\theta(i-1)$-et, majd ebből lehasítunk egy tovább már nem hasadó U_1 bővítést. A következő lépésben U_1 fölé helyezzük elegendően sok $\theta(i-2)$-t, majd szintén egy tovább nem hasadó U_2-re szorítkozunk. Az eljárást folytatva kapjuk majd a keresett $Y(i)$-t.

A bizonyítás precízzé tételéhez szükségünk lesz az alábbi lemmára:

2.1.20. Lemma. *Legyen N felbonthatatlan, és* $\mathrm{Hom}_R(N, M) = 0$*. Tegyük fel, hogy van egy $0 \to N \to W \to M \to 0$ nemhasadó egzakt sorozatunk. Ekkor a sorozat izomorf egy* *hasadó egzakt sorozat és a* $0 \to N \to W' \to M' \to 0$ *egzakt sorozat direkt összegével, ahol* W' *felbonthatatlan.*

Mostmár rátérhetünk a 2.1.19 tétel bizonyítására:

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $\mathrm{Hom}_R(\theta(i+k), \theta(i)) = 0$ $k \geqslant 1$-re, és $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i+s), \theta(i)) = 0$ $s \geqslant 0$-ra. Legyen $Y(1) = \theta(1)$. Rögzített i-re $Y(i)$ konstruálásának a menete a következő:

k szerinti indukcióval konstruáljuk a $(\zeta_k) : 0 \to \theta(i) \to U_k \to V_k \to 0$ nemhasadó egzakt sorozatokat, ahol $V_k \in \mathcal{F}(\theta)$ úgy, hogy faktorai $\{\theta(i-1), \theta(i-2), \ldots, \theta(i-k)\}$-ban vannak; U_k felbonthatatlan és teljesíti az $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), U_k) = 0)$ azonosságot minden $i-k \leqslant j \leqslant i$-re.

$k = 1$ esetben alkalmazzuk az előző lemmát $N = \theta(i)$ és $M = \theta(i-1)$ szereposztással. Ha $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i-1), \theta(i)) = 0$, akkor legyen $U_1 = \theta(i)$. Ellenkező esetben vegyük a

$$0 \to \theta(i) \to U \to \theta(i-1)^n \to 0$$

univerzális bővítést. $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i-1), U) = 0$ a bővítés univerzalitása miatt. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i), U) = 0$ is teljesül. Ehhez hattassuk a $\mathrm{Hom}_R(\theta(i), -)$ funktort az előző egzakt sorozaton, amivel a kapott hosszú egzakt sorozat egy részlete:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(i), \theta(i)) = 0 \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(i), U) \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(i), \theta(i-1)^n = 0$$

Itt a két szélső elem a Ext-re tett feltevés miatt 0. Így tehát $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i), U) = 0$. Most alkalmazzuk az előbb bizonyított 2.1.20 lemmát, amely az U egy felbonthatatlan U_1 direkt összeadandóját adja meg, és így kapjuk az alábbi nemhasadó egzakt sorozatot is:

$$0 \to \theta(i) \to U_1 \to \theta(i-1)^b = V_1 \to 0$$

Nyilvánvalóan az U-ra vonatkozó Ext-feltételek öröklődnek a direkt összeadandóira is.

Tegyük fel, hogy a $i > k \geqslant 1$-adik $(\zeta_k) : 0 \to \theta(i) \to U_k \to V_k \to 0$ rövid egzakt sorozatot már megtaláltuk, most konstruáljuk meg a (ζ_{k+1})-et is: ha $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i-k-1), U_k) = 0$, akkor legyen $U_{k+1} = U_k$. Ellenkező esetben vegyük a

$$0 \to U_k \to U \to \theta(i-k-1)^a \to 0$$

univerzális bővítést. Az előző esethez hasonlóan $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i-k-1), U) = 0$. Legyen $j \geqslant i-k$, majd hattassuk a $\mathrm{Hom}_R(\theta(j), -)$ funktort erre az egzakt sorozatra. Az adódó hosszú egzakt sorozat egy részlete:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), U_k) \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), U) \to \mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), \theta(i-k-1)^a)$$

Az első tag 0 lesz az indukciós feltevés miatt, az utolsó pedig Ext-re tett feltevés miatt (hisz $j > i-k-1$). Így $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(j), U) = 0$. Ismét alkalmazzuk a 2.1.20 lemmát, és kapjuk az U egy U_{k+1} felbonthatatlan direkt összeadandóját, melyre létezik az alábbi egzakt sorozat:

$$0 \to U_k \to U_{k+1} \to \theta(i-k-1)^b \to 0$$

Ekkor a $\theta(i) \hookrightarrow U_{k+1}$ beágyazás faktora $\{\theta(i-1), \dots \theta(i-k-1)\}$-filtrált, így kapjuk a $k+1$-edik egzakt sorozatot:

$$(\zeta_{k+1}) : 0 \to \theta(i) \to U_{k+1} \to V_{k+1} \to 0$$

Legyen ekkor $Y(i) = U_i$, és ezzel készen vagyunk. □

Most pedig már minden készen áll ahhoz, hogy megtaláljuk a rétegező rendszerek és az EISS-ek közötti megfeleltetést.

2.1.21. Következmény. *Legyen $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^n$ felbonthatatlan R-modulusok egy halmaza. Ekkor $(\theta, \leqslant)$ pontosan akkor rétegező rendszer, hogyha léteznek olyan $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^n$ R-modulusok, hogy $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS.*

Bizonyítás. Legyen $(\theta, \leqslant)$ egy rétegező rendszer. Ekkor a 2.1.19 tétel szerint találunk olyan $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^n$ R-modulusokat, hogy $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS. Sőt, a 2.1.10 állítás szerint ez már egyértelműen meghatározza az EISS-t.

Fordítva, könnyű ellenőrizni, hogy egy EISS-ben a θ-k teljesítik a rétegező rendszer axiómáit (2.1.3 megjegyzés). □

θ-k konstruálása rögzített $\underline{Y}$-okhoz

Ahhoz, hogy rögzített $\underline{Y}$-okhoz θ-kat tudjunk rendelni, szükségünk van a következő, nagy fontossággal bíró, ugyanakkor az előzetes ismeretek alapján könnyen igazolható állításra:

2.1.22. Állítás. *Tetszőleges R algebra esetén, $(\Delta_R, \leqslant)$ mindig egy n-rétegező rendszer. (Hasonlóan $(\nabla_R, \leqslant^{op})$ mindig egy n-rétegező rendszer.)*

Bizonyítás. Következik a 1.1.7 és 1.1.8 állítások *2.* pontjából. □

A továbbiakban szükségünk lesz a standard rétegező rendszer definíciójára:

2.1.23. Definíció. *Egy R algebra esetén $(\theta, \preceq)$ rétegező rendszer standard, ha ${}_RR \in \mathcal{F}(\theta)$. Duálisan, $(\theta, \preceq)$ kostandard, ha $D(R_R) \in \mathcal{F}(\theta)$.*

Könnyen ellenőrizhető, hogy $({}_A\Delta, \leqslant)$ pontosan akkor standard rétegező rendszer, ha A standardul rétegezett (azaz Δ-filtrált) algebra (persze ugyanarra a sorrendre nézve). Dualitással kapjuk, hogy a következő is igaz: $({}_A\Delta, \leqslant)$ pontosan akkor standard, ha $({}_A\nabla^{op}, \leqslant^{op})$ kostandard.

Ezekkel az ismeretekkel már készen állunk a θ-k konstruálására.

2.1.24. Tétel. *Legyen* $\underline{Y} = \{Y(i)_{i=1}^n\}$ *páronként nem izomorf felbonthatatlan* R*-modulusok halmaza. Legyen* $Y = \oplus Y(i)$*, valamint* $A = \mathrm{End}({}_RY)$ *és vegyük a* $\leqslant$ *természetes rendezést* Ω_n*-en. Rögzítsük az* A*-beli primitív ortogonális idempotensek egy teljes halmazát (ezt jelölje* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$*) úgy, hogy minden* $i = 1, 2, 3, \dots, n$*-re teljesüljön a következő izomorfia:* $A\varepsilon_i \simeq \mathrm{Hom}_R(Y(i'), {}_RY_{A^{op}})$*, ahol* $i' = n + 1 - i$*. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. (a) a $({}_A\Delta, \leqslant)$ *rétegező rendszer standard és* $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}({}_A\Delta), {}_AY) = 0$

(b) $\mathrm{mod}-R$*-ben létezik egy bővítésekre zárt* $\mathcal{A}$ *teljes részkategória, melyre* $Y(i) \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \Omega_n$*-re és* $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{A}, {}_RY) = 0$

(c) az $F = \mathrm{Hom}_R(-, {}_RY_{A^{op}}) : \mathcal{A} \to \mathcal{F}({}_A\Delta)$ *és* $G = \mathrm{Hom}_A(-, {}_RY_{A^{op}}) : \mathcal{F}({}_A\Delta) \to \mathcal{A}$ *funktorok egzakt dualitások*

2. Létezik R*-modulusok egy* $\{\theta(i)\}_{i=1}^n\}$ *családja, hogy* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *egy EISS.*

Bizonyítás. 1.⇒2. Definiáljuk minden i-re $\theta(i) := G({}_A\Delta(i'))$-t. Belátjuk, hogy ekkor $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS.

Legyen $i < j$, ekkor $j' < i'$, tehát a 2.1.14 következményhez hasonlóan:

$$\mathrm{Hom}_R(\theta(j), \theta(i)) \simeq \mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(i'), {}_A\Delta(j')) = 0,$$

így a 2.1.1 definíció első feltétele teljesül. A második feltételhez rögzítsük i-t, és vegyük a

$$0 \to U(i') \to P(i') \to_A \Delta(i') \to 0 \tag{2.2}$$

egzakt sorozatot, (itt $U(i') = \eta_{\{P(l)|l'>i'\}}P(i')$). Mivel $({}_A\Delta, \leqslant)$ standard rétegező rendszer, így ${}_RR \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$, vagyis $P(i') \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Innen pedig $U(i') \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. A rétegező rendszer definíciójának (2.0.1) második pontja miatt $\mathrm{Ext}^1({}_A\Delta(i'), {}_A\Delta(j')) = 0$ minden $i' \geqslant j'$-re. Így pedig: $U(i') \in \mathcal{F}(\{{}_A\Delta(l') : i' < l'\}) = \mathcal{F}(\{{}_A\Delta(l') : l < i\})$

Hattatva a G funktort (2.2) rövid egzakt sorozatra, a következőt kapjuk:

$$0 \to \theta(i) \to Y(i) \to G(U(i')) \to 0 \tag{2.3}$$

Az $U(i')$ modulus ${}_A\Delta$ hosszára vonatkozó indukcióval: $G(U(i')) \in \mathcal{F}(\{\theta(l) : l < i\})$. Így a (2.3) rövid egzakt sorozat megfelel a 2.1.1 definíció második feltételének.

Végül ahhoz, hogy belássuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$, elég megmutatnunk azt, hogy $\mathcal{F}(\theta) \subseteq \mathcal{A}$. Ez pedig abból a feltevésből következik, hogy $\mathcal{A}$ zárt a bővítésekre, és $\theta(i) \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \Omega_n$-re.

2.⇒1. A fordított irány a 2.1.16 tétel következménye, ahol $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{A}$ választással élünk, és felhasználjuk, hogy $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}({}_A\Delta), {}_AY) = 0$, mivel a 2.1.16 tétel szerint a $\mathcal{F}(\theta)$ és $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ részkategóriák egymásnak felelnek meg, és a 2.1.1 definíció *3.* pontja szerint $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$ □

Vegyük észre, hogy a θ halmaz egyértelműen meghatározza azt az $\mathcal{A}$ kategóriát, mely teljesíti a 2.1.24 tétel feltételeit: $\mathcal{A} = \mathcal{F}(\theta)$, ahol $\theta(i) = G({}_A\Delta(i'))$ minden i-re.

2.1.4. Tilting modulusok

A 2.1.15 állítás szerint, ha egy $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ EISS-ből indulunk ki, akkor $A = \mathrm{End}_R(Y)$ endomorfizmusgyűrű Δ-filtrált lesz. A 1 fejezetben már láttuk, hogy ilyenkor előkerülnek a tilting modulusok. Mivel a 2.1.6 jelölésnél bevezetett $\mathcal{I}(\theta)$ részkategória megfelel a 1.1.19 jelölésben felbukkanó $\mathcal{Y}(\Theta)$ részkategóriának, most is tudunk foglalkozni a $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{I}(\theta)$ részkategóriával.
Ebben a szakaszban a tilting modulusok segítségével adunk feltételeket arra, hogy mikor lesz egy rétegező rendszer standard.

Tilting modulusok

A tilting elméletről szóló, 1 fejezetben szerzett tudásunk összegzésével kezdünk:

2.1.25. Tétel. *Legyen A egy Δ-filtrált algebra. Ekkor létezik egy T általánosított tilting A-bázismodulus, melyre $\mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{I}({}_A\Delta) = \mathrm{add}\, T$. Ebben az esetben T neve: karakterisztikus tilting modulus.*
Továbbá, ha $A' = \mathrm{End}({}_AT)$, akkor a következők is teljesülnek (ahol $i' = n + 1 - i$):

1. *$T = \oplus_{i=1}^n T(i)$, ahol $T(i)$ felbonthatatlan, és minden i-re létezik a következő rövid egzakt sorozat: $0 \to {}_A\Delta(i) \to T(i) \to X(i) \to 0$, ahol $X(i) \in \mathcal{F}(\{{}_A\Delta(j) : j < i\})$*
2. *Legyen $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n\}$ az A' primitív ortogonális idempotenseinek egy teljes halmaza melyekre $\forall i \in \Omega_n$-re teljesül, hogy $A'\varepsilon'_i \simeq \mathrm{Hom}_A(T(i'), T)$. Ekkor minden i-re ${}_{A'}\Delta(i) \simeq \mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(i'), T)$, továbbá a $({}_{A'}\Delta, \leqslant)$ rétegező rendszer standard.*
3. *a $\mathrm{Hom}_A(-, T) : \mathcal{F}({}_A\Delta) \to \mathcal{F}({}_{A'}\Delta)$ funktor egzakt dualitás*

4. $\mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{P}({}_A\Delta) = \mathrm{add}\ {}_A A$

Megjegyezzük, hogy a 2.1.6 jelölés és az 1.2.9 állítás *2.* pontjának alkalmazásával kapjuk, hogy: $\mathcal{I}({}_A\Delta) = \{X \in \mathrm{mod}\text{-}A : \mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}({}_A\Delta), X) = 0\} = \mathcal{F}({}_A\bar{\nabla})$.

Könnyen igazolható a későbbiekben kulcsfontosságú szereppel bíró megfigyelés, mely szerint egy tetszőleges R algebrában a tilting modulusok EISS-eket határoznak meg.

2.1.26. Állítás. *Legyen R egy algebra, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a primitív ortogonális idempotensek egy teljes halmaza, és legyen ${}_R\Delta_t = \{{}_R\Delta(j) : j \leqslant t\}$. Ekkor:*

1. *$({}_R\Delta_t, \leqslant)$ egy t-rétegező rendszer minden $t \leqslant n$-re*
2. *Legyen $({}_R\Delta, \leqslant)$ standard, és legyen ${}_RT = \oplus_{i=1}^n T(i)$ a 2.1.25 tétel által szolgáltatott karakterisztikus tilting modulus tovább nem bontható felbontása. Ekkor $({}_R\Delta_t, \underline{T_t}, \leqslant)$ egy t méretű EISS minden $t \leqslant n$-re, ahol $\underline{T_t} = \{T(j) : j \leqslant t\}$*

Bizonyítás. Az első rész abból következik hogy az 2.1.22 állítás szerint $({}_R\Delta, \leqslant)$ egy rétegező rendszer, míg a második rész a 2.1.25 tétel következménye, az ottani *1.* pontban leírt rövid egzakt sorozat teljesíti az EISS-re vonatkozó feltételeket. □

Az $\mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{I}({}_A\Delta) = \mathrm{add}\, T$ tulajdonság általánosítása és következménye

Egy Δ-filtrált A algebrára a T karakterisztikus tilting A-modulusra igaz a következő egyenlőség: $\mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{I}({}_A\Delta) = \mathrm{add}\, T$. Most ennek az általánosítását mutatjuk meg:

2.1.27. Állítás. *Ha $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS, akkor $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{I}(\theta) = \mathrm{add}\, Y$, ahol $Y = \oplus_{i=1}^n Y(i)$.*

Bizonyítás. Legyen $A = \mathrm{End}({}_RY)$. Az EISS definíciójából minden i-re $Y(i) \in \mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{I}(\theta)$, így adódik, hogy $\mathrm{add}\, Y \subseteq \mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{I}(\theta)$.

Belátjuk, hogy $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{I}(\theta) \subseteq \mathrm{add}\, Y$. Legyen ehhez $N \in \mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{I}(\theta)$ egy felbonthatatlan R-modulus, és legyen

$$0 \to M' \to L' \to F(N) \to 0 \tag{2.4}$$

egy $\mathcal{F}({}_A\Delta)$-beli rövid egzakt sorozat. Használva a 2.1.16 tételből kapott F dualitást, léteznek $M, L \in \mathcal{F}(\theta)$ modulusok úgy, hogy az előző, (2.4) rövid egzakt sorozat alakja a következő lesz: $0 \to F(M) \to F(L) \to F(N) \to 0$. Mivel a G funktor a $\mathcal{F}({}_A\Delta)$-beli sorozatokon egzakt, kapjuk, hogy a $0 \to N \to L \to M \to 0$ sorozat is egzakt. Ez a sorozat hasad, hisz $N \in \mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{I}(\theta)$ és $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Vagyis a (2.4) egzakt sorozat is hasad.

Mivel $({}_A\Delta, \leqslant)$ egy standard rétegező rendszer, alkalmazhatjuk a 2.1.25 tétel *4.* pontját: $F(N) \in \mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{P}({}_A\Delta) = \mathrm{add}_A A$. Így $F(N) \simeq F(Y(i))$ valamely i-re, azaz $N \simeq Y(i)$, hisz F dualitás. Vagyis kész vagyunk. $\square$

2.1.28. Állítás. *Legyen $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS, $Y = \oplus Y(i)$, valamint $A = \mathrm{End}({}_R Y)$, ${}_A T$ a $({}_A\Delta, \leqslant)$-hez rendelt karakterisztikus tilting A-modulus. Ebben az esetben $X \in \mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta)$ pontosan akkor teljesül, ha $F(X) = \mathrm{Hom}_R(X, {}_R Y_{A^{op}}) \in \mathrm{add}_A T$.*

Bizonyítás. Az F és G funktorok megtartják a $\mathcal{F}(\theta)$ és $\mathcal{F}({}_A\Delta)$-beli egzakt sorozatokat, és mindkét kategória zárt a bővítésekre. Van tehát egy természetes Abel csoport izomorfizmus $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ és $\mathrm{Ext}^1_R(F(M), F(N))$ között, melyet az $[\eta] \mapsto [F(\eta)]$ leképezés ír le. Így $\mathrm{Ext}^1_R(X, \mathcal{F}(\theta)) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}({}_A\Delta), F(X)) = 0$. Mivel ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy $F(X) \in \mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{I}({}_A\Delta) = \mathrm{add}_A T$ készen vagyunk. $\square$

A standard rétegező rendszerek jellemzése

Most pedig azt vizsgáljuk meg, hogy egy $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ EISS-ben szereplő θ modulusok milyen feltételek mellett felelnek meg egy Δ-filtrált algebra Δ-inak.

2.1.29. Állítás. *Legyen R egy algebra, $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy EISS, $Y = \oplus Y(i)$, $A = \mathrm{End}({}_R Y)$ és ${}_A T$ a $({}_A\Delta, \leqslant)$-hez rendelt karakterisztikus tilting A-modulus. Ekkor a következőek ekvivalensek:*

1. *$\mathcal{F}(\theta)$ zárt a szürjekciók magjára és $(\theta, \leqslant)$ standard rétegező rendszer*
2. *$\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta) = \mathrm{add}\ {}_R R$*
3. *a $(\theta, \leqslant)$ rétegező rendszer standard; a nem-izomorf egyszerű R-modulusok száma n*
4. *$R \simeq \mathrm{End}({}_A Y)$ és ${}_A Y_{R^{op}} \simeq {}_A T_{R^{op}}$*
5. *az R-beli primitív ortogonális idempotenseknek létezik egy $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ teljes halmaza úgy, hogy ${}_R\Delta(i) \simeq \theta(i)$ $\forall i \in \Omega_n$-re, és R Δ-filtrált algebra az adott rendezéssel*

Bizonyítás. 1.$\Rightarrow$2. Legyen $X \in \mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta)$ egy felbonthatatlan modulus, továbbá legyen $f : P_0(X) \to X$ a projektív fedője. ${}_R R \in \mathcal{F}(\theta) \Rightarrow P_0(X) \in \mathcal{F}(\theta)$. Vagyis következik, hogy a $0 \to \mathrm{Ker}\, f \to P_0(X) \to X \to 0$ egzakt sorozat $\mathcal{F}(\theta)$-beli, hisz az zárt a szürjekciók magjára. Felhasználva, hogy $X \in \mathcal{P}(\theta)$, kapjuk hogy az előző sorozat hasad. Így X projektív R-modulus, ami mutatja, hogy $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta) \subseteq \mathrm{add}_R R$. A fordított tartalmazás onnan jön, hogy $\mathcal{F}(\theta)$ zárt a bővítésekre és a direkt összegre.

2.⇒4. A 2.1.28 állításból kapjuk, hogy $F(R) = \mathrm{Hom}_R({}_RR_R,\ {}_RY_{A^{op}}) \simeq {}_AT_{R^{op}}$. Ugyanakkor ${}_AY_{R^{op}} \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RR_R,\ {}_RY_{A^{op}}) = F(R)$. Így ${}_AY_{R^{op}} \simeq {}_AT_{R^{op}}$. Innen pedig azt is kapjuk, hogy $R \simeq GF(R) = \mathrm{Hom}_A(F(R),\ {}_AY) \simeq \mathrm{End}({}_AY)$.

4.⇒5. Legyen $A' = \mathrm{End}({}_AT)$, és $i' = n + 1 - i$. A 2.1.16 és a 2.1.25 tételek szerint ${}_A\Delta(i) \simeq F(\theta(i'))$, valamint ${}_{A'}\Delta(i) \simeq \mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(i'), T)$ minden i-re. Mivel $({}_A\Delta, \leqslant)$ standard rétegező rendszer, az utóbbiból kapjuk, hogy $({}_{A'}\Delta, \leqslant)$ is az. Ugyanakkor a *4.* feltételből adódik, hogy $R \simeq \mathrm{End}({}_AY) \simeq \mathrm{End}({}_AT) = A'$. Így ${}_RY_{A^{op}} \simeq {}_{A'}T_{A^{op}}$. Ezeket felhasználva:

$$\theta(i) \simeq G({}_A\Delta(i')) \simeq \mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(i'),\ {}_{A'}T_{A^{op}}) \simeq {}_{A'}\Delta(i) \simeq {}_R\Delta(i)$$

minden i-re, így ezzel az iránnyal készen vagyunk.

5.⇒1. Következik abból, hogy $\mathcal{F}({}_R\Delta)$ zárt a szürjekciók magjára.

3.⇒2. Tudjuk, hogy az egyszerű R-modulusok száma izomorfia erejéig n-nel egyenlő. Másrészt, az ${}_AT$ karakterisztikus tilting A-modulus felbonthatatlan direkt összeadandóinak a száma szintén n (a 2.1.25 tétel alapján). Így a 2.1.28 tétel szerint kapjuk, hogy az $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta)$-ban levő nem izomorf felbonthatatlan R-modulusok száma n. Azonban ${}_RR \in \mathcal{F}(\theta)$ így $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta) = \mathrm{add}\, R$.

2.⇒3. Abból következik, hogy *2.⇒5.* teljesül. □

Egyszerű következményként belátunk egy tilting elméletből ismerős eredményt: legyen egy R Δ-filtrált algebra tilting modulusainak endomorfizmusgyűrűje A. Ekkor A-hoz is tartoznak tilting modulusok, ezek endomorfizmusgyűrűje pedig az eredeti R algebrával egyezik meg.

2.1.30. Következmény. *Legyen R egy Δ-filtrált algebra, és ${}_RT$ a $({}_R\Delta, \leqslant)$-hez rendelt karakterisztikus tilting R-modulus. Legyen $A = \mathrm{End}({}_RT)$, és ${}_AT'$ az $({}_A\Delta, \leqslant)$-hez rendelt karakterisztikus tilting A-modulus. Ekkor $R \simeq \mathrm{End}({}_AT')$, és ${}_AT'_{R^{op}} \simeq {}_AT_{R^{op}}$*

Bizonyítás. A $({}_R\Delta, \leqslant)$ rétegező rendszer standard, így alkalmazhatjuk a 2.1.26 tételt, mely megad egy EISS-t a tilting modulusok segítségével: $({}_R\Delta, \underline{T}, \leqslant)$. Egy EISS esetében persze $A = \mathrm{End}({}_RT)$ ${}_A\Delta$ filtrált (2.1.15 állítás), így tartozik hozzá egy ${}_AT'$ karakterisztikus tilting modulus (2.1.25 tétel). A $({}_R\Delta, \underline{T}, \leqslant)$ EISS-re alkalmazhatjuk a 2.1.29 állítást *4.* pontját: ${}_AT_{R^{op}} \simeq_A T'_{R^{op}}$ $R \simeq \mathrm{End}({}_AT) \simeq \mathrm{End}({}_AT')$. □

2.2. Ext-projektív rétegező rendszerek

Ebben az alfejezetben az Ext-projetív rétegező rendszerekkel (ezentúl az angolból eredő - ext-projective stratifying system - EPSS rövidítést is használni fogjuk) foglalkozunk. Ezeket az EISS-hez nagyon hasonló módon, egy rövid egzakt sorozat segítségével definiáljuk. Mint ahogy a neve is mutatja, ezúttal az Ext-projektív modulusokból indulunk ki, vagyis ezúttal egy kovariáns funktor fogja mutatni a kapcsolatot a θ-ák és a Δ-ák között. Az alfejezet célja hasonló az előzőéhez: belátjuk, hogy az EPSS-ek is megegyeznek rétegező rendszerek fogalmával. Főként a [11] cikk eredményeire fogunk építeni.

2.2.1. Az Ext-projektív rétegező rendszerek tulajdonságai

Ebben a szakaszban vesszük az Ext-projektív rétegező rendszerek definícióját, majd ezután az EISS-ek témaköréből már ismerős definíciókat és állításokat ültetünk át az új keretrendszerbe. Mivel a bizonyítások nagyrészében a fő ötlet teljesen megegyezik a korábban már látottakkal, több esetben hanyagolni fogjuk őket.

Ext-projektív rétegező rendszerek

Itt a definíció után bizonyítás nélkül vesszük át az EISS-ek témaköréből ismert fogalmakat.

2.2.1. Definíció. *Legyen $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^n$ R-modulusok egy halmaza, továbbá $Q = \{Q(i)_{i=1}^n\}$ felbonthatatlan R-modulusok halmaza. Legyen $\preceq$ egy teljes rendezés az $\Omega_t = \{1, 2, \dots, n\}$ halmazon. Azt mondjuk, hogy $(\theta, \underline{Q}, \preceq)$ Ext-projektív n-rétegező rendszer, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. $\mathrm{Hom}_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *minden* $j \succ i$*-re*
2. *Minden* $i \in \Omega_n$*-re létezik egy* $0 \to K(i) \to Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \theta(i) \to 0$ *rövid egzakt sorozat úgy, hogy* $K(i) \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j \succ i\})$
3. $\mathrm{Ext}_R^1(Q, \mathcal{F}(\theta)) = 0$*, ahol* $Q = \oplus_{i=1}^n Q(i)$

2.2.2. Állítás. *Legyen R egy algebra, és $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ primitív ortogonális idempotensek egy teljes halmaza. Ekkor a $({}_R\Delta, \leqslant)$ rétegező rendszer pontosan akkor standard, ha $({}_R\Delta, \underline{Q}, \leqslant)$ egy EPSS, ahol $Q(i) = Re_i$ $\forall i \in \Omega_n$-re.*

2.2.3. Lemma. *Az EPSS definíciójában szereplő $\beta_i : Q(i) \to \theta(i)$ morfizmus a $\theta(i)$ jobb minimális $\mathcal{P}(\theta)$ approximációja.*

2.2.4. Definíció. *Legyen $(\theta, \underline{Q}, \preceq)$ valamint $(\theta', \underline{Q'}, \preceq)$ két n méretű EPSS.*
Egy $f : (\theta, \underline{Q}, \preceq) \to (\theta', \underline{Q'}, \preceq)$ leképezés rétegező rendszerek közötti izomorfizmus, ha olyan $f = \{f_1(i), f_2(i)|_{i=1}^n\}$ R-morfizmusok halmaza, melyekre $f_1(i) : \theta(i) \to \theta'(i)$, valamint $f_2(i) : Q(i) \to Q'(i)$ izomorfizmusok, továbbá az is teljesül $f_1(i)\beta_i = \beta_i' f_2(i)$ $\forall i \in \Omega_n$.

$$\begin{array}{ccc} Q(i) & \xrightarrow{\beta_i} & \theta(i) \\ \downarrow{\scriptstyle f_2(i)} & & \downarrow{\scriptstyle f_1(i)} \\ Q'(i) & \xrightarrow{\beta_i'} & \theta'(i) \end{array}$$

2.2.5. Állítás. *Legyen $(\theta, \underline{Q}, \preceq)$ valamint $(\theta, \underline{Q'}, \preceq)$ két n méretű EPSS. Ebben az esetben $\forall i \in \Omega_n$-re létezik egy $f_i : Q(i) \to Q'(i)$ izomorfizmus úgy, hogy rétegező rendszerek közötti izomorfizmust kapunk: $f = \{1_{\theta(i)}, f_i\}_{i=1}^n : (\theta, \underline{Q}, \preceq) \to (\theta, \underline{Q'}, \preceq)$.*

2.2.6. Lemma. *Legyen $(\theta, \underline{Q}, \preceq)$ egy n méretű EPSS. Ekkor:*

1. $\mathrm{Hom}_R(K(j)), \theta(i)) = 0$ *minden $j \succeq i$-re*
2. $\mathrm{Ext}_R^1(\theta(j)), \theta(i)) = 0$ *és* $\mathrm{Hom}_R(\theta(j)), \theta(i)) \simeq \mathrm{Hom}_R(Q(j)), \theta(i))$ *minden $j \succeq i$-re*
3. *Minden $M \in \mathcal{F}(\theta)$-ra a $[M : \theta(i)]$ filtrálás multiplicitása független az M filtrálásától.*

2.2.7. Megjegyzés. *Egy adott $(\theta, \underline{Q}, \preceq)$ EPSS-re a $\underline{Q} = \{Q(1), \dots, Q(t)\}$ halmaz páronként nem izomorf R-modulusokból áll, így a $B = \mathrm{End}(_R Q)^{op}$ endomorfizmusgyűrű bázisalgebra (hiszen $j \prec i$-re $[Q(i) : Q(j)] = 0$, és $[Q(j) : \theta(j)] = 1$ a miatt).*

$\mathrm{add}\, Q$-beli feloldás konstruálása

Innentől kezdve az egyszerűség kedvéért rátérünk az Ω_n-en való természetes $\leqslant$ rendezésre. Elsőre megmutatjuk, hogy minden $M \in \mathcal{F}(\theta)$-nak létezik egy $\mathrm{add}\, Q$-beli véges feloldása.

2.2.8. Jelölés. *Legyen $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ egy EPSS. Legyen $\hat{\Omega}_n = \Omega_n \cup \{\pm\infty\}$, ahol minden i-re $-\infty < i < +\infty$, azaz $\hat{\Omega}_n$ az Ω_n kiterjesztése. $M \in \mathcal{F}(\theta)$ esetén az M θ-tartója a* $\mathrm{Supp}_\theta(M) = \{i : [m : \theta(i)] \neq 0\}$ *halmaz ($M = 0$ pontosan akkor, ha $Supp_\theta(M) = \emptyset$). Ha $M \neq 0$, akkor legyen* $\min M := \min(Supp_\theta(M), \leqslant)$ *és* $\max M := \max \mathrm{Supp}_\theta(M), \leqslant)$*, különben pedig* $\min M := +\infty$ *és* $\max M := -\infty$.

Előbb megmutatjuk, hogy minden filtrálás átalakítható úgy, hogy először az összes, a legkisebb sorszámhoz tartozó θ modulus szerint faktorizálunk.

2.2.9. Lemma. *Legyen* $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ *egy EPSS* $M \in \mathcal{F}(\theta)$*, és* $i = \min M$*. Létezik ekkor* M*-modulusok egy véges lánca:*

$$0 \subseteq N = M_{m+1} \subseteq M_m \subseteq M_{m-1} \subseteq ... \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

úgy, hogy $N \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j > i\})$ *és* $M_k/M_{k+1} \simeq \theta(i)$ $\forall i \in \Omega_n$*-re.*

Bizonyítás. A 2.2.6 lemma alapján $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(r), \theta(t)) = 0$ minden $r \geqslant t$-re, így M minden θ-kompozíciólánca átrendezhető a lemmában leírt módon. □

2.2.10. Lemma. *Legyen* $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ *egy EPSS* $M \in \mathcal{F}(\theta)$*,* $i = \min M$ *és* $m_i = [M : \theta(i)]$*. Létezik ekkor egy* $0 \to N \to M \to \theta(i)^{m_i} \to 0$ *egzakt sorozat úgy, hogy* $N \in \mathcal{F}(\theta)$*, és* $\min M < \min N$*.*

Bizonyítás. Ha $\max M = i$, akkor a $i = \min M$ feltevés miatt $M \in \mathcal{F}(\{\theta(i)\})$, és így $M \simeq \theta(i)^{m_i}$ hiszen $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i), \theta(i)) = 0$. Erre az esetre kész vagyunk, hisz $\min 0 = +\infty$.

Tegyük most fel, hogy $\max M > i$. Ekkor a 2.2.9 lemma alapján létezik részmodulusok egy lánca:

$$0 \subseteq N = M_{m+1} \subseteq M_m \subseteq M_{m-1} \subseteq ... \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

hogy $N \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j > i\})$ és $M_k/M_{k+1} \simeq \theta(i)$ $\forall i \in \Omega_n$-re. Így kapjuk azt, hogy a $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ egzakt sorozatra teljesül, hogy $N \in \mathcal{F}(\theta)$, és $\min M < \min N$. Másrészt $M/N \in \mathcal{F}(\{\theta(i)\})$, és mivel $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(i), \theta(i)) = 0$, kapjuk, hogy $M/N \simeq \theta(i)^{m_i}$, amivel már indukció szerint készen vagyunk. □

A kívánt feloldás létezése a következő állításon múlik:

2.2.11. Állítás. *Legyen* $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ *egy EPSS,* $M \in \mathcal{F}(\theta)$*, és* $i = \min M$*. Ekkor létezik egy* $0 \to N \to Q_0(M) \xrightarrow{\epsilon_M} M \to 0$ *egzakt sorozat úgy, hogy:*

1. $N \in \mathcal{F}(\theta)$*, és* $Q_0(M) \in \mathrm{add} \bigoplus_{j \geqslant i} Q(j)$
2. $\min M < \min N$
3. $\epsilon_M : Q_0(M) \to M$ *egy jobb minimális* $\mathcal{P}(\theta)$*-approximáció.*

Bizonyítás. $\min M$-re vonatkozó fordított irányú indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\min M = n$. Ekkor, mivel $\mathrm{Ext}^1_R(\theta(n), \theta(n)) = 0$, kapunk egy $\varepsilon : M \xrightarrow{\sim} Q(n)^{[M:\theta(n)]}$ izomorfizmust. $Q_0(M) := Q(n)^{[M:\theta(n)]}$, $\varepsilon_M := \varepsilon$, és $N := 0$ választással készen vagyunk.

Az indukciós lépéshez legyen $i = \min M < n$. Ekkor az 2.2.10 lemma alapján van egy $\xi : 0 \to N' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} \theta(i)^{m_i} \to 0$ egzakt sorozatunk, ahol $N' \in \mathcal{F}(\theta)$, és $\min N' > \min M$.

Ha $N' = 0$, akkor $M \simeq \theta(i)^{m_i}$. Ekkor a $0 \to K(i)^{m_i} \to Q(i)^{m_i} \to \theta(i)^{m_i} \to 0$ egzakt sorozat teljesíti mindhárom feltételt, vagyis készen vagyunk. Ha pedig $N' \neq 0$, akkor indukcióval kapunk egy $0 \to N'' \to Q_0(N') \xrightarrow{\varepsilon'} N' \to 0$ rövid egzakt sorozatot, ahol $N'' \in \mathcal{F}(\theta)$, valamint $Q_0(N') \in \operatorname{add} \bigoplus_{j \geqslant \min N'} Q(j)$, továbbá a $\varepsilon' : Q_0(N') \to N'$ leképezés jobb minimális $\mathcal{P}(\theta)$-approximáció, és $\min N'' > \min N' > i$.

Mivel $\operatorname{Ext}^1_R(Q(i), N') = 0 \Rightarrow \operatorname{Ext}^1_R(Q(i)^{m_i}, N') = 0$, így a $\operatorname{Hom}(Q(i)^{m_i}, -)$ funktor egzakt a ξ rövid egzakt sorozaton. Vagyis a $\beta_i^{m_i} : Q(i)^{m_i} \to \theta(i)^{m_i}$ leképezéshez létezik egy $\alpha : Q(i)^{m_i} \to M$ morfizmus úgy, hogy $\psi\alpha = \beta_i^{m_i}$, (ahol $\beta_i : Q(i) \to \theta(i)$ a definícióban megadott morfizmus). Legyenek $Q_0(M) := Q_0(N') \oplus Q(i)^{m_i}$ és $\varepsilon := [\phi\varepsilon', \alpha] : Q_0(M) \to M$. Alkalmazva az 5-lemmát, kapjuk, hogy ε szürjektív, mivel ε' és $\beta_i^{m_i}$ szürjektívek. A Kígyó lemma miatt kapjuk a $0 \to N'' \to \operatorname{Ker}\varepsilon \to K(i)^{m_i} \to 0$ egzakt sorozatot. Kapjuk tehát a következő egzakt kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\varepsilon \arrow[r] \arrow[d] & K(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_0(N') \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] & Q_0(N') \oplus Q(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \theta(i)^{m_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Itt $\operatorname{Ker}\,\varepsilon \in \mathcal{F}(\theta)$ hiszen $\mathcal{F}(\theta)$ zárt a bővítésekre, továbbá $\min N'' > i \Rightarrow \min(\operatorname{Ker}\varepsilon) > i$. Így kapjuk, hogy a $0 \to \operatorname{Ker}\varepsilon \to Q_0(N') \oplus Q(i)^{m_i} \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ egzakt sorozat teljesíti az első két feltételt. Végül belátjuk, hogy $\varepsilon : Q_0(M) \to M$ jobb minimális. Legyen X a $Q_0(N')$ vagy a $Q(i)^{m_i}$ direkt összeadandója. Használva, hogy $\varepsilon' : Q_0(N') \to N'$, és $\beta_i^{m_i} : Q(i)^{m_i} \to \theta(i)^{m_i}$ jobb minimálisak, és hogy $\phi : N' \to M$ injektív, kapjuk, hogy $\varepsilon|_X \neq 0$. Így $\varepsilon_M := \varepsilon$ teljesíti az utolsó feltételt, vagyis készen vagyunk. □

Innen pedig már egyszerű következmény az $\operatorname{add} Q$-beli véges feloldás.

2.2.12. Következmény. *Legyen $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ egy t méretű EPSS, és $Q = \oplus_{i=1}^n Q(i)$. Ekkor minden $M \in \mathcal{F}(\theta)$-nak van egy $0 \to Q_k \xrightarrow{f_k} \dots \xrightarrow{f_2} Q_1 \xrightarrow{f_1} Q_0 \to M \to 0$ $\operatorname{add} Q$-beli feloldása úgy, hogy $\operatorname{Im} f_i \in \mathcal{F}(\theta)$ $\forall i \in \Omega_n$-re.*

Bizonyítás. Következik az előző állításból. □

A $\theta \leftrightarrow \Delta$ megfeleltetés

Az EISS esetéhez hasonlóan az EPSS-ben szereplő θ-ákról is be szeretnénk látni, hogy egy megfelelő funktornál egy jól meghatározott algebra Δ standard modulusaiba mennek át. Ebben az esetben egy kovariáns funktor fogja megadni az ekvivalenciát.

Egy adott $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ EPSS esetén vezessük be a következő jelöléseket: $Q = \oplus_{i=1}^{n} Q(i)$; $B = \mathrm{End}({}_R Q)^{op}$; $e_Q = \mathrm{Hom}_R({}_R Q_B, -) : \mathrm{mod}\ R \to \mathrm{mod}\ B$. Legyen $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ B-beli primitív ortogonális idempotensek egy teljes halmaza úgy, hogy minden i-re teljesül: $Be_i \simeq e_Q(Q(i)) = \mathrm{Hom}_R(Q, Q(i))$, továbbá legyen ${}_B S_i := Be_i / \mathrm{rad}\, Be_i$.

2.2.13. Állítás. *Legyen $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ egy EPSS. Ekkor:*

1. $e_Q(\theta(i))/\mathrm{rad}\, e_Q(\theta(i)) \simeq {}_B S_i$ $\forall i \in \Omega_n$*-re*
2. $[e_Q(\theta(i)) : {}_B S_j] = 0$*, ha* $j > i$
3. *ha* $X \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j > i\})$*, akkor* $e_Q(X)/rad_Q(X)$ $\mathrm{add} \oplus_{j>i} {}_B S_i$*-hez tartozik.*
4. $e_Q(K(i)) \simeq Tr_{\{Be_j : j>i\}}(Be_i)$ *és* ${}_B\Delta(i) \simeq e_Q(\theta(i))$ $\forall i \in \Omega_n$*-re*
5. *a* $({}_B\Delta, \leqslant)$ *rétegező rendszer standard*
6. $e_Q : \mathcal{F}(\theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta)$ *egy hűséges és teljes funktor*

Bizonyítás. *1.* A 2.2.7 megjegyzés szerint az egyszerű B-modulusok száma izomorfia erejéig n. Legyen $\beta_i : Q(i) \to \theta(i)$ a $\theta(i)$ jobb minimális $\mathcal{P}(\theta)$-approximációja. Vegyük ekkor az $e_Q(\beta_i) : e_Q(Q(i)) \to e_Q(\theta(i))$ leképezést, mely egy lényeges epimorfizmus, mivel $e_Q(\beta_i) \neq 0$ és $e_Q(Q(i)) \simeq Be_i$ felbonthatatlan. Ezért $e_Q(\theta(i))/\mathrm{rad}\ e_Q(\theta(i)) \simeq {}_B S_i$ $\forall i \in \Omega_n$-re.

2. $Q(j) \in \mathrm{add}\, Q$, tehát kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}_B(Be_j, e_Q(\theta(i)) \simeq \mathrm{Hom}_R(Q(j), \theta(i))$. Így ha $j > i$, akkor az 2.2.6 állítás és az EPSS definíciója (2.2.1) miatt azt kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}_B(Be_j, e_Q(\theta(i)) = 0$. Eszerint pedig $[e_Q(\theta(i)) : {}_B S_j] = 0$, ha $j > i$.

3. Legyen $0 \neq X \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j > i\})$. Az 2.2.11 állítás szerint létezik egy olyan $0 \to X' \to Q_0(X) \to X \to 0$ egzakt sorozat, melyre $X' \in \mathcal{F}(\theta)$, és $Q_0(X) \in \mathrm{add} \oplus_{j>i} Q(j)$. Hattatva az e_Q funktort, kapjuk a $0 \to e_Q(X') \to P \xrightarrow{\varepsilon} e_Q(X) \to 0$ egzakt sorozatot (itt $P = e_Q(Q_0(X)) \in \mathrm{add} \oplus_{j>i} Be_j$). Az ε morfizmus a következő egzakt sorozatot indukálja:

$$0 \to \mathrm{Ker}\ \varepsilon' \to P/\mathrm{rad}\ P \xrightarrow{\varepsilon'} e_Q(X)/\mathrm{rad}\ e_Q(X) \to 0 \tag{2.5}$$

$P/\mathrm{rad}\, P \in \mathrm{add} \oplus_{j>i} {}_B S_j$, így kapjuk, hogy a (2.5) egzakt sorozat hasad. Így $e_Q(X)/\mathrm{rad}\, e_Q(X)$ $\mathrm{add} \oplus_{j>i} {}_B S_j$-hez tartozik.

4. Az $U(i) := \mathrm{Tr}_{\{Be_j : j>i\}}(Be_i)$ jelöléssel kapjuk a $0 \to U(i) \to Be_i \to {}_B\Delta(i) \to 0$ egzakt sorozatot. Másrészt, az EPSS 2.2.1 definíciójában szereplő egzakt sorozaton hattatva az e_Q funktort, $K(i) \in \mathcal{F}(\theta)$ miatt egzakt sorozatot kapunk: $0 \to e_Q(K(i)) \to Be_i \to e_Q(\theta(i)) \to 0$. Az *1.* és *2.* alpont alapján kapjuk, hogy $U(i) \subseteq e_Q(K(i))$. Így innentől elég belátnunk a fordított tartalmazást, hiszen abból már látszik, hogy a komagok is megegyeznek. Mivel $K(i) \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j > i\})$, $e_Q(K(i))/\operatorname{rad} e_Q(K(i)) \in \operatorname{add} \bigoplus_{j>i} {}_BS_i$ a *3.* alpont szerint. Ezért $e_Q(K(i))/\operatorname{rad} e_Q(K(i)) \subseteq U(i)/\operatorname{rad} U(i)$. Vagyis $U(i) \supseteq e_Q(K(i))$, így ezzel is készen vagyunk.

5. e_Q egy egzakt funktor $\mathcal{F}(\theta)$-n (hiszen a $\mathrm{Hom}_R({}_RQ_B, -)$ által adott hosszú egzakt sorozatban eltűnnek az Ext-ek, mivel $Q \in \mathcal{P}(\theta)$). Tehát ha az e_Q egy egzakt funktort a $0 \to K(i) \to Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \theta(i) \to 0$ egzakt sorozaton hattatjuk, akkor egy egzakt sorozatot kapunk, amiből: $e_Q(K(i)) \in \mathcal{F}(\{e_Q(\theta(j)) : j > i\})$. Így *4.⇒5.*

6. Legyen $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Ekkor a 2.2.12 következmény alapján létezik a következő egzakt sorozat: $\xi : Q_1 \xrightarrow{f} Q_0 \to M \to 0$ (itt $Q_1, Q_0 \in \operatorname{add} Q$, és $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f \in \mathcal{F}(\theta)$). Hattasuk ξ-n az e_Q funktort, mely $\mathcal{F}(\theta)$-án egzakt, majd vegyük a $\mathrm{Hom}_B(-, e_Q(N))$ balegzakt funktort (ahol $N \in \mathcal{F}(\theta)$). Az így kapott sorozatot ξ''-vel jelöljük. Legyen ξ' a ξ sorozatra alkalmazott $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ balegzakt funktorból kapott sorozat. ξ' és ξ'' összevetéséből kapjuk a következő egzakt sorozatokkal rendelkező kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
\xi' : 0 \arrow[r] & {}_R(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & {}_R(Q_0,N) \arrow[r] \arrow[d] & {}_R(Q_1,N) \arrow[d] \\
\xi'' : 0 \arrow[r] & {}_B(e_Q(M), e_Q(N)) \arrow[r] & {}_B(e_Q(Q_0), e_Q(N)) \arrow[r] & {}_B(e_Q(Q_1), e_Q(N))
\end{tikzcd}$$

ahol ${}_S(X, Y) := \mathrm{Hom}_S(X, Y)$. $Q_0, Q_1 \in \operatorname{add} Q$, így a 2.1.14 állítás mintájára a két utolsó függőleges morfizmus izomorfizmus. Így $e_Q : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(e_Q(M), e_Q(N))$ is egy izomorfizmus, vagyis az e_Q funktor teljes és hűséges $\mathcal{F}(\theta)$-án. □

Az előző állítás következményeként belátjuk, hogy (az EISS-hez hasonlóan) az EPSS is egy rétegező rendszert határoz meg.

2.2.14. Következmény. *Ha $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ egy EPSS, akkor $(\theta, \leqslant)$ egy rétegező rendszer.*

Bizonyítás. Ellenőrizzük, hogy a 2.0.1 definícióban szereplő mindkét feltétel teljesül a $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^n$ halmazra. Az 2.2.1 definíció és a 2.2.6 állítás szerint teljesülnek a feltételek, így elég annyit ellenőrizni, hogy $\theta(i)$ felbonthatatlan minden i-re. Ez pedig abból következik, hogy a 2.2.13 állítás *4.* alpontja szerint $\mathrm{End}(\theta(i)) \simeq \mathrm{End}({}_B\Delta(i))$ minden i-re, és $\mathrm{End}({}_B\Delta(i))$ egy lokális algebra. Így készen vagyunk. $\square$

2.2.2. A rétegező rendszerek és az Ext-projektív rétegező rendszerek kapcsolata

Ebben az alfejezetben az a célunk, hogy összegezzük a rétegező rendszerekről, EISS-ekről és EPSS-ekről szerzett eddigi tudásunkat. Azt már eddig is tudjuk, hogy a rétegező rendszerek és az EISS-eket meg tudjuk feleltetni egymásnak, sőt, már azt is beláttuk, hogy egy EPSS egyben rétegező rendszer is. Ezek után már nem meglepő az a kijelentés, hogy egy rétegező rendszerhez is tudunk majd egy EPSS-t is konstruálni. A folyamat során felhasználjuk, hogy tetszőleges rétegező rendszerhez tartozik EISS, így ebből konstruáljuk meg az EPSS-t.

EPSS EISS-ből kiindulva

Láttuk már, hogy egy $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ EISS esetén a ${}_A\Delta(i) \simeq F(\theta(i'))$-vel definiált $({}_A\Delta, \leqslant)$ rétegező rendszer standard. Ekkor létezik az ehhez hozzárendelt karakterisztikus tilting modulus, melyet ${}_AT$-val jelölünk. A következő állítás mutatja az EPSS konstrukcióját egy EISS-ből kiindulva:

2.2.15. Állítás. *Legyen $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ egy n méretű EISS, $Q(i) = G(T(i'))$, $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^n$; $Q = \oplus_{i=1}^n Q(i)$ és $B = \mathrm{End}_R(Q)^{op}$ (ahol $i' = n + 1 - i$). Ekkor:*

1. *$(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ a $(\theta, \leqslant)$ rétegező rendszerhez rendelt EPSS*
2. *$\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta) = \mathrm{add}\, Q$*
3. *$B \simeq \mathrm{End}({}_AT)$*

Bizonyítás. 1. Vegyük $\forall i \in \Omega_n$-re a $0 \to {}_A\Delta(i') \to T(i') \to Z(i') \to 0$ egzakt sorozatot, melyet az $({}_A\Delta, \underline{T}, \leqslant)$ EISS határoz meg (2.1.26 állítás). Erre hattatva a G funktort, kapjuk a

$$\xi_i : 0 \to G(Z(i')) \to Q(i) \to \theta(i) \to 0$$

egzakt sorozatot. $F(Q(i)) = FG(T(i')) = T(i') \in \mathrm{add}\, T$, továbbá $Q(i)$ felbonthatatlan, hisz $T(i')$ is az, így a 2.1.28 tétel szerint kapjuk, hogy $Q(i) \in \mathcal{P}(\theta)$. Vagyis a 2.2.1 definíció szerint elég megmutassuk, hogy $G(Z(i')) \in \mathcal{F}(\{\theta(i) : j > i\})$. Azt azonban tudjuk a 2.1.1 definíció miatt, hogy $Z(i') \in \mathcal{F}(\{{}_A\Delta(j') : j' < i'\})$ és így azt is kapjuk, hogy $G(Z(i')) \in \mathcal{F}(\{G({}_A\Delta(j')) : j' < i'\}) = \mathcal{F}(\{\theta(i) : j > i\})$.

2. Legyen $X \in \mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta)$ felbonthatatlan. $F(X) \simeq T(j')$ valamely j'-re ugyancsak a 2.1.28 tétel szerint. Így $X \simeq G(F(X)) \simeq G(T(j')) = Q(j)$, vagyis: $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta) \subseteq \operatorname{add} Q$. A fordított tartalmazás azért teljesül, mert $Q \in \mathcal{F}(\theta)$ és $\mathcal{F}(\theta)$ zárt a direkt összegre.

3. $Q = G({}_AT)$, és G kategóriák közötti dualitás. Így $\operatorname{End}({}_AT) \simeq \operatorname{End}\,({}_RQ)^{op} = B$ □

Így pedig jellemezni tudjuk a rétegező rendszerek és az EPSS-ek közötti kapcsolatot:

2.2.16. Következmény. *Legyen $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^n$ R-modulusok egy nemnulla halmaza. Ekkor $(\theta, \leqslant)$ pontosan akkor lesz rétegező rendszer, ha létezik egy $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^n$ halmaz úgy, hogy $(\theta, Q, \leqslant)$ egy EPSS. Sőt, a θ halmaz izomorfia erejéig meghatározza a $\underline{Q}$ halmazt.*

Bizonyítás. Az egyértelműséget már láttuk a 2.2.5 tétel során.

Legyen adott egy $(\theta, \leqslant)$ n méretű rétegező rendszer. A 2.1.21 következmény szerint ez azzal egyenértékű, hogy létezik egy $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ EISS. A 2.2.15 állítás szerint kapunk ebből egy $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ EPSS-t. Fordítva, az 2.2.14 következmény szerint egy $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ EPSS egyben rétegező rendszer is. □

Vagyis egy adott $(\theta, \leqslant)$ rétegező rendszerhez izomorfia erejéig pontosan egy $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ EPSS tartozik. Ekkor mondhatjuk azt, hogy $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ a $(\theta, \leqslant)$-hez rendelt EPSS.

Standard rétegező rendszerek

Végezetül pedig a standard rétegező rendszerekre adunk jellemzéseket:

2.2.17. Következmény. *Legyen $(\theta, \leqslant)$ egy n-rétegező rendszer, $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ a $(\theta, \leqslant)$-hez rendelt EPSS, és $Q = \oplus_{i=1}^n Q(i)$. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

1. $Q \simeq {}_RR$
2. *$({}_R\Delta, \leqslant)$ standard, az egyszerű R-modulusok száma izomorfia erejéig n, és létezik R-beli primitív ortogonális idempotensek $\{e_1, e_2, \ldots\, e_n\}$ halmaza úgy, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re ${}_R\Delta(i) \simeq \theta(i)$.*

Bizonyítás. $Q \simeq {}_RR$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta) = \operatorname{add}\,{}_RR$ (a 2.2.15 állítás miatt). Így az eredmény következik a 2.1.29 állításból. □

3. fejezet

Példák és alkalmazások

Ez a fejezet példák és alkalmazások segítségével próbálja könnyebben érthetőbbé tenni az eddigieket. Az 1. fejezethez példák, a 2. fejezethez alkalmazások tartoznak.

3.1. Példák

Ebben az alfejezetben az 1. fejezetben előforduló állításokat, definíciókat, konstrukciókat mutatjuk meg egy-egy szemléletes példán keresztül. Minden példa esetében a gráfalgebrák köréből ismeretes Loewy diagramokat fogjuk használni a könnyebb számolhatóság kedvéért.

3.1.1. Példa. Ebben a példában az $A_A = a \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$ algebrát használjuk.

A 1.1.1 definíció kapcsán azt nézzük meg, hogy az idempotenseken megadott rendezés megváltoztatásával a standard modulusok is megváltoznak. Vegyük ehhez először a fenti algebrát az $a < b < c < d < e$ rendezéssel! Ekkor:

$$A_A = a \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$$

ahonnan a $\Delta(e) = \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$; $\Delta(d) = d$; $\Delta(c) = c$; $\Delta(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; $\Delta(a) = a$ standard modulusokat kapjuk. Az $a < e < d < b < c$ rendezéssel pedig:

$$A_A = a \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}$$

a standard modulusok alakja: $\Delta(c) = \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}$; $\Delta(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; $\Delta(d) = \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}$; $\Delta(e) = e$; $\Delta(a) = a$.

Innentől kezdve A_A-t az eredeti rendezéssel tekintjük: $(A, \leqslant)$.

1.1.3. Végigkövetjük a kostandard modulusok kiszámítását is, ezt a $\nabla(i) = D(\Delta^\circ(i))$ megfigyelés alapján a bal reguláris reprezentációból számolunk:

$$ {}_A A = \begin{smallmatrix} a \\ b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ c \\ b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} e \\ d \end{smallmatrix} $$

ahonnan $\nabla(e) = \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}$; $\nabla(d) = \begin{smallmatrix} b \\ c \\ d \end{smallmatrix}$; $\nabla(c) = \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix}$; $\nabla(b) = b; \nabla(a) = a$.

1.1.6. $\eta_{\{P(l)|l>b\}} P(b) = \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} + d + 0 = \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}$, vagyis valóban $\Delta(b) = P(b)/\eta_{\{P(l)|l>b\}} P(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$

1.1.7. Standard modulusból kostandard modulusba csak nulla vagy identikus leképezés megy. A standard modulusok között pedig csak az alábbi nemnulla és nem identikus morfizmusok léteznek:

$$ \Delta(a) \to \Delta(b) : a \to \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix};\ \Delta(a) \to \Delta(e) : a \to \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix};\ \Delta(d) \to \Delta(e) : d \to \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} $$

melyekre valóan teljesül, hogy $a < b$; $a < e$ és $d < e$.

1.1.8. Standard modulusnak nincs kostandard modulussal vett bővítése. A standard modulusok között pedig csak $b < c$-re és $c < d$-re léteznek bővítések:

$$ \dim \operatorname{Ext}^1(\Delta(b), \Delta(c)) = 1 \text{ egy generátor a } 0 \to c \to \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \to 0 \text{ egzakt sorozat} $$
$$ \dim \operatorname{Ext}^1(\Delta(c), \Delta(d)) = 1 \text{ egy generátor a } 0 \to d \to \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \to c \to 0 \text{ egzakt sorozat} $$

1.1.9. $(A, \leqslant)$ nem Δ-filtrált, hiszen $[\Delta(i) : S(e)] \neq 0 \Rightarrow i = e$, vagyis ha $(A, \leqslant)$-nak lenne egy Δ-filtrálása, akkor $S(e)$ csak $\Delta(S(e))$-ben fordulhatna elő, azonban a $P(d) = \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}$-ben megjelenő $S(e)$-re ez nem teljesülhet.

3.1.2. Példa. Ebben a példában az $B_B = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ algebrát használjuk.

1.1.9. $B_B = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ Δ-filtrált, hisz a következő láncban minden faktor $\mathcal{F}(1; \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix})$-beli: $1 \subset \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$

1.1.10. Az előző láncban éppen az $\eta_i M$ modulusok vannak felírva, így jól látszik, hogy az $\eta_{i-1} M/\eta_i M$ modulus $\Delta(i)$-k direkt összegéből áll.

1.1.11. Vegyük például az $\mathcal{F}(\Delta)$-beli modulusok között menő $0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \xrightarrow{f} \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 0$ f epimorfizmust, melynek magja persze Δ-filtrált lesz.

1.1.12 - 1.1.13. A Δ-filtrált B_B összes standard modulusa Schur típusú, így B_B kváziöröklődő. (A korábbi A_A algebra persze nem kváziöröklődő az eredeti sorrenddel, hiszen nem Δ-filtrált)

3.1.3. Példa. Ebben a példában a tilting elmélettel fogunk foglalkozni. Első lépésben a $C_C = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ Δ-filtrált algebra karakterisztikus tilting modulusát számoljuk ki, majd ellenőrizzük, hogy kétszeres Ringel duálist véve visszakapjuk az eredeti algebrát.

$C_C = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ standard modulusai: $\Delta(3) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$; $\Delta(2) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ és $\Delta(1) = 1$. A bal reguláris reprezentációból: ${}_C C = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ kapjuk a baloldali standard modulusokat:

$\Delta^\circ(3) = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$; $\Delta^\circ(2) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ és $\Delta^\circ(1) = 1$, ahonnan a jobboldali kostandard modulusok: $\nabla(3) = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$; $\nabla(2) = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ és $\nabla(1) = 1$. Az $\omega = \mathcal{F}(1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}) \cap \mathcal{F}(1, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix})$ részkategóriára vagyunk kiváncsiak.

Az 1.1.28 tétel szerint létezik egy T egyszerre tilting és kotilting bázismodulus, hogy $\omega = \operatorname{add} T$. A bizonyítás lépéseit követve adjuk meg a keresett T modulust. Ehhez a először meg kell adnunk egy $0 \to C \to T_0 \to \ldots \to T_d \to 0$ egzakt sorozatot (1.1.27 lemma szerint), ahol $T_i \in \omega$ minden $i \leqslant d$-re. (A későbbiekben alsó indexszel jelöljük, hogy az $\operatorname{add} T$-beli feloldás hanyadik eleménél tartunk, felső indexszel és zárójellel jelezzük, hogy hanyadik projektívnek tekintjük a föloldását. Ha pedig a Ringel duális tilting modulusait keressük, akkor egy ' szimbólumot is írunk majd).

A konstrukció valójában a 1.1.21 lemmán alapszik, mely szerint ki kell számolnunk a C algebra felülről vett univerzális bővítését $\Delta(1)$-el, majd $\Delta(2)$-vel végül pedig $\Delta(3)$-mal (minden lépésben az előzőleg kapott bővítést bővítjük tovább). Megjegyezzük, hogy mivel $\Delta(2) = P(2)$, és $\Delta(3) = P(3)$ projektív, így $\operatorname{Ext}^1(\Delta(2), X) = 0$ minden X modulusra, vagyis tetszőleges X modulus $\Delta(2)$-val felülről vett univerzális bővítése X ($\Delta(3)$-ra ugyanígy). C bővítései helyett a projektív modulusok bővítéseit számoljuk.

$\operatorname{Ext}^1(\Delta(1), P(1))$ számolásához vehetjük a $\operatorname{Hom}(-, \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix})$ kontravariáns funktor hatását az $0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ egzakt sorozaton:

$$0 \to \operatorname{Hom}(1, \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}) \to \operatorname{Hom}(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}) \to \operatorname{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}) \to \operatorname{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}) \to \ldots$$

Innentől kezdve a hosszú egzakt sorozatban csak 0 tagok következnek $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}$ és $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ projektivitása folytán. Tehát a fent látható sorozatban a páros tagok k feletti dimenziójának összege megegyezik a páratlan tagok k feletti dimenziójának összegével. Innen kapjuk, hogy $\dim_k \operatorname{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}) = 1 - 3 + 3 = 1$. Megkeresünk egy generátorban megjelenő középső modulust. Ebben $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ alakú nyíl nem lehet, hisz az $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \mapsto 1$ leképezésnek a $P(1) = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}$-ben is nyoma lenne. A többi lehetséges esetet tekintve kiderül, hogy ha a $\begin{smallmatrix} & 1 & & & \\ 2 & & 3 & & \\ 1 & & 1 & & 1 \\ & & & 2 & \end{smallmatrix}$ modulusban báziscserét alkalmazunk, akkor triviálisan hasad a $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus 1$ direkt összegre. Ugyancsak báziscserével látjuk, hogy a nemtriviális bővítés generátora: $T_0^{(1)} = \begin{smallmatrix} & 1 & & 1 \\ 2 & & 3 & \\ 1 & & 1 & \\ & & 2 & \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 1 & & 1 & \\ & 2 & & 3 \\ & 1 & & 1 \\ & & & 2 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\\1\\2\end{smallmatrix}$ modulus (itt a nemtriviális hasadás onnan is látszik, hogy $T_0^{(1)}$ részmodulusként tartalmazza az $I(2)$ injektív modulust). A fent említett okok miatt a $\Delta(2)$ és a $\Delta(3)$-mal vett bővítés már nem változtat, így adódik a $0 \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ egzakt sorozat (ez felel meg $P(1)$ add T-beli feloldásának: $0 \to P(1) \to T_0^1 \to T_1^1 \to 0$, hiszen $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ és $\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ miatt $T_0^{(1)} \in \omega$, továbbá $1 \in \omega$ is természetesen teljesül).

$\mathrm{Ext}^1(\Delta(1), P(2))$ kiszámolásához a következő egzakt sorozatot vesszük:

$$0 \to \mathrm{Hom}(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \dots$$

Az előzőhöz hasonló érveléssel kapjuk, hogy $\dim_k \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) = 1 - 1 + 1 = 1$. Ugyanígy adódik az is, hogy $\dim_k \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) = 1$. Ezekből kapjuk a $T_0^{(2)} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ és $T_0^{(3)} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ modulusokat, melyekről már láttuk, hogy ω-beliek. $P(1)$ add T-beli feloldásának mintájára kapjuk C_C add T-beli feloldását:

$$0 \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 1 \oplus 1 \oplus 1 \to 0$$

Innen pedig már a többszörös direkt összeadandókat elhagyva adódik a karakterisztikus tilting modulus: $T = 1 \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$, mely valóban egyszerre tilting és kotilting modulus.

(Apró megjegyzés, melynek nincs köze a konstrukcióhoz, de attól még érdemes látni: következő egzakt sorozatok felelnek meg a 1.1.30 állításbeli egzakt sorozatoknak):

$$0 \to 1 \to 1 \to 0 \to 0 \text{ és } 0 \to 0 \to 1 \to 1 \to 0$$
$$0 \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0 \text{ és } 0 \to 1 \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$$
$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 1 \text{ és } 0 \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \to 0$$

Visszatérve a konstrukcióra: a következő lépés az $C' = \mathrm{End}\, T$ endomorfizmusgyűrű kiszámolása. End T duálisa megkapható úgy, hogy a T-ből az egyes $T(i)$-kbe menő morfizmusokat tekintjük, és vizsgáljuk az egymáson való keresztül-vezethetőséget. Kapjuk tehát a következő injektív modulusokat: $I'(1) = \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$; $I'(2) = \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ és $I'(3) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$, ahonnan dualitást alkalmazva kapjuk, hogy a jobb reguláris felbontás: $C'_{C'} = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$, melyről jól látszik, hogy kváziöröklődő a $\leqslant^{op}$ sorrend szerint (1.1.32 állítás). A bal reguláris felbontás ennek endomorfozmusgyűrűjeként kapható meg: ${}_{C'}C' = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ 2 & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$. $C'_{C'}$ standard és kostandard modulusai tehát (vigyázat, itt már a tétel szerint a $\leqslant^{op}$ rendezést használjuk): $\Delta'(1) = P'(1) = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix}$; $\Delta'(2) = 2$ és $\Delta'(3) = 3$, valamint $\nabla'(1) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$; $\nabla'(2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$ és $\nabla'(3) = 3$.

Most megkonstruáljuk az $\omega' = \mathcal{F}(\Delta') \cap \mathcal{F}(\nabla') = \mathcal{F}(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix}; 2; 3) \cap \mathcal{F}(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}; 3)$ kategóriához tartozó T'' tilting modulust. Az előző eljárás szerint haladunk. Előbb $\mathrm{Ext}^1(\Delta'(3), P'(3))$-at számoljuk (továbbra is a $\leqslant^{op}$ rendezést használjuk). Vegyük az $\mathrm{Ext}^1(-, \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix})$ funktor hatását a $0 \to 2 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$ egzakt sorozaton:

$$0 \to \mathrm{Hom}(3, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(3, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix})$$

A hosszú egzakt sor következő tagja $(3, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix})$ projektivitása miatt ismét 0, így a korábbi dimenziókra vonatkozó számlálás itt is alkalmazható: $\dim \mathrm{Ext}^1(3, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0 + 1 - 1 = 0$. Hasonló számítások mutatják, hogy $\mathrm{Ext}^1(\Delta'(2), P'(3)) = 0$, míg $\Delta'(1)$ projektivitása miatt $\mathrm{Ext}^1(\Delta'(1), P'(3)) = 0$. Így kapjuk a $0 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 0$ egzakt sorozatot, ami persze nem meglepő, hisz $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ alapból ω'-beli volt. Vagyis $T_0'^{(3)} = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$.

$\mathrm{Ext}^1(\Delta'(3), P'(2))$ számolása során a

$$0 \to \mathrm{Hom}(3, \begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 1 & \\ 2 & & 3\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 1 & \\ 2 & & 3\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 1 & \\ 2 & & 3\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(3, \begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 1 & \\ 2 & & 3\end{smallmatrix}) \to$$

egzakt sorozatból kapjuk, hogy $\dim \mathrm{Ext}^1(\Delta'(3), P'(2)) = 1 - 1 + 1$. A generátorban megjelenő középső modulus alakja: $T_0'^{(2)} = \begin{smallmatrix} & 2 & & \\ & 1 & & 3\\ 3 & & 2 & \end{smallmatrix}$ hiszen csak $3 \to 2$ leképezésünk van, és mivel $P'(3)$-ban nincs $\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$ alakú faktor, semely modulusban sem létezhet. Így a bővítendő 3 típusú egyszerű nem kerülhet legfelülre. Hasonló számolásokkal kiderül, hogy $\dim \mathrm{Ext}^1(\Delta'(2), P'(2)) = \dim \mathrm{Ext}^1(\Delta'(1), P'(2)) = 0$, így pedig $P'(2)$-ből adódik az $0 \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 1 & \\ 2 & & 3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & & \\ & 1 & & 3\\ 3 & & 2 & \end{smallmatrix} \to 3 \to 0$ egzakt sorozat, ahol a két utolsó tag ω'-beli.

$P'(1)$-ből is kiszámolva a megfelelő bővítéseket, kapjuk a

$$0 \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & & \\ & 1 & & 3\\ 3 & & 2 & \end{smallmatrix} \to 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 3 \to 0$$

egzakt sorozatot, melynek minden tagja ω'-beli. A többszörös direkt összeadandókat elhagyva adódik a az ω' kategóriához tartozó tilting modulus: $T'' = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & & \\ & 1 & & 3\\ 3 & & 2 & \\ & & 1 & \end{smallmatrix}$

Végezetül, véve ennek az endomorfizmusgyűrűjét, visszakapjuk az eredeti $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ algebrát.

3.1.4. Példa. Ebben a példában a standardizálás folyamatát nézzük végig (1.1.43 tétel). Tekintsük ehhez a már korábbról ismert $A_A = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3\\ & & 4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 5 & \\ & 2 & \\ 1 & & 3\\ & & 4\end{smallmatrix}$ algebrát. (A könnyebb számolás érdekében mostmár számokat használunk betűk helyett). Korábban már láttuk, hogy $\Delta(1) = 1$; $\Delta(2) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$; $\Delta(3) = 3$; $\Delta(4) = 4$ és $\Delta(5) = \begin{smallmatrix} & 5 & \\ & 2 & \\ 1 & & 3\\ & & 4\end{smallmatrix}$. Egy tetszőleges algebra standard modulusaira a standardizáláshoz szükséges feltételek közül az első kettő automatikusan teljesül (1.1.41 megjegyzés). Mivel a mi esetünkben az összes standard modulus Schur típusú, így a fent felsorolt Δ-k egy standardizálható rendszert alkotnak. Ezekre követjük a tételben megadott konstrukciót. Az eljárás során létrehozunk egy olyan algebrát, melyben a Δ-filtrált modulusok kategóriája megegyezik az adott A algebra $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategóriájával.

$\Theta(1) = P(1)$ projektív, így $\mathrm{Ext}^1(P, X) = 0$ minden X modulusra, vagyis $P_\Theta(1) = 1$.

$P(2,2) = \Theta(2)$. Tekintsük a $0 \to \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3\\ & & 4\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 0$ egzakt sorozatból képzett

$$0 \to \mathrm{Hom}(\substack{2\\1},3) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix},3) \to \mathrm{Hom}(\substack{3\\4},3) \to \mathrm{Ext}^1(\substack{2\\1},3) \to \mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix},3) \to$$

hosszú egzakt sorozatot. Itt az utolsó tag projektivitás miatt 0, így a dimenziókat számolva kapjuk, hogy $\dim \mathrm{Ext}^1(\substack{2\\1},3) = 0-0+1 = 1$, ahonnan kapjuk a $P(2,3) = \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix}$ modulust (ez biztos, hogy létezik, ugyanis $P(2)$ faktora). Ezután a $0 \to 4 \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \to 0$ egzakt sorozatból kapjuk a

$$0 \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix},4) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix},4) \to \mathrm{Hom}(4,4) \to \mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix},4) \to$$

hosszú egzakt sorozatot, ahol dimenziószámlálás után adódik a $P(2,4) = \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}$ modulus. Mivel ez már projektív, $P_\Theta(2) = P(2,5) = P(2,4) = \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}$.

$P(3,3) = \Theta(3)$ esetén a $0 \to 4 \to \substack{3\\4} \to 3 \to 0$ egzakt sorozatból a

$$0 \to \mathrm{Hom}(3,4) \to \mathrm{Hom}(\substack{3\\4},4) \to \mathrm{Hom}(4,4) \to \mathrm{Ext}^1(3,4) \to$$

hosszú egzakt sorozatot kapjuk, ahonnan szokásos dimenziószámolás után a $P(3,4) = \substack{3\\4}$ modulus adódik. Mivel ez már projektív, így $P_\Theta(3) = \substack{3\\4}$.

$P(4,4) = \Theta(4)$, így a $0 \to 5 \to \substack{4\\5} \to 4 \to 0$ egzakt sorozatból a

$$0 \to \mathrm{Hom}(4,\begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\substack{4\\5},\begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(5,\begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(4,\begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}) \to$$

hosszú egzakt sorozat adódik. Ebből $\dim \mathrm{Ext}^1(4,\begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}) = 1-1+0 = 0$, így $\mathrm{Ext}^1(4,\begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}) = 0$, vagyis $P_\Theta(4) = P(4,5) = 4$. Végül természetesen $P_\Theta(5) = \begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}$.

Vagyis adódik az $\tilde{A} = 1 \oplus \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \oplus \substack{3\\4} \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix} &5& \\ &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix}$ algebra, mely már kváziöröklődő, és ebben a standardul filtrált modulusok kategóriája valóban megegyezik az eredeti algebra $\mathcal{F}(\Delta)$ részkategóriájával.

3.1.5. Példa. Ebben a példában az $E_E = \substack{1\\3} \oplus \substack{2\\3\\1} \oplus \begin{smallmatrix} &3& \\ 1&&3 \end{smallmatrix}$ algebrán követjük végig az Ágoston-Dlab-Lukács féle standardizálást (1.2.24 tétel). A Θ-k a valódi standard modulusok lesznek: $\bar{\Delta}(1) = 1$; $\bar{\Delta}(2) = 2$ és $\bar{\Delta}(3) = \substack{3\\1}$.

$P(1,1) = \Theta(1)$. Tekintsük a $0 \to 3 \to \substack{1\\3} \to 1 \to 0$ egzakt sorozatból képzett

$$0 \to \mathrm{Hom}(1,2) \to \mathrm{Hom}(\substack{1\\3},2) \to \mathrm{Hom}(3,2) \to \mathrm{Ext}^1(1,2) \to \mathrm{Ext}^1(\substack{1\\3},2) \to$$

hosszú egzakt sorozatot. Itt az utolsó tag projektivitás miatt 0, így a dimenziókat számolva kapjuk, hogy $\dim \mathrm{Ext}^1(1,2) = 0-0+0 = 0$, ahonnan $P(1,2) = 1$. A következő lépésben

$$0 \to \mathrm{Hom}(1,\substack{3\\1}) \to \mathrm{Hom}(\substack{1\\3},\substack{3\\1}) \to \mathrm{Hom}(3,\substack{3\\1}) \to \mathrm{Ext}^1(1,\substack{3\\1}) \to$$

hosszú egzakt sorozat adódik, ahonnan dimenzió számlálással: $\dim \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}) = 1-1+0 = 0$, vagyis $P_\Theta(1) = P(1,3) = 1$.

$P(2,2) = \Theta(2)$; itt a $0 \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(2, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}) \to$ hosszú egzakt sorozat adódik, ahonnan $\dim \mathrm{Ext}^1(2, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}) = 0 - 0 + 1 = 1$. Kapjuk tehát a $P_\Theta(2) = P(2,3) = \begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}$ modulust.

Innen pedig a $\tilde{E} = 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ algebra már $\bar{\Delta}$-filtrált, és a standardul filtrált modulusok kategóriája valóban megegyezik az eredeti algebra $\mathcal{F}(\bar{\Delta})$ részkategóriájával.

3.1.6. Példa. A következő példán azt ellenőrizzük, hogy $\Lambda_\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta) \Leftrightarrow D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}^\circ)$. Legyen tehát: $\Lambda_\Lambda = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$. Itt $\Delta(1) = 1$; $\Delta(2) = \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ és $\Delta(3) = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, innen pedig $\Lambda_\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$. $D(\Lambda_\Lambda)$-t Λ_Λ endomorfizmusgyűrűjéből kaphatjuk meg: $D(\Lambda_\Lambda) = 1 \oplus \begin{smallmatrix}&2&&\\1&3&2&\\&&&1\end{smallmatrix} \oplus 3$. Mivel $\bar{\Delta}^\circ(1) = 1$; $\bar{\Delta}^\circ(2) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ és $\bar{\Delta}^\circ(3) = 3$, kapjuk, hogy valóban $D(\Lambda_\Lambda) \in \mathcal{F}(\bar{\Delta}^\circ)$.

Ugyanezen a példán ellenőrizzük, hogy ha egy Δ-filtrált algebrára egymás után kétszer hajtjuk végre karakterisztikus tilting modulus keresését, akkor visszakapjuk az eredeti algebrát. Elsőre tehát az $\mathcal{F}(\Delta_\Lambda) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}_\Lambda) = \mathcal{F}(1, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \cap \mathcal{F}(1, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}, 3)$ részkategóriát próbáljuk megérteni. Az korábbi eljárást használjuk:

A $0 \to \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ egzakt sorozatból kapjuk a

$$0 \to \mathrm{Hom}(1, \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix})$$

hosszú egzakt sorozatot, ahol $\dim \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}) = 0 - 1 + 2 = 1$. Így $\mathrm{Ext}^1(\Delta(1), P(1)) = \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix})$ egy reprezentánsa a $\begin{smallmatrix}1&&\\2&&1\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus (még $\begin{smallmatrix}1&&1\\&2&\\&2&\end{smallmatrix}$ jöhetett volna szóba, de az báziscserével triviálisan hasad). $\Delta(2)$ és $\Delta(3)$ projektivitása folytán az ezekkel vett bővítés nem változtat, így $T_0^1 = \begin{smallmatrix}1&&\\2&&1\\&2&\end{smallmatrix}$.

$$0 \to \mathrm{Hom}(1, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$$

hosszú egzakt sorozatból adódik, hogy $\dim \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) = 0-0+2 = 2$. Az előzőek ismeretében már tudjuk, hogy létezik a $\begin{smallmatrix}1&&\\2&&1\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus, így ez lesz $\mathrm{Ext}^1(\Delta(1), P(2))$ reprezentánsa, sőt, a már említett projektivitások miatt: $T_0^{(2)} = \begin{smallmatrix}1&&\\2&&1\\&2&\end{smallmatrix}$.

$$0 \to \mathrm{Hom}(1, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix})$$

hosszú egzakt sorozatból $\dim \mathrm{Ext}^1(1, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0 - 0 + 1 = 1$. Mivel $P(1)$-ben nincs $1 \to 3$ nyíl, semely modulusban sem lehet, így $\mathrm{Ext}^1(\Delta(1), P(3))$ reprezentánsa, sőt, a korábbi indokok miatt $T_0^{(3)} = \begin{smallmatrix}3&&1\\&2&\end{smallmatrix}$.

Kapjuk tehát az $0 \to \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1&&\\2&&1\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1&&\\2&&1\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3&&1\\&2&\end{smallmatrix} \to 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \to 0$ egzakt sorozatot, ahol a feloldásban szereplő direkt összeadandók mind $\mathcal{F}(\Delta_\Lambda) \cap \mathcal{F}(\bar{\nabla}_\Lambda)$-beliek, vagyis ha elhagyjuk az ismétléseket, kapjuk a T karakterisztikus tilting modulus felbonthatatlan direkt összeadandóit: $T(1) = 1$; $T(2) = \begin{smallmatrix}1&&\\2&&1\\&2&\end{smallmatrix}$ és $T(3) = \begin{smallmatrix}3&&1\\&2&\end{smallmatrix}$.

$\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(T)$ jelölést használva, kiszámolva az endomorfizmusgyűrűt, kapjuk, hogy ${}_\Gamma\Gamma = 1 \oplus \begin{smallmatrix}&2&&\\2&&3&1\\&1&&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. Innen kiszámolható Γ jobb oldali struktúrája: $\Gamma_\Gamma = \begin{smallmatrix}&1&\\3&&2\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$. Itt már a $\leqslant^{op}$ rendezés szerint kell venni a filtrálást, így pedig adódik, hogy Γ_Γ $\bar{\Delta}$-filtrált és ${}_\Gamma\Gamma$ Δ-filtrált.

A második iterációhoz a $\mathcal{F}(\bar{\Delta}_\Gamma) \cap \mathcal{F}(\nabla_\Gamma) = \mathcal{F}(\begin{smallmatrix}&1&\\3&&2\\&2&\end{smallmatrix}, 2, 3) \cap \mathcal{F}(1, \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}, 3)$-t vesszük.

$$0 \to \mathrm{Hom}(3, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(3, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix})$$

hosszú egzakt sorozatból $\dim \mathrm{Ext}^1(3, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0 - 1 + 1 = 0$, így ez nem változtat.

$$0 \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix})$$

hosszú egzakt sorozatból $\dim \mathrm{Ext}^1(2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 1 - 1 + 1 = 1$, így ennek a reprezentánsa $\begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}$ ($P(2)$-ben nincs $3 \to 2$ nyíl, így máshol sem lehet emiatt ki van zárva a $\begin{smallmatrix}3\\2\\2\end{smallmatrix}$ modulus.) $\Delta(1)$ projektivitása miatt kapjuk, hogy $T_0'^{(3)} = \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}$.

$$0 \to \mathrm{Hom}(3, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(3, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$$

hosszú egzakt sorozatból $\dim \mathrm{Ext}^1(3, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) = 0 - 0 + 1 = 1$. Mivel már láttuk, hogy létezik a $\begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus, ez a bővítés egy reprezentánsa.

$$0 \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(2, \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(2, \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix})$$

hosszú egzakt sorozatból $\dim \mathrm{Ext}^1(2, \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}) = 1 - 2 + 1 = 0$, így $\Delta(1)$ projektivitását is figyelembe véve kapjuk, hogy $T_0'^{(2)} = \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}$. Végül pedig $T_0'^{(1)} = \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&2&\end{smallmatrix}$ a projektivitás miatt.

A korábbi számításokhoz hasonlóan kapjuk, hogy $T'(1) = \begin{smallmatrix}&1&\\3&&2\\&2&\end{smallmatrix}$; $T'(2) = \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix}$ és $T'(3) = 3$. Így adódik a karakterisztikus tilting modulus: $T' = \begin{smallmatrix}&1&\\3&&2\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus 3$, melynek endomorfizmusgyűrűjeként visszakapjuk az eredeti algebrát: $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$. Vagyis készen vagyunk az ellenőrzéssel.

3.2. Alkalmazás

A második fejezetben előforduló állítások megértéséhez is próbálkozhatnánk szemléletes példák felállításával. Ezek a számolások azonban nagyon hasonlóak lennének az előző alfejezetben látottakhoz. Így a második fejezet megértéséhez inkább egy alkalmazást nézünk meg: a Dlab-Ringel féle standardizációs eljárás során bizonyított fő tételre (1.1.43) adunk alternatív bizonyítást a rétegező rendszerek elméletének a segítségével.

Előkészületek

A következő jelöléseket fogjuk használni: R egy algebra, θ R-modulusok egy halmaza. A $(\theta, \leqslant)$-hez rendelt EISS-t $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$; EPSS-t $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ jelöli, $Y = \oplus Y(i)$; $Q = \oplus Q(i)$. Legyen $A = \mathrm{End}_R Y$; $B = \mathrm{End}_R Q$; ${}_AT$ a $({}_A\Delta, \leqslant)$ standard rétegező rendszerhez rendelt karakterisztikus tilting modulus. Az

$$F = \mathrm{Hom}_R(-,{}_RY_{A^{op}}) : \mathcal{F}(\theta) \to \mathcal{F}({}_A\Delta);\ G = \mathrm{Hom}_A(-,{}_RY_{A^{op}}) : \mathcal{F}({}_A\Delta) \to \mathcal{F}(\theta);$$
$$\tilde{F} = \mathrm{Hom}_A(-,{}_AT_{B^{op}}) : \mathcal{F}({}_A\Delta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta);\ \tilde{G} = \mathrm{Hom}_B(-,{}_AT_{B^{op}}) : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}({}_A\Delta);$$

funktorok egzaktak, továbbá $GF \simeq 1_{\mathcal{F}(\theta)}$; $FG \simeq 1_{\mathcal{F}({}_A\Delta)}$; $\tilde{G}\tilde{F} \simeq 1_{\mathcal{F}({}_A\Delta)}$ és $\tilde{F}\tilde{G} \simeq 1_{\mathcal{F}({}_B\Delta)}$. Vagyis fennáll az alábbi reláció:

$$\mathcal{F}(\theta) \underset{\mathrm{G}}{\overset{\mathrm{F}}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}({}_A\Delta) \underset{\tilde{\mathrm{G}}}{\overset{\tilde{\mathrm{F}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}({}_B\Delta)$$

Azt is tudjuk, hogy $F(\theta(i')) \simeq {}_A\Delta(i)$, és $\tilde{F}({}_A\Delta(i')) \simeq {}_B\Delta(i)$, ahonnan ${}_B\Delta(i) \simeq \tilde{F}F(\theta(i))$ minden i-re.

3.2.1. Állítás. *Legyen ${}_BT$ a $({}_B\Delta, \leqslant)$ standard rétegező rendszerhez rendelt karakterisztikus tilting B-modulus. Ekkor:*

1. $\tilde{F}F \simeq e_Q = \mathrm{Hom}_R({}_RQ_B, -) : \mathcal{F}(\theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta)$ *és* $e_Q(\theta(i)) \simeq_B \Delta(i)$ $\forall i \in \Omega_n$*-re*
2. $G\tilde{G} \simeq {}_RQ_B \otimes_B - : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\theta)$ *és* ${}_RQ_B \otimes_B {}_B\Delta(\omega_t(i)) \simeq \theta(i)$ *minden* i*-re*
3. ${}_BT \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RQ_B,\ {}_RY)$ *és* ${}_RY \simeq {}_RQ_B \otimes_B {}_BT$

Bizonyítás. A 2.2.15 állítás szerint: ${}_AT_{B^{op}} \simeq F(Q) = \mathrm{Hom}_R({}_RQ_B,{}_RY_{A^{op}})$.

1. Minden $X \in \mathcal{F}(\theta)$-ra:

$$\tilde{F}(F(X)) = \mathrm{Hom}_A(F(X),\ {}_AT_{B^{op}}) \simeq \mathrm{Hom}_A(F(X), F({}_RQ_B)) \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RQ_B,\ {}_RX) \simeq e_Q(X)$$

2. Minden $X \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$-ra:

$$ {}_RQ_B \otimes_B {}_BX = \mathrm{Hom}_A({}_AT_{B^{op}},{}_RY_{A^{op}}) \otimes_B {}_BX$$
$$G(\tilde{G}(X)) = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_B(X,{}_AT_{B^{op}}),{}_RY_{A^{op}})$$

Vagyis kapjuk az alábbi leképezést:

$$\varepsilon_X : \mathrm{Hom}_A(T, Y) \otimes_B X \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_B(X, T), Y)$$

ahol $\varepsilon_X(f \otimes x)(g) = f(g(x))$. Látszik, hogy ε_X jóldefiniált, és funktoriális X-ben. Mivel $({}_B\Delta, \leqslant)$ standard, kapjuk, hogy minden P projektív B-modulus $\mathcal{F}({}_B\Delta)$-beli. Belátjuk a következő állítást:

3.2.2. Állítás. *Az $\varepsilon_P : {}_RQ_B \otimes_B P \to G(\tilde{G}(P))$ leképezés minden P projektív B-modulusra izomorfizmus.*

Bizonyítás. Elég megvizsgáljuk a $P = {}_BB$ esetet, ekkor már a direkt összeadandókra is következik. Legyenek $\rho : T \to \mathrm{Hom}_B(B, T)$ valamint $\psi : \mathrm{Hom}_A(T, Y) \otimes_B B \to \mathrm{Hom}_A(T, Y)$ izomorfizmusok. Mivel $\psi = \mathrm{Hom}_A(\rho, Y)\varepsilon_B$, kapjuk, hogy ε_B izomorfizmus, ezzel az állítást beláttuk. □

Visszatérünk a tétel bizonyítására. Legyen $0 \neq X \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$. $\min X$-re vonatkozó fordított indukcióval bizonyítjuk, hogy $\varepsilon_X :_R Q_B \otimes_B X \to G(\tilde{G}(X))$ egy izomorfizmus.

Ha $\min X = n$, akkor ${}_BX$ projektív így a fenti észrevétel miatt izomorfizmust kapunk. Tegyük fel, hogy $\min X < n$. Mivel $({}_B\Delta, \leqslant)$ standard, a 2.2.11 állítás szerint kapjuk a

$$\xi : 0 \to X' \to {}_BP \to X \to 0$$

egzakt sorozatot, ahol ${}_BP$ egy projektív B-modulus, $X' \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$, és $\min X' > \min X$. Feltehetjük, hogy $X' \neq 0$ (mert különben kapnánk, hogy ${}_BX$ projektív, de ezt az esetet már elintéztük). Az indukciós feltevés miatt $\varepsilon'_X : {}_RQ_B \otimes_B X' \to G(\tilde{G}(X'))$ izomorfizmus. A ξ egzakt sorozatból kapjuk az alábbi egzakt sorozatokkal rendelkező kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & {}_RQ_B \otimes_B X' \arrow[r] \arrow[d] & {}_RQ_B \otimes_B P \arrow[r] \arrow[d] & {}_RQ_B \otimes_B X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G\tilde{G}(X') \arrow[r] & G\tilde{G}({}_BP) \arrow[r] & G\tilde{G}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mivel az első és a második függőleges morfizmus izomorfizmus, kapjuk, hogy a harmadik, $\varepsilon_X :_R Q_B \otimes_B X \to G(\tilde{G}(X))$ leképezés is izomorfizmus.

3. Mivel $A = \mathrm{End}({}_RY)$ bázisalgebra, és $({}_A\Delta, \leqslant)$ standard, a 2.2.2 állítás alapján kapjuk, hogy $({}_A\Delta, {}_A\underline{Q}, \leqslant)$ egy EPSS, ahol ${}_AQ = {}_AA$. A 2.2.15 állítás *3.* pontja szerint $\mathrm{End}_R(Q)^{op} \simeq \mathrm{End}({}_AT)$. Ezt kifejtve $A = \mathrm{End}_R(Q)^{op} \simeq \mathrm{End}({}_AT_B) = \mathrm{Hom}({}_AT_{B^{op}}, {}_AT_{B^{op}}) = \tilde{G}({}_BT)$, amire alkalmazva az $\tilde{F}$ funktort: ${}_BT = \tilde{F}(A)$. Másrészt, az *1.* alpont alapján tudjuk, hogy $\mathrm{Hom}_R(Q, Y) \simeq \tilde{F}(F(Y)) \simeq \tilde{F}(A)$. A kettőt összevetve: ${}_BT \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RQ_B, {}_RY)$ izomorfia. Végül következik, hogy ${}_RY \simeq {}_RQ_B \otimes_B {}_BT$. □

A tétel bizonyítása

Most pedig belátjuk Dlab-Ringel tételét (1.1.43) a rétegező rendszerek segítségével. Ez a bizonyítás megtalálható a [11] cikkben Theorem 3.2 néven.

3.2.3. Tétel. *Legyen* $(\theta, \leqslant)$ *egy* n*-rétegező rendszer,* $(\theta, \underline{Q}, \leqslant)$ *a* $(\theta, \leqslant)$*-hez rendelt EPSS;* $B = \mathrm{End}({}_R Q)^{op}$ *és* $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ *primitív ortogonális idempotensek egy halmaza úgy, hogy* $Be_i \simeq e_Q(Q(i))$ $\forall i \in \Omega_n$*-re. Ekkor:*

1. *B* Δ*-filtrált bázisalgebra, és az* $e_Q = \mathrm{Hom}_R({}_R Q_B, -) : \mathcal{F}(\theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta)$*, valamint* ${}_R Q_B \otimes_B - : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\theta)$ *funktorok inverz egzakt ekvivalenciák. Továbbá* $\forall i \in \Omega_n$*-re* ${}_B\Delta(i) \simeq e_Q(\theta(i))$
2. *Legyen* Λ *egy bázisalgebra úgy, hogy* $({}_\Lambda\Delta, \leqslant)$ *standardn-rétegező rendszer. Ha létezik egy* $H : \mathcal{F}(\theta) \to \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta)$ *egzakt ekvivalencia, akkor* $H(Q) = \Lambda$*, és* $\Lambda \simeq B^{op}$
3. *B pontosan akkor kváziöröklődő, ha* $(\theta, \leqslant)$ *egy standardizálható rendszer (a 1.1.40 szerinti definícióval élve).*

Bizonyítás. 1. Az 2.2.7 megjegyzés szerint B bázisalgebra, a 2.2.13 állítás *5.* alpontja szerint standard, a többit pedig az előző, 3.2.1 tételből kapjuk.

2. Tegyük fel, hogy létezik egy $H : \mathcal{F}(\theta) \to \mathcal{F}({}_A\Delta)$ egzakt ekvivalencia. Mivel H egy egzakt funktor, kapjuk, hogy a $\alpha_{M,N}([\eta]) = [H(\eta)]$ által meghatározott alábbi leképezés: $\alpha_{M,N} : \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H(M), H(N))$ egy természetes (Abel csoport-) izomorfizmus minden $M, N \in \mathcal{F}(\theta)$-ra. Ezért $H(\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta)) = \mathcal{F}({}_\Lambda\Delta) \cap \mathcal{P}({}_\Lambda\Delta) = \mathrm{add}\,\Lambda$. A 2.2.15 tétel miatt tudjuk, hogy $\mathcal{F}(\theta) \cap \mathcal{P}(\theta) = \mathrm{add}\,Q$. Így $H(Q) = \Lambda$, továbbá $e_Q(Q) = B^{op}$. Ezért az e_Q és H funktorok indukálják a $\Lambda \simeq B^{op}$ izomorfizmust.

(3) Az e_Q ekvivalencia indukálja az $\mathrm{End}(\theta(i)) \simeq \mathrm{End}({}_B\Delta(i))$ izomorfizmust. Így B pontosan akkor kváziöröklődő, ha $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(\theta(i)) = 0$ (ahol $\mathrm{rad}\,\mathrm{Hom}_R(\theta(i), \theta(j))$ a $\theta(i)$-ből $\theta(j)$-be menő nem invertálható morfizmusok halmazát jelöli). Ez azonban következik a standardizálható rendszer 1.1.40 definíciójából, vagyis készen vagyunk. □

Irodalomjegyzék

[1] ÁGOSTON, I., DLAB V., LUKÁCS, E., Approximations of algebras by standardly stratified algebras, J. Algebra 319 (2008), 4177–4198.

[2] ÁGOSTON, I., HAPPEL D., LUKÁCS, E., UNGER L., Standardly stratified algebras and tilting, J. Algebra 226(1) (2000), 144–160.

[3] ASSEM, I., SIMSON, D., SKOWRÓNSKI, A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, 2006. MR2197389 (2006j:160)

[4] AUSLANDER, M., REITEN, I., Applications of contravariantly finite subcategories, Adv. Math. 86 (1) (1991) 111–152.

[5] DLAB, V., Quasi-hereditary algebras revisited, An. St. Univ. Ovidius Constanta 4 (1996), 43–54.

[6] DLAB, V., RINGEL C. M., Quasi-hereditary algebras, Illinois Journal of Mathematics Volume 33, Number 2, Summer (1989)

[7] DLAB, V., RINGEL C. M., The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras, in: Representation Theory and Related Topics, in: London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. 168, (1992), pp. 200–224.

[8] ERDMANN, K., SÁENZ, C., On standardly stratified algebras, Comm. Algebra 31 (2003), 3429–3446.

[9] HAPPEL, D., Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras, London Mathematical Society Lecture Notes 119 (University Press, Cambridge, 1987).

[10] MARCOS, E., MENDÓZA, O., SÁENZ, C., Stratifying systems via relative simple modules, J. Algebra 280 (2002), 472–487.

[11] MARCOS, E., MENDÓZA, O., SÁENZ, C., Stratifying systems via relative projective modules, Comm. Algebra 33 (2005), 1559 - 1573.

[12] MIYASHITA, Y. Tilting modules of finite projective dimension, Math. Z. 193 (1986) 113-146.

[13] RINGEL C. M., The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, Math. Z. 208 (1991), 209–223.

[14] WAKAMATSU, T., Stable Equivalence for Self-injective Algebras and a Generalization of Tilting Modules, J. Algebra 134 (1990), 298–325.