

NYILATKOZAT

Név: Michaletzky Tamás

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematikus MSc

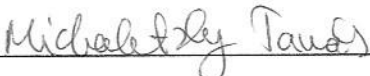
NEPTUN azonosító: PMBLWY

Szakedolgozat címe:

A chip-firing játék és a Bernardi-hatás

A szakedolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2022.05.29.



Szerző aláírása

EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A chip-firing játék és a Bernardi-hatás

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Michaletzky Tamás Vilmos

Matematikus MSc

Témavezető: Tóthmérész Lilla
tudományos munkatárs

OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK



Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Köszönetnyilvánítás	3
1. Chip-firing típusú játékok	5
1.1. A chip-firing játék	5
1.2. A felcserélhetőségi tulajdonság	7
1.3. Konfigurációk stabilizálódásáról	9
1.4. A stabilizálódási időről	11
2. Sandpile-csoport	16
2.1. Lineáris ekvivalencia	16
2.2. Sandpile-csoport	19
2.3. Break-divizorok	23
2.4. Bijekciók $S(G)$ és $\tau(G)$ között	26
3. Szalaggráfok	28
3.1. Síkba rajzolható gráfok	28
3.2. Irányítható felületek \mathbb{R}^3 -ben	30
3.3. Szalaggráfok	30
3.4. Néhány példa szalaggráfokra	33
4. Sandpile-torzorok	35
4.1. Csoporthatások	35
4.2. Sandpile-torzorok a feszítőfákon	36
4.3. Bernardi-hatás	37
4.4. Rotor-hatás	48
4.5. A két hatás egybeesése sík szalaggráfokon	51
5. Szalaggráfok génusza és a sandpile-torzorok	53
5.1. Génusz meghatározása a Bernardi-hatásokból	54
5.2. Részeredmények az általános esetben	60
5.3. Megoldási javaslatok	66

Bevezetés

A chip-firing játék egy gráfokon definiált kombinatorikai játék. Segítségével minden gráfhoz megadható egy véges Abel csoport, a sandpile csoport, melynek rendje a gráf feszítőfáinak száma. Ennek segítségével szalaggráfokon megadhatóak sandpile-torzorok különböző családjai, a sandpile csoport különféle hatásai a feszítőfákon. A dolgozatban a fentiek elméleti alapjait igyekszünk ismertetni, majd arra a kérdésre válaszolni, hogy a csoportthatások ismeretében a szalaggráf génusza is meghatározható-e.

Legyen $G = (V, E)$ véges, összefüggő, irányítatlan gráf. A

$$\text{Div}(G) = \left\{x = \sum_{v \in V} x_v \mathbf{v}\right\}$$

Abel-csoportot a gráf divizorcsoportjának nevezzük, az $x \in \text{Div}(G)$ elemeket divizoroknak. Ezt képzelhetjük úgy, hogy a v csúcson x_v darab (akár negatív) chip helyezkedik el. Egy divizor fokán a $\sum_{v \in V} x_v$ számot, tehát a konfiguráció összchip-számát értjük. A nulladfokú divizorok csoportját $\text{Div}^0(G)$ jelöli, általánosan $k \in \mathbb{Z}$ egész számra $\text{Div}^k(G)$ a k -ad fokú divizorokét. Egy csúcs tüzelésekor minden ráilleszkedő élen egy-egy chipet küld át, míg rajta fokszámnyival csökken a chippek száma. Ha L jelöli a gráf Laplace mátrixát, χ_v a v csúcs karakterisztikus vektorát, akkor a keletkezett konfigurációt

$$y = x - L\chi_v$$

alakban fejthetjük ki. Két divizort lineárisan ekvivalensnek tekintünk, ha tüzeléssel egymásba lőhetők. Az

$$S(G) = \text{Div}^0(G) / \sim$$

faktorcsoporthat a gráf sandpile-csoportjának nevezzük, ahol \sim jelöli ez előbbi ekvivalencia relációt. Erről belátjuk, hogy véges Abel-csoport, és rendje a gráf $\tau(G)$ feszítőfáinak számával egyezik meg:

$$|S(G)| = |\tau(G)|.$$

(G, ρ) -ről azt mondjuk, hogy szalaggráf, ha a G gráf ρ szalagstruktúrája minden csúcs körül megadja a ráilleszkedő élek egy ciklikus sorrendjét. Ez lehetőséget ad, hogy rögzített v kezdőcsúcs mellett $S(G)$ szabad, tranzitív hatásait definiáljuk szalaggráfok feszítőfáin, vagyis arra, hogy minden $T, T' \in \tau(G)$ feszítőfákra egyértelműen létezzen olyan $\gamma \in S(G)$ elem, hogy $\gamma \cdot T = T'$ ezen hatások szerint. Egy ilyen hatást sandpile-torzornak nevezünk. A dolgozatban kétféle hatás-családdal, torzorstruktúrával ismerkedünk meg: a rotor-hatásban a feszítőfa éleit rotoroknak tekintjük, és alkalmas, szalagstruktúra szerinti „rotálásukkal” kapunk egy másik feszítőfát; a Bernardi-hatásban egy feszítőfa szalagstruktúra szerinti bejárásához rendelünk speciális, ún. break divizorokat, és ezek segítségével definiáljuk egy fa képét. Tipikusan egy szalaggráfon több ilyen hatás létezhet, különböző kezdőcsúcsra különböző hatásokat kaphatunk. Egy szalaggráf génuszán azon minimális génuszú irányítható felület

génuszát értjük, amire a szalaggráf a szalagstruktúra tiszteletbentartásával írható. Síkbaágyazott szalaggráfokon csak egyféle sandpile torzor struktúra adható meg, nem sík szalaggráfokon azonban mindig léteznek olyan u, v csúcsok, hogy az általuk megadott α hatásokra $\alpha_u \neq \alpha_v$. Ez motiválja a kérdést, hogy vajon a torzor struktúra ismeretében meghatározható-e a szalaggráf génusza, a szalagstruktúra ismerete nélkül is. Alex McDonough egy 2020-as cikkében belátta, hogy a rotorhatásra ez lehetséges. Mi az elmúlt másfél évben a Bernardi-hatásra próbáltuk belátni ugyanezt. Mint látni fogjuk, ez nem triviális feladat, ugyanis a hatás igencsak faramuci módon definiált. A legnagyobb nehézséget az adja, hogy a hatásokat $S(G)$ -n definiáltuk, ami egy faktorcsoport. Ezzel szemben a kombinatorikai megközelítések $Div(G)$ -n dolgoznak konkrét konfigurációkkal. Ekkor mindig van egy utolsó lépés, hogy belássuk, hogy azon konfigurációk, amikkel dolgozunk, lineárisan ekvivalensek-e vagy sem, vagyis hogy az érvelésünk $S(G)$ -n is megállná-e a helyét. A dolgozatban két fő eredményünk van. Az egyik egy szűkebb problémára fókuszál, amikor a hatásokat $Div^0(G)$ -n definiáljuk (ekkor persze nem lesz injektív a hatás), a másokban pedig belátjuk, hogy mindezen eredmények meddig általánosíthatók az eredeti feladatra.

Tétel (5.1.6. Tétel). *Legyen G véges, egyszerű, összefüggő szalaggráf. $S(G)$ -nek legyen $B \subset Div^0(G)$ egy reprezentáns rendszere. Meg tudjuk adni B -t úgy, hogy ha minden v kezdőcsúcsra adottak a $\beta_v : \tau(G) \times B \rightarrow \tau(G)$ Bernardi-hatások, akkor ezek ismeretében egyértelműen meghatározhatjuk a szalaggráf génuszát, a szalagstruktúra explicit ismerete nélkül is.*

Sejtés (5.2.4. Sejtés). *Ha G 2-összefüggő egyszerű gráf, akkor a $\beta_v : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ hatások egyértelműen meghatározzák a szalaggráf génuszát, sőt a szalagstruktúra minden csúcs körül egyértelműen visszafejthető.*

Ez utóbbi sejtés teljes bizonyítása még nem sikerült, egy több esetes bizonyítás utolsó esete maradt nyitva, de erősen gyanítjuk, hogy igaz az állítás.

A dolgozat felépítése a következő. Az első fejezet egy történeti kitekintés a chip-firing játékról, mely a fenti elméletek kiinduló alapja. Eredetileg a chip-firing játékban nemnegatív konfigurációkat nézünk, és egy csúcs akkor tüzel, ha több chipje van, mint ahány ráilleszkedő él, így tartva meg a konfigurációk nemnegativitását a tüzelések során. Ekkor beszélhetünk stabil konfigurációkról, amikor egyik csúcs sem tud tüzelni, és stabilizálódó konfigurációkról, amelyek alkalmas tüzelésekkel stabil konfigurációba vihetők. Az első fejezet az ezzel kapcsolatos alapvető eredményeket foglalja össze.

A második fejezetben definiáljuk a sandpile csoportot, és megvizsgáljuk néhány alapvető tulajdonságát, kiszámoljuk a rendjét, és megnézzük néhány speciális gráf sandpile csoportját. A harmadik fejezet a szalaggráfokhoz nyújt bevezetőt. A negyedik fejezetben definiáljuk a rotor- és Bernardi-hatásokat, és belátjuk a hozzájuk kapcsolódó alapvető eredményeket. Az ötödik fejezetben rátérünk a saját eredményeinkre a génusz visszafejtéssel kapcsolatban. A fejezet végén ismertetjük a további lehetséges irányokat, ötleteket, amikkel azt gyanítjuk, hogy a dolgozat céljával kitűzött következő sejtés bizonyítható.

Sejtés. *Legyen G véges, összefüggő szalaggráf. Ha minden v kezdőcsúcsra adottak a $\beta_v : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ Bernardi-hatások, akkor ezek ismeretében egyértelműen meghatározhatjuk a szalaggráf génuszát, a szalagstruktúra explicit ismerete nélkül is.*

Köszönetnyilvánítás

Dolgozatom létrejöttéért nagy hálával tartozom Tóthmérész Lillának: az izgalmas témafelvetésért; hogy bevezetett a kombinatorikus gráfelméletnek ebbe az érdekes, aktuális és kihívásokkal teli ágába; a jó hangulatú beszélgetésekért és konzultációkért, és hogy mindig a rendelkezésemre állt; hogy írásaimat lelkiismeretesen végigolvasta és megjegyzéseivel javította; és minden más segítségéért, amivel a dolgozat elkészítését segítette.

Köszönet illet ezenkívül mindenki mást is, aki kedvességével, odafigyelésével és érdeklődésével átsegített engem a mesterképzés 2 évén és jelen szakdolgozat megírását bármilyen formában előmozdította.

1. fejezet

Chip-firing típusú játékok

Ebben a fejezetben definiáljuk a chip-firing játékot, ahogyan Björner, Lovász és Shor tette [BLS91]-ben, és megmutatjuk a kapcsolatát a Laplace mátrixszal. Bevezetjük a stabil konfiguráció fogalmát, és bebizonyítjuk, hogy a játék végkimenetele független a csúcsok kilövésének sorrendjétől. Két felső korlátot is levezetünk a stabilizálódási időre, egyet a gráf átmérője, egyet meg a Laplace mátrix második legkisebb sajátértéke függvényében.

A fejezet javarészt Caroline J. Klivans: The Mathematics of Chip-firing [Kli18] könyvének második fejezete alapján íródott.

1.1. A chip-firing játék

Legyen $G = (V, E)$ véges, irányítatlan, összefüggő gráf $|V| = n$ csúcson. A chip-firing játékot a következőképp definiáljuk.

1.1.1. Definíció. • G egy *chip-konfigurációja* egy nemnegatív egészértékű vektor a csúcsokon értelmezve:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n.$$

Egy tetszőleges $x \in \mathbb{Z}^n$ vektort *megengedhetőnek* nevezünk, ha minden koordinátája nemnegatív, tehát ha chip-konfiguráció.

- Egy $v \in V$ csúcsról azt mondjuk, hogy *tüzelésre kész* (vagy másként szólva *instabil*), ha legalább annyi chip van rajta, ahány él ráilleszkedik:

$$x_v \geq \deg(v).$$

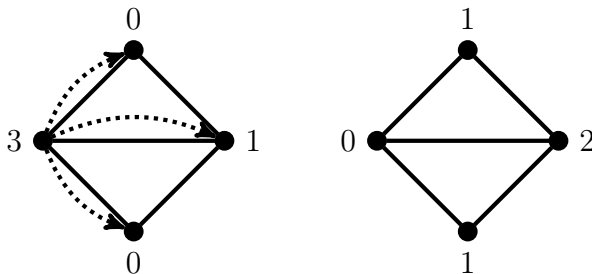
- Ha egy v csúcs *tüzel*, minden ráilleszkedő élen átküld egy-egy chipet, így növelve a szomszédai chip számát, a sajátját pedig $\deg(v)$ -vel csökkentve. *Legális tüzelésről*, vagy megengedhető lépésről akkor beszélünk, ha a keletkezett kiosztás szintén chip-konfiguráció, azaz nemnegatív, másként szólva ha a tüzelő csúcs tüzelésre kész állapotban volt.
- Egy x konfigurációt *stabilnak* mondunk, ha semelyik csúcs sem tüzelésre kész:

$$x_v < \deg(v), \forall v \in V.$$

Ha ez nem teljesül, *instabilnak* mondjuk.

- A *chip-firing játék* olyan folyamat a G gráfon, amelynek inputja egy x konfiguráció, és minden egyes lépésben kiválasztunk és kilövének egy tüzelésre kész csúcsot, amelyik újabb csúcsokat tehet tüzelésre késznek. Ha a kilövések során stabil konfigurációba kerülünk, a folyamat leáll, a játék véget ér.

A folyamatot az 1.1. ábra szemlélteti.



1.1. ábra. A chip firing játék: egy legális kilövés és a keletkezett stabil chip-konfiguráció.

1.1.2. Definíció. Jelölje $N(v)$ a $v \in V$ csúcs szomszédainak halmazát, $\deg(u, v)$ pedig az u és v csúcsok közötti élek számát. A G gráf L Laplace mátrixa ekkor olyan $n \times n$ -es egészértékű mátrix, amelynek főátlójában a csúcsok foka, a főátlón kívül pedig a két csúcsot összekötő élek számának ellentettje áll:

$$l_{i,j} = \begin{cases} -\deg(v_i, v_j) & i \neq j, v_j \in N(v_i) \\ \deg(v_i) & i = j \\ 0 & v_j \notin N(v_i). \end{cases}$$

Világos, hogy a definíciót tömören úgy is írható, hogy $i \neq j$ -re $l_{i,j} = -\deg(v_i, v_j)$, és $l_{i,i} = \deg(v_i)$, de a fenti megfogalmazás informatívabb.

1.1.3. Állítás. A Laplace mátrix szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix. Ha G összefüggő, akkor a sajátértékeire $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$.

Bizonyítás. Nézzük az $x^T Lx$ kvadratikus alakot tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ -re.

$$x^T Lx = \sum_{i,j=1}^n x_i l_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 \deg(v_i) - \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \deg(v_i, v_j) = \sum_{\substack{i,j=1, \\ (v_i, v_j) \in E(G)}}^n (x_i - x_j)^2 \geq 0.$$

A sajátértékek tehát valóban nemnegatívak, továbbá könnyen ellenőrizhetően $L\mathbf{1} = 0$, ahol $\mathbf{1}$ az csupa 1 vektor. A Laplace mátrix tehát szinguláris. Az állítás további részét, hogy összefüggő gráf esetén a nulla sajátérték multiplicitása 1, nem bizonyítjuk. \square

1.1.4. Állítás. Legyen adott egy x konfiguráció és egy $v \in V$ csúcs. Ha a chip-firing játékban most a v csúcs tüzel, akkor a keletkezett y konfiguráció

$$y = x - L\chi_v$$

alakban írható fel, ahol χ_v a v csúcs karakterisztikus vektora.

Bizonyítás. Az $L\chi_v$ vektor a Laplace mátrix v -nek megfelelő oszlopát adja, ez definíció szerint $\deg(v)$ a v -nek megfelelő sorban, és $-\deg(v, u)$ minden $u \neq v$ csúcsnak megfelelő sorban. A chip-firing játék során a v csúcs tüzelésekor v $\deg(v)$ darab chipet veszít, minden u szomszédja pedig $\deg(v, u)$ darab chipet nyer. Ez pont a fenti, mátrix-egyenlet alakban felírt állítást adja. \square

1.1.5. Következmény. *Egy x konfiguráció pontosan akkor stabil, ha minden $v \in V$ -re az $x - L\chi_v$ vektor valahol negatív koordinátájú, tömören*

$$x - L\chi_v \not\geq \mathbf{0},$$

ahol $\mathbf{0}$ a csupa nulla vektor.

Bizonyítás. Az x pontosan akkor instabil, ha létezik tüzelésre kész $v \in V$, azaz amelyekre $x_v \geq \deg(v)$. A fenti állítás miatt ez pontosan azt jelenti, hogy a v csúcs kitörésével keletkezett $y = x - L\chi_v$ konfiguráció is megengedhető. A megengedhetőség miatt ez azzal ekvivalens, hogy

$$\mathbf{0} \leq y = x - L\chi_v. \quad \square$$

1.2. A felcserélhetőségi tulajdonság

Nézzük az 1.3. ábrát! A második lépésben két csúcs is kitörésre kész volt. Elsőre nem világos, hogy, miként az a példán is leellenőrizhető, a végeredmény nem függ a csúcsok kilövési sorrendjétől.

1.2.1. Tétel (Felcserélhetőségi tulajdonság, lokális verzió). *Adott x chip-konfiguráció a G gráfon. Tegyük fel, hogy u és v is kitörésre készek, a kitörésükkel keletkezett konfigurációkat jelölje y_1, y_2 rendre. Ekkor y_1 -ben v , y_2 -ben u kitörésre kész, és a kitörésükkel keletkezett konfigurációk pedig megegyeznek.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt nézzük az u kitörésével keletkezett y_1 konfigurációt. Az állítás első fele szerint ekkor v továbbra is kitörésre kész. Valóban. Vegyük észre ugyanis, hogy u kitörésével v chip-száma csak növekedhetett, de nem csökkenhetett. Ha tehát x -ben kitörésre kész volt, akkor y_1 -ben is. Hasonlóan u kitörésre kész y_2 -ben.

Hogy a keletkezett konfigurációk megegyeznek, közvetlenül is könnyen ellenőrizhető, de gyorsabb, ha észrevesszük, hogy

$$y_1 - L\chi_v = (x - L\chi_u) - L\chi_v = (x - L\chi_v) - L\chi_u = y_2 - L\chi_u.$$

A keletkezett z konfiguráció így

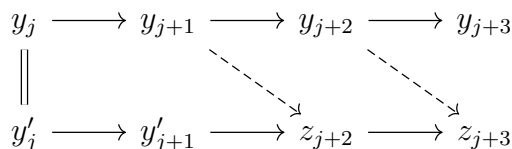
$$z = L\chi_{u,v}.$$

A tétel fő állítása tehát az volt, hogy a fenti lépések megengedhetőek, és így felcserélhetőek. \square

1.2.2. Megjegyzés. A

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y_1 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ y_2 & \longrightarrow & z \end{array}$$

diagram miatt a lokális felcserélhetőséget szokás *gyémánt-tulajdonságnak* is nevezni.



1.2. ábra. Gyémánt-szabály az 1.2.4. Tétel bizonyításához

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban bevezetjük az alábbi definíciót.

1.2.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy x chip-konfigurációból z elérhető, ha létezik megengedhető kilövések olyan sorozata, mely z -be vezet:

$$x = y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow y_{k-1} \rightarrow y_k = z.$$

A fenti tétel tömören tehát a következőt mondja:

Ha egy x chip-konfigurációból y_1 és y_2 is egy-egy lépéssel elérhető, akkor létezik olyan z konfiguráció, mely y_1 -ből és y_2 -ből is egy-egy lépéssel elérhető.

1.2.4. Tétel (Felcserélhetőségi tulajdonság, globális verzió). *Ha egy s stabil konfiguráció elérhető az x chip-konfigurációból véges sok legális lépés alatt, akkor minden x -ből legálisan elérhető stabil konfiguráció s -sel egyezik meg.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy s az x -ből legálisan elérhető egyik stabil konfiguráció, és rögzítsük a hozzávezető kilövésorozatot: $x = y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow y_k = s$. Vegyünk egy olyan s' , x -ből szintén legálisan elérhető stabil konfigurációt, melyhez vezető kilövésorozat a legtovább megegyezik az s -hez vezetővel: $x = y'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow y'_l = s'$, ahol $y_i = y'_i$ minden $i \leq j$ valamilyen $j \leq \min\{k, l\}$ -re, és j a lehető legnagyobb az ilyenek közül. Ekkor a lokális felcserélhetőség miatt létezik z_{j+2} konfiguráció, mely y_{j+1} -ből és y'_{j+1} -ből is egy lépéssel elérhető (lásd 1.2. ábra). Ugyanígy létezik olyan z_{j+3} is, mely y_{j+2} -ből és z_{j+2} -ből egyaránt egy lépéssel elérhető. Iteratívan folytatva azt kapjuk, hogy létezik z_{k+1} , mely y_k -ből és z_k -ből egy lépéssel elérhető, ám $y_k = s$ stabil konfiguráció a feltevés szerint. Ha tehát $s' \neq s$ (vagyis $j < \min\{k, l\}$), akkor ellentmondásra jutunk. \square

[Tho96] általánosabb esetben is bizonyítja a felcserélhetőségi tulajdonságot. Valójában tehát ez a chip-firing típusú játékokra általánosan jellemző állítás.

1.2.5. Definíció. A fenti tételben szereplő s chip-konfigurációt az x -hez tartozó stabil konfigurációnak nevezzük, és

$$\text{stab}(x) = s$$

módon jelöljük. Egy $x = y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow y_k = s$ sorozatot *stabilizáló sorozatnak* nevezzük. Ha van ilyen sorozat, akkor x -et *stabilizálódónak* mondjuk.

A fenti két tétel következménye az alábbi két egyszerű állítás is.

1.2.6. Következmény. *Legyen x olyan chip-konfiguráció, melyhez létezik stabilizáló kilövésorozat. Ekkor*

- minden kilövésorozat stabilizálódik idővel;
- bármely stabilizáló sorozat hossza megegyezik,
- és minden csúcs ugyanannyiszor fordul elő ezekben a sorozatokban.

Nem lehet tehát, hogy egy kezdeti chip-konfigurációból néhány kilövésorozat véges, néhány végtelen.

1.2.7. Definíció. Egy stabilizálódó x chip-konfiguráció *stabilizálódási ideje* alatt egy stabilizáló sorozatának hosszát értjük, mely az előző állítás értelmében egyértelmű.

1.2.8. Megjegyzés. Björner, Lovász és Shor [BLS91]-ben más nézőpontból vizsgálta a kérdést. Egy adott konfiguráció legális kilövésorozatát szavaknak tekintett a csúcsoknak megfelelő betűk kilövési sorrend szerinti egymás mellé írásával, és az így kapott nyelvnek nézte a tulajdonságait. A lokális felcserélhetőségi tulajdonság például azt jelenti, hogy ha w egy legális szó, és wu , wv egyaránt szótárbeli szó, akkor wuv és wvu is szótárbeli és ugyanazt a konfigurációt adja. Ez a megközelítés ugyanakkor valamennyire eltávolodik a játék szemléletes voltától, így a történeti hűség kárára nem ezt használtuk.

A szakasz fő következménye a következő:

A chip-firing játék során amelyik csúcs tüzelésre kész, az (egyszerre) tüzel. Ha egy konfiguráció valamely legális kilövésorozatával elér egy stabil konfigurációt, akkor bármely legális kilövésorozata ugyanahhoz a stabil konfigurációhoz vezet.

Ezek az eredmények annyira alapvető fontosságúak, hogy később az idetartozó tételek idézése nélkül is használni fogjuk őket.

1.3. Konfigurációk stabilizálódásáról

Az előző szakaszban láttuk, hogy ha egy konfiguráció stabilizálódik, akkor ez a stabil konfiguráció egyedi. Felmerül a kérdés, hogy el lehet-e előre dönteni a kezdeti konfigurációról, hogy stabilizálódik-e, másként szólva van-e jó karakterizációja a stabilizálódó konfigurációknak. Björner, Lovász és Shor [BLS91]-ben találtak egyet (ha mint látni fogjuk, csak részlegeset is) a gráf csúcsainak, éleinek, és a kezdeti konfiguráció összchipszámának függvényében.

1.3.1. Állítás. *Egy kezdeti x chip-konfiguráció pontosan akkor stabilizálódik véges időn belül, ha van olyan csúcs, amelyik nem tör ki x stabilizálódása folytán.*

1.3.2. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy rögtön implicit használjuk a stabilizáló kilövésorozatok ekvivalenciájáról szóló tételt! Ha ugyanis *lényegében* különböznének a stabilizáló sorozatok, nem csak a csúcsok kilövési sorrendjében, de számában is, akkor a fenti állítás értelmét vesztené.

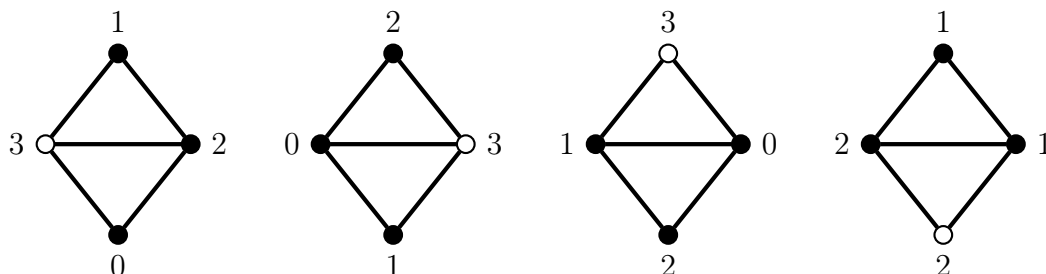
Bizonyítás. Ha x sosem stabilizálódik, akkor G végeessége folytán létezik olyan v csúcs, amelyik végtelen sokszor tüzel. A csúcsok véges foka folytán azonban ez azt jelenti, hogy v minden szomszédja is végtelen sokszor tüzel, ugyanis egy idő után v kitörései szükségszerűen „feltöltik”. A gráf összefüggősége folytán ez azt jelenti, hogy minden csúcs végtelen sokszor tör ki.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy x stabilizálódó, és vegyük egy stabilizáló kitörés sorozatát! Tegyük fel, hogy ebben a sorozatban minden csúcs legalább egyszer szerepel (vagyis hogy minden csúcs legalább egyszer kitör), és vegyük azt a v csúcsot, amelyik először „hagyja abba” a kitörést, vagyis az első olyan csúcsot, amelyik után önmaga már nem, de mindegyik más csúcs legalább egyszer még szerepel. Ha minden más csúcs kitör v „kilépése” után, akkor v minden szomszédja, tehát v $\deg(v)$ chippel mindenképpen gyarapodni fog x stabilizálódásáig. Egy stabilizáló kitöréssorozat definíció szerint megengedhető, tehát v nemnegatív chipszámmal fejezte be a

kitörést. Következésképp v szomszédai „újrátöltik” v -t. Mivel a chipszám csökkentés egyetlen módja a kitörés, és v instabil helyzetben van (kitörésre kész), v -nek muszáj még egyszer kitörnie.

Ha tehát minden csúcs legalább egyszer kitör, akkor a folyamat végtelen, ha pedig a folyamat végtelen, akkor minden csúcs végtelen sokszor tör ki. Ez bizonyítja az állítást. \square

1.3.3. Példa. Az 1.3 ábrán egy végtelen játékot mutatunk.



1.3. ábra. Egy sosem stabilizálódó játékban minden csúcs végtelen sokszor tör ki.

Vegyük a csúcsok egy tetszőleges v_1, \dots, v_n sorrendjét. Ha minden élet a *nagyobb* indexű csúcs felé irányítjuk, G egy aciklikus orientációját kapjuk.

1.3.4. Tétel. Legyen $G = (V, E)$ véges, összefüggő, irányítatlan gráf $|V| = n$ csúcson és $|E| = m$ élen. Nézzük azon kezdeti x chip-konfigurációkat, melyeknek összchipszáma $\sum_{v \in V} x_v = N$.

1. Ha $N > 2m - n$, akkor minden N összchipszámú kezdeti konfigurációra a chip-firing folyamat végtelen.
2. Ha $m \leq N \leq 2m - n$, akkor van olyan x , amelyik sosem, és van olyan, amelyik véges időn stabilizálódik.
3. Ha $N < m$, akkor minden N összegű chip-firing folyamat stabilizálódik idővel.

Bizonyítás. Legyen az x kezdeti konfiguráció N összegű.

1. Tegyük fel, hogy $N > 2m - n$. Tudjuk, hogy véges gráfokra $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$. Mivel a chip-firing játék során az összchipszám változatlan, ezért a skatulya-elv alapján mindig lesz olyan v csúcs, amelyiken legalább $\deg(v)$ darab chip van, tehát a folyamat sosem áll le.
2. Tegyük most fel, hogy $m \leq N \leq 2m - n$. Az $(x_v = \deg(v) - 1)_{v \in V}$ konfiguráció összchipszáma $2m - n$ és triviálisan stabil. Most mutatunk egy $N = m$ összegű, végtelen folyamatot indukáló konfigurációt. Ehhez vegyük a gráf egy tetszőleges aciklikus orientációját, és minden irányított \vec{uv} él esetén v -re helyezzünk egy chipet. Ezt nevezzük az élek egy irányítása által indukált konfigurációnak. Minden aciklikus orientációnak van nyelője, tehát van legalább egy v csúcs, amelyiken $\deg(v)$ darab chip van. Törjön ki ez a csúcs, és a belőle kivezető éleket fordítsuk meg! Vegyük észre, hogy az így kapott konfiguráció pontosan az új irányítás által indukált konfigurációval egyezik meg! Valóban: v -n 0 darab chip van, és forrássá változott, minden u szomszédja pedig $\deg(u, v)$ darab chippel gazdagodott, pontosan annyival, ahány kezdetben \vec{uv}

típusú él a kitörés után megfordult. Ezen megmaradási tulajdonság miatt ez a folyamat végtelen, az pedig világos, hogy az összcipyszám m . Ha az első konfigurációból elveszünk (vagy a másodikhoz hozzáadunk), stabil (végtelen) konfigurációt kapunk.

3. Tegyük végül fel, hogy $N < m$, és kezdjük el játszani a játékot. Ha a kezdeti x konfiguráció stabil volt, akkor jók vagyunk, ha nem, akkor egy idő után álljunk le (ha addig nem stabilizálódtunk), és így kapunk valami véges kilövésorozatot. Jelöljük meg a chipeket, és minden uv élhez rendeljük hozzá azt a konkrét chipet, amelyik akkor halad át az élen, amikor azon az élen először halad át chip. Ez ugyanaz, mintha azt a chipet rendelnénk hozzá, amelyik akkor halad át rajta, amikor az u, v csúcsok közül valamelyik először tör ki. Szükség van azonban itt egy kis pontosításra. A bizonyítást úgy szeretnénk ugyanis befejezni, hogy mivel élszámnál kevesebb chip van, van olyan él, amelyhez nem rendeltünk chipet, ami csak úgy lehet, ha egyik végpontja sem tört ki. Mivel ekkor találtunk olyan csúcsot, amelyik sosem tört ki, az 1.3.1. Állítás értelmében ez azt jelenti, hogy x stabilizálódó.

Igaz-e azonban, hogy az első következtetés, másként szólva igaz-e, hogy egy chip legfeljebb egy élhez tartozik? Gondolhatjuk ugyanis, hogy először kitör a v csúcs, és minden ráilleszkedő vu élhez hozzárendeljük a rajta most áthaladó c chipet. Később u kitörésével a c chip továbbvándorol egy következő csúcsra, így szintén c -t rendelve hozzá a megfelelő élhez. Vegyük azonban észre, hogy u kitörésekor legalább egy chip (egész pontosan $\deg(u, v)$ darab) vissza is kerül v -re! Miért is ne küldenénk akkor inkább *vissza* a c chipet, ahelyett, hogy *továbbvándoroltatnánk*; a még chippel nem rendelkező éleken pedig új, friss chipeket küldünk. Persze, ez utóbbi is kis megfontolást igényel, ti. hogy minden chippel nem rendelkező élre ténylegesen jut-e új, még fel nem használt chip. De hát ez is igaz, ugyanis azt tudjuk, hogy ha egy u csúcs kitör, akkor legalább $\deg(u)$ darab chip van rajta. Ha van még chippel nem rendelkező éle, az ezáltal azt jelenti, hogy u -n volt chip eredetileg is, mégpedig legalább annyi, ahány chippel nem rendelkező él most éppen illeszkedik rá, máskülönben nem lenne most kitörésre kész. Tehát minden élre különböző chip jut(hat), így kész vagyunk. \square

1.4. A stabilizálódási időről

Az előző szakaszban részleges karakterizációt adtunk arra a kérdésre, hogy egy kezdeti konfiguráció stabilizálódik-e a chip-firing játék során. Ebben a szakaszban választ adunk arra a kérdésre, hogy tudunk-e felső korlátot adni a stabilizálódó konfigurációk stabilizálódási idejére? Tardos [Tar88]-ban a gráf átmérőjét, Lovászék pedig [BLS91]-ben a Laplace mátrix második legkisebb sajátértékét használva adtak polinomiális felső becslést a stabilizálódási időre. Ebben a szakaszban mindkettőt ismertetjük.

1.4.1. Definíció. Egy összefüggő G gráf átmérője alatt a csúcsok közötti utak hosszának maximumát értjük. Precízen: ha $d(u, v)$ jelöli az u és v csúcsok távolságát, akkor a gráf átmérője

$$\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

1.4.2. Tétel. Legyen $G = (V, E)$ véges, összefüggő, irányítatlan gráf $|V| = n$ csúcson és $|E| = m$ élen. Ha egy N összcipyszámú x konfiguráció stabilizálódó, akkor legfeljebb $2mnd$ lépés alatt biztosan stabilizálódik.

Legyen x egy kezdeti chip-konfiguráció, és nézzük x egy k hosszú $\xi = w_1 \dots w_n$ legális, de nem feltétlen stabilizáló kilövés-sorozatát. Egy $0 \leq t \leq k$ időpontban $\tau_t^\xi : V \mapsto \mathbb{N}$ függvény jelöli, hogy egy w csúcs hányszor tört már ki a ξ sorozatban a t időpontig. Másként fogalmazva $\tau_t^\xi(w) = \#\{w \in \xi|_t\}$, ahol $\xi|_t$ a ξ -nek a t hosszú kezdőszelete. Egy N chipösszegű konfigurációra igaz a következő lemma.

1.4.3. Lemma. *Legyen x egy N chipösszegű kezdeti chip-konfiguráció. A fenti jelölések mellett ekkor x minden k hosszú $\xi = w_1 \dots w_n$ legális kilövés-sorozatára és minden u és v szomszédos csúcspárra, bármely $0 \leq t \leq s$ időpontban*

$$|\tau_t^\xi(u) - \tau_t^\xi(v)| \leq N.$$

Bizonyítás. A jelölések egyszerűsítése végett az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az s -dik időpontban vizsgálódunk, így τ_s helyett írjunk csak τ -t. Tegyük fel, hogy $a = \tau^\xi(u) < \tau^\xi(v) = b$. A csúcsok ekkor két részre particionálhatók:

$$S = \{w \in V \mid \tau^\xi(w) \leq a\}, \quad T = V \setminus S.$$

A konstrukció szerint $u \in S, v \in T$, és a gráf összefüggősége miatt a két csúcshalmaz között vezet legalább egy él (pl. az uv él). Be szeretnénk látni, hogy v legfeljebb N -szer többször tört ki, mint u . Ehhez csináljuk a következőt!

A csúcsokat számozzuk be $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ alakban. Jelölje $\boldsymbol{\tau} = (\tau^\xi(v_1), \dots, \tau^\xi(v_n))$ a τ függvény vektorizáltját. A $\boldsymbol{\tau}$ vektort S és T szerint bontsuk két részre, ahol értelemszerűen $\boldsymbol{\tau}_S$ $\boldsymbol{\tau}$ -val egyezik meg az S -nek koordinátákon és 0 különben, $\boldsymbol{\tau}_T$ pedig a T -n egyezik meg $\boldsymbol{\tau}$ -val. A ξ kilövésorozat által kapott y konfigurációt ekkor

$$y = x - L\boldsymbol{\tau} = x - L\boldsymbol{\tau}_S - L\boldsymbol{\tau}_T$$

módokon számolhatjuk ki. Fontos megjegyezni, hogy a fenti képlet algebrailag ugyan helyes, de $x - L\boldsymbol{\tau}_S$ nem feltétlen legális kilövésorozat eredménye! Semmi sem garantálja ugyanis, hogy S csúcsai anélkül tudnának legálisan kitörni pontosan annyiszor, ahányszor ξ -ben, hogy T csúcsai akár egyszer is kitörtek volna: márpedig a fenti felírás azt sugallja, hogy először az S csúcsait, majd csak utána a T csúcsait lőjük ki. Az azonban igaz, hogy ha egy x kezdeti konfigurációból a ξ legális kilövésorozat y -t adja, akkor ξ tetszőleges permutációja is y -t adja, csak nem feltétlen legális lépések sorozataként. Használjuk ezt ki!

A ξ legális kilövésorozatból készítsük el a ξ' (nem feltétlen legális) kilövésorozatot úgy, hogy T elemeit S mögé soroljuk. Ezt úgy csináljuk, hogy ξ -ből elhagyjuk először T elemeit, így kapjuk a ξ_S kilövéseket, majd fordítva, ξ -ből S elemeit hagyjuk el, így kapva ξ_T elemeit, majd a két új sorozatot egymás mögé írjuk. Az új kilövésorozat ekkor $\xi' = \xi_S \xi_T$ alakba is írható. Világos, hogy a ξ_S -beli csúcsok τ_S -szer, a ξ_T -beliek τ_T -szer lőttek ki ξ' -ben is. Mit kapunk így, ha most ξ' szerint is végigjátsszuk a játékot, ám ezúttal nem feltétlen legális csak lépésekkel, útközben akár negatív chipszámot is megengedve az egyes csúcsokon? Miután S csúcsai mind kitörtek ők már csak *kaphatnak* chipeket az S és T közötti éleken keresztül, őket *visszaküldeni* már nem fogják. S csúcsai legfeljebb a -szor törnek ki, a játék végéig pedig legfeljebb N chip érkeztetett a T csúcsai felől (hiszen a chipek vissza már nem kerülhettek). Az u és v szomszédosak, a köztük futó él S és T közötti, így adódik, hogy u kitörései után v sem törhetett ki többször, mint N , vagyis $b - a \leq N$. \square

Az 1.4.2. Tétel bizonyítása. A tétel bizonyítása innen már könnyű. Vegyünk egy N chipösszegű x kezdeti chip-konfigurációt, a gráf átmérőjét jelölje $d = \text{diam}(G)$.

Az 1.3.1. Állítás alapján, ha x stabilizálódó, akkor van olyan v csúcs, amelyik sosem tör ki x stabilizálódása alatt. Az előző lemma alapján ennek minden szomszédja legfeljebb N -szer tör ki. Indukcióval látható, hogy ekkor minden csúcs legfeljebb dN -szer tör ki. Az 1.3.4. Tétel alapján $N \leq 2m - n \leq 2m$, mivel x -ről feltettük, hogy stabilizálódó. Adódik, hogy n csúcsú gráfon ekkor egy N összegű stabilizálódó konfiguráció legfeljebb $2mnd$ idő alatt biztosan stabilizálódik. \square

1.4.4. Megjegyzés. A Lemma bizonyítása körülményesnek látszik, de valójában csak végig kellett gondolni, hogy ha a játékra egy adott pillanatban nézünk rá és csak a kapott konfiguráció érdekel minket, a köztesek nem, akkor az addig kitört csúcsokat tetszőleges sorrendben kilőve ugyanazt a konfigurációt kapjuk, csak nem feltétlen legális lépésekkel. Ez a trükk gyakran hasznos lehet a bizonyításokban. A mi esetünkben pl. két olyan részre tudtuk szedni általa a csúcsokat, hogy a megoldás lényegében az ölünkbe hullott onnan.

Tardos felső korlátja n^4 nagyságrendű. Lovászéknak sikerült olyan felső korlátot adni, amely általános esetben rosszabb ugyan, mert akár n^5 nagyságrendű is lehet, de a gráfra tett megszorításokkal Tardos korlátja alá is kerülhet. Az állításuk belátásához szükségünk lesz néhány további spektrálgráfelméleti állításra.

1.4.5. Tétel ([BLS91]). *Legyen $G = (V, E)$ véges, összefüggő, irányítatlan gráf $|V| = n$ csúcson és $|E| = m$ élen. Ha egy N összcshipszámú x konfiguráció stabilizálódó, akkor legfeljebb $2nN/\lambda_{n-1}$ lépés alatt biztosan stabilizálódik, ahol $\lambda_{n-1} > 0$ a Laplace mátrix második legkisebb sajátértéke.*

1.4.6. Lemma. *A gráf átmérőjét jelölje $d = \text{diam}(G)$. Ekkor $\lambda_{n-1} \geq 1/(nd)$.*

Bizonyítás. Számozzuk be a csúcsokat 1-től n -ig: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Tudjuk, hogy $L\mathbf{1} = 0$. Jelölje w a λ_{n-1} -hez tartozó egység hosszú sajátvektort. $\|w\| = 1$ miatt létezik olyan csúcs, mondjuk v_1 , hogy

$$|w_1| \geq 1/\sqrt{n}.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $w_1 > 0$. A $w^T \mathbf{1} = \sum_{i=1}^n w_i = 0$ skalárszorzat eltűnik, mivel a sajátvektorok merőlegesek egymásra, így létezik olyan csúcs, mondjuk v_k , hogy

$$w_k < 0.$$

A v_1 és v_k csúcsok közötti legrövidebb utat jelölje P . Ekkor

$$k - 1 \leq d.$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\lambda_{n-1} = w^T Lw = \sum_{uv \in E} (w_u - w_v)^2 \geq \sum_{uv \in P} (w_u - w_v)^2 = (*).$$

A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenségből, és a korábbi kiemelt becsléseinkből kapjuk a Lemma állítását:

$$(*) = \sum_{i=1}^{k-1} (w_i - w_{i+1})^2 \geq \frac{1}{k-1} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (w_i - w_{i+1}) \right)^2 = \frac{(w_1 - w_k)^2}{k-1} \geq \frac{w_1^2}{k-1} \geq \frac{1}{nd}. \quad \square$$

A Tétel bizonyítása előtt idézzünk fel néhány lineáris algebrai állítást. Vegyünk egy A pozitív szemidefinit mátrixot. A rangja legyen r , spektrumát jelölje $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r-1} = \dots = \lambda_n = 0$. A spektrálfelbontása ekkor

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T,$$

ahol $Av_i = \lambda_i v_i$ az i -dik ortonormált sajátvektor. A -nak A^* -gal jelölt pszeudoinverze ekkor könnyen ellenőrizhetően

$$A^* = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^T$$

alakban írható. Egy ortonormált rendszerre mindig igaz a $\sum_{i=1}^n v_i v_i^T = I_n$ összefüggés, ahol I_n az $n \times n$ identitás mátrix. Ezt kihasználva az A^*A szorzat

$$A^*A = \sum_{i=1}^r v_i v_i^T = I_n - \sum_{j=r+1}^n v_j v_j^T.$$

Az 1.4.5. Tétel bizonyítása. A kezdeti, N chipösszegű chip-konfigurációt jelölje $x = (x_1, \dots, x_n)$. Nézzünk rá a folyamatra s lépés után, a keletkezett konfigurációt $y = (y_1, \dots, y_n)$ jelöli. Mint korábban, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ jelöli, hogy az egyes csúcsok ezen s lépés alatt hányszor törtek ki. Ekkor

$$L\tau = x - y.$$

Az 1.3.1. Állítás alapján, ha x stabilizálódó, akkor van olyan csúcs, az általánosság megszorítása nélkül legyen ez a v_1 csúcs, amely nem tört ki ezen s lépés alatt, vagyis amelyre $\tau_1 = 0$. Ekkor $e_1^T \tau = 0$, ahol e_1 az első standard bázisvektor. A lépések s számára $s = \sum_{i=1}^n \tau_i = \mathbf{1}^T \tau$ adódik.

Összefüggő gráf esetén L rangja $n - 1$, nézzük L és L^* spektrálfelbontásait:

$$L = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T, \quad L^* = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^T.$$

A két mátrix szorzatára az előzőek alapján

$$L^*L = I_n - v_n v_n^T = I_n - \frac{1}{n} J_n,$$

ahol $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_n$ a 0-hoz tartozó, azonosan $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sajátvektor, J_n pedig az $n \times n$ csupa 1 mátrix. Ha ezt balról e_1^T -vel megszorozzuk, akkor $e_1^T L^*L = e_1^T - \frac{1}{n} \mathbf{1}^T$ -t kapunk. Átrendezve látjuk, hogy

$$\mathbf{1}^T = n e_1^T (I_n - L^*L).$$

Az előzőekkel összerakva a lépések s számára a következő felső becslés adódik:

$$\begin{aligned} s &= \mathbf{1}^T \tau = n e_1^T (I_n - L^*L) \tau = -n e_1^T L^*L \tau = -n e_1^T L^* (x - y) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{\lambda_i} (e_1^T v_i) (v_i^T (x - y)). \end{aligned}$$

Mivel tudjuk, hogy $s \geq 0$, a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével s -et felülről becsülhetjük

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{\lambda_i} |e_1^T v_i| |v_i^T(x-y)| \leq \frac{n}{\lambda_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} |e_1^T v_i| |v_i^T(x-y)| \\ &\leq \frac{n}{\lambda_{n-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |e_1^T v_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} |v_i^T(x-y)|^2} \end{aligned}$$

módon.

A gyökvonás első tényezőjét számolva

$$\sum_{i=1}^{n-1} (e_1^T v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} e_1^T (v_i v_i^T) e_1 = e_1^T \sum_{i=1}^{n-1} (v_i v_i^T) e_1 = e_1^T (I_n - \frac{1}{n} J_n) e_1 = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

felső becslés jön ki, míg a második tényezőre hasonló számolás alapján

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (v_i^T(x-y))^2 &= (x-y)^T \sum_{i=1}^{n-1} (v_i v_i^T) (x-y) = (x-y)^T (I_n - \frac{1}{n} J_n) (x-y) \\ &= \|x-y\|_2^2 - \frac{1}{n} \|x-y\|_1^2 \leq \|x-y\|_2^2. \end{aligned}$$

Mivel

$$\|x-y\|_2 \leq \|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = 2N,$$

s becslésére visszatérve tehát

$$s \leq \frac{n}{\lambda_{n-1}} \|x-y\|_2 \leq \frac{2nN}{\lambda_{n-1}}$$

adódik, bizonyítva a Tételt. □

1.4.7. Megjegyzés. Ha az 1.4.6. Lemma eredményét is felhasználjuk, azt látjuk, hogy $s \leq \frac{2nN}{\lambda_{n-1}} \leq 2n^2Nd$, ami akár n^5 nagyságrendű is lehet, tehát azt látjuk, hogy Tardos becsléséhez képest általános esetben rosszabb ez a becslés. Ám léteznek gráfok, hogy ez jobb ([BLS91], Theorem 3.2. utáni megjegyzés).

2. fejezet

Sandpile-csoport

Az előző fejezetben bevezettük a chip-konfiguráció és legális tüzelés fogalmát, melyek segítségével definiáltuk, mikor nevezünk egy konfigurációt elérhetőnek egy másiktól. Most ezt a relációt fogjuk ekvivalenciarelációvá bővíteni, majd ennek segítségével egy $S(G)$ Abel-csoportot rendelünk hozzá egy gráfhoz, amit *sandpile csoportnak* fogunk nevezni. Belátjuk, hogy a csoport rendje megegyezik a feszítőfák számával, ami miatt a 4 fejezetben ezen csoport szabad, tranzitív hatását tudjuk definiálni egy szalaggráf $\tau(G)$ feszítőfáin. Ezután ismertetjük a break divizorok fogalmát, végül megnézzük, hogy hogyan tudunk bijekciót adni a sandpile csoport és a feszítőfák között.

Legyen $G = (V, E)$ véges, összefüggő, irányítatlan gráf, $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^V$ két chip-konfiguráció. Az y elérhető x -ből, ha létezik legális kilövéseknek x -ben kezdődő és y -ban végződő sorozata. Vegyük észre, hogy az *elérhetőségi reláció* reflexív (bármely konfiguráció az üres sorozattal elérhető önmagából) és tranzitív (a legális kilövés sorozatok egymás után írásával), de nem szimmetrikus: egy stabilizálódó konfigurációból ugyanis elérhető egy stabil, ám egy stabil konfigurációból definíció szerint nincs legális lépés, tehát az csak önmagával áll relációban. Formálisan, ha $x \rightarrow y$ jelöli, hogy y elérhető x -ből, akkor a \rightarrow reláció

- reflexív: $x \rightarrow x, \forall x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^V$,
- tranzitív: $x \rightarrow y, y \rightarrow z \Rightarrow x \rightarrow z, \forall x, y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^V$,
- nem szimmetrikus: $\exists x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^V : x \rightarrow y, y \not\rightarrow x$.

Hogyan tehetjük szimmetrikussá a fenti relációt? Az egyik, kevésbé elegáns megoldás, hogy azt mondjuk, két konfiguráció relációban áll egymással, ha az egyikből elérhető a másik. Ez világos, hogy reflexív maradt és tranzitív is, de ezenkívül szimmetrikus is már. Hogyan lehetne az elérhetőségi relációt természetesebb módon szimmetrikussá tenni? A megoldáshoz be kell vezetnünk egy új műveletet, csúcsok *anti-tüzelését*, és el kell engednünk a konfigurációk nemnegativitási feltételét is. Ezzel természetesen a legális tüzelés fogalmát is elfelejtjük.

2.1. Lineáris ekvivalencia

Legyen $G = (V, E)$ véges, összefüggő, irányítatlan gráf. Bővítsük ki először a chip-konfiguráció és tüzelés fogalmát az 1.1.1. Definíció mintájára.

2.1.1. Definíció. • G egy *divizora* egy csúcsokon értelmezett egészértékű vektor:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^V.$$

A koordinátákat továbbra is chipként értelmezzük, megengedve a negatív számú chipet is. A divizorok Abel-csoportját $Div(G)$ jelöli, ahol a csoportművelet a koordinátánkénti összeadás.

- Ha egy v csúcs *tüzel*, minden ráilleszkedő élen átküld egy-egy chipet, így növelve a szomszédai chip számát, a sajátját pedig $\deg(v)$ -vel csökkentve. Ha egy v csúcs *anti-tüzel*, akkor minden ráilleszkedő élen egy-egy chipet *kap*, így csökkentve szomszédai chip-számát, a sajátját $\deg(v)$ -vel növelve. Az anti-tüzelés tehát a tüzelés inverze, és gyakran azt mondjuk, hogy a v csúcs *kölcsönkér*. Ha egy csúcs *aktiválódik*, akkor vagy tüzel vagy anti-tüzel.
- *Kilövés-sorozat*on csúcsok egymás utáni aktiválódását értjük.
- Egy $y \in Div(G)$ divizor *elérhető* az $x \in Div(G)$ divizorból, ha létezik x -ben kezdődő és y -ban végződő kilövés-sorozat.
- Az $x, y \in Div(G)$ divizorokat *lineárisan ekvivalensnek* mondjuk és $x \sim y$ módon jelöljük, ha x elérhető y -ből.

2.1.2. Példa. Az 1.3. ábra konfigurációi tehát egymással lineárisan ekvivalensek. Az összes velük lineárisan ekvivalens divizor alkotja az $\tilde{\omega}$ ekvivalencia osztályukat.

2.1.3. Megjegyzés. Egy divizorra gyakran fogunk konfigurációként is hivatkozni. Mivel a megengedhetőség (nemnegativitás) feltételét elengedtük, a továbbiakban ezt a két fogalmat megegyezőnek tekintjük, ahol ez nem okoz félreértést. A divizorok fenti definícióját vehetjük a chip-konfigurációk kibővítésének, természetes általánosításának is.

2.1.4. Állítás. *A lineáris ekvivalencia ekvivalencia-reláció a divizorok csoportján.*

Bizonyítás. A fejezet elején leírtakhoz hasonlóan világos, hogy az üres kilövés-sorozatot véve minden divizor lineárisan ekvivalens önmagával, továbbá hogy a kilövés-sorozatok egymás után írásával belátható a reláció tranzitivitása is. Tegyük fel, hogy egy $x \in Div(G)$ divizorból az $y \in Div(G)$ divizor elérhető a

$$\xi = v_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \dots v_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$$

kilövés-sorozat segítségével, ahol $\varepsilon_{i_j} = 1$ esetén a v csúcs kitört, $\varepsilon_{i_j} = -1$ esetén pedig kölcsönkért, minden $1 \leq j \leq k$ -ra. Jelölje ξ^{-1} a ξ megfordítását a következő értelemben:

$$\xi^{-1} = v_{i_k}^{-\varepsilon_{i_k}} \dots v_{i_1}^{-\varepsilon_{i_1}}.$$

ξ^{-1} -ben tehát a csúcsokat fordítva írjuk fel, és minden csúcs amelyik kitört, az kölcsönkér, amelyik kölcsönkért, az kitörik. Világos ez alapján ξ^{-1} egy y -ből x -be tartó kilövés-sorozat. \square

Az 1.1.4. Állításhoz hasonlóan a két kitörés művelet felírható a gráf Laplace mátrixának segítségével.

2.1.5. Állítás. *Legyen adott egy x divizor és egy $v \in V$ csúcs. Ha a v csúcs tüzel, akkor a keletkezett y konfiguráció $y = x - L_{\chi_v}$, ha anti-tüzel, akkor $y = x + L_{\chi_v}$ alakban írható fel, ahol χ_v a v csúcs karakterisztikus vektora.*

2.1.6. Tétel (Felcserélhetőségi tulajdonság). *Legyen adott egy $x \in Div(G)$ divizor és egy $\xi = w_1^{\varepsilon_1} \dots w_k^{\varepsilon_k}$ kilövéssorozat. Ekkor a ξ -beli elemek tetszőleges $\xi_{(j_1 \dots j_k)} = w_{j_1}^{\varepsilon_{j_1}} \dots w_{j_k}^{\varepsilon_{j_k}}$ permutációjára x -nek a ξ általi és $\xi_{(j_1 \dots j_k)}$ általi képei megegyeznek.*

Bizonyítás. Az előző állítást induktívan alkalmazva kapjuk, hogy x -nek a ξ általi x^ξ képére

$$x^\xi = x - \sum_{j=1}^k \varepsilon_{i_j} \cdot \chi_{v_{i_j}}$$

igaz. A jobboldali szummát megfelelő sorrendben felírva ξ tetszőleges permutációját megkaphatjuk, miközben az összeg változatlan marad, igazolva az Tételt. \square

2.1.7. Állítás. *Legyen adott egy x divizor és tegyük fel, hogy egy v csúcs anti-tüzel. A keletkezett konfigurációt úgy is megkaphatjuk, hogy minden v -tól különböző csúcson kilövünk.*

Bizonyítás. A Laplace mátrixos felírásból rögtön adódik az állítás. Tudjuk ugyanis, hogy az L Laplace mátrix 0-hoz tartozó sajátvektora a $\mathbf{1}$, csupa 1 vektor. Erre, mint a csúcsok karakterisztikus vektorát nézve a

$$\mathbf{1} = \chi_V = \chi_v + \chi_{\{V-v\}}$$

felbontást kapjuk. Következésképp $0 = L\mathbf{1} = L\chi_v + L\chi_{\{V-v\}}$. A jobb oldali összeg második tagját levonva, az egyenlet mindkét oldalához x -et adva

$$x + L\chi_v = x - L\chi_{\{V-v\}}$$

adódik, vagyis a keletkezett konfigurációk valóban megegyeznek. \square

2.1.8. Állítás. *Az $x, y \in \text{Div}(G)$ divizorok pontosan akkor lineárisan ekvivalensek, ha létezik olyan $z \geq 0$ egész vektor, hogy $y = x - Lz$. Sőt, z választható olyannak, hogy a $\{v \in V \mid z_v = 0\}$ halmaz nem üres.*

Bizonyítás. Legyen $x \sim y$, és legyen ξ az x -ből y -ba vezető olyan kilövésorozat, amiben a csúcsok mindig tüzelnek. Az előző állítás értelmében ilyen létezik. Legyen $z_v = |\{v \in \xi\}|$ a v előfordulási száma ξ -ben, és legyen $z = (z_v)_{v \in V} \in \mathbb{Z}^V$ egész vektor. Az $x - Lz$ vektor ekkor pontosan y -nal egyezik meg a 2.1.5. Állítás értelmében.

Mivel $L\mathbf{1} = 0$, ezért ha $y = x - Lz$, akkor $y = x - L(c \cdot \mathbf{1} + z)$ is igaz lesz minden $c \in \mathbb{Z}$ egész konstansra. Alkalmassá válik választásával így elérhető, hogy a $\{v \in V \mid z_v = 0\}$ halmaz ne legyen üres. Ez valójában annak a gondolatnak az algebrai megfogalmazása, hogy ha $x \sim y$, akkor van olyan kilövés sorozat, amiben valamelyik csúcs nem lő. \square

2.1.9. Megjegyzés. A fenti állítások alapján a lineáris ekvivalencia definiálásához az anti-tüzelés bevezetése tehát valójában nem szükséges, pusztán szemléleti és egyszerűsítési célokat szolgált, nélküle is boldogultunk volna. Ha könnyebb a segítségével az állításokat és bizonyításokat megfogalmazni, akkor továbbra is használni fogjuk. Vegyük azonban észre, hogy a nemnegativitási feltétel elhagyása kritikus! A nemnegativitási feltétel elhagyásával nem beszélünk se legális lépésről, se stabil konfigurációról, ahogyan játék helyett is kilövés sorozatokat nézünk csak – a játéknak ugyanis, stabil konfiguráció híján, nincs természetes vége. Chipek helyett ezért gyakran tőkének vagy tartozásnak tekintjük a csúcsokra írt értékeket, és egy csúcs adhat vagy kérhet kölcsön. A játék egy ilyen variánsát (egy ún. nyelő csúcs bevezetésével) szokták *dollar game*-nek is nevezni. [Big99] például ilyen kontextusban beszélt a chip-firing játékról. A játék végét ilyenkor valahogy másként kell definiálni, például ha egy nyelő csúcs kivételével (bank) minden más csúcson nemnegatív érték szerepel.

2.2. Sandpile-csoport

Egy $x \in \text{Div}(G)$ divizor foka a $\sum_{i=1}^n x_i$ chipösszeg és $\deg(x)$ -szel jelöljük. A $\text{Div}(G)$ Abel-csoport k -ad fokú divizorainak mellékosztályát jelölje

$$\text{Div}^k(G) = \{x \mid \deg(x) = k\} \subset \text{Div}(G), \quad k \in \mathbb{Z},$$

mely $k = 0$ -ra a nulladfokú divizorok $\text{Div}^0(G)$ részcsoportja. $\text{Div}(G)$ -n a lineáris ekvivalenciát jelölje továbbra is \sim . Emlékezzünk, hogy két divizor pontosan akkor lineárisan ekvivalens, ha a különbségük a Laplace mátrix képében van:

$$x, y \in \text{Div}(G) : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \text{im}L \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}^n : Lz = x - y.$$

2.2.1. Definíció. Az $S(G) = \text{Div}^0(G)/\sim$ faktorcsoportot a gráf *sandpile-csoportjának* nevezzük. A $\text{Div}^k(G)$ mellékosztályok képét $\text{Div}(G)/\sim$ -ben $S^k(G)$ jelöli.

2.2.2. Tétel. *Legyen G véges, irányítatlan, összefüggő gráf, a feszítőfáinak halmazát $\tau(G)$ jelölje. Az $S(G)$ sandpile-csoport ekkor véges rendű, és elemszáma megegyezik a feszítőfák számával:*

$$|S(G)| = |\tau(G)|.$$

A tétel bizonyításához két állításra van szükségünk, ezeket nem bizonyítjuk.

2.2.3. Lemma ([Sta16]). *Legyen $A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ invertálható lineáris leképezés. Ekkor a $\mathbb{Z}^n/\text{im}A$ faktorcsoport végesrendű, és elemszámára $|\mathbb{Z}^n/\text{im}A| = \det A$ igaz.*

2.2.4. Tétel (Kirchhoff's Matrix Tree Theorem). *Legyen G véges, irányítatlan gráf, jelölje L a Laplace-mátrixát. Ha L i -dik sorát és oszlopát töröljük, akkor a keletkezett L' gráfra*

$$\det L' = |\tau(G)|,$$

vagyis L' determinánisa megegyezik a gráf feszítőfáinak számával.

A 2.2.2. Tétel bizonyítása. Töröljük L utolsó sorát és oszlopát, a keletkezett mátrixot jelölje L' . A gráf összefüggősége miatt L' invertálható mátrix. Az előző két állítás alapján tehát $|V| = n$ esetén

$$|\mathbb{Z}^{n-1}/\text{im}L'| = \det L' = |\tau(G)|.$$

Ha tehát megmutatjuk, hogy a $\text{Div}^0(G)/\text{im}L$ faktorcsoport izomorf a $\mathbb{Z}^{n-1}/\text{im}L'$ csoporttal, akkor készen vagyunk.

Minden $x \in \text{Div}^0(G)$ -re $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, ezért az utolsó koordinátára $x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i$. Ez megad egy $\partial : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \text{Div}^0(G)$ leképezést a következő módon: $(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = x' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ -re x' képe legyen az $(x', -\sum_{i=1}^{n-1} x'_i) \in \text{Div}^0(G)$ vektor. Ez könnyen láthatóan valóban bijekció a két halmaz között. A leképezés inverze ugyanis a projekció az utolsó koordinátára: $\partial^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_{n-1})$, minden $x \in \text{Div}^0(G)$ -re. Vagyis

$$|\mathbb{Z}^{n-1}| = |\text{Div}^0(G)|$$

már megvan. Nézzük a faktorcsoportokat.

Tegyük fel, hogy $x', y', z' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ -re $L'z' = x' - y'$. Azt állítjuk, hogy ekkor $z = (z', 0)$ -ra és $x = \partial(x'), y = \partial(y')$ -re $Lz = x - y$. Az első $n - 1$ koordinátában $z_n = 0$ miatt ez triviálisan teljesül. Nézzük az utolsó koordinátát. Az L' redukált

Laplace mátrix sorait jelölje $l'_{(i)}$, minden $1 \leq i \leq n-1$ -re. A Laplace mátrix utolsó sorát jelölje $l_{(n)} = (l'_{(n)}, l_{nn})$. Tudjuk, hogy a Laplace mátrix sor- és oszlopösszegei 0-t adnak. Vektoralakban felírva ezt a Laplace mátrix első $n-1$ oszlopára a

$$\sum_{i=1}^{n-1} l'_{(i)} = -l'_{(n)}$$

összefüggést kapjuk. Ha tehát a $L'z' = x' - y'$ egyenletet soronként nézzük, akkor $l'_{(i)} \cdot z' = x'_i - y'_i$ adódik az i -edik sorra. Minden $1 \leq i \leq n-1$ -re összeadva kapjuk, hogy

$$l_{(n)} \cdot z = l'_{(n)} \cdot z' = -\sum_{i=1}^{n-1} (l'_{(i)} \cdot z') = -\sum_{i=1}^{n-1} (x'_i - y'_i) = x_n - y_n,$$

tehát a kívánt $Lz = x - y$ egyenlőség az utolsó koordinátában is teljesül.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $x, y \in \text{Div}^0(G)$ -re és $z \in \mathbb{Z}^n$ -re $Lz = x - y$ teljesül. Jelölje a szokott módon x', y' az első $n-1$ koordinátára vett projekciókat, és L' az Laplace mátrix utolsó sorának és oszlopának eltörlésével kapott redukált mátrixot. Azt állítjuk, hogy létezik $z' \in \mathbb{Z}^{n-1}$, hogy $L'z' = x' - y'$ teljesüljön. Ha $z_n = 0$, akkor $z' = \partial^{-1}(z)$ triviálisan jó, hiszen soronként felírva az $Lz = x - y$ egyenlőséget a $z = (z', z_n)$ felbontásra

$$l'_{(i)} \cdot z' + l_{in}z_n = x_i - y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Ha $z_n \neq 0$, használjuk ki, hogy minden sorösszeg is nulla L -ben, vagyis

$$l_{in} = -\sum_{j=1}^{n-1} l_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

A fenti egyenletbe írva azt kapjuk, hogy a $z' = (z_1 - z_n, \dots, z_{n-1} - z_n)$ vektor jó lesz, hiszen minden i -re

$$x_i - y_i = \sum_{j=1}^{n-1} l_{ij}z_j + l_{in}z_n = \sum_{j=1}^{n-1} l_{ij}z_j - \sum_{j=1}^{n-1} l_{ij}z_n = -\sum_{j=1}^{n-1} l_{ij}(z_j - z_n) = l'_{(i)} \cdot z'.$$

Létezik tehát a kívánt bijekció a $\text{Div}^0(G)/_{imL}$ faktorcsoporthól a $\mathbb{Z}^{n-1}/_{imL'}$ faktorcsoportha, bizonyítva ezzel a kívánt tételt. \square

Minden csoportban egy részcsoporth és a szerinte vett mellékosztályok rendje megegyezik, így rögtön adódik a következő állítás is.

2.2.5. Következmény. *Az $S^k(G)$ mellékosztályok is véges elemszámúak, mégpedig $|S^k(G)| = |\tau(G)|$ igaz minden $k \in \mathbb{Z}$ -re.*

A sandpile csoport tulajdonságai

2.2.6. Tétel. *Legyen G egy véges gráf, $q \in V$ egy tetszőleges csúcs. $S(G)$ -nek ekkor az $\{(1_v, -1_q) | v \in V\}$ alakú elemek ekvivalenciaosztályai generátorrendszerét alkotják.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy a $Z = \{(1_v, -1_q) | v \in V\}$ alakú elemek $Div^0(G)$ egy generátorrendszerét alkotják. Ezt két lépésben tesszük. Először belátjuk, hogy bármely $x \in Div^0(G)$ nulladfokú divizor lineárisan ekvivalens egy olyanal, ahol a q gyökércsúcs kivételével minden csúcson nemnegatív számú chip van. Az ilyen alakú divizorok természetesen valóban felírhatók Z -beliek lineáris kombinációjaként.

G -nek a q -ból indított szélességi bejárása a csúcsokat $k + 1$ darab szintbe osztja. A csúcsok ezen partícióját jelölje $L_0 = \{q\}, L_1, \dots, L_k$, ahol L_i elemei a szélességi bejárás i -edik szintjében lévő csúcsok. Az L_k -beli csúcsok egyidejű antitüzelésével elérhető, hogy minden L_k -beli csúcson nemnegatív számú chip legyen.¹ Iteratívan az $i - 1$ -edik lépésben $L_k \cup \dots \cup L_{k-i}$ csúcsainak antitüzelésével elérhető, hogy már L_{k-i} csúcsain is nemnegatív számú chip legyen. Az utolsó lépésben már csak q nem kér kölcsön, azt eredményezve, hogy q -n kívül minden csúcson nemnegatív számú chip áll. Ha $x = (x_{v_1}, \dots, x_{v_{n-1}}, x_q)$, akkor $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_{v_i} \cdot (1_{v_i}, -1_q)$. \square

Nézzük meg, hogy néhány speciális esetben ki tudjuk-e fejezni egyszerűen a sandpile csoportot. Ehhez szükségünk van a következő lineáris algebrai állításra egész mátrixok diagonális normálformájáról.

Legyen M egy $n \times n$ -es egész mátrix. Az M i -edik determináns osztója (*determinant divisor*) $d_i(M)$ az $i \times i$ -es minorok determinánsának legnagyobb közös osztója. Az M i -edik Smith-faktora $\alpha_i = d_i(M)/d_{i-1}(M)$, ahol $d_0(M) = 1$. Következésképp $\alpha_i | \alpha_{i+1}$. Az M -ről azt mondjuk, hogy Smith-normálalakban van írva, ha diagonális egész és i -dik diagonális eleme az i -edik Smith-faktor.

2.2.7. Tétel ([Sta16]). *Egy $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ egész mátrix. Ekkor léteznek $A, B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $\det(A) = \det(B) = \pm 1$ unimoduláris egész mátrixok, hogy az $N = AMB$ mátrix Smith normálalakban van írva.*

Emlékezzünk, hogy $S(G) \simeq Div^0(G)/im(L) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}/im(L_q)$, ahol L_q jelöli a q csúccsal redukált Laplace mátrixot.

2.2.8. Tétel ([Big97], Section 30.). *Legyen G véges, összefüggő n csúcsú gráf, jelölje $L \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ a Laplace mátrixát. Legyen q egy tetszőleges csúcs, és a redukált L_q Laplace mátrix Smith-normálalakját jelölje N . Ha N diagonális elemeit $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \geq 0$ jelölik, és $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$ a triviális csoport, akkor*

$$S(G) \simeq \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}/\alpha_i \mathbb{Z}.$$

A Smith-normálformáról és annak különféle kombinatorikai alkalmazásairól [Sta16]-ben olvashatunk bővebben.

2.2.9. Megjegyzés. A fenti tétel és a Kirchoff-tétel alapján $|\tau(G)| = \det(L_q) = \det(N) = \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i = |S(G)|$, mely egy másik bizonyítás, hogy a sandpile csoport rendje megegyezik a feszítőfák számával (az előző tétel ugyanis nem használta a Kirchoff-tételt).

Ki tudjuk-e ennek segítségével számolni néhány speciális gráf sandpile csoportját?

2.2.10. Állítás. *Legyen T egy n csúcsú fa. Ekkor $S(T) \simeq 1$ a triviális csoport.*

¹Ha $\max(\{0\} \cup \{-x_v | v \in L_k\})$ -szor antitüzelnek, az biztosan elég.

Bizonyítás. Ha N jelöli a fa redukált Laplace mátrixának Smith-normálalakját, akkor $\det(N) = |S(T)| = |\tau(T)| = 1$ miatt $S = \text{diag}(1, \dots, 1)$. A 2.2.8. Tétel alapján $S(G) \simeq \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 1$ a triviális csoport. (Vagy egyszerűbben az egyetlen $|S(T)| = 1$ csoport a triviális.) \square

2.2.11. Állítás. Legyen C_n az n -csúcsú körgráf. Ekkor $S(C_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ az n -ed rendű ciklikus csoporttal izomorf.

Bizonyítás. Az n csúcsú kör L Laplace mátrixa és L_n redukált Laplace mátrixa az utolsó csúcs törlésével

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad L_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

alakú. Célunk L_n Smith-faktorait megkapnunk. Ez a minorok determinánsainak legnagyobb közös osztója. Ám minden $i \leq n-2$ -re létezik 1 determinánsú minor, tehát $d_0(L_n) = \dots = d_{n-2}(L_n) = 1$. Ezt abból látjuk, hogy L_n első sorát és utolsó oszlopát törölve egy felső háromszög mátrixot kapunk, melynek főátlójában -1 -esek állnak. Vagyis ezen minor determinánsa ± 1 . Az $(n-2)$ -dik Smith-faktor tehát valóban 1. Háromszög mátrix további sorainak és oszlopainak eltörlésével továbbra is háromszög mátrixot kapunk, következésképp a többi Smith-faktor is 1. (Ez egyébként a Smith-faktorok osztási tulajdonságából is következik.) Mivel egyenlő az $n-1$ -dik Smith-faktor? Tudjuk, hogy a Smith-faktorok szorzata a feszítőfák számával egyezik meg. C_n bármely élét elhagyva egy feszítőfát kapunk, tehát az utolsó Smith-faktor n -nel egyenlő. Ekkor $S(G) \simeq (\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{n-2} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ az n -ed rendű ciklikus csoport. \square

2.2.12. Állítás. $S(K_n) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{n-2}$, ahol K_n az n -csúcsú teljes gráf.

Bizonyítás. A bizonyítás [Big97], Section 30. alapján írodott, a számolásokat az olvasóra bizzuk. Jelölje I_n az egységmátrixot, J_n a csupa 1 mátrixot, $\mathbf{1}_n$ a csupa 1, $\mathbf{0}_n$ a csupa 0 vektort, ahol az alsó indexben a mátrix dimenzióját jelöljük. K_n Laplace mátrixára $L = nI_n - J_n$ igaz, melyből az utolsó sor és oszlop törlésével kapott mátrixra

$$L_n = \begin{pmatrix} n-1 & -\mathbf{1}_{n-2}^T \\ -\mathbf{1}_{n-2} & nI_{n-2} - J_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}_{n-2}^T \\ \mathbf{1}_{n-2} & I_{n-2} + J_{n-2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1}_{n-2}^T \\ \mathbf{0}_{n-2} & I_{n-2} \end{pmatrix},$$

egész mátrixokra $\det(A) = \det(B) = 1$, és

$$AL_nB = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n-2}^T \\ \mathbf{0}_{n-2} & nI_{n-2} \end{pmatrix}.$$

L_n Smith-faktorai tehát $\alpha_1 = 1, \alpha_i = n, 2 \leq i \leq n-1$. Következésképp $S(G) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{n-2}$. \square

A Cayley-formula alapján K_n feszítőfáinak száma n^{n-2} . A fenti tétel a Cayley-formula algebrai alakjának is tekinthető ezért. [JNR03] páros gráfokra és teljes gráfok Descartes-szorzatára is kiszámolja sandpile csoportot.

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon alkalmas-e a sandpile csoportok izomorfája eldönteni, hogy két gráf izomorf-e.

2.2.13. Tétel.

1. Legyenek G és H izomorf gráfok. Ekkor $S(G) \simeq S(H)$.
2. Léteznek G és H olyan gráfok, hogy $S(G) \simeq S(H)$, de G és H nem izomorf.

Bizonyítás. Az állítás első fele világos. A 2.2.6. Tételben szereplő generátorrendszerek ugyanis izomorf gráfokra valóban izomorf csoportokat generálnak. A második felének belátásához vegyünk két egymással nem izomorf azonos csúcsszámú fát, például egy utat és egy csillagot. A 2.2.10. Állítás alapján mindkét csoport a triviálissal izomorf. \square

Végül belátjuk, hogy minden véges Abel-csoporthoz létezik olyan gráf, amelynek sandpile csoportja ezen Abel-csoporttal izomorf. Ehhez előbb be kell lássunk egy egyszerű tételt ún. csokorgráfokról.

2.2.14. Definíció. A $G = (V, E)$ gráfot csokorgráfnak nevezzük ha létezik olyan v csúcsa, hogy $G \setminus v$ nem összefüggő. A G_1, \dots, G_k komponensekhez a v -t is hozzáadva v -szirmoknak nevezzük, a gráfnak pedig v -t a magjának hívjuk. Két v -szirm tehát pontosan v -ben metszi egymást.

2.2.15. Tétel. Legyen G egy v magú, G_1, \dots, G_k szirmú csokorgráf. A sandpile csoportjára ekkor $S(G) \simeq S(G_1) \times \dots \times S(G_k)$ igaz.

Bizonyítás. Töröljük a v magcsúcshoz tartozó sort és oszlopot a gráf L Laplace mátrixából. A redukált L_v mátrix blokk-diagonális alakra hozható a csúcsok megfelelő átszámolásával, ahol a blokkok a szirmok redukált Laplace mátrixai. (A 2.2.13. Tétel alapján a sandpile csoport változatlan marad.) L_v Smith-faktorai így a szirmok Smith-faktorainak összessége, ami a 2.2.8. Tétel alapján igazolja a tételt. \square

2.2.16. Következmény. Legyen A egy véges Abel csoport. Ekkor létezik G véges, összefüggő gráf, hogy $A \simeq S(G)$.

Bizonyítás. A véges Abel-csoportok osztályozási tétele alapján $A \simeq \prod_{i=1}^k \mathbb{Z}/\alpha_i \mathbb{Z}$, ahol az α faktorok egészek és osztják az utánuk következőket. A 2.2.15. és 2.2.11 Tételek alapján a $G = \prod_{i=1}^k C_{\alpha_i}$ csokorgráf sandpile csoportja A -val izomorf. \square

2.3. Break-divizorok

Ebben a szakaszban megadjuk, $S^g(G)$ -nek egy természetes divizor reprezentáció rendszerét, ahol a $g = |E| - |V| + 1$ a $G = (V, E)$ gráf ún. *kombinatorikai génusza*. A gráf egy tetszőleges T feszítőfája két részre osztja az éleket: $|V| - 1$ faélre és g darab nem-faélre. Jelölje ezen utóbbi nem-faéleket e_1, \dots, e_g . Ha minden ilyen él egyik végpontjára egy-egy chipet helyezünk, akkor $Div^g(G)$ egy elemét kapjuk. Ezen elemet hívjuk a T fa egy *break divizorának*, vagy röviden egy T -break divizornak. Világos, hogy egy $Div^g(G)$ -beli elem több feszítőfának is lehet break-divizora, és egy fához

több break-divizor is tartozhat. A T feszítőfát és b divizort egymással kompatibilisnek nevezünk, ha b T -break divizor. A gráf break divizorainak halmazát jelölje $B(G) \subset \text{Div}^g(G)$:

$$B(G) = \{b \in \text{Div}^g(G) \mid \exists T \in \tau(G) : b \text{ egy } T\text{-break divizor}\}.$$

A következő tétel azt mondja, hogy a break-divizorok halmaza $S^g(G)$ -nek egy természetes reprezentációja.

2.3.1. Tétel. *Jelölje g a G gráf kombinatorikai génuszát. Ekkor minden $x \in \text{Div}^g(G)$ g -ed fokú divizorhoz egyértelműen létezik egy vele lineárisan ekvivalens $b \in B(G)$ break divizor. Következésképp*

$$|B(G)| = |\tau(G)|.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $\lambda \in S^g(G)$ ekvivalencia osztályra egyértelműen létezik olyan $b \in B(G)$ break divizor, hogy a b ekvivalencia osztályára $[b] = \lambda$. A 4. Fejezetben $B(G)$ segítségével fogunk definiálni $\tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ hatásokat. Az előző tétel eredménye a hatás jól definiáltságának bizonyításakor kulcsfontosságú lesz. A bizonyításhoz szükségünk lesz az alábbi lemmára.

Legyen $b = (b_v)_{v \in V}$ egy break-divizor G -n, $H \leq G$ egy összefüggő részgráf. A b -nek H -ra vett megszorításán a

$$b|_H = (b_v)_{v \in V(H)}$$

divizort értjük. Fontos megjegyezni, hogy $b|_H$ tipikusan nem break divizor H -n. Ha azonban H feszített részgráf, akkor egy break divizor megszorításának a fokát H kombinatorikai génusza alulról becsli.

2.3.2. Lemma. *Legyen $b \in \text{Div}^g(G)$, $H \leq G$ összefüggő feszített részgráf, $g(H)$ kombinatorikai génusszal. Ha b break divizor G -n, akkor $\deg(b|_H) \geq g(H)$.*

Bizonyítás. Legyen $T \in \tau(G)$ egy b -vel kompatibilis feszítőfája G -nek. Ekkor a $T|_H$ H -ra vett megszorítás H -nak egy F feszítőerdjét adja. Következésképp $|E(F)| \leq |V(H)| - 1$.

Nézzük most meg, hogy a nemfaélek hova dobják a chipjeiket. A kulcs észrevétel a következő: H feszítettsége miatt minden e H -beli nemfaél H -ban dobja le a chipjét. Jelölje $\eta(e) = v$ azt, ha az e nemfaél v -re dobja le a chipjét. Legyen $b_v^* = |\{e \in E(H) \setminus E(F) : \eta(e) = v\}|$ minden $v \in V(H)$ -ra a csúcsra illeszkedő H -beli nemfaélek száma. Ekkor a $b_H^* = (b_v^*)_{v \in H}$ divizor egyrészt egy foka egyrészt $|E(H)| - |E(F)|$, másrészt a $b|_H \geq b_H^*$ egyenlőtlenség koordinátáinként fennáll. Ennek az az oka, hogy míg létezhet olyan H -beli csúcs, ami H -n kívüli nemfaéltől kapja a chipjét, addig b_H^* -hoz ezeket a chipjeiket nem adjuk hozzá. Ekkor persze $\deg(b|_H) \geq \deg(b_H^*)$ is fennáll.

Összegezve

$$\deg(b|_H) \geq \deg(b_H^*) = |E(H)| - |E(F)| \geq |E(H)| - |V(H)| + 1 = g(H). \quad \square$$

2.3.3. Megjegyzés. Lehetne definiálni tetszőleges $H \leq G$ részgráfra a H -val kompatibilis divizorokat is, ahol egy H -val kompatibilis d divizort úgy kapunk, hogy minden nem H -beli él valamely végpontjára egy chipet dobunk. Világos, hogy d foka ekkor $|E(G)| - |E(H)|$. Ha H feszítőfa, akkor ez a hagyományos break divizor fogalom. Az előző bizonyításban konstruált b_H^* divizor tehát az F feszítőerdővel kompatibilis egyik divizor H -n.

Valójában igaz az előző lemma megfordítása is, miszerint ha minden H összefüggő feszített részgráfon a $b \in \text{Div}^g(G)$ divizorra $\deg(b|_H) \geq g(H)$, akkor b break-divizor. Ezt [ABKS14] Lemma 3.3 és Proposition 4.8 állítási implikálják.

2.3.1. Tétel bizonyítása. Először lássuk be, hogy ha két break divizor lineárisan ekvivalens, akkor valójában megegyeznek egymással mint vektorok. Ehhez vegyünk két break divizort, $b_1, b_2 \in B(G)$ -t és tegyük fel, hogy $b_1 \sim b_2$. A 2.1.5. Állítás értelmében ez azt jelenti, hogy létezik olyan $z \geq 0$ egész vektor, hogy $b_2 = b_1 - Lz$, és az $S = \{v \in V \mid z_v = 0\}$ halmaz nem üres. Tegyük fel, hogy $b_1 \neq b_2$! Ekkor $V \setminus S$ sem üres.

Tekintsük a $G[S]$ feszített részgráfot! Jelölje $i(S) = |\{uv \in E(G) : u, v \in S\}|$ az S -en belül futó élek számát; $e(S) = |\{uv \in E(G) : u \in S \text{ vagy } v \in S\}|$ azon élek számát, ahol legalább az egyik végpont S -beli; és $d(S, V \setminus S) = |\{uv \in E(G) : u \in S, v \in V \setminus S, \text{ vagy fordítva}\}|$ az S és $V \setminus S$ közt futó élek számát. Világos, hogy ekkor

$$i(S) + d(S, V \setminus S) = e(S) = |E| - i(V \setminus S).$$

Egy b break divizor $G[S]$ -re vett megszorítását jelölje most $b(S)$. A 2.3.2. Lemma értelmében tudjuk, hogy

$$\deg(b(U)) \geq g(G[U]), \quad \forall b \in B(G), U \subseteq V.$$

A $b(U) + b(V \setminus U) = b$ particionálás miatt $\deg(b(U)) + \deg(b(V \setminus U)) = \deg(b) = g(G)$ egyenlőség is fennáll. Így egyrészt

$$\deg(b_1(S)) \geq g(G[S]) = i(S) - |S| + 1,$$

másrészt

$$\begin{aligned} \deg(b_2(S)) &\leq g(G) - g(G[V \setminus S]) \\ &= |E| - |V| + 1 - i(V \setminus S) + |V| - |S| - 1 \\ &= e(S) - |S| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség igaz a b_1, b_2 break divizorokra, és $S \subset V$ csúcshalmazra.

A b_2 divizorba b_1 -ből úgy juthatunk el, ha $V \setminus S$ csúcsait legalább egyszer kilőjük. Mennyivel nőtt a kilövés után S -en b_2 chipszáma? Mivel a kilövés S -en a chipek száma csak nőhet, és S és $V \setminus S$ között $d(S, V \setminus S)$ él vezet, a

$$\deg(b_2(S)) \geq \deg(b_1(S)) + d(S, V \setminus S)$$

egyenlőtlenség világos, hogy fennáll. Ám ekkor a kiemelt képletek felhasználásával

$$\begin{aligned} e(S) - |S| &\geq \deg(b_2(S)) \geq \deg(b_1(S)) + d(S, V \setminus S) \\ &\geq i(S) - |S| + 1 + d(S, V \setminus S) = e(S) - |S| + 1, \end{aligned}$$

ami ellentmondás.

Ha most belátjuk, hogy $|B(G)| \geq |\tau(G)|$, akkor a break divizorok függetlensége miatt $B(G)$ valóban $S^g(G)$ egy reprezentáns rendszerét adja. Ehhez meg kell adjunk egy $\tau(G) \rightarrow B(G)$ injektív leképezést, vagyis egy módszert, ahogyan különböző feszítőfákhoz különböző break divizorokat rendelünk. A 4. Fejezet 4.3. alszakaszában definiált $\beta_{v,e}$ leképezés pontosan ezt csinálja. \square

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon ha adott egy $x \in \text{Div}^g(G)$ g -ed fokú divizor, el lehet-e róla gyorsan dönteni, hogy break divizor-e. A válasz szerencsére igen.

2.3.4. Tétel ([Bac17], Algorithm 7.6). *Létezik polinom idejű algoritmus annak eldöntésére, hogy egy konfiguráció break divizor-e.*

2.4. Bijekciók $S(G)$ és $\tau(G)$ között

Ez a szakasz a 4. Fejezetben tárgyaltakat kívánja megmotiválni. Az alapvetés a következő: felmerül a kérdés, meg tudunk-e adni bijekciót a sandpile csoport és a feszítőfák között. Azonos elemszámú halmazok között természetesen tudunk, ám lehet-e ennek a bijekciónak valami többlet jelentése, vagy természetes lesz-e valamilyen módon. A természetességet lehet érteni az alábbi értelemben.

Legyen G és H két gráf, $\varphi : G \rightarrow H$ egy gráfizomorfizmus közöttük. Ezen izomorfizmus természetes módon kiterjed egy $\varphi_\tau : \tau(G) \rightarrow \tau(H)$ bijekcióvá és egy $\varphi_S : S(G) \rightarrow S(H)$ csoport izomorfizmussá. A kérdés tehát megfogalmazható úgy is, hogy léteznek-e olyan $\alpha_G : S(G) \rightarrow \tau(G)$, $\alpha_H : S(H) \rightarrow \tau(H)$ bijekciók, melyekre a

$$\begin{array}{ccc} S(G) & \xrightarrow{\alpha_G} & \tau(G) \\ \downarrow \varphi_S & & \downarrow \varphi_\tau \\ S(H) & \xrightarrow{\alpha_H} & \tau(H) \end{array}$$

diagram kommutatív, azaz $\varphi_\tau \circ \alpha_G = \alpha_H \circ \varphi_S$, tetszőleges φ_S csoportizomorfizmusra és φ_τ bijekciókra.

Ilyen azonban nem lehetséges ([Wag00]). Vegyük a C_n n -csúcsú kör feszítőfáit $n \geq 3$ -ra. Ezen feszítőfák gráf automorfizmusokkal egymásba vihetők, míg bármely csoport izomorfizmus az egységelemet helyben hagyja. Bármilyen is lenne tehát az egységelem képe, az nem lenne invariáns minden gráf automorfizmusra.

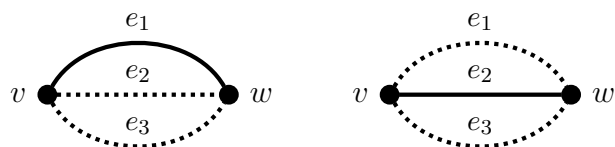
Csoportok és halmazok között sokkal inkább hatásokat szoktunk vizsgálni, mégpedig azonos elemszám esetén megkérdendő, hogy létezik-e kanonikus szabad tranzitív hatása a sandpile csoportnak a feszítőfákon, vagyis hogy megadható-e egy $\tau(G)$ -n egy kanonikus $S(G)$ -torzor struktúra. Azonban ilyen sem lehetséges. Vegyük azt a két csúcsú gráfot, ahol a csúcsokat n él köti össze. A 2.2.8. Tétel alapján a sandpile csoport ekkor az n -ed rendű ciklikus csoport, míg minden él egy feszítőfát alkot. Vagyis egy kanonikus (gráf automorfizmusra nézve invariáns) hatás ekkor megadná az élek egy ciklikus sorrendjét, mely önmagában nem létezik a gráfon.

Itt jönnek be a szalaggráfok a képbe. A szalaggráfok éleinek minden csúcs körül adott egy ciklikus sorrendje. Ez esetben valóban megadható a feszítőfákon $S(G)$ -torzor struktúra. A szalaggráfokról a következő fejezetben beszélünk bővebben, utána pedig definiálunk két fajta $S(G)$ -torzort.

Fontos azonban előre megjegyezni, hogy szalaggráfokon sem létezik egyértelmű torzor struktúra. A G gráfnak legyen két csúcsa, v és w , melyeket három él, e_1, e_2, e_3 köt össze. A sandpile csoport ekkor háromelemű, és elemei a $0, (1_v, -1_w), (1_w, -1_v)$ divizorok ekvivalencia osztályai. A csoport ekkor $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -vel izomorf. Ha az élek sorrendje mindkét csúcs körül $\rho_v = \rho_w = (e_1, e_2, e_3)$, akkor meg lehet-e mondani, hogy az e_1 feszítőfát melyik nem triviális csoportelem képezi e_2 -be? Nem, hiszen a $[(1_v, -1_w)] \cdot e_1 \mapsto e_2$ és $[(1_w, -1_v)] \cdot e_1 \mapsto e_2$ által indukált α és β hatásokra $\alpha^2 = \beta \neq id$, vagyis G -n két különböző hatás is definiálható, lásd 2.1. ábra.

Ez utóbbi ambiguitás leküzdésére a 4. Fejezetben megkülönböztetünk majd egy v csúcsot, amit kezdő- vagy alapcsúcsnak fogunk nevezni, és ennek segítségével definiálunk (különböző alappontokra tipikusan különböző) α_v hatásokat.

2.4.1. Megjegyzés. Léteznek konstruktív megfeleltetések $S(G)$ és $\tau(G)$ között. Az egyik ilyen a Cori–Le Borgne bijekció. Az algoritmus a szuperstabil konfigurációk és a feszítőfák között teremt egyértelmű kapcsolatot. Az elmélet teljes kidolgozása



2.1. ábra. Melyik sandpile elem viszi e_1 -et e_2 -be? Nincs természetes torzor struktúra szalaggráfokon sem. A szalagstruktúra v körül negatív, w körül pozitív körüljárási irányban értendő.

azonban túl messze vinne minket a dolgozat témájától, így ennél többet most nem beszélünk róla, az érdeklődőknek [Kli18] 2.6.7 Alszakaszát és 3.4 Szakaszát ajánljuk figyelmébe és Coriék eredeti [CLB03] munkáját.

3. fejezet

Szalaggráfok

A következő fejezetben megvizsgáljuk a sandpile torzor struktúrákat egy véges gráf feszítőfáin. Ehhez a gráfot el kell lássuk egy ún. szalagstruktúrával. Hogy ezt megtehesük, ebben a fejezetben átnézzük, amit szalaggráfokról ehhez tudni érdemes. A fejezet későbbi szakaszai javarészt olyan algebrai topológiai állításokat tartalmaznak, melyeket bizonyítás nélkül közlünk, többségük bizonyítása minden algebrai topológiával foglalkozó tankönyv részét képezi.

3.1. Síkba rajzolható gráfok

Ismételjük először át gyorsan a skígráfokról tanultakat! Ismert, hogy egy gráfot akkor nevezünk síkba rajzolhatónak, ha létezik a gráfnak olyan lerajzolása a síkba, hogy a gráf élei ne messék egymást. A lerajzolást a szokásos módon értjük, azaz a csúcsoknak a sík pontjait feleltetjük meg, és két pontot (folytonosan) összekötünk, ha a nekik megfelelő csúcsok között vezet él. A szalaggráf a síkbrajzolhatóság egy természetes kiterjesztése lesz, amikor nem a síkra, hanem valamilyen felületre írjuk a gráfot. Ehhez nézzük a síkgráfok egy formális definícióját.

3.1.1. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ véges, irányítatlan, összefüggő gráf, és jelölje $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^2)$ a $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos síkgörbék terét. A gráf *síkbarajzolásán* egy (φ, ψ) leképezés-párt értünk, ahol

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi : E \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^2),$$

mégpedig úgy, hogy

1. $\forall uv = e \in E$ él esetén $\psi(0) = u, \psi(1) = v$, vagy fordítva; továbbá
2. $\forall e, e' \in E$ élekre $im(\psi(e)) \cap im(\psi(e')) \subset \varphi(V)$.

Az első feltétel a gráf egy síkra lerajzolását (immerzióját), a második pedig a gráf egy injektív síkba rajzolását (beágyazását) jelenti. Ha egy gráf síkba ágyazását nézzük, implicit mindig beleértjük, hogy ez egy helyes, azaz élmentszés nélküli lerajzolás, vagyis beágyazás topológiai értelemben is.

3.1.2. Megjegyzés. Rögzített beágyazás esetén a gráfot *síkgráfnak* mondjuk. Egy síkgráf tehát egy síkba rajzolható gráf rögzített (és helyes) lerajzolását jelenti, amit fontos néha megkülönböztetni az absztrakt, síkba rajzolható gráf fogalmától, ahol a (végtelen sok) lehetséges beágyazások közül nem választottunk ki egyet sem.¹

¹Az angol szakirodalom az előbbire a *plane graph*, utóbbira a *planar graph* szót használja, egy konkrét beágyazást pedig gyakran a *planar embedding of a graph* szókapcsolattal is kifejezi.

Világos, hogy egy síkba rajzolható gráfnak nem lehet *túl sok éle*. Az Euler-formula felhasználásával tudunk is felső becslést adni az élek számára a csúcsok számának függvényében.

3.1.3. Definíció. Egy síkgráf tartományán az élek által határolt tartományait nevezzük a síkknak. A Jordan-féle görbe tétel miatt minden síkgráfnak pontosan egy végtelen tartománya van, amit külső tartománynak szokás hívni.

3.1.4. Tétel (Euler-formula). *Legyen $G = (V, E)$ véges, irányítatlan, összefüggő és egyszerű síkgráf. Ha v jelöli a csúcsok, e az élek, f pedig a tartományok számát, akkor*

$$v - e + f = 2.$$

Bizonyítás. Minden fának $n - 1$ éle, és egyetlen tartománya van, a „külső” végtelen tartomány, az állítás fákra tehát teljesül. Vegyünk most egy nem körmentes gráfot. A gráf egy köréből egy élet elvéve az élek és tartományok száma is pontosan eggyel csökken, ugyanis minden él *legfeljebb* két tartományt határol, ám minden körbeli él szintén a Jordan-féle görbetétel miatt *pontosan* két tartományt határol. Ez a két tartomány az él elvételével egybeolvad, tehát valóban eggyel csökken a tartományok száma is körbeli él elvételével. Ez a folyamat mindaddig folytatható, amíg (a gráf végessége) miatt el nem érünk a gráf egy feszítőfájához. Mivel fákon az állítás igaz, és a baloldal értéke változatlan maradt a procedúra során, a tételt beláttuk. \square

3.1.5. Következmény. *Ha G síkba rajzolható egyszerű gráf, akkor éleinek e számára és csúcsainak v számára*

$$e \leq 3v - 6$$

teljesül, ha $v \geq 3$, míg $v = 1$ vagy 2 esetén rendre $e = 0$ vagy 1 éle van a gráfnak.

Bizonyítás. Világos, hogy egy és két csúcsú gráfokra az állítás nem igaz. Ezekről azonban az összefüggőség miatt úgyis pontosan tudjuk, hogy rendre 0 és 1 éle van. Nézzük hát a tétel fő állítását. Vegyünk egy $v \geq 3$ csúcsú gráfot és vegyük a gráf egy síkba rajzolását. Kettős leszámolással számoljuk meg az él-tartomány párok számát! A tartományok számát jelölje f , az éleket e . Egyrészt, minden tartományt legalább 3 él határol, tehát ez a mennyiség nagyobb vagy egyenlő mint $3f$. Másrészt minden él legfeljebb két tartománnyal szomszédos, vagyis $2e$ -nél nem is több a keresett mennyiség. Az Euler-formula felhasználásával

$$3f = 3(2 - v + e) \leq 2e \Rightarrow e \leq 3v - 6. \quad \square$$

3.1.6. Megjegyzés. Bár nekünk nem lesz a későbbiekben fontos, de felmerül a kérdés, vajon mennyire függ a gráf beágyazása az élek beágyazásától, azaz létezik-e olyan gráf, amit egyenes vonalakkal (szakaszokkal) nem, de görbe vonalakkal be lehet ágyazni a síkba élmetszés nélkül. A válasz nem, amit bár egymástól függetlenül Klaus Wagner (1936), Fáry István (1948) és S. K. Stein (1951) is felfedezett, még az angol szakirodalom is leggyakrabban csak Fáry-tételként említi ([Ist48]).

Ismert továbbá síkgráfok „tiltott részgráfjairól” szóló tétel is, nevezetesen Kuratowski tétele. Jelölje K_n a teljes n -csúcsú gráfot, $K_{n,m}$ a teljes páros gráfot n és m csúcson. Két gráfot akkor nevezünk *topologikusan izomorf*nak, ha csúcsoknak az élekről való ismételt elhagyásával és/vagy felvételével egymással izomorf gráfokba transformálhatók. Csúcsok elhagyása alatt azt értjük, hogy egy 2 fokú csúcsot törölünk, és az addig hozzá kapcsolódó két csúcsot egymással kötjük össze. Csúcsok felvétele egy él kettéosztását jelenti egy új csúccsal, vagyis az előző fordítottját.

3.1.7. Tétel (Kuratowski). *Egy G gráf pontosan akkor síkba rajzolható, ha nem tartalmaz K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot.* \square

3.2. Irányítható felületek \mathbb{R}^3 -ben

Szeretnénk a síkba rajzolható gráf fogalmát kibővíteni. Természetes ötletnek tűnik, hogy a gráfot valamilyen \mathbb{R}^3 -beli *felületre írjuk*. Vegyük például a Möbius-szalagot és a K_5 -öt. Nem nehéz belátni, hogy K_5 elmetszés nélkül felrajzolható a Möbius-szalagra. Hamar kiderül azonban, hogy egyszerűbb, ha csak *irányítható felületekre* szorítkozunk.

Az irányíthatóság egy bonyolult topológiai fogalom, mely a síkon megszokott „óra-mutató járásával egyező vagy ellentétes” irány általánosítása felületekre. Informálisan azt jelenti, hogy egy alakzat translációkkal nem tükrözhető, fordítható meg. Könnyen láthatóan ez a Möbius-szalagra például nem teljesül, hiszen egy alakzat egy teljes kör megtétele után megtükröződik az egyik tengelye mentén.² Ugyanez nem igaz a tóruszra, ahol akárhogy is mozgatunk (eltolással) egy alakzatot, eredeti helyére visszatérve az alakzat ugyanúgy „áll”. Az irányíthatóság formális definíciója helyett inkább fogadjuk el a következő állítást, mely a \mathbb{R}^3 irányítható felületeit karakterizálja. Idézzük fel, hogy ha S^1 jelöli az egységkört, akkor az n -lyukú tórusz az $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ $n - 1$ -szeres topologikus direkt-szorozattal egyezik meg. A lyukak számát a felület *génuszának* is nevezik. A gömb génusza 0, T^n génusza pedig $n - 1$ minden pozitív n -re. T^n elképzelhető, mint egy $n - 1$ fogantyújú gömb, vagy hétköznapiiban, mint egy többszemélyes úszógumi.

3.2.1. Tétel. *Egy \mathbb{R}^3 -be ágyazott, összefüggő, perem nélküli felület pontosan akkor irányítható, ha a gömbbel vagy egységkörök topologikus direkt-szorozatával homeomorf.*

3.2.2. Megjegyzés. Sztereografikus projekcióval könnyen látható, hogy egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha a gömbre is felrajzolható az élek metszése nélkül. Ilyen formán egy gráf irányítható felületre írása valóban jól általánosítja egy gráf síkbarajzolhatóságát.

3.3. Szalaggráfok

Legyen \mathcal{F} egy irányítható felület, $G = (V, E)$ véges, irányítatlan, összefüggő gráf. A G gráfnak a *felületre írásán* a csúcsok és élek olyan lerajzolását értjük \mathcal{F} -re, ahol a csúcsoknak pontokat, az éleknek görbéket feleltetünk meg, oly módon, hogy minden él képe a végpontjainak képei között feszül. G -ről azt mondjuk, hogy S -re rajzolható, ha létezik olyan lerajzolása, ahol az élek(nek megfelelő görbék) csak a csúcsokban metszik egymást.

Formálisan egy (φ, ψ) párt a G gráf egy \mathcal{F} -re írásának nevezünk, ha

$$\varphi : V \rightarrow \mathcal{F}, \quad \psi : E \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1], \mathcal{F}),$$

úgy, hogy

1. $\forall uv = e \in E$ él esetén $\psi(0) = u, \psi(1) = v$, vagy fordítva; továbbá
2. $\forall e, e' \in E$ élekre $im(\psi(e)) \cap im(\psi(e')) \subset \varphi(V)$.

Egy gráf ilyen lerajzolása egyben egy adott csúcsra illeszkedő él ciklikus sorrendjét is megadja az irányítás szerint. Minden csúcs egy kis környezete ugyanis

²Ezért szerencsés, hogy egy gömbbel homeomorf felületen élünk. Képzeld el, mekkora galibát okozna, ha egy Föld körüli utazás során fejjel lefele érkeznék meg!

lokálisan \mathbb{R}^2 -vel homeomorf, amit ha a \mathcal{F} -ről örökölt irányítással ellátunk, akkor az élek ciklikus sorrendjét az irányításnak megfelelő körüljárással kapunk meg. Ennek az állításnak a megfordítása is igaz. Ha a gráf minden csúcsára adott a csúcsra illeszkedő élek egy ciklikus sorrendje, abból az ember megkaphat egy irányítható felületet is (egész pontosan annak egy triangulációját), ahol a trianguláció oldalai a gráf megfelelő köreinek felelnek meg. Hogy ezt pontosan megadhassuk, definiáljuk a gráf egy szalagstruktúráját.

3.3.1. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ véges, irányítatlan, összefüggő gráf. Egy v csúcs körüli szalagstruktúrán a v -re illeszkedő élek egy ciklikus sorrendjét értjük, és $\rho_v = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{\deg(v)}})$ -vel jelöljük. A gráf egy *szalagstruktúráján* a $\rho(G) = (\rho_v)_{v \in V}$ vektort értjük. Ha egy G gráfon adott egy szalagstruktúra, akkor a gráfot *szalaggráfnak* nevezzük és (G, ρ) -val jelöljük.

Ezzel a szóhasználattal élve tehát azt láttuk, hogy a gráf minden felületre írása meghatároz egy szalagstruktúrát, a felület irányítását nézve természetes módon. Most bizonyítsuk be a fordítottját. Egy v csúcsra és egy ráilleszkedő e élre jelölje $next_\rho(v, e)$ az e után következő élet v -nek a ρ szerinti szalagstruktúrájában. A gráf egy $C = (e_1, \dots, e_k)$ körsétája ρ -kompatibilis, ha minden szomszédos élpár rákövetkező a csatlakozó csúcs szalagstruktúrájában, azaz ha e_i és e_{i+1} közös csúcsa v , akkor $e_{i+1} = next_\rho(v, e_i)$, minden $i = 1, \dots, k$ (e_{k+1} -et e_1 -nek definiálva).³ Egy felületre írt gráf csúcsai, élei és ρ -kompatibilis körei (ahol ρ a felületre írásból származtatott szalagstruktúra) pont a felület egy ún. felháromszögelését adják (bár az oldalak nem feltétlen háromszögek). Ezt megfordítva, ha veszünk egy G gráfot és rajta egy ρ szalagstruktúrát, akkor az élek megvastagításával és a ρ -kompatibilis körök kitöltésével (a ρ -kompatibilis körre mint homotopikusan S^1 -re a pereménél fogva ráragasztunk egy D^2 -t, ahol D^2 a zárt egységkörlap) egy olyan komplexust kapunk, mely egy felület triangulációja. Köznapi szóhasználattal élve az éleket drótváznak használjuk, és úgy csavarjuk, hogy az oldalai a ρ -kompatibilis körök legyen, majd ezeket szappannal kitöltjük.

3.3.2. Állítás. Legyen adott egy G véges, irányítatlan, összefüggő gráf, és rajta egy tetszőleges ρ szalagstruktúra. Ekkor a fenti eljárással kapott \mathcal{F} felület irányítható, és csak ρ -tól függ.

3.3.3. Definíció. Az előző állításban szereplő felületet nevezik (G, ρ) kanonikus felületének, és \mathfrak{g} génuszát (G, ρ) topológiai génuszának. Ez megegyezik azon minimális génuszú felület génuszával, amire a gráf élmetszés nélkül felrajzolható.

Intuítívan tehát egy szalaggráf tekinthető a kanonikus felületének egy triangulációjaként. Nem meglepő hát a következő két állítás, melyek a síkgráfokra vonatkozó Euler-tétel egy általánosításának is tekinthetők. Helyesen a tételt CW-komplexusokkal kellene kimondani, ám annak precíz definíciója (hasonlóan az irányíthatóság definíciójához) megint messze vinne minket célunktól. Legyen elég hozzá, hogy a felület egy helyes felháromszögelését adja, és azt jelenti, hogy a felháromszögelés által meghatározott szalaggráf topológiai génusza megegyezik a felület génuszával.⁴

³Azért fontos körsétákról beszélni, mert ugyan egy egyfokú csúcs sosem képezi részét egy körnek hagyományos értelemben, de egy ρ -kompatibilis körsétában (ha éppen ez az él a soron következő) benne lehet. Mint látni fogjuk, ez nemhogy nehézséget nem okoz, de pont hogy így lesz kívánatos ez a definíció.

⁴Annak, hogy egy felháromszögelés CW-komplexus legyen szükséges feltétele, hogy belőle egy-

3.3.4. Tétel (Euler). *Legyen \mathcal{F} irányítható felület \mathbb{R}^3 -ben. A felület tetszőleges helyes \mathcal{K} felháromszögelésének $|V|$ csúcsszámára, $|E|$ élszámára és $|F|$ oldalszámára ekkor a*

$$2 - 2\mathfrak{g} = |V| - |E| + |F|$$

összefüggés igaz, ahol \mathfrak{g} a felület génusza. □

3.3.5. Megjegyzés. A $2 - 2\mathfrak{g}$ értéket szokás χ -vel is jelölni és a felület Euler-karakterisztikájának nevezni. Síkgráfok topológiai génusza $\mathfrak{g} = 0$, ekkor visszkapjuk a 3.1.4. Tételben foglaltakat.

A drótváz-modell elképzelés alapján nem meglepő a következő állítás sem.

3.3.6. Állítás ([EJ60]). *Legyen (G, ρ) szalaggráf, és jelölje $\text{cyc}(G, \rho)$ a ρ -kompatibilis körséták számát. A szalaggráf \mathfrak{g} topológiai génuszára ekkor a*

$$2\mathfrak{g} = 2 - |V| + |E| - \text{cyc}(G, \rho)$$

összefüggés igaz, ahol $|V|$ a gráf csúcsainak, $|E|$ az éleinek száma. □

3.3.7. Megjegyzés. Egy pillanatra azért csodáljuk meg a fenti eredményt! A szalaggráfok génuszának első definíciója meglehetősen absztrakt volt: azon minimális génuszú felület génuszát értettük alatta, amire a gráfot élmetszés nélkül írni lehet. A fenti formula ezzel szemben egy konkrét képletet biztosít a szalaggráf ismeretében.

Végezetül lássunk egy lemmát, mely a későbbiekben igen hasznos lesz számunkra. A lemma tartalma továbbra is intuitív. Informálisan azt állítjuk, hogy ha adott két szalaggráf a kanonikus felületükre írva, akkor ha a felületet megfelelő helyen összeragasztjuk, konkrétan a gráfok mint felháromszögelések két csúcsánál, akkor a kapott felület génusza mindig a két eredeti felület génuszának az összege, függetlenül a ragasztás helyétől.

Formálisan a következőképp hangzik az állítás. Legyen adott két szalaggráf, $(G_1, \rho_1), (G_2, \rho_2)$, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ génuszokkal. Vegyünk két csúcsot a két gráfból, $v_1 \in V_1$ -t és $v_2 \in V_2$ -t, a szalagstruktúrájukat jelölje $\rho_1(v_1) = (e_1, \dots, e_k), \rho_2(v_2) = (f_1, \dots, f_l)$. A $(V_1 - v_1) \cup (V_2 - v_2) \cup v^*$ csúcshalmazon tekintsük a következő (G, ρ_i) szalaggráfot. A v^* csúcs legyen a v_1, v_2 csúcsok összeolvasztásából keletkezett csúcs, az élek halmaza legyen $E_1 \cup E_2$. $(V_1 - v_1) \cup (V_2 - v_2)$ csúcsai körül a szalagstruktúra legyen változatlan, v^* körül az i -típusú ragasztás $1 \leq i \leq k$ -ra legyen

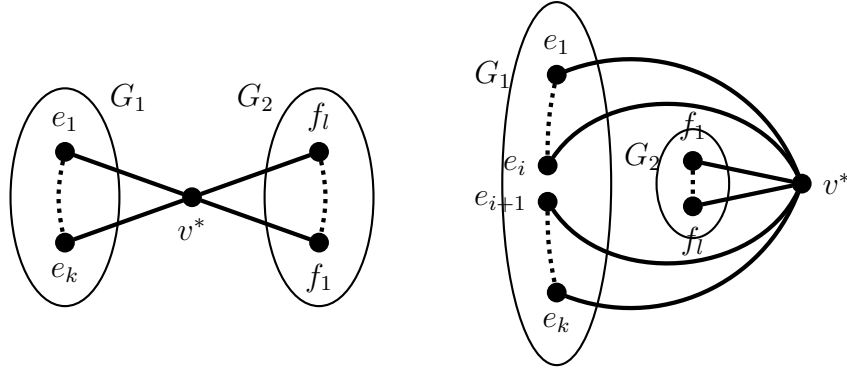
$$\rho_i(v^*) = (e_1, \dots, e_i, f_1, \dots, f_l, e_{i+1}, \dots, e_k).$$

A keletkezett (G, ρ_i) szalaggráf génuszát jelölje \mathfrak{g}_i^* .

3.3.8. Lemma (3.1. ábra, [McD18] Lemma 18. következménye). *A fenti jelölések mellett a kapott (G, ρ_i) gráf \mathfrak{g}_i^* génusza tetszőleges $1 \leq i \leq k$ -ra*

$$\mathfrak{g}_i^* = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2.$$

értelműen rekonstruálható legyen az eredeti felület. Gondoljunk bele, hogy formálisan két pont és az őket összekötő görbe a tórusz egy felháromszögelését jelentheti, ám a háromszögelés a síkot (vagy gömböt) határozza meg. Ez ugyanaz, mint amikor egy síkgráfot valahány lyukú tóruszra írunk: helyes lehet a felrajzolás, de felesleges, mert kisebb génuszú felületre is felrajzolható helyesen.



3.1. ábra. Az $(e_1, \dots, e_i, f_1, \dots, f_l, e_{i+1}, \dots, e_k)_v$ beágyazások génuszai minden i -re megegyeznek a két eredeti gráf génuszának összegével.

Bizonyítás. Az új gráf csúcs és élhalmaza jelölje $G = (V, E)$, a régiekét $G_i = (V_i, E_i), i = 1, 2$. Használjuk a 3.3.6. Állítást. Eszerint a szalaggráf génuszának meghatározásához elég a ρ kompatibilis köröket megszámolni, ugyanis azt tudjuk, hogy $|V| = |V_1| + |V_2| - 1$ és $|E| = |E_1| + |E_2|$. Azt állítjuk, hogy

$$cyc(G, \rho) = cyc(G_1, \rho_1) + cyc(G_2, \rho_2) - 1. \quad (3.1)$$

Ha ez igaz, akkor valóban készen vagyunk, ugyanis a 3.3.6. Állítás szerint ekkor (G, ρ) génusza

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^* &= 2 - |V| + |E| - cyc(G, \rho) \\ &= 2 - (|V_1| + |V_2| - 1) + (|E_1| + |E_2|) - (cyc(G_1, \rho_1) + cyc(G_2, \rho_2) - 1) \\ &= (2 - |V_1| + |E_1| - cyc(G_1, \rho_1)) + (2 - |V_2| + |E_2| - cyc(G_2, \rho_2)) = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2. \end{aligned}$$

Lássuk tehát a ρ -kompatibilis köröket. Ahogy az előző bekezdésben implicit rögzítettünk egy $1 \leq i \leq k$ számot, most az egyszerűség kedvéért vegyük az $i = k$ esetet és \mathfrak{g}_k^* -t jelölje \mathfrak{g}^* , ρ_k -t ρ^* . A v^* körüli szalagstruktúra ekkor

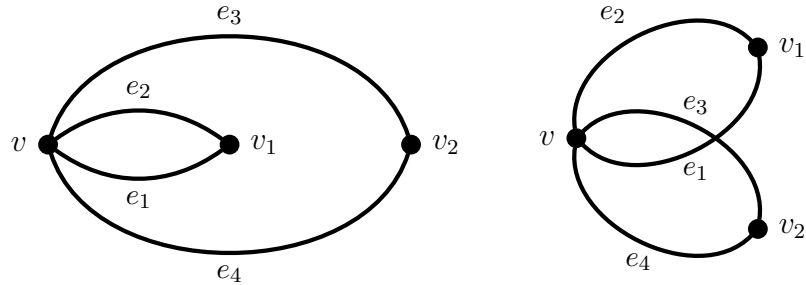
$$\rho^*(v^*) = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l).$$

Korábbi jelöléseink alapján $next_{\rho_1}(v_1, e_k) = e_1, next_{\rho_2}(v_2, f_l) = f_1$. A fenti 3.1 egyenlet bizonyításához elég belátni, hogy a két gráf minden, az eredeti szalagstruktúrájukkal kompatibilis körsétája megmarad, kivéve egyet. Ez igaz is. Azon körséták, amelyek semelyik e_i vagy f_j éleket nem érintik, megmaradnak ρ^* -ban is körsétának. A legtöbb e_i -t, f_j -t érintő séták is megmaradnak, hacsak e_k (és így következésképp e_1) és f_l (és következésképp f_1) nem szerepel bennük. Az e_k kezdetű kör e_1 -ben folytatódik G_1 -ben, az f_l kezdetű pedig f_1 -ben G_2 -ben, ám G -ben a két kör összeolvad egy közös körré: e_k -ból f_1 -be érve végigjárjuk az előbb említett G_2 -beli körsétát, majd f_1 -ben azt befejezve és e_1 -re lépve bejárjuk az említett G_1 -beli körsétát, amit e_k -ban befejezünk. (Síkgráfok esetén azt mondanánk, hogy a külső tartományok összeolvadtak.) A kapott ρ^* -kompatibilis körséták tehát valóban a két körséta uniója, kivéve a két speciális, összeolvadt körsétát. \square

3.4. Néhány példa szalaggráfokra

Nézzük az egyik legegyszerűbb nem sík szalaggráfot. Vegyünk három csúcsot, v, v_1, v_2 -at, és négy éleket, e_1, e_2 -t és e_3, e_4 -et, hogy v és v_1 között az e_1, e_2 , v és v_2 között

az e_3, e_4 él fut; v_1 és v_2 nem szomszédos (3.2. ábra). Ha v körüli szalagstruktúra $\rho_v = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, akkor (G, ρ) sík szalaggráf, ám ha $\rho'_v = (e_1, e_3, e_2, e_4)$, akkor (G, ρ') -t már csak a tóruszra tudjuk helyesen lerajzolni. (A kétfokú csúcsok körül a szalagstruktúra mindig triviális.) Előbbi esetben a ρ -kompatibilis körséták száma 3, utóbbi esetben 1. Edmonds 3.3.6. Állítása alapján tehát az első valóban sík szalaggráf, míg ez utóbbi a tóruszra van rajzolva úgy, hogy valódi körei a tórusz főköreit adják.



3.2. ábra. Különböző szalagstruktúra esetén ugyanazon gráf génusza különbözhet. Ha mást nem mondunk, egy ábrán a csúcsok körüli szalagstruktúra a sík pozitív irányítása mentén, az óramutató járásával ellentétes irányban értendő.

Nem nehéz megmutatni azt sem, hogy a Kuratowski-tétel két tiltott gráfja, K_5 és $K_{3,3}$ felrajzolhatóak a tóruszra. Fontos azonban megjegyezni, hogy mindkét gráfnak létezik olyan szalagstruktúrája, amivel már a tóruszra sem rajzolhatóak.

Vegyünk végül egy T fát. Bár (mint minden más gráfon is) $\prod_{v \in V} (\deg(v) - 1)!$ féle szalagstruktúra adható meg, fán mindegyik sík szalaggráfot határoz meg. A fa körmentessége miatt ugyanis minden csúcsról egymással csak v -n keresztül összekötött részfák lógnak le. A különböző szalagstruktúrák lényegében ezeket a részfákat „pakolgatják”. Levélcsúsból kiindulva így meg is lehet adni egy fa síkba rajzolását tetszőleges szalagstruktúra esetén.

3.4.1. Állítás. Minden T fa sík szalaggráf, tetszőleges szalagstruktúra esetén.

Bizonyítás. Csúcsszámra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Alapesetben a kétpontú út nyilván síkba rajzolható. Ha minden $n - 1$ csúcsú fára már tudjuk az állítást, akkor egy n csúcsú fa egy levelét (egyfokú csúcsát) elvéve a kapott fát rajzoljuk síkba az örökölt szalagstruktúrával; ekkor a levelet a megfelelő helyre visszarakva az eredeti fa egy helyes síkba rajzolását kapjuk. \square

3.4.2. Megjegyzés. A fenti bizonyítás algoritmust is ad egy fa lerajolására. A bizonyításhoz elég lett volna valójában csak a 3.3.8. Lemmát alkalmazni, kihasználva, hogy egy fa minden csúcsa elvágó. Indukcióval ugyanígy kaptuk volna, hogy a fa sík szalaggráf.

Itt fontos megjegyezni, hogy ha $cyc(G, \rho)$ számításába csak a hagyományos köreket vennénk be, akkor Edmonds tétele alapján minden fa génusza $g = 1/2$ lenne. Észben kell tehát tartani, hogy a ρ -kompatibilis körsétákat számoljuk.

4. fejezet

Sandpile-torzorok

A 2. Fejezetben egy G gráfhoz hozzárendeltünk egy $S(G)$ véges Abel-csoportot, az ún. sandpile-csoportot, és megmutattuk, hogy ezen csoport rendje megegyezik a gráf feszítőfáinak számával. Láttuk azonban, hogy általában nem létezik kanonikus, a gráf izomorfizmusaira invariáns bijekció a két halmaz között. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy ha a gráfot ellátjuk egy szalagstruktúrával, akkor létezik a sandpile csoportnak szabad, tranzitív hatása a feszítőfákon.

A fejezet során a jelölésekben eltávolodunk a 1. Fejezetben megszokottól. Bevezetjük egy v csúchoz tartozó \mathbf{v} formális szimbólumot, melynek segítségével egy $(x_1, \dots, x_n) = x \in \text{Div}(G)$ divizort

$$x = \sum_{v \in V} x_v \mathbf{v}$$

formális összeg alakban írunk fel. A két felírás között a megfeleltetés világos.

4.1. Csoportthatások

A 2. Fejezet végén ugyan már érintettük, de most ismételjük át, amit a csoportthatásokról tudnunk kell.

4.1.1. Definíció. Legyen Ω egy halmaz, H egy csoport. Az $\alpha : \Omega \times H \rightarrow \Omega$ leképezést csoportthatásnak nevezzük és $\omega \mapsto h \cdot \omega$ módon jelöljük $\omega \in \Omega$ -ra és $h \in H$ -ra, ha

- homomorfizmus, vagyis minden $h, h' \in H$ -ra és $\omega \in \Omega$ -ra $h' \cdot (h \cdot \omega) = (h'h) \cdot \omega$;
- az egységelem mindent fixen hagy: $1 \cdot \omega = \omega$.

A hatásról azt mondjuk, hogy szabad (vagy hű), ha injektív, azaz minden $\omega \in \Omega$ halmazelemet csak az egységelem hagy fixen; és azt mondjuk, hogy tranzitív, ha minden $\omega, \omega' \in \Omega$ elemekre létezik olyan $h \in H$, hogy $h \cdot \omega = \omega'$.

A definíció alapján könnyen látható, hogy ha $h \cdot \omega = \omega'$, akkor $h^{-1} \cdot \omega' = \omega$. Ugyanis az $\omega = 1 \cdot \omega = (h^{-1}h) \cdot \omega = h^{-1} \cdot (h \cdot \omega)$ egyenlőségek miatt ha ω' jelöli $h \cdot \omega$ -t, akkor $h^{-1} \cdot \omega' = \omega$.

4.1.2. Megjegyzés. A dolgozat során a hatásokat $\Omega \times H \rightarrow \Omega$ módon definiáljuk, de az $\alpha(\omega, x)$ hatást $h \cdot \omega$ balról szorzással írjuk ki.

4.1.3. Definíció. Legyen Ω egy halmaz, H egy csoport. Az Ω halmazt H egy *torzorának* mondjuk, ha létezik H -nak szabad, tranzitív hatása Ω -n. Formálisan tehát Ω egy H -torzor, ha minden $\omega, \omega' \in \Omega$ halmazelemekre egyértelműen létezik olyan $h \in H$ csoportelem, hogy $h \cdot \omega = \omega'$.

Rögzítsünk egy tetszőleges $\omega \in \Omega$ elemet. Az $\alpha_\omega : H \rightarrow \Omega$ leképezés legyen az $h \mapsto h \cdot \omega$ módon definiálva. Mivel az eredeti α hatás tranzitív, így α_ω képe az egész Ω , a hatás hűsége miatt magja triviális. Következésképp α_ω egy bijekció. Ha tehát Ω egy H -torzor, akkor $|\Omega| = |H|$.

Csoportelméletből jól ismert a következő lemma, amely következménye, hogy elég egy hatást a csoport egy generátorrendszerén megadni.

4.1.4. Lemma. *Legyen egy H csoport és Ω egy halmaz, és legyen továbbá Z a H egy generátorrendszere. Z -nek minden hatása az Ω alaphalmazon egyértelműen kiterjed H -nak egy hatásává.*

4.2. Sandpile-torzorok a feszítőfákon

Legyen (G, ρ) véges, irányítatlan, összefüggő szalaggráf, $S(G)$ a sandpile csoportja. A következő két szakaszban definiáljuk sandpile-torzorok két családját. Jobban kifejtve minden v csúcsra definiálunk egy $\alpha_v : S(G) \times \tau(G) \rightarrow \tau(G)$ hatást. Ez a következő tulajdonságokkal fog bírni:

1. α_v szabad, tranzitív hatás, mely így $\tau(G)$ -t $S(G)$ torzorrá teszi;
2. Ha (G, ρ) sík szalaggráf, akkor α_v nem függ a választott csúcstól, vagyis létezik α , hogy minden v csúcsra $\alpha_v \equiv \alpha$, és
3. Ha (G, ρ) nem sík szalaggráf, akkor (a triviális esetektől eltekintve) létezik legalább két olyan csúcs, hogy $\alpha_v \neq \alpha_{v'}$.

Két torzor-családot ismertetünk itt: az egyik az r_v rotorhatás [HLM⁺08] alapján, a másik a β_v Bernardi-hatás [BW18] alapján. A rotorhatást csak definiáljuk és kimondjuk a hozzá kapcsolódó tételleket, a Bernardi-hatásra a legtöbbet be is fogjuk látni. A fejezet végén kimondjuk a következő meglepő eredményt is:

4. Ha (G, ρ) sík szalaggráf, akkor $r = \beta$.
5. Ha (G, ρ) nem sík szalaggráf, akkor létezik v csúcs, hogy $r_v \neq \beta_v$.

Léteznek más sandpile-torzorok is, pl. cycle-cocycle [BBY19], melyekre a hasonlóképp igaznak bizonyultak a fenti állítások. Adódik tehát a következő sejtés is.

4.2.1. Sejtés. *Ha (G, ρ) véges, összefüggő sík szalaggráf, akkor egyfajta sandpile-torzor struktúra van rajta.*

Ezen állítás nehézsége, hogy mint azt látni fogjuk, a különböző sandpile-torzorok mind más-más mechanizmust használnak a divizorok és feszítőfák összekötésére, és nehéz valami általános hatást definiálni. Érdemes átfogalmazni a sejtést, hogy megadható-e valamilyen természetes feltétel, ami mellett már egyértelmű a hatás. [?]-ben belátják, hogy csak egy *konzisztens* torzor struktúra van sík szalaggráfokon (ahol egy hatás konzisztens, ha élelhagyásra és -összevonásra nézve „szépen” viselkedik).

Azonban, mint ahogy azt a 2. Fejezet utolsó szakaszában is láttuk, általában egy szalaggráfon nincsen egyértelmű sandpile-torzor struktúra (2.1. ábra), szükséges egy bázis csúcs választása. Általánosan sandpile torzornak nevezzük $S(G)$ egy v kezdőcsúcsú szabad tranzitív α_v hatását $\tau(G)$ -n, és sandpile torzor algoritmusnak nevezünk egy eljárást, melynek inputja egy (G, ρ) szalaggráf és annak egy v báziscsúcsa, az outputja pedig egy α_v sandpile torzor.

A most következő szakaszban a Bernardi-féle sandpile torzor algoritmust, a rákövetkezőben a rotor-típusút ismertetjük.

4.3. Bernardi-hatás

Az első sandpile-torzor, amit ismertetünk, a Bernardi-hatás lesz. A hatást Bernardi [Ber06] munkája nyomán Baker és Wang [BW18] dolgozta ki. A folyamat két lépésből áll. Először, Bernardi munkája alapján, rögzített (v, e) kezdő adat mellett mutatunk egy $\beta_{v,e}$ bijekciót a feszítőfák és a break divizorok között. A 2.3.1. Tétel alapján ez megad egy bijekciót a feszítőfák és $S^g(G)$ között is, a

$$\Phi : B(G) \leftrightarrow S^g(G), \quad b \mapsto [b], \quad b \in B(G)$$

megfeleltetést használva. $S^g(G)$ természetes módon tekinthető $S(G)$ -torzornak, $S(G)$ ugyanis eltolással hat $S^g(G)$ -n: tetszőleges $x \in \text{Div}^0(G)$ és $d \in \text{Div}^g(G)$ elemekre $x + d \in \text{Div}^g(G)$, vagyis az $[x] \cdot [d] \mapsto [x + d]$ egy jóldefiniált $S^g(G) \times S(G) \rightarrow S^g(G)$ hatás. A Bernardi-hatást ekkor a következőképp definiálhatjuk:

$$\beta_v : \tau(G) \xrightarrow{\beta_{v,e}} B(G) \xrightarrow{\Phi} S^g(G) \xrightarrow{S(G)} S^g(G) \xrightarrow{\Phi^{-1}} B(G) \xrightarrow{\beta_{v,e}^{-1}} \tau(G). \quad (4.1)$$

A jelölés helyességét az adja, hogy az első fontos tétel, amit belátunk a hatásról, az lesz, hogy bár a $\tau(G) \leftrightarrow B(G)$ bijekció függ a kezdő e él választásától, maga a hatás már nem (4.3.20. Tétel). Így valóban indokolt a $\beta_v : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ jelölés alkalmazása.

A Bernardi-bijekció

Nézzük az első lépést, a $\tau(G) \leftrightarrow B(G)$ bijekciót! Legyen (G, ρ) szalaggráf, és válasszunk egy v csúcsot. Vegyünk egy v -re illeszkedő e élet és egy T feszítőfát. Hogy a $\beta_{v,e}(T)$ break divizort megadjuk, először definiálnunk kell a (v, e) kezdő adatú, T -hez tartozó $\tau_{v,e}(T)$ Bernardi-bejárást. Informálisan egy ilyen bejárás T éleinek a szalagstruktúra szerinti, e -ben kezdődő olyan bejárását jelenti, ahol a nem faéleket átugorjuk. A bejárás elképzelhető úgy is, mint a fának, a szalagstruktúra tiszteletben tartásával kapott mélységi bejárását. Formálisan a bejárás csúcsok és élek váltakozó sorozata, ahol az egymás melletti élek a közrezárt csúcsban találkoznak, és ezen csúcs szalagstruktúrája szerint rákövetkezőek.

A $\tau_{v,e}(T)$ bejárás definíciója a (v, e) kezdőadat mellett így szól.

4.3.1. Definíció (Bernardi-bejárás). Kezdetben adott a (v, e) csúcs-él pár. Ez az első aktuális pár. A bejárást a következő szabály adja:

- ha $e \notin T$, akkor $(v, \text{next}_\rho(v, e))$ a következő aktuális pár,
- ha $e \in T$, akkor $(u, \text{next}_\rho(u, e))$, ahol u az e él v -től különböző végpontja.

Ha nemfaélet látunk, akkor azon (azt mondjuk) *átforgunk*, ha faélet, azon *átutazunk*. A bejárás véget ér, ha újra a (v, e) csúcs-él párt vizsgálom.

A bejárást kiírhatjuk

$$\tau_{v,e}(T) = (v_0, \vec{e}_1, v_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, v_k)$$

alakban is, ahol a $(v_{i-1}, \vec{e}_i, v_i, \vec{e}_{i+1})$ négyesekre a következők igazak:

1. $e_i, e_{i+1} \in T$,
2. $\vec{e}_i = v_{i-1}v_i$,
3. e_{i+1} az első faél v_i körül e_i után ρ_v szerint.

4.3.2. Példa. Nézzük a 4.1. ábrát! A $T = \{vc, va, as, sb\}$ feszítőfa (v, vc) kezdőadatú Bernardi bejárása

$$\tau_{v,vc}(T) = (v, \vec{v}a, a, \vec{a}s, s, \vec{s}b, b, \vec{b}s, s, \vec{s}a, a, \vec{a}v, v, \vec{v}c),$$

a $T' = \{vc, vb, bs, sa\}$ fágé

$$\tau_{v,vc}(T') = (v, \vec{v}b, b, \vec{b}s, s, \vec{s}a, a, \vec{a}s, s, \vec{s}b, b, \vec{b}v, v, \vec{v}c),$$

ha minden csúcs körül az élek ciklikus sorrendjét a lerajzolás szerinti pozitív körüljárás szerint értjük. A T bejárásakor a vb élen b felől, a vs élen s felől forogtunk át először, T' bejárásakor va -n és vs -n is v felől.

4.3.3. Megjegyzés. Topológiai szemmel nézve egy ilyen bejárás nem más, mintha T egy kis U környezetét véve, annak ∂U határát járnánk be azon a felületen, amelyre a szalaggráfot írtuk.

A bejárás definíciójából könnyű látni a következő állításokat.

4.3.4. Megfigyelés.

1. A gráf végessége miatt a bejárás valóban véget ér (visszaérünk (v, e) -be), és minden élet *láttunk* (átforogtunk vagy átmentünk rajta), mivel T feszítőfa.
2. Valójában minden $f = uw$ faél pontosan kétszer szerepel a $\tau_{v,e}(T)$ felsorolásban, mégpedig egyszer $\vec{u}w$, egyszer pedig $w\vec{u}$ alakban. Ennek az oka, T körmentessége miatt amelyik élen egyszer *átmentünk*, azon *vissza is kell jöjjünk*. Azonban elég ezt a fenti \vec{f} alakban írni, ugyanis a bejárás definíciója miatt tudjuk, hogy (u, \vec{f}, w) részbejárás esetén $\vec{f} = \vec{u}w$, azaz f u -ból w -be van irányítva.
3. Hasonlóan minden $f' = uw$ nem faélet pontosan kétszer láttunk, egyszer amikor u felől, egyszer amikor w felől *forogtunk át rajta*.
4. Következésképp a bejárás hossza $k = 2(n - 1)$.

Az elnevezések tisztázása végett emeljük ki, hogy amint az előző Megfigyelés 1.-es pontjában is implicit használtuk, egy élen azt mondjuk, hogy *átmentünk*, ha a faél, és a bejárás során őt vizsgáljuk (és hozzátesszük a bejáráshoz); *átforogtunk*, ha nem faél, és valamelyik végpontja felől vizsgáljuk (és átugorjuk); *láttunk*, ha átmentünk vagy átforogtunk rajta; továbbá azt mondjuk, hogy az f nem faél az u csúcs *felé néz*, vagy f -et u *felől láttuk*, ha a bejárás során f -en először u vizsgálatakor forogtunk át. Ezen éleket az u csúcs Bernardi-éleinek is nevezzük.

4.3.5. Megfigyelés. A nem faélek egy irányítását kapjuk, ha az $f = uw$ nem faélet u felé irányítjuk (vagyis $\vec{f} = \vec{w}u$), ha u -nak f Bernardi-éle. Az éleknek ezt a részirányítását T -nek a (v, e) kezdőadatú Bernardi-részirányításának hívjuk.

Vegyük észre, hogy másik, (v', e') kezdő adat választása mellett a $\tau_{v',e'}(T)$ bejárás az eredeti $\tau_{v,e}(T)$ bejárás egy ciklikus eltoltja:

$$\tau_{v',e'}(T) = (v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_{n-1} = v_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i, v_i),$$

ahol i azon index, hogy $v_i = v'$ $\tau_{v,e}$ -ben.

4.3.6. Példa. A 4.1. ábrán két feszítőfa Bernardi-részirányítását lehet látni a (v, vc) kezdőadat mellett. A T fa vs, vb nem faéleit a bejárás során s és b felől láttuk először, így feléjük vannak irányítva, T' -nek vs és va nemfaélei v felé. A szalagstruktúra ha külön nem jelezzük, továbbra is mindig pozitív körüljárás szerint értendő.

4.3.7. Megjegyzés. Van, hogy a $\tau_{v,e}(T)$ Bernardi-bejárásba belekódolják a nemfaéleket is. Ekkor a $(v_{i-1}, \vec{e}_i, v_i)$ hármast, ha $e_i \in T$, akkor a szokott módon értjük és tudjuk, hogy $e_i = v_{i-1}v_i$; ha viszont $e_i \notin T$, akkor $v_i = v_{i-1}$, és e_i -t aszerint irányítjuk, hogy láttuk-e már vagy sem. Van, hogy könnyebb ezzel a definícióval dolgozni, mi azonban jobbnak láttuk, ha az első, intuitívabb verziót használjuk. Az átjárás a két felírás között magától értődő. Ez utóbbiból elhagyva a nemfaéleket (és a közbülső csúcsokat) az eredeti verziót kapjuk, az eredeti verzió egy $(\vec{e}_i, v_i, e_{i+1})$ hármását pedig kibővítjük a közbülső nem faélekké, ha $next_\rho(v_i, e_i) \neq e_{i+1}$.

Hogyan segít a bejárás egy T feszítőfa, és a T -vel kompatibilis break divizorok között kapcsolatot létesíteni? A $\tau_{v,e}(T)$ bejáráshoz tartozó break divizort így kaphatjuk meg. Ha f nem faél, akkor f azon oldalára rakjunk egy chipet, amelyiket *előbb* láttuk a $\tau_{v,e}(T)$ bejárás során. Vagyis, ha a bejárás $\tau_{v,e}(T) = (v_0, \vec{e}_1, v_1, \dots, \vec{e}_k, v_k)$ alakját nézem, akkor $f = v_i v_j$, $i < j$ esetén v_i -re dobunk egy chipet.¹ Jelöljük ezt $\eta_{v,e}(T)(f) = \mathbf{v}_i$ módon, ahol \mathbf{v}_i a fejezet elején leírtakkal összhangban a v_i csúcsához tartozó formális szimbólum. A T -hez rendelt break divizor (v, e) kezdő adat mellett ekkor

$$\beta_{v,e}(T) = \sum_{f \notin T} \eta_{v,e}(T)(f) = \sum_{u \in V} (u \text{ Bernardi éleinek száma}) \cdot \mathbf{u}. \quad (4.2)$$

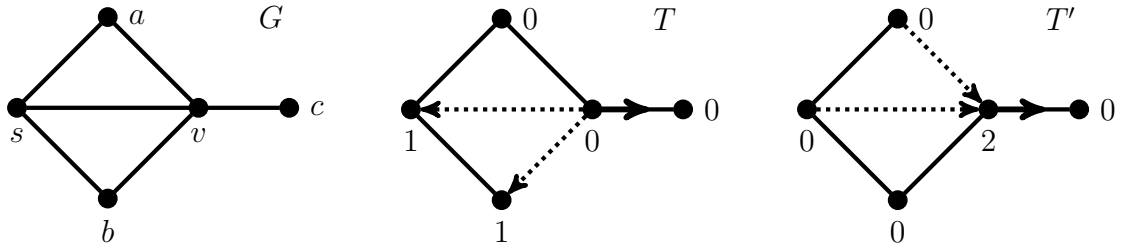
Az $f \in T$ faélekre $\eta_{v,e}(T)(f) = 0$, így az összesség az első szummában minden $f \in E(G)$ élre is mehetne.

4.3.8. Megjegyzés. A T -hez tartozó break divizor egyébként a 4.3.5. Megjegyzésben foglaltak szerint a nem faélek Bernardi-részirányítása által indukált divizorral egyezik meg, ahol egy $\vec{f} = \vec{w}u$ irányítás által indukált divizor \mathbf{u} .

4.3.9. Példa. A 4.1. ábra két feszítőfájára visszatérve a T -hez tartozó break divizor (v, vc) kezdőadat mellett $\beta_{v,vc}(T) = \mathbf{s} + \mathbf{b}$, míg a T' -höz tartozó $\beta_{v,vc}(T') = 2\mathbf{v}$. Ha a Bernardi-részirányításokat jelöljük, akkor az előző Megjegyzés alapján a fához tartozó break divizort nagyon könnyű megkapni az ábra alapján.

Konstrukció szerint $\beta_{v,e}(T) \in B(G)$ minden T -re. Bernardi eredménye, hogy $\beta_{v,e}$ valójában bijekció $\tau(G)$ és $B(G)$ között.

¹Mivel minden nemfaélhez tartozik egy chip a break divizorban, szokás nem csak azt mondani, hogy az az él *merre néz*, hanem hogy az adott él melyik csúcs felé *lő*.



4.1. ábra. A T és T' feszítőfákhoz rendelt break divizorok (v, vc) kezdőadat mellett és a Bernardi-élek által generált Bernardi-részirányítások. A szalagstruktúrát mindig pozitív irányban értjük, ha másként nem rendelkezünk.

4.3.10. Tétel ([Ber06]). *Legyen (G, ρ) szalaggráf, és $\beta_{v,e} : \tau(G) \rightarrow B(G)$ a fent definiált leképezés. Ekkor $\beta_{v,e}$ bijektív.*

Bakernek és Wangnak sikerült, Bernardi eredeti bizonyításával ellentétben, kombinatorikus bizonyítást adni a fenti állításra, mégpedig úgy, hogy algoritmikusan megadták $\beta_{v,e}$ inverzét. Mi az ő bizonyításukat közöljük most, az algoritmus polinomiális futásidejére külön hangsúlyt nem fektetve.²

A Bernardi-bijekció inverze

Legyen tehát (G, ρ) szalaggráf és rögzítsünk egy (v, e) kezdő adatot. Legyen

$$\beta = \beta_{v,e} : \tau(G) \rightarrow B(G)$$

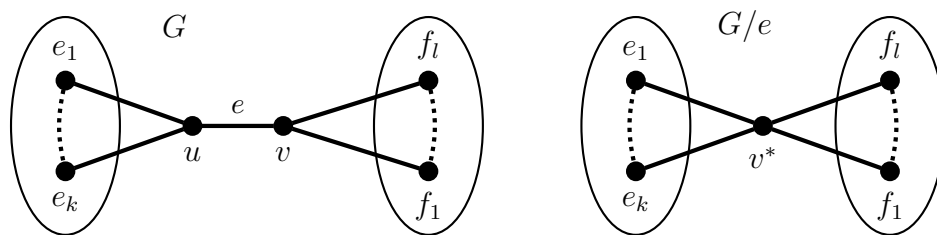
a vizsgált leképezés. A célunk megkonstruálni egy $\alpha : B(G) \rightarrow \tau(G)$ leképezést, melyre $\beta \circ \alpha = id_{B(G)}$ és $\alpha \circ \beta = id_{\tau(G)}$. Ehhez minden $b \in B(G)$ break divizorhoz hozzá kell rendeljünk egy T feszítőfát, aminek b a β szerinti break divizora. Vagyis a (v, e) kezdőadattól kezdve minden következő v', e' illeszkedő csúcs-él párra el kell döntsük, hogy e' -n átsétáljunk vagy átforogjunk (pontosabban, hogy az eredeti bejárás során átsétáltunk vagy átforogtunk rajta). A kulcs észrevétel a következő: a bejárás egy adott pillanatában ha H jelöli a már látott élek által feszített részgráfot, $b' = \sum_{f \in E(H)} \eta_{v,e}(f)$ a már felépített break divizort, akkor b' $T|_H$ -nak break divizora. Vagyis:

4.3.11. Megfigyelés. Minden lépésben a látott élekre szorítkozva az épülő divizor a (megszorított) feszítőfának break divizora.

Fordított szemszögből nézve azt is mondhatjuk (és az algoritmus explicit ezt használja majd), hogy ha $b \in B(G)$ és egy f nem faélet u felől láttunk (vagyis $\eta_{v,e}(f) = \mathbf{u}$), akkor $G - e$ -n $b - \mathbf{u}$ break divizor, mégpedig ha b T -vel volt kompatibilis, akkor $b - \mathbf{u}$ $T \setminus e$ -vel kompatibilis.

Formálisan mindezt az Algorithm 1 pszeudókód írja le. Eszerint akárhányszor egy f élet egy u csúcs felől vizsgálva el akarjuk dönteni, hogy fabeli legyen-e vagy sem, akkor ha f nem eleme az α által épített feszítőfának, továbbá f elhagyásával a gráf nem esik szét, akkor f -et pontosan akkor adjuk hozzá az épülő feszítőfához, ha $b - \mathbf{u}$

²Az egzisztencia bizonyításhoz ugyanis nyilván nem szükséges, hogy a bizonyítás konstruktív legyen, miként az sem, hogy ha az, akkor polinomiális időben megoldható legyen. Szép eredmény azonban, hogy így is lehetséges.



4.2. ábra. A G/e -n indukált szalagstruktúra.

nem break divisor $G - f$ -n. Algoritmikusan leírva az egyszerűség kedvéért G -t $G - f$ -re cseréljük, akárhányszor f -ről úgy döntünk, hogy nem fabeli. Ennek megfelelően a leállási feltétel $T = G$ lesz, ahol T jelöli az épülő fát. Értelemszerűen ekkor b -t is folyton módosítani kell, akárhányszor f -et nem tesszük bele T -be, hogy break divisor maradjon.

Algorithm 1 $\alpha_{v,e}$: a $\beta_{v,e}$ Bernardi-bijekció inverze

Require: G összefüggő, $b \in B(G)$

- 1: $T := \emptyset$, $u := v$, $f := e$
 - 2: **while** $T \neq G$ **do**
 - 3: Legyen w az f él u -tól különböző végpontja
 - 4: **if** $G - f$ összefüggő, $f \notin T$, $b - \mathbf{u} \in B(G - f)$ **then**
 - 5: $G := G - f$, $b := b - \mathbf{u}$, $f := next_{\rho'}(u, f)$, ahol ρ' a ρ megszorítása $G - f$ -re.
 ▷ Ha break divisor a $G - f$ -en, akkor átforgunk rajta
 - 6: **else**
 - 7: $T := T \cup f$, $u := w$, $f := next_{\rho}(w, f)$ ▷ Különben átsétálunk
 - 8: **end if**
 - 9: **end while**
 - 10: Return T
-

Két megjegyzés az algoritmushoz. A 2.3.4. Tétel azt mondja, hogy a 4. sorban szereplő $b - \mathbf{u} \in B(G - f)$ feltétel gyorsan számolható. A másik megjegyzés az 5. sorban említett örökölt szalagstruktúrára vonatkozik. Ez nyilván az e él eltávolítását jelenti a két végpontjának szalagstruktúrájából.

4.3.12. Példa. Számoljuk ki a 4.1. ábra G gráfján a T feszítőfára $\alpha_{v,vc}$ -t! Legyen adott az $\mathbf{s} + \mathbf{b}$ g -ed fokú divisor. A v csúcson és vc élen kezdünk. $G - vc$ nem összefüggő, így $T = \{vc\}$. Most c -ből vizsgálom a vc élet, ám $vc \in T$ már, így nem csinálunk semmit. A va él vizsgálatakor el kell döntsük, hogy $\mathbf{s} + \mathbf{b} - \mathbf{v}$ break divisor-e $G - va$ -n. Mivel egy break divisor minden eleme nemnegatív, ez így nem igaz. Ezért va -t hozzátesszük T -hez. Ugyanígy az as és sb éleket is hozzátesszük T -hez. (Ekkor T már feszítőfa, de játszunk végig az algoritmust). Amikor vb élet b felől vizsgáljuk, azt kérdezzük, hogy $G - vb$ -n \mathbf{s} breakdivisor-e. Az, mégpedig T -nek. Végül amikor s -ből vizsgáljuk a vs élet, hasonlóan látjuk, hogy \mathbf{b} break divisor $G - vs$ -en. Most már $T = G - \{vb, vs\}$, tehát leállunk. A kapott $T = \{vc, va, sa, sb\}$ élhalmaz G -nek valóban feszítőfája, és miként már kiszámoltuk, $\beta_{v,vc}(T)$ valóban $\mathbf{s} + \mathbf{b}$ -vel egyezik meg.

Lássuk be, hogy $\alpha_{v,e}$ valóban $\beta_{v,e}$ inverze! Ehhez fel kell elevenítsük az alábbi definíciókat, és be kell lássunk egy lemmát.

Mint azt tudjuk, $e = uv$ esetén $G - e$ az e él elhagyásával kapott gráf, míg $G/e = (V \setminus \{u, v\} \cup \{v^*\}, E \setminus \{e\})$, ahol $\delta(v^*) = \delta(u) \cup \delta(v)$, ahol $\delta(v)$ jelöli a v -re illeszkedő élek halmazát. Vagyis G/e -t úgy kapjuk, hogy az e élet összehúzzuk egy közös v^* csúcsba, és a v^* -ra illeszkedő élek a szülő csúcsokra illeszkedő élek uniója. Értelemszerűen indukálódik ekkor G/e -n egy ρ^* szalagstruktúra is: a v^* -tól különböző csúcsok szalagstruktúrája változatlan, míg $\rho_u = (\rho_1, e), \rho_v = (\rho_2, e)$ esetén $\rho_{v^*}^* = \rho_1 \cup \rho_2$, a két eredeti struktúra egymás mellé írása. Lásd 4.2. ábra. $G - e$ -n az indukált szalagstruktúrán nyilván az u és v körül az e él elhagyásával kapott szalagstruktúrát értjük.

4.3.13. Lemma. *Tegyük fel, hogy $b - \mathbf{v}$ nem break divizor $G - e$ -n, ahol $e = uv$. Jelölje $b^* \in \text{Div}(G/e)$ a következő divizort: $w \notin e$ esetén legyen $b^*(w) = b(w)$, az összehúzott v^* csúcsra pedig legyen $b^*(v^*) = b(u) + b(v)$. Ekkor $b^* \in B(G/e)$.*

Bizonyítás. Legyen T egy b -vel kompatibilis feszítőfája G -nek. A kompatibilitás minden nem faélre megmondja, hogy merre néz, az alapján, hogy az él melyik oldalára dobtunk le egy chipet. Ha $e \in T$, akkor T/e G/e -nek feszítőfája, és T/e a b^* -gal kompatibilis a definíció alapján könnyen láthatóan (a keletkezett v^* csúcs $b(u) + b(v)$ darab nem faélet örököl u -tól és v -től). Tegyük tehát fel, hogy $e \notin T$. Ha e v felé nézne, akkor $b - \mathbf{v}$ break divizor lenne $G - e$ -n, következésképp e u felé néz. Ha az e élet hozzátesszük a feszítőfához, akkor G -ben keletkezik egy $C_{T,e}$ -vel jelölt kör, melyet később T -nek az e élhez tartozó *alapkörének* fogunk nevezni. Ha f jelöli azon u -ra illeszkedő faélet, mely ezen körnek eleme, akkor a $T^* = T \setminus f \cup e$ G -nek egy olyan feszítőfája, mely b -vel továbbra is kompatibilis. Ennek az az oka, hogyha egy csúcs körül a felé néző nem faéleket úgy cseréljük ki faélekkel, hogy a kapott részgráf továbbra is feszítőfa legyen, akkor világos, hogy a kapott feszítőfa kompatibilis maradt az eredeti divizorral, hiszen egyik csúcs körül sem változott a felé néző élek száma. Visszatérve a bizonyításra, ha T^* b -vel kompatibilis és $e \in T^*$, akkor $b^* T^*/e$ -vel kompatibilis az bizonyítás első felében leírtak szerint. \square

4.3.14. Példa. A 4.1. ábra T feszítőfájára és vb élére $C_{T,vb} = \{va, as, sb, vb\}$.

A bizonyítás egyszerűsítése végett adjuk meg α -nak egy rekurzív felírását (Algorithm 2)! Az előző lemmát használva világos, hogy ez a módosítás ugyanazt a feszítőfát adja eredményül, mint az Algorithm 1 által megadott. Ebből az alakból könnyen látszik a következő bizonyítás vége is.

4.3.15. Állítás. *Legyen (G, ρ) szalaggráf és $b \in B(G)$. Ekkor $\alpha(b) \in \tau(G)$ és $\beta(\alpha(b)) = b$.*

Bizonyítás. Élszám szerinti indukcióval bizonyítunk. Alapesetben G egy pontú és egy hurokéle van, vagy kétpontú egy éllel összekötve. Az első esetben $g = 1$ és $b = \mathbf{v}$, tehát teljesülnek az algoritmus 4. sorában leírtak. Így $\alpha(\mathbf{v})$ az egy pontú feszítőfa. Ennek β szerinti képe valóban \mathbf{v} . A második esetben $g = 0$ és $b = 0$. Az egyetlen él elvételével a gráf megszűnik összefüggőnek lenni, tehát magát G -t kapjuk mint feszítőfát, aminek β szerinti képe valóban 0 . Az alapesetek tehát rendben vannak.

Tegyük fel, hogy minden $m - 1$ élű gráfra igaz az állítás. Tekintsünk egy m élű (G, ρ) szalaggráfon egy b break divizort. Az e kezdőél v -től különböző végpontja legyen u . Ha $b - \mathbf{v}$ break divizor $G - e$ -n, akkor az indukciós feltevés alapján $\alpha(b - \mathbf{v}) = T'$ feszítőfa $G - e$ -n és $\beta(T') = b - \mathbf{v}$. Mivel egyenlő $\alpha(b)$? Mivel $e \notin T'$ feszítőfa G -n is, így $G - e$ összefüggő, és $b - \mathbf{v} \in B(G - e)$, vagyis az α -t definiáló algoritmus 4.sora

Algorithm 2 Az α rekurzív felírása

Require: G összefüggő, $b \in B(G)$

```
1: if  $|E(G)| > 1$  then                                ▷ Ha még hívható rekurzívan
2:   if  $G - e$  összefüggő,  $b - \mathbf{v} \in B(G - e)$  then
3:     Return  $\alpha(G - e, b - \mathbf{v})$                     ▷  $G - e$ -en dolgozunk tovább
4:   else
5:     Legyen  $b^*$  a  $G/e$ -en indukált break divizor
6:     Return  $\alpha(G/e, b^*) \cup \{e\}$                 ▷ Különben  $G/e$ -n
7:   end if
8: else                                                ▷ Alapesetek
9:   if  $|V(G)| > 1$  then
10:    Return  $\{e\}$ 
11:   else
12:    Return  $\emptyset$ 
13:   end if
14: end if
```

teljesül, és $G - e$ -n folytatódik az algoritmus rekurzívan. Következésképp $\alpha(b) = \alpha(b - \mathbf{v})$, ami bizonyítja ezt az esetet.

Ha $b - \mathbf{v}$ nem break divizor $G - e$ -n, akkor tekintsük a G/e gráfot. Az előző lemma alapján az ottani jelöléseket használva b^* break divizor G/e -n. Az indukciós feltevés alapján ezért $\alpha(b^*) = T'$ és $\beta(T') = b^*$. A b^* definíciójából könnyen láthatóan ekkor $T = T' \cup e$ nem csak hogy egy b -vel kompatibilis feszítőfa G -n, de $\beta(T) = b$. Elég tehát belátni, hogy $\alpha(b) = T$. Ezt az α -t rekurzívan definiáló algoritmusból mutatjuk meg. Mivel $b - \mathbf{v}$ nem break divizor $G - e$ -n, a 2. sor feltétele nem teljesül. Ekkor $\alpha(b) = \alpha(b^*) \cup \{e\}$ a 6. sor alapján, vagyis $\alpha(b)$ valóban T -vel egyezik meg. \square

4.3.16. Következmény. A $\beta_{v,e} : \tau(G) \rightarrow B(G)$ leképezés szürjektív minden (v, e) kezdőadatra.

A 2.3.1. Tétel miatt tudjuk, hogy $|B(G)| = |\tau(G)|$, ami már elég ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy β bijekció és α az inverze. Mi azonban a 2.3.1. Tétel bizonyításakor felhasználtuk a most bizonyítandó állításokat, így be kell lássuk ezt az irányt is.

4.3.17. Állítás. Legyen (G, ρ) szalaggráf és $T \in \tau(G)$. Ekkor $\beta(T) \in B(G)$ és $\alpha(\beta(T)) = T$.

Bizonyítás. Az állítás első fele azzal ekvivalens, hogy T minden nem faéleinek valamely végpontjára egy chipet rakunk. Ezt már a β definíciójában beláttuk. Nézzük, hogy α valóban bal-inverz. Használjuk az előző állítás bizonyításában használt eredményeket.

Élszám szerinti indukcióval bizonyítunk. Az alapeseteket már végiggondoltuk: egyetlen hurokélre $\beta(\emptyset) = \mathbf{v}$ és $\alpha(\mathbf{v}) = \emptyset$; míg kétpontú gráf esetén $\beta(e) = 0$, $\alpha(0) = e$. Tegyük hát fel, hogy minden $m - 1$ élű gráfra igaz az állítás, és vegyünk egy m élű gráfot. Jelölje $b = \beta(T)$ a feszítőfa képét, és lássuk be, hogy $\alpha(b) = T$. Ilyen feladatot már láttunk az előző állításban. Négy esetet különböztetünk meg aszerint, hogy e benne van-e T -ben és $b - \mathbf{v}$ break divizor-e $G - e$ -n. Az első három eset egyszerű.

- Ha $e \notin T$, akkor e v felé néz $\tau_{v,e}(T)$ -ben (rögtön átvágjuk e -t v -ből), tehát $b - \mathbf{v}$ break divizor $G - e$ -n. Legyenek $e' = next_\rho(v, e)$ és $\beta' = \beta_{v,e'}$, mely

utóbbi tekinthető mint a $\beta = \beta_{v,e}$ által indukált Bernardi-leképezés $G - e$ -n. T feszítőfa $G - e$ -n is, és világos, hogy $\beta'(T) = b - \mathbf{v}$. Az indukciós feltevés alapján $\alpha_{v,e'}(b - \mathbf{v}) = T$, amiből könnyen látszik, hogy $\alpha(b) = T$ (a definiáló algoritmus 4. sora teljesül a (v, e) pár vizsgálatakor).

- Ha $b - \mathbf{v}$ nem break divizor $G - e$ -n, akkor a 4.3.13. Lemma alapján b^* break divizor G/e -n. Ha $e \notin T$, akkor az előző eset szerint kész vagyunk. Tegyük hát fel, hogy $e \in T$. Jelölje β' a $\beta_{v,e'}$ Bernardi-leképezést, ahol $e' = \text{next}_\rho(v, e)$, és legyen $\alpha' = \alpha_{v,e'}$. Az indukciós feltevés alapján $\beta'(T/e) = b'$ esetén $\alpha(b') = T/e$. A Bernardi bejárás definíciója alapján azonban $\beta'(T/e) = b^*$, következésképp $\alpha(b) = T$.

Mi történik, ha $e \in T$ és $b - \mathbf{v} \in B(G - e)$? Azt állítjuk, hogy ez nem lehetséges.

Tegyük fel, hogy mégis. $T \setminus e$ -nek v -vel egy összefüggési komponensbe eső csúcsait jelölje A . A $G' = G[A]$ indukált részgráf (kombinatorikai) génuszát jelölje g' . T megszorítását G' -re jelölje T' , b megszorítását b' . Vegyük észre, hogy nem magától értődő, hogy b' kompatibilis T' -vel G' -ben, ugyanis b' egyes chipjei származhatnak G' -n kívüli élekből is akár. Bebizonyítjuk azonban, hogy b' valójában T' -break divizor.

Ehhez G' -n nézzük a következő Bernardi-hatást. Jelölje e' a szalagstruktúra szerinti első olyan élet v körül, mely e után következik. A $\beta_{v,e'}$ leképezést G' -n jelölje β' . Azt állítjuk, hogy $\beta'(T') = b'$, vagyis b' break divizor G' -n. Ehhez a következőt kell észrevenni. T -nek a $\tau_{v,e}$ szerinti bejárásában először e -n átsétálunk, és $V \setminus A$ csúcsait járjuk be. Ezután e -n visszajöve v -ből kiindulva A csúcsait is bejárjuk. Ez utóbbi lépés megegyezik a $\beta'(T)$ -hez tartozó bejárással is, leszámítva hogy az A és $V \setminus A$ közötti éleket ez utóbbiban nem vizsgáljuk. Vegyük azonban észre, hogy $\tau_{v,e}(T)$ -ben ezeket az éleket mind a $V \setminus A$ -beli csúcsok felől láttuk először, tehát ezek az élek b' chipjeihez nem tesznek hozzá. Következésképp $\beta'(T')$ valóban b' -vel egyezik meg.

Ha azonban b' break divizor G' -n, akkor foka g' -vel egyezik meg. Mivel b' a b -nek a G' -re vett megszorítása, így $b - \mathbf{v}$ megszorítása $b' - \mathbf{v}$ -vel egyezik meg, következésképp a fokára $g' - 1$ adódik. A feltevés szerint $b - \mathbf{v}$ break divizor $G - e$ -n, vagyis az előző 2.3.2. Lemma szerint $g' - 1 = \deg(b' - \mathbf{v}) \geq g'$, ami ellentmondás. \square

4.3.18. Példa. A 4.1. ábra T fáját nézve az előző bizonyítás jelölései mellett $T \setminus vc$ -nek v -vel egy összefüggőségi komponensbe eső csúcsai $A = \{a, s, b\}$, ekkor $G[A] = (A, \{va, vb, vs, sa, sb\})$, és $T' = \{va, as, sb\}$. Láttuk, hogy $\beta_{v,vc}(T) = b$, ahol $b = \mathbf{s} + \mathbf{b}$, és könnyen ellenőrizhető, hogy $\beta_{v,va}(T') = b|_A = b = b'$ is igaz. A $b' - \mathbf{v}$ divizor foka 1, míg $G[A]$ kombinatorikai génusza azonban $5 - 4 + 1 = 2$.

A hatás függetlensége a kezdőél választásától

Most lássuk be, hogy a 4.1. egyenletben definiált β_v hatás valóban független a kezdőél választásától. Ennek belátásához a következő állításra van szükségünk.

4.3.19. Állítás. Legyen (G, ρ) szalaggráf, v egy tetszőleges csúcs. Két v -re illeszkedő e_1, e_2 élre a Bernardi-bijekciókat jelölje $\beta_i = \beta_{v,e_i}$, ahol $i = 1, 2$. Ekkor létezik $\gamma^* \in S(G)$, hogy

$$\beta_2(T) = \gamma^* \cdot \beta_1(T)$$

minden $T \in \tau(G)$ -re.

4.3.20. Tétel. Jelölje $\beta_v : S(G) \times \tau(G) \rightarrow \tau(G)$ azt a hatást, mely a (T, γ) párhoz a $\gamma \cdot T = \beta_{v,e}^{-1}(\gamma \cdot \beta_{v,e}(T))$ feszítőfát rendeli hozzá. Ekkor β_v a jelöléssel összhangban valóban független a kezdőél választásától.

A 4.3.20. Tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy a 4.3.19. Állítást már tudjuk. Be akarjuk látni, hogy tetszőleges e_1, e_2 él választása mellett a β_1, β_2 bijekciókra az általuk definiált hatás megegyezik, vagyis

$$\beta_1^{-1}(\gamma \cdot \beta_1(T)) = \beta_2^{-1}(\gamma \cdot \beta_2(T)) \quad (4.3)$$

igaz minden $\gamma \in S(G)$ -re és $T \in \tau(G)$ -re. Jelölje $\gamma^* \in S(G)$ azt az elemet, amelyre a 4.3.19. Állítás szerint $\beta_2 = \gamma^* \cdot \beta_1$. A T feszítőfára legyen $\lambda = \beta_2(T) \in S^g(G)$. Ekkor $T = \beta_2^{-1}(\lambda)$, és $\beta_2(T) = \gamma^* \cdot \beta_1(T)$ miatt $T = \beta_1^{-1}(-\gamma^* \cdot \lambda)$. Mivel minden $\lambda \in S^g(G)$ előáll, mint valamely T fa β_2 szerinti képe, így

$$\beta_2^{-1}(\lambda) = \beta_1^{-1}(-\gamma^* \cdot \lambda), \quad \text{minden } \lambda \in S^g(G) \text{ esetén.}$$

A kívánt (4.3). egyenletbe a kiemelt képleteket beírva és $S(G)$ kommutativitását kihasználva

$$\begin{aligned} \beta_2^{-1}(\gamma \cdot \beta_2(T)) &= \beta_1^{-1}(-\gamma^* \cdot (\gamma \cdot \beta_2(T))) = \beta_1^{-1}((-\gamma^* + \gamma) \cdot \beta_2(T)) \\ &= \beta_1^{-1}((-\gamma^* + \gamma) \cdot (\gamma^* \cdot \beta_1(T))) = \beta_1^{-1}((-\gamma^* + \gamma + \gamma^*) \cdot \beta_1(T)) \\ &= \beta_1^{-1}(\gamma \cdot \beta_1(T)), \end{aligned}$$

tehát a hatás valóban független a kezdőél választásától. \square

A 4.3.19. Állítás bizonyítása. Vegyünk egy $T \in \tau(G)$ -t. A T -hez rendelt break divizor a (4.2). egyenlet alapján

$$\beta_1(T) - \beta_2(T) = \sum_{f \notin T} (\eta_{v, e_1}(T)(f) - \eta_{v, e_2}(T)(f)).$$

A szummában szereplő tagokat jelölje $\delta(f) = \eta_{v, e_1}(f) - \eta_{v, e_2}(f)$ minden f nem faélre.

A v körüli szalagstruktúrát e_1 és e_2 két részre vágja. Ha

$$\rho_v = (e_1, a_1, \dots, a_k, e_2, b_1, \dots, b_l)$$

jelöli a v körüli szalagstruktúrát, akkor $I = \{e_1, a_1, \dots, a_k\}$ jelöli az első részt, $J = \{e_2, b_1, \dots, b_l\}$ a másodikat. $T - v$ összefüggő komponenseit osszuk kétfelé aszerint, hogy v -hez I -beli, vagy J -beli éleken keresztül csatlakozik. A két diszjunkt csúcshalmazt jelölje A és B rendre. Vizsgáljuk a $\beta_1(T) - \beta_2(T)$ különbséget a hozzájuk tartozó bejárások szerint!

Mint már említettük, rögzített T fára a $\tau_{v, e_1}(T)$ és $\tau_{v, e_2}(T)$ bejárások egymás ciklikus eltoltjai. A konstrukció alapján azonban most ennél többet is tudunk mondani! A $\tau_{v, e_1}(T)$ bejárás e_1 -ben kezdődik, és először A csúcsait járja körbe, majd e_2 -be érve B csúcsait. A $\tau_{v, e_2}(T)$ bejárás fordítva, e_2 -ben kezd, B csúcsait járja be először, majd e_1 -be érve A csúcsait. Emlékezzünk vissza a T -hez rendelt break divizor definíciójára: ha egy f nem T -élet ugyanolyan sorrendben látunk a két bejárás során (vagyis mindkét bejárás ugyanazon végpontját látja először), akkor $\delta(f) = 0$. Így tehát könnyen láthatóan

$$\delta(f) = 0, \text{ ha } \begin{cases} f \text{ hurokél;} \\ f \text{ mindkét vége } A\text{-ban van,} \\ \text{vagy mindkét vége } B\text{-ben van;} \\ f = va \text{ valamely } a \in A \text{ csúcsra és } va \in I, \\ \text{vagy } f = vb \text{ valamely } b \in B \text{ csúcsra és } vb \in J. \end{cases}$$

Ha azonban f ún. *átkötő* él, vagyis ha az alábbi élek valamelyike, akkor a hozzá tartozó $\delta(f)$ nem triviális: ha

- $f = ab$, $a \in A, b \in B$, akkor $\delta(f) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, mivel az első bejárás során a felől, másodjára b felől láttuk az f élet;
- $f = va \in J$, $a \in A$, akkor $\delta(f) = \mathbf{a} - \mathbf{v}$, mivel az első bejárás során a felől, másodjára v felől láttuk az f élet, hiszen $f \in J$.
- $f = vb \in I$, $b \in B$ esetén hasonlóan, csak fordítva, $\delta(f) = \mathbf{v} - \mathbf{b}$, mivel az első bejárás során most $f \in I$ miatt v felől, másodjára pedig b felől láttuk az f élet.

A fenti kiemelt különbséget tehát továbbírva

$$\beta_1(T) - \beta_2(T) = \sum_{\substack{f=ab, \\ a \in A, b \in B}} \mathbf{a} - \mathbf{b} + \sum_{\substack{f=va \in J, \\ a \in A}} \mathbf{a} - \mathbf{v} + \sum_{\substack{f=vb \in I, \\ b \in B}} \mathbf{v} - \mathbf{b}.$$

Mi történik, ha A csúcsai egyszerre kitörnek? Könnyen meggondolható, hogy ha egy él mindkét vége A -ban van vagy egyik sincs A -ban, akkor A kitörések a rajta lévő konfiguráció nem változik. Ha egy élnek pontosan egyik vége van A -ban és szerepel a fenti összeg valamely tagjában, akkor rajta a konfiguráció kinullázódik. Ha pedig egy él nem szerepel a fenti összegben, de az egyik vége A -ban van, akkor A kitörések az él A -tól *elfelé* irányítódik. Ezek egyébként pontosan azon va élek, amelyekre $va \in I$. Következésképp $\beta_1(T) - \beta_2(T) \sim \sum_{f=vu \in I} \delta(f)$.

A fenti okoskodást precízzé a következőképp tehetjük. Az $L\chi_A$ szorzat, ahol L a gráf Laplace-mátrixát jelöli, a definíció alapján

$$\begin{aligned} L\chi_A &= \sum_{\substack{f=ab, \\ a \in A, b \in B}} \mathbf{a} - \mathbf{b} + \sum_{\substack{f=va, \\ a \in A}} \mathbf{a} - \mathbf{v} = \\ &= \sum_{\substack{f=ab, \\ a \in A, b \in B}} \mathbf{a} - \mathbf{b} + \sum_{\substack{f=va \in J, \\ a \in A}} \mathbf{a} - \mathbf{v} + \sum_{\substack{f=va \in I, \\ a \in A}} \mathbf{a} - \mathbf{v}, \end{aligned}$$

a v körüli szalagstruktúra szerint felbontva a második szummát. Összevetve

$$\begin{aligned} \beta_1(T) - \beta_2(T) &= L\chi_A - \sum_{\substack{f=va \in I, \\ a \in A}} \mathbf{a} - \mathbf{v} + \sum_{\substack{f=vb \in I, \\ b \in B}} \mathbf{v} - \mathbf{b} \\ &= L\chi_A + \sum_{f=vu \in I} \mathbf{v} - \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Mivel $Div(G)$ -t $im(L)$ -lel faktorizáljuk, ez pont azt jelenti, hogy

$$\beta_1(T) - \beta_2(T) \sim \sum_{f=vu \in I} \mathbf{v} - \mathbf{u},$$

vagyis a két divizor különbsége lineárisan ekvivalens egy olyan $Div^0(G)$ -beli elemmel, mely T -től független. A két Bernardi-bijekció tehát valóban egymás eltoltjai $S^g(G)$ -ben. \square

4.3.21. Megjegyzés. Az állításban szereplő x_0 -ra

$$x_0 \sim \sum_{f=vu \in I} \mathbf{v} - \mathbf{u} \sim \sum_{f=vw \in J} \mathbf{v} - \mathbf{w},$$

ahol a második ekvivalencia helyességét v kitörésével mutathatjuk meg.

4.3.22. Következmény. Legyen (G, ρ) szalaggráf, v egy csúcsa. A 4.3.20. Tételben definiált β_v hatásra $\tau(G)$ egy $S(G)$ -torzor lesz.

A hatás függése a kezdőcsúcstól

Két tételt ígértünk még. Az egyik, hogy G síkbarajzolhatósága esetén β_v a v csúcs választásától is független, vagyis a Bernardi típusú sandpile torzor algoritmus minden $v \in V$ -re ugyanazt a β hatást adja; továbbá ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy ha G nem sík szalaggráf, akkor vannak olyan v és v' csúcsok, hogy $\beta_v \neq \beta_{v'}$. Lássuk az előbbit.

4.3.23. Tétel. *Legyen (G, ρ) sík szalaggráf, és vegyünk két csúcsát, v_1 -et és v_2 -t. Ekkor bármely $T \in \tau(G)$ szalaggráfra $\beta_{v_1}(T) = \beta_{v_2}(T)$, vagyis ekkor egyetlen $\beta \equiv \beta_v$ Bernardi-típusú hatás létezik $\tau(G)$ -n.*

Bizonyítás. A gráf összefüggősége miatt elég szomszédos v_1, v_2 csúcsokra bizonyítani, a 4.3.20. Tétel alapján pedig a kezdőéleket szabadon választhatjuk. Legyen tehát e_1 egy v_1 -et v_2 -vel összekötő él, és $e_2 = \text{next}_\rho(v_2, e_1)$. (Ha v_2 egyfokú, értelemszerűen $e_2 = e_1$ lesz.) Mutassuk meg, hogy a (v_1, e_1) kezdőadatú hatás megegyezik a (v_2, e_2) kezdőadatúval minden T feszítőfára. Ehhez az előző bizonyításhoz hasonlóan a két hatáshoz tartozó T -bejárást fogjuk nézni.

Ha $e_1 \in T$, akkor könnyű dolgunk van, mivel a két bejárás csak abban különbözik, hogy az e_1 él a bejárás első vagy utolsó éle. Speciálisan a nemfaéleket pontosan ugyanúgy látjuk a két bejárás során, tehát ekkor $\beta_{v_1, e_1}(T) = \beta_{v_2, e_2}(T)$ triviálisan. Következésképp az általuk definiált hatások is megegyeznek.

Mi történik, ha $e_1 \notin T$? Ebben az esetben használjuk ki, hogy a szalaggráf síkbarajzolt (szalaggráf értelemben). Legyen $C = C_{T, e_1}$ az a kör a gráfban, mely úgy keletkezik, hogy T -hez e_1 -et hozzáveszem. Vegyük a gráf egy lerajzolását. A C kör két tartományra osztja a síkot, nevezzük a korlátosat *belsőnek*, a végtelent *külsőnek*. A síkbarajzolhatóság miatt $E(G) \setminus T$ élei két halmazba sorolhatóak: E_- -ban vannak a körön *belüli* élek, E_+ -ban a körön *kívüliek*. A helyes lerajzolás miatt olyan ún. *metsző* élek, melyek a kör belsejéből indulnak és külsején érnek véget (vagyis az olyan uw élek, hogy u -ban az él E_- -beli, w -ben E_+ -beli), nem lehetnek. A két élhalmaz tehát diszjunkt. A két kezdőadathoz tartozó bejárás viszont így nem csak hogy egymás ciklikus eltoltja, de E_- és E_+ éleit ugyanonnan látja meg először, csak egymáshoz képest más sorrendben! A (v_1, e_1) kezdőadatú bejárás ugyanis (mivel e_1 nem faél) e_1 -et v_1 felől átvágja, és T élein utazva először E_- majd E_+ éleit látogatja meg. A (v_2, e_2) kezdőadatú bejárás nagyon hasonlóan először E_+ majd E_- éleit látogatja meg, és e_1 -et ugyanúgy v_1 felől vágja át, hiszen $e_2 = \text{next}(v_2, e_1)$. (Hogy e_2 T -beli-e vagy sem, azt nem tudjuk, de nem is szükséges, a két bejárás ugyanis ugyanúgy fogja látni). Mivel E_- és E_+ a nem T -beli élek diszjunkt felosztása és a két bejárás ugyanúgy vágja át ezen éleket, a két hatás megegyezik, vagyis $\beta_{v_1, e_1} = \beta_{v_2, e_2}$. \square

4.3.24. Példa. A 4.1. ábra T feszítőfáján tekintsük a β_b és β_v hatásokat! A bejárások kezdőadatának a tétel értelmében (b, vb) -t és (v, vc) -t veszem. Ekkor $vb \notin T$. A $C_{T, vb} = \{va, as, sb, bv\}$ alapkörre $E_- = \{vs\}$, míg $E^+ = \emptyset$ most üres, és vs valóban mindkét bejárásnál s felé néz. A $vb \in T'$ fát nézve a két bejárás szintén megegyezik.

A nem síkbeli eset már bonyolultabb. Bizonyításába itt nem kezdünk bele, a hozzá szükséges eszközök ugyanis túlmutatnak ezen dolgozat keretein.

4.3.25. Tétel ([BW18], Theorem 5.4.). *Legyen (G, ρ) nem sík szalaggráf. Ekkor létezik két csúcsa, v és v' , hogy $\beta_v \neq \beta_{v'}$.* \square

A bizonyítás a nem nulla génuszú felületek poligonális reprezentációját, és a sandpile csoport élfüggvényként történő megadását egyaránt használja. Előbbiről bármely

algebrai topológia bevezetőben olvashatunk bővebben, ám utóbbiról is bőséges szakirodalom ([BLHN97], [Big97]) áll rendelkezésre.

4.3.26. Példa. Demonstrációképpen azért mutatunk egy nem sík szalaggráf két Bernardi-hatását, melyek valóban nem egyeznek meg. Tekintsük a 3.2. ábra G gráfjának jobb oldali, tóruszra rajzolt szalagstruktúráját. A $T = \{e_2, e_3\}$ feszítőfát véve a $\beta_{v,e_1}(T) = \mathbf{v} + \mathbf{v}_2$, míg $\beta_{v_2,e_4}(T) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. A $T' = \{e_2, e_4\}$ feszítőfára $\beta_{v,e_1}(T') = \beta_{v_2,e_4} = 2\mathbf{v}$. Vagyis míg egyik esetben $\mathbf{v} - \mathbf{v}_2$, a másik esetben a $2\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \sim \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ elemek ekvivalencia osztályai képezik T -t T' -be. A sandpile csoport a négyelemű ciklikus csoport, amiben könnyen ellenőrizhetően a két elem nem egyezik meg.

4.4. Rotor-hatás

A rotor-hatás szintén megadja $S(G)$ -nek egy szabad, tranzitív hatását $\tau(G)$ -n. A Bernardi-hatást a Bernardi-bejárások segítségével definiáltuk. Most is hasonlóan járunk el, bár a mechanizmus lényegileg különböző lesz. Először – magyar terminológia híján – a *rotor-routing* folyamatot ismertetjük, majd ennek segítségével definiáljuk a rotor-hatást. A rotor-routing először [HLM⁺08] cikkében jelent meg, mely eredmények 7 évvel később [CCG15]-ben lettek kiegészítve.

Rotor-routing

A rotor-routing nagyon távolról a flipper játékra emlékeztet. A flipperben különféle akadályok segítségével próbáljuk elkerülni, hogy a golyó az asztal alji lyukba essék. [HLM⁺08]-ék eredeti célja a chip firing játék egy módosítása volt. Emlékezzünk, hogy a chip firingben egy csúcs akkor tör ki, ha legalább annyi chip van rajta, amennyi a foka. Ez azt eredményezi, hogy ha egy chip tüzeléshez túl kevés chippel rendelkező csúcsba ér, akkor várakozni kényszerül, amíg továbbmehet. ³ Holroydék ötlete, hogy egy chip megérkezésekor *rögtön* vándoroljon tovább egy következő csúcsra, a folyamat pedig akkor fejeződjék be, ha egy előre kijelölt q nyelő- (vagy gyökér-) csúcsba ér a chip. Ehhez szükség van ezen rákövetkezés egy értelmes definíciójára. Ha egy e élen v -be érkező chip mindig a $next_\rho(v, e)$ élen haladna tovább, akkor nem lenne garantált a chipek (lehetőség szerinti) egyenletes szétosztása. Hiába érkezne nagyon sok chip egy adott él felől egy csúcsba, azok mindegyike ugyanazon az élen menne ki, és így ugyanazt az utat járná be. Szükség van tehát valamiféle rotálására, *frissítésére* az aktuális kimenő éleknek, mielőtt kilőjük a csúcsot. Erre vezették be a *rotor konfiguráció* fogalmát.

A q nyelőjű v -ből induló rotor-routingot a következőképp definiáljuk. A csúcokra illeszkedő éleket rotoroknak tekintjük, melyeknek a szalaggráf szerinti ρ sorrendje előre rögzített. Adott egy kezdeti $\varrho : V(G) \rightarrow E(G)$ rotor-konfiguráció, mely minden csúcsban egy kezdeti élet jelöl ki. Ez a kezdeti *rotor* a csúcsban. A rotor-routing két lépésből áll: ha egy v csúcsba megérkezik egy chip, akkor *először frissítjük* a rotorok állását, és az aktuális $\varrho(v)$ élet a $\varrho(v)^+$ -szal jelölt, a szalagstruktúra szerint rákövetkező $next_\rho(v, \varrho(v))$ élre cseréljük, majd ezen a frissített élen a chipet továbbküldjük. Ezt a két lépést addig ismételjük, amíg a chip a nyelőbe nem jut. A q nyelőjű, v kezdeti csúcsú rotor-routingban a chip v -ben kezd, és a $\varrho(v)^+$ élen halad tovább először.

³A chip-firing játékot, az 1.3.4. Tétel bizonyításában ellentétben most chipek (véletlenszerű) továbbvándorlásaként értelmezzük.

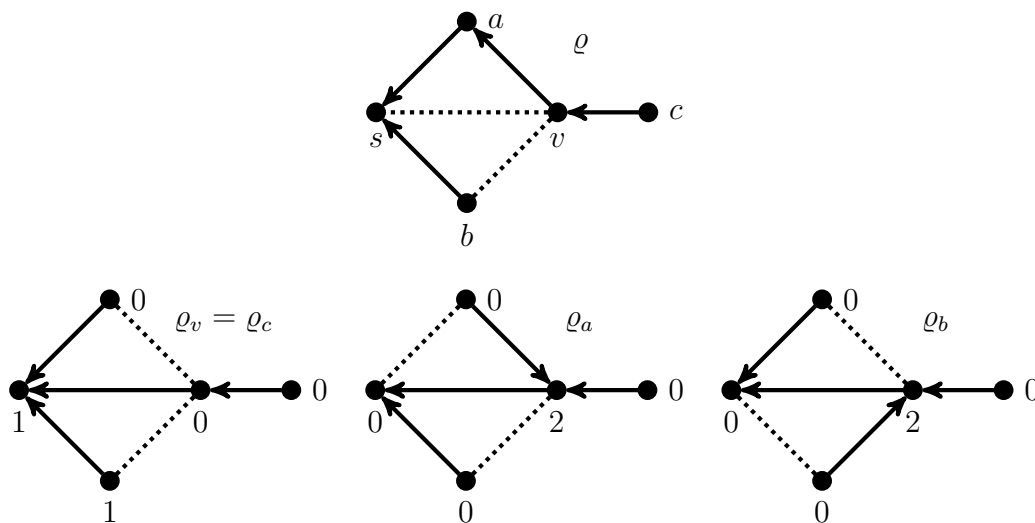
A Bernardi-bejáráshoz hasonlóan jellemezhető tehát a rotor-routing is. Mivel egy lépést egy rotor-konfiguráció-csúcs pár ír le, a k -dik lépés után a folyamatot a

$$\nu = (\varrho_0, v_0, \varrho_1, v_1, \dots, \varrho_k, v_k)$$

vektor jellemzi. A kezdeti rotor-konfiguráció ϱ_0 , a chip v_0 -ról indul, majd a frissítés-továbbküldés lépései következnek. Az i -edik lépésben a korábbi konfiguráció ϱ_{i-1} és a chip a v_{i-1} csúcsból az e_{i-1} élen keresztül v_i -be jutott. A frissített ϱ_i rotor-konfigurációt a

$$\varrho_i(u) = \begin{cases} \varrho_{i-1}(u), & u \neq v_i \\ \text{next}_\rho(v_i, e_{i-1}), & u = v_i \end{cases} \quad (4.4)$$

egyenlet definiálja. Ekkor a chip az $e_i = \varrho_i(v_i)$ élen keresztül távozik v_i -től. A folyamat véget ér, ha valamely k -ra $v_k = q$.



4.3. ábra. A kezdeti ϱ rotor-konfigurációt az élek részirányításával jeleztük, ahol egy csúcs aktuális rotorja alatt a belőle kifelé mutató élet értjük. Az s nyelőjű $u \in \{v, a, b, c\}$ csúcsból induló rotor routing záró rotor konfigurációját ϱ_u jelöli a második sorban.

4.4.1. Példa. Nézzük a 4.3. ábrát. A kezdeti rotor-konfiguráció $\varrho = \{\vec{va}, \vec{as}, \vec{bs}, \vec{cv}\}$. Az s nyelőjű, v kezdeti csúcsú rotor-routing egy lépés alatt véget ér, ugyanis a kezdeti $\varrho(v) = va$ éle $\varrho^+(v) = vs$. Az a kezdeti csúcsból indított rotor-routing két lépés alatt ér véget, mert $\varrho(a) = as$ kezdetben és $\varrho(a)^+ = av$, amikor v -ből megint s -re fordul a rotor. A b -ből indított hasonlóan bs -ről bv -re fordul, ahonnan v -ből vs -re. Mivel c levélcsúcs, a belőle indított rotor-routing megegyezik a szomszédjából indítottal.

4.4.2. Tétel ([HLM⁺08], Lemma 3.6.). *Legyen G véges összefüggő gráf, q a nyelő-csúcs. Akármilyen kezdeti (ϱ, v) rotor-konfiguráció esetén a rotor-routing véges időn belül véget ér, vagyis a chip q -ba kerül.*

A rotor-hatás

Mi történik, ha a kezdeti ϱ rotor-konfiguráció élei feszítőfát alkotnak? A folyamat során vajon minden közbülső rotor-konfiguráció szintén feszítőfát indukál? Ez természetesen nem igaz, miként az ember hamar talál is ellenpéldát, ám az viszont igaz, hogy az *utolsó*, elnyelődés pillanatában keletkezett ϱ' konfiguráció feszítőfát alkot.

4.4.3. Tétel ([HLM⁺08], Lemma 3.10.). *Ha a rotor-routing folyamatban a kezdeti rotor-konfiguráció feszítőfát alkot, akkor tetszőleges kezdeti csúcs választása esetén az elnyelődés után rotor-konfiguráció szintén feszítőfát alkot. Vagyis ha a ϱ_0 kezdeti konfigurációra $\text{im}(\varrho_0) \in \tau(G)$, akkor az elnyelődés pillanatában a ϱ' rotor-konfigurációra $\text{im}(\varrho') \in \tau(G)$ minden kezdeti $v \in V$ csúcsra.*

4.4.4. Példa. Figyeljük meg az előző példában a keletkezett rotor-konfigurációkat! A kezdeti rotorkonfiguráció valóban meghatározza a $T = \{va, as, bs, cv\}$ feszítőfát. Az u csúcsú, s nyelőjű, ϱ_T kezdeti rotor-konfigurációjú rotor-routing elnyelődés utáni rotor-konfigurációját jelölje ϱ_u . Ekkor azt látjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varrho_v &= \{\vec{v}s, \vec{a}s, \vec{b}s, \vec{q}v\}, \varrho_a = \{\vec{v}s, \vec{a}v, \vec{b}s, \vec{q}v\}, \\ \varrho_b &= \{\vec{v}s, \vec{a}s, \vec{b}v, \vec{q}v\}, \varrho_c = \{\vec{v}s, \vec{a}v, \vec{b}s, \vec{q}v\}.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a konfigurációk nem csak hogy feszítőfát indukálnak, de az irányításuk is helyes! Ez az előző tétel egy egyszerű következménye.

Hogyan terjeszthető ki ez egy $\tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ hatássá? Az világos, hogy a q nyelőjű és v kezdeti csúcsú rotor-routinghoz tartozó divizor \mathbf{vq} , és a folyamat végetér, ha a chip a nyelőbe kerül, másként szólva a kapott chip-konfiguráció 0 lesz. A 2.2.6. Tétel értelmében a $Z = \{\mathbf{v} - \mathbf{q} | v \in V\}$ alakú elemek generálják $S(G)$ -t, és minden Z -n definiált hatás egyértelműen terjed ki $S(G)$ -nek egy hatásává a 4.1.4. Lemma értelmében. A megoldandó probléma, hogy egy T feszítőfából hogyan kapjuk a kezdeti rotor-konfigurációt. Egy csúcsra ugyanis több T -beli él is illeszkedhet, ezek közül kell eldöntsük, melyik legyen az adott csúcs kezdeti rotorja. Adódik erre egy természetes megoldás. Tudjuk, hogy egy fán bármely két csúcs között pontosan egy út vezet, vagyis a fa élei a nyelő felé irányíthatóak úgy, hogy minden csúcsnak (a nyelő kivételével) egy kimenő éle van, az, amelyik a q -val összekötő útjának első éle. Ez adja a kezdeti ϱ_T rotor-konfigurációt.

Ennek segítségével könnyen megadható $S(G)$ -nek a q kezdőadatú rotor-hatása a feszítőfákon. Tetszőleges T feszítőfára és $z_v = \mathbf{v} - \mathbf{q}$ generátor elemre $[z_v] \cdot T$ legyen a (ϱ_T, v) kezdeti adatú rotor-routing elnyelődés utáni rotor-konfigurációjának képe, mely az előző 4.4.3. Tétel alapján G egy feszítőfáját adja. Ha az $x \in \text{Div}^0(G)$ elem $x = \sum \mu_v z_v, \mu_v \in \mathbb{Z}$ módon áll elő, akkor $[x] \cdot T$ lépésről lépésre kiszámolható, mégpedig az $[x + y] \cdot T = [x] \cdot ([y] \cdot T)$ szabály felhasználásával, $x, y \in \text{Div}^0(G)$.

4.4.5. Tétel ([HLM⁺08], Lemma 3.12. és 3.13.). *Az előbb definiált $r_q : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ leképezés $S(G)$ egy szabad, tranzitív hatását adja a feszítőfákon, mely így $\tau(G)$ -t egy $S(G)$ -torzorrá teszi.*

A rotor-hatásra is igaz az alábbi állítás.

4.4.6. Tétel ([CCG15], Theorem 1.2.). *Legyen (G, ρ) szalaggráf, $q \in V$ tetszőleges csúcs. Az r_q rotor-hatás pontosan akkor független q választásától, ha (G, ρ) sík szalaggráf.*

4.4.7. Megjegyzés. A T fának a q nyelőjű r_q rotor hatásnál a $\mathbf{v} - \mathbf{q}$ generátorelemen vett képét gyakran $(\mathbf{v} - \mathbf{q})_q \cdot T$ módon jelölik [CCG15]-vel összhangban. Mivel a mi dolgozatunk sokkal inkább a Bernardi-hatásról szól, olyan jelölést használtunk inkább, mely ez utóbbival van összhangban.

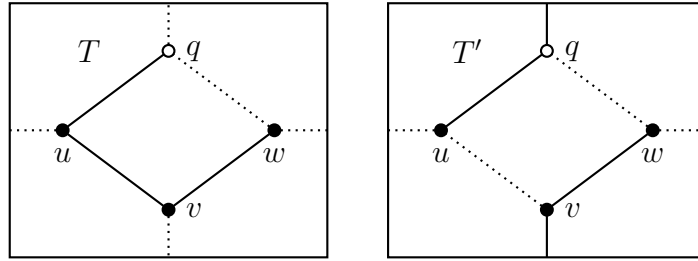
4.5. A két hatás egybeesése sík szalaggráfokon

Az előző két szakaszban definiáltuk a sandpile csoport két hatását a szalaggráf feszítőfáin. Megmutattuk, hogy sík szalaggráfok esetén egyik hatás sem függ a kezdőcsúcs választásától, vagyis egyértelműen létezik egy *természetes* rotor- illetve Bernardi-hatás az ilyen gráfokon. Egyszerű gráfokra több is igaz.

4.5.1. Tétel. *Legyen (G, ρ) egyszerű szalaggráf, és jelölje r_v a rotor-, β_v a Bernardi-hatásokat tetszőleges $v \in V$ -re. A gráf pontosan sík szalaggráf, ha $r_v = \beta_v$ minden $v \in V$ -re, vagyis ha a torzor-struktúrák megegyeznek.*

A tételt Baker és Wang sejtette meg [BW18] Theorem 7.1.-ben. Nekik azt sikerült belátniuk, hogy ha G sík szalaggráf, akkor az egyszerűség feltételezése nélkül is igaz az állítás. Néhány évvel később egymástól függetlenül Shokrieh és Wright [SW21], illetve Ding [Din21] is belátta a másik irányt.

Bizonyítás helyett itt is csak példákat mutatunk a két irányra. Először mutatunk egy tóruszra rajzolt egyszerű gráfot, amin a Bernardi- és rotorhatások különböznek, majd mutatunk egy ellenpéldát, hogy valóban létezik olyan nem sík multigráf, amire beágyazástól függetlenül a torzor-struktúrák megegyeznek. Vagyis az egyszerűség elhagyása esetén már nem igaz a fenti állítás.



4.4. ábra. A K_4 egy tóruszra rajzolásán $r_q \neq \beta_q$. A tóruszt hagyományosan úgy rajzoltuk le síkba, hogy ha a körbefoglaló téglalap szemközti oldalait (csavarás nélkül) egymáshoz ragasztjuk, akkor egy tóruszt kapjunk.

4.5.2. Példa. A 4.4. ábra tóruszra rajzolt K_4 gráfján nézzük T és T' feszítőfákat. Az r_q rotorhatást tekintve a $[\mathbf{v} - \mathbf{q}]$ csoportelem T -t egy rotor-forgással T' -be viszi (v -ben a vu kezdeti rotor q -ba forog). A β_q Bernardi-hatás alapéüléül válasszuk a qv élet. Ekkor $\beta_{q,qv}(T) = \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$, míg $\beta_{q,qv}(T') = \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$. Vagyis a Bernardi hatásnál a $[\mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{u} - \mathbf{q}]$ elem képezi T -t T' -be. Ha a két hatás megegyezne, akkor

$$\mathbf{v} - \mathbf{q} + \mathbf{w} - \mathbf{u} \sim \mathbf{v} - \mathbf{q}$$

lenne igaz, ám $\mathbf{w} - \mathbf{u} \not\sim 0$ könnyen ellenőrizhetően.

4.5.3. Példa. Nézzük a 3.2. ábra G gráfjának két beágyazását. Az elsőben (G, ρ_1) sík szalaggráf, a jobboldaliban (G, ρ_2) tóruszra rajzolt. Egyszerűen, de számolásigényesen megmutathatóak a következők. Az első beágyazásra a rotor- és Bernardi-hatások minden alapcsúcsra megegyeznek, sőt a 4.5.1. Tétellel egyetértésben egymással is. Jelölje ezt az egyező hatást α . A második beágyazásra az azonos alapcsúcsú rotor- és Bernardi hatások szintén megegyeznek, ám ezen a szalagstruktúrára a három alapcsúcs különböző sandpile-torzor struktúrákat ad meg. Az egyező hatásokat jelölje α_v ,

Jelölje $T_{i,j} = \{e_i, e_j\}$, $i = 1, 2, j = 3, 4$ feszítőfákat. Szimmetria okokból az α_{v_2} hatás hasonló lesz α_{v_1} -hez, így most csak ez utóbbit mutatjuk. Az $i \mapsto i +$

$2, i = 1, 2; j \mapsto j - 2, j = 3, 4$ cserékkel az α_{v_2} hatás α_{v_1} -ből kiszámolható. Az alábbi táblázatban összefoglaltuk azon $x \in Div^0(G)$ -ket, amire (a megfelelő hatásnál) $[x] \cdot T_{ij} \mapsto T_{kl}$.

	ρ_1, α	ρ_2, α_v	ρ_2, α_{v_1}
$T_{24} \mapsto T_{23} :$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_2$
$T_{24} \mapsto T_{13} :$	$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$
$T_{24} \mapsto T_{14} :$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1,$	$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$
$T_{23} \mapsto T_{13} :$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1,$	$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$
$T_{23} \mapsto T_{14} :$	$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$
$T_{13} \mapsto T_{14} :$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_2,$	$\mathbf{v} - \mathbf{v}_2.$

A sandpile csoportot a $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \mathbf{v} - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ elemek generálják.

5. fejezet

Szalaggráfok génusza és a sandpile-torzorok

Az előző fejezetben megadtunk két sandpile-torzor algoritmust, a Bernardi és rotor típusút, és beláttuk róluk, hogy a kapott hatás pontosan akkor független a kezdőcsúcs választásától, ha a szalaggráf síkbarajzolható (4.3.23. és 4.4.6. Tételek). Vagyis a hatásokból a gráf síkbaágyazottsága egyértelműen eldönthető. Emlékeztetőül, egy sandpile torzor algoritmus inputja egy (G, ρ) szalaggráf és egy v bázis csúcs, outputja egy $\alpha_v : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ hatás.

5.0.1. Tétel. *Legyenek adottak a Bernardi- vagy rotortípusú sandpile torzor algoritmusok úgy, hogy (G, ρ) maga ismeretlen. Ekkor egyértelműen eldönthető, hogy (G, ρ) síkbarajzolható-e, vagyis $\mathfrak{g}(G) = 0$ vagy sem.*

Bizonyítás. A tétel feltétele szerint adott egy Ω halmaz, mely a gráf feszítőfáival bijekcióban áll, és egy H csoport, mely a sandpile csoporttal izomorf, továbbá n darab $\alpha_i : \Omega \times H \rightarrow \Omega$ hatás. Ha az α_i hatások minden i -re megegyeznek, akkor a 4.3.23. vagy 4.4.6. Tételek egyike miatt G síkbarajzolható, ha pedig létezik olyan csúcs, amelyre nem egyeznek, akkor $\mathfrak{g}(G) > 0$. \square

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy vajon a nemsíkbeli eseteket is tudjuk-e tovább csoportosítani, például hogy a fenti feltételek mellett meghatározható-e tetszőleges szalaggráf génusza. Ez azonban nem lehetséges.

5.0.2. Tétel ([McD18], Theorem 3.). *Legyen (G, ρ) és (G', ρ') két olyan szalaggráf, hogy $V(G) = V(G')$. Jelölje α_v a v kezdőcsúcsú Bernardi- vagy rotorhatást. Létezzen továbbá $\varphi_\tau : \tau(G) \rightarrow \tau(G')$ bijekció és $\varphi_S : S(G) \rightarrow S(G')$ csoport izomorfizmus, hogy az alábbi diagram kommutáljon:*

$$\begin{array}{ccc} \tau(G) \times S(G) & \xrightarrow{\alpha_G} & \tau(G) \\ \downarrow \varphi_\tau \times \varphi_S & & \downarrow \varphi_\tau \\ \tau(G') \times S(G') & \xrightarrow{\alpha_{G'}} & \tau(G') \end{array}$$

Létezik olyan (G, ρ) és (G', ρ') , hogy a fenti feltételek teljesülnek rájuk, de $\mathfrak{g}(G) \neq \mathfrak{g}(G')$.

McDonough ellenpéldája egy 2 csúcsú, 5 élű multigráf, amire csak a ρ, ρ' beágyazások különböznek (de $G = G'$). Egy csúcs kitorrésével a chippek száma a kitorró csúcsban öttel csökken, a másik csúcsban pedig öttel nő. A sandpile csoport tehát

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ -vel izomorf. Így a $\varphi_S : S(G) \rightarrow S(G'), \gamma \mapsto 2\gamma$ csoportizomorfizmus, mivel 2 és 5 relatív prím. A szalagstruktúra megfelelő variálásával elérhető, hogy létezzen olyan $\varphi_\tau : \tau(G) \rightarrow \tau(G')$ bijekció a feszítőfák között, hogy a fenti diagram kommutatív legyen, ám $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}'$.

Ez azt mutatja, hogy nem elég ismerni $\tau(G)$ -n az $S(G)$ orbitokat, adott kell legyen például a gráf maga. Nyilván, ha ismerjük a szalagstruktúrát is, akkor a 3.3.6. Állítás alapján kiszámolhatjuk a gráf (topológiai) génuszát, ez esetben tehát felesleges az α_v hatások ismerete. Összeállt tehát a fejezetünk alapkérdése.

Kérdés. Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ szalaggráf, aminek ρ szalagstruktúrája ismeretlen. Adott továbbá minden $v \in V$ csúcsra az $\alpha_v : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ csoporthatás, ahol minden $T \in \tau(G)$ feszítőfa a feszítő élek felsorolásaként van $T \subseteq E(G)$ módon megadva. Meghatározható-e ekkor a szalaggráf topológiai génusza a szalagstruktúra explicit ismerete nélkül?

Alex McDonough a rotor-hatásra 2018-ban bebizonyította, hogy ez lehetséges.

5.0.3. Tétel ([McD18], Theorem 4.). *Legyen adott egy $G = (V, E)$ szalaggráf, aminek ρ szalagstruktúrája ismeretlen. Adott továbbá minden $v \in V$ alapcsúcsra az $r_v : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ rotorhatás. A szalaggráf topológiai génusza, a szalagstruktúra explicit ismerete nélkül is egyértelműen meghatározható.*

Az előző félévekben a Bernardi-hatásra vizsgáltuk ugyanezt a kérdést, ám ez nehezebbnek bizonyult. A fő ötlet megegyezik a [McD18] McDonough cikkében leírtakkal, azonban – ahogy a cikke végén McDonough is írja – a gondolatmenet teljes egészében nem vihető át, ugyanis a bizonyítás magjául szolgáló Proposition 15 és Lemma 17 állításoknak nincs egyértelmű analógiája a Bernardi-hatásokra nézve.

Nézzünk egy motiváló példát, ami erősíti a feltételezést, hogy a hatások ismeretében meghatározható a szalaggráf génusza.

5.0.4. Példa. Nézzük a 3.2. ábrán G -nek két beágyazását. Mivel a hatás szabad és tranzitív, így minden T, T' feszítőfára egyértelműen létezik egy $\gamma \in S(G)$, amelyre $\gamma \cdot T = T'$. A 4.5.3. Példában kiszámoltuk az α_v rotor (és Bernardi-) hatásokat. Vegyük észre, hogy a v alapcsúcsú hatások megegyeznek, ám ha az α_v és α_{v_1} hatásokat hasonlítjuk össze, akkor például a T_{24} fát T_{13} -ba a két beágyazásnál más sandpile elem viszi, ugyanis $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \not\sim \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$. (Valójában minden $i \neq k, j \neq l$ indexekre különbözik az a csoportelem, ami T_{ij} -t T_{kl} -be képezi.) Ez a csoportelem tehát megkülönbözteti a két beágyazást, hiszen ezen a gráfon speciálisan nem adható meg 1-nél nagyobb génuszú szalagstruktúra.

5.1. Génusz meghatározása a Bernardi-hatásokból

1. Feladat. Legyen adott egy $G = (V, E)$ szalaggráf, aminek ρ szalagstruktúrája ismeretlen. Adott továbbá minden $v \in V$ csúcsra a $\beta_v : \tau(G) \times S(G) \rightarrow \tau(G)$ Bernardi-hatás. Határozzuk meg a szalaggráf topológiai génuszát a szalagstruktúra explicit ismerete nélkül!

Hogyan foghatunk neki ennek a kérdésnek? Az előző 5.0.4. Példában már mutatunk erre egy példát. Ezt fogjuk általánosítani. A következőt fogjuk csinálni. Rögzített ρ beágyazásra jelöljön $x_\rho \in \text{Div}(G)$ egy olyan divizort, amire $[x_\rho] \cdot T = T'$. Ha meg tudjuk mutatni, hogy minden ρ -tól különböző ρ' beágyazásra azon $y_{\rho'} \in \text{Div}(G)$

divizorok nem lineárisan ekvivalensek x_ρ -val, amikre $y_{\rho'} \cdot T = T'$ ezen másik beágyazás szerint, akkor x_ρ a T, T' pár segítségével *tanúsítja*, hogy a beágyazás ρ -val egyezik meg.

Nézzük most a Bernardi-hatást! Vegyünk egy v kezdőcsúcsot és vizsgáljuk a β_v hatást! A 4.3.20. Tétel alapján tudjuk, hogy tetszőleges v -re illeszkedő e élet választhatunk a $\beta_{v,e}$ bijekció számolásához. Vegyünk egy T feszítőfát és nézzük a $\tau_{v,e}$ Bernardi-bejárását! Emlékezzünk, hogy egy csúcs Bernardi-élei azon nemfaélekkel egyeznek meg, amiket a feszítőfa bejárásakor ezen csúcs felől láttunk először. Ilyen módon a T -hez rendelt break divizort

$$\beta_{v,e}(T) = \sum_{f \notin T} \eta_{v,e}(T)(f) = \sum_{v \in V} (v \text{ Bernardi éleinek száma}) \cdot \mathbf{v}$$

alakban is felírhatjuk, ahol szokás szerint $\eta_{v,e}(T)(f) = \mathbf{v}$ pontosan akkor, f -et v felől láttuk először a bejárás során.

Természetes módon adódik tehát egy lehetséges tanú egy feszítőfapárra.

5.1.1. Definíció. Vegyünk egy $\{T_1, T_2\}$ rendezett feszítőfapárt és nézzük a β_v Bernardi hatást. Rögzítsünk egy v -re illeszkedő e kezdőélet. A párhoz rendelt $\beta_{v,e}(T_1, T_2) \in \text{Div}^0(G)$ Bernardi-konfiguráció legyen az a nulladfokú divizor, amit a $\beta_{v,e}(T_1, T_2) := b_2 - b_1$ egyenlőség definiál, ahol $b_i = \beta_{v,e}(T_i)$, $i = 1, 2$.

5.1.2. Állítás. Az $x_e = \beta_{v,e}(T_1, T_2)$ Bernardi-konfigurációk különböző e kezdőélekre lineárisan ekvivalensek, és ekvivalenciaosztályukra $[x_e] \cdot T_1 = T_2$ igaz.

Bizonyítás. A 4.3.20. Tétel szerint különböző e és e' kezdőélek mellett egyértelműen létezik $\gamma^* \in S(G)$, hogy $\beta_{v,e}(T) - \beta_{v,e'}(T) \sim \gamma^*$ minden T feszítőfára. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &\sim (\beta_{v,e}(T_1) - \beta_{v,e'}(T_1)) - (\beta_{v,e}(T_2) - \beta_{v,e'}(T_2)) \\ &= (\beta_{v,e}(T_1) - \beta_{v,e}(T_2)) - (\beta_{v,e}(T_1) - \beta_{v,e'}(T_2)) \\ &= \beta_{v,e}(T_2, T_1) - \beta_{v,e'}(T_2, T_1), \end{aligned}$$

tehát a $\{T_1, T_2\}$ pár Bernardi-konfigurációinak ekvivalencia osztálya valóban csak a kezdőcsúcsból függ.

A hatás definíciója alapján ekkor persze $[x_e] \cdot T_1 = T_2$, tetszőleges v -re illeszkedő e kezdőél választása esetén. \square

Az egyszerűsített problémát a következőképp definiáljuk.

2. Feladat. Legyen (G, ρ) összefüggő, címkézett szalaggráf. Tegyük fel, hogy minden v, e kezdőadatra és $\{T, T'\}$ feszítőfa-párra adott az $x = \beta_{v,e}(T, T') \in \text{Div}^0(G)$ Bernardi-konfiguráció. A szalagstruktúra ismerete nélkül határozzuk meg a szalaggráf topológiai génuszát!

A következő alszakaszban belátjuk, hogy egyszerű gráfokon ezt a feladatot meg tudjuk oldani, az azt követő alszakaszban pedig kitérünk arra, hogy az egyszerűség elhagyása milyen nehézségeket okoz.

Milyen könnyebbséget jelent a feladat ezen könnyítése az előbbi 1. Feladathoz képest, amikor a hatás $S(G)$ -n adott? Az 5.1.4. Állításban belátjuk, hogy egy speciális elrendezés esetén az x Bernardi-konfiguráció értéke a v kezdőcsúcson pozitív, egy másik elrendezésben pedig negatív. Ha a konkrét konfiguráció helyett csak a divizor ekvivalencia osztályát ismernénk, akkor ez az állítás nem lenne értelmes: ha ugyanis a v csúcs elengedően sokszor kitörik, akkor v -n már negatív számú chip lesz, a keletkezett konfiguráció pedig vele ekvivalens lesz. ha a v csúcs ugyanis elengedően sokszor kitörik, akkor rajta már negatív számú chip lesz, a keletkezett konfiguráció pedig vele ekvivalens lesz. Röviden $S(G)$ -n egy csúcs előjele nem jól definiált.

Génusz meghatározása egyszerű szalaggráfokon a Bernardi–konfigurációk segítségével

Ebben az alszakaszban tehát a következő feltételezéssel is élünk.

Feltevés. Legyen $G = (V, E)$ egyszerű gráf.

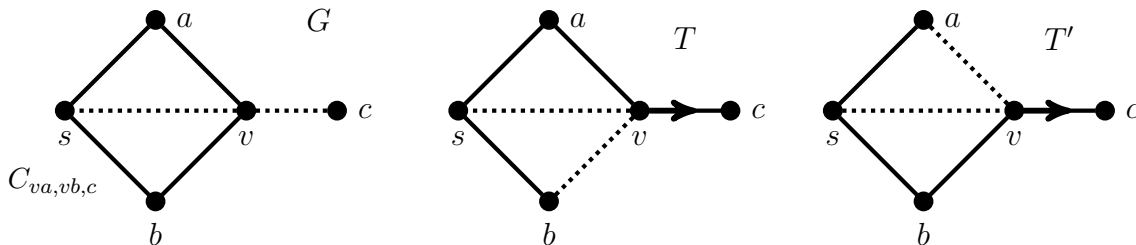
Milyen stratégiát válasszunk a szalaggráf génuszának meghatározásához, avagy konkrétan hogyan válasszuk ki a $\{T, T'\}$ feszítőfákat? Csábító lenne, ha minden lehetséges $\prod_{v \in V} (\deg(v) - 1)!$ féle szalagstruktúrához találhatnánk egy alkalmas feszítőfa párt, aminek Bernardi-konfigurációja elkülöníti ezt a beágyazást az összes többitől. Ez azonban túl ambíciózus vállalkozás. Helyette minden csúcs körül lokálisan próbáljuk meghatározni a szalagstruktúrát, mégpedig a csúcsra illeszkedő három él egymáshoz viszonyított ciklikus sorrendjét szeretnénk meghatározni. Például a v csúcs körül nézzük mindazon beágyazásokat, ahol az e_1, e_2, e_3 élek ciklikus sorrendje (e_1, e_2, e_3) , és ezeket akarjuk a (e_1, e_3, e_2) típusúaktól megkülönböztetni. Mivel a háromelemű ciklusok is generálják k elem permutációcsoportját, így ezen információkból a csúcs körüli szalagstruktúra egyértelműen visszafejthető. Ekkor Edmonds 3.3.6. Állítása alapján a génuszt a szalagstruktúrával kompatibilis körök megszámlálásával kiszámolhatjuk.

Néhány megjegyzés a fenti módszerhez. Egyrészt, minden egy- vagy kétfokú csúcs körül a szalagstruktúra triviális, ezért elég a legalább háromfokú csúcsok körül a ráilleszkedő élhármasok sorrendjét meghatározni. Van másrészt azonban egy probléma is. Mint azt a 3.4.1. Állításban is láttuk már, minden fa sík szalaggráf tetszőleges beágyazásra, és a sandpile torzorok is triviálisak. A hatásokból tehát a szalagstruktúra egyértelműen nem fejthető vissza. Nekünk azonban ez nem is feltétlen szükséges. Elég, ha a szalagstruktúrát olyan mértékben visszafejtjük, hogy utána már a beágyazás tetszőleges kiterjesztésére ugyanazt a génuszt kapjuk. Ehhez a 3.3.8. Lemma lesz segítségünkre, mely azt állítja, hogy elvágó csúcs körül akárhogyan ragasztjuk össze az összefüggő komponenseket, mindaddig amíg azok egymásba nem metszenek, a szalaggráf génusza a komponensek génuszainak összege.

Ebben az alszakaszban a következő tételt fogjuk belátni.

5.1.3. Tétel. *Legyen G véges, egyszerű, összefüggő szalaggráf. Ekkor a Bernardi-konfigurációk ismeretében egyértelműen meghatározható a szalaggráf génusza, a szalagstruktúra explicit ismerete nélkül is.*

Nézzük először a bizonyítás mélyén rejlő alapötletet, mely egyébként azt a szerepet tölti be, mint [McD18] Proposition 15 állítása.



5.1. ábra. Az 5.1.4. Állítás alapkonstrukciója. A $C_{va,vb,c}$ c -t elkerülő körből legyártjuk a T és T' feszítőfákat, és nézzük a β_v hatást vc kezdőélen.

Alapkonstrukció. Vegyünk egy tetszőleges, legalább háromfokú $v \in V$ csúcsot. Három v -re illeszkedő él legyen va, vb és vc , ahol $a, b, c \in V$. (Emlékezzünk, hogy a gráf feltevésünk szerint most egyszerű.) Ezen három él szalagstruktúrabeli ciklikus sorrendjét kívánjuk eldönteni. Tegyük fel, hogy létezik olyan $C = C_{va, vb, c}$ kör, melyre

$$va, vb \in C, \quad \text{de } c \notin C.$$

A $C \setminus vb$ -t egészítsük ki G egy olyan T feszítőfájává, hogy $vc \in T$. A T' fát T -ből úgy kapjuk, hogy a va élet vb -re cseréljük. (Mivel T -nek a vb -re vonatkozó fundamentális köre C -vel egyezik meg, T' valóban feszítőfa. Lásd az 5.1. ábrát.) $T \setminus v$ -ben az a -val egy komponensben levő csúcsokat jelölje S , a c -vel egybe esőket pedig S' . Világos, hogy $a, b \in S, c \in S'$. A konstrukció alapján T és T' ilyen felbontása megegyezik, részletekért lásd az 5.2. ábrát.

5.1.4. Állítás. Vegyünk G -n egy ρ szalagstruktúrát, amely szerint v körül az va, vb, vc élek ciklikus sorrendje $(va, vb, vc)_v$, és egy ρ' -t, ami szerint $(va, vc, vb)_v$. Tekintsük a β_v hatást, és legyen $x \in \text{Div}(G)$ a $\{T, T'\}$ pár vc kezdőélű Bernardi-konfigurációja a ρ szerinti beágyazásban, y pedig a ρ' szerintiben. Ekkor $x_v > 0$, míg $y_v < 0$.

Bizonyítás. A Bernardi-bejárások alapélül tehát a vc élet vesszük. A fenti állítás azzal ekvivalens, hogy az első beágyazás esetén v Bernardi-éleket *nyer*, a másik beágyazásra Bernardi-éleket *veszt*.

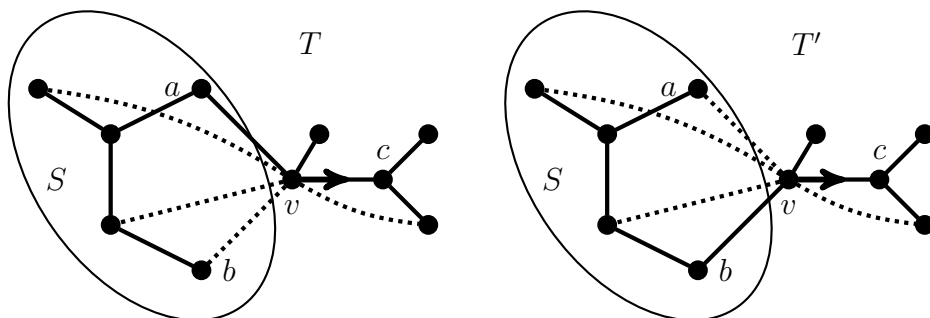
Nézzük az első esetet, amikor a ciklikus sorrend $(va, vb, vc)_v$, és nézzük meg a T fa Bernardi-bejárását!

A bázisunk a v csúcs és a vc él. A kezdőél faél, tehát elsétálunk rajta c -be és bejárjuk a c -ről lelógó fákat. Ezután c -ből visszasétálunk v -be a vc él másik oldalán, és ott forgunk a v -beli szalagstruktúra szerint. Ha a va él előtt látunk faélet, végigsétálunk az általa feszített részfán, majd visszaérve v -be folytatjuk a v körüli forgást. A va faélen átsétálva megint forgunk az $a \rightarrow b$ út első éléig, kivéve ha közben faélet látunk, mert akkor előbb végigsétálunk azon. Az $a \rightarrow b$ út első éléhez érve végigsétálunk S -en (az $a \rightarrow b$ út és a róla lelógó fák csúcsain), tehát lényegében az $a \rightarrow b$ úton, kivéve hogy az út csúcsaiban, amikor forgás közben faélet látunk, végigsétálunk a lelógó fákon. A b csúcsba érve visszaforgunk az $a \rightarrow b$ út utolsó éléig (közben meglátjuk a vb nemfaélet), kivéve ha előbb látunk még faélet, ekkor előbb azon sétálunk végig. Ezután b -ből sétálunk visszafelé az $a \rightarrow b$ út másik oldalán, S maradék csúcsait is meglátogatva a lelógó fákról. Végül a -ban újra forgunk, faélt látva azt a részfat bejárjuk, és végül egészen a va élig forgunk. Végigsétálva az élen v -ben forgunk a vc élig, és a bejárást befejezzük.

A T' fa bejárása nagyon hasonlóan történik. v -ből c -be érve bejárjuk a c -ről lelógó fákat, majd v -be visszaérve most előbb b -t látjuk meg. b -ből felsétálunk az $a \rightarrow b$ úton „visszafelé”, a lelógó fákat is bejárva. Az a csúcsba érve visszasétálunk az $a \rightarrow b$ úton az „eredeti” irányban, a lelógó fákat is bejárva. Visszatérve a b csúcsból a v -be megyünk, és zárjuk a bejárást.

Hogyan néz ki tehát az $x = \beta_{v,vc}(T, T')$ Bernardi-konfiguráció a v csúcson? Azt állítjuk, hogy a két bejárás csak a va és vb közti éleken különbözik v felől nézve. T bejárásakor v -nek a va és vb közti élei v -től elfelé néznek, mivel T -ben va faél, és így S csúcsait előbb fejezzük be (látjuk minden élüket), mint hogy v felől lássuk a kérdéses éleket. T' bejárásakor ezzel szemben a va és vb közti éleket v felől látjuk, hiszen a va nemfaélen átforgunk, és vb elérésig minden va, vb közti nemfaélet meglátunk v -ből. Mivel v -re legalább három él illeszkedik, és vb nem Bernardi-éle T -ben, va viszont igen T' -ben, kapjuk x_v valóban pozitív.

Nézzük most azt az esetet, amikor a három él ciklikus sorrendje v körül (va, vc, vb) . Vegyük észre, hogy nem szükséges ezt az esetet külön megvizsgálni. Ha a $\{T, T'\}$ pár Bernardi-konfigurációja helyet $\{T', T\}$ -nek kérdezzük a Bernardi-konfigurációját, akkor az előzővel egyező gondolatmenet alapján $\{T', T\}$ Bernardi-konfigurációja v -n pozitív, ugyanis vc után a vb él jön, mely T' -ben faél. Ha tehát x_v pozitív volt, akkor y_v negatív. \square



5.2. ábra. Sematikus rajz az 5.1.4. Állítás bizonyításához. A v körüli ciklikus sorrend ρ szerint (va, vb, vc) , ρ' szerint (va, vc, vb) . Ha a bejárást a vc élen kezdjük, azt látjuk, hogy a két fa bejárása a két beágyazásnál csak v -re illeszkedő és néhány S -beli élen változik.

Hogyan használjuk ezt az állítást az ígért 1. Tétel bizonyítására? Minden olyan esetben, amikor a fenti konstrukció megismételhető, tehát amikor egy $\deg(v) \geq 3$ csúcs három a, b, c szomszédjára találunk olyan párt, mondjuk a -t és b -t, hogy gráfban van v -től és c -től diszjunkt $a \rightarrow b$ út, akkor tudjuk ezen három csúcs ciklikus sorrendjét a szalagstruktúrában. Ha a gráf 3-összefüggő, akkor világos, hogy a konstrukció minden v -re működik. A gráf 3-összefüggősége miatt ugyanis $G \setminus \{v, c\}$ összefüggő, van benne tehát legalább egy ilyen $a \rightarrow b$ út. Mivel a 3-nál kisebb fokú csúcsokban a szalagstruktúra triviális, adódik a következő állítás:

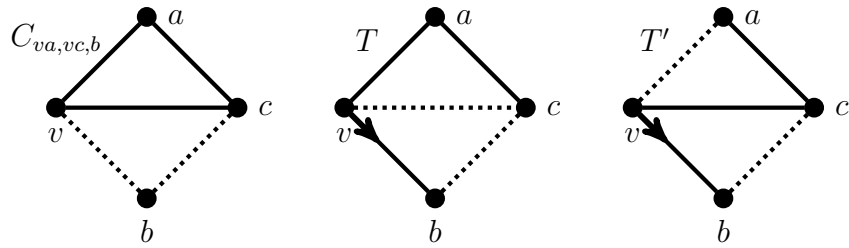
5.1.5. Következmény. *Legyen G véges, egyszerű, irányítatlan, 3-összefüggő szalaggráf. Ekkor, ha minden feszítőfa-párra adott a Bernardi-konfigurációjuk, akkor egyértelműen visszanyerhető a gráf teljes szalagstruktúrája, következésképp a génusza is.*

Tegyük tehát fel, hogy a gráf nem 3-összefüggő!

Vizsgáljuk a kérdést aszerint, hogy a három v -vel szomszédos csúcs, jelölje őket a, b, c , $G \setminus v$ melyik összefüggő komponenseibe esnek (5.4. ábra).

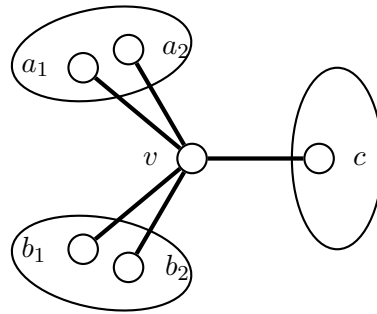
Ha v három szomszédja közül kettő, legyen ez a, b , ugyanazon összefüggőségi komponensébe esik, a harmadik, c pedig másikkba, vagy ugyanabba de van c -től diszjunkt $a \rightarrow b$ út, akkor kész vagyunk. Tegyük fel, hogy a három csúcs ugyanazon összefüggőségi komponensbe esik, de minden $a \rightarrow b$ út c -n megy át. Ilyenkor $b \leftrightarrow c$ szerepcserével nézhetjük a β_v hatást vb kezdőélel az $a \rightarrow c$ út feszítőfává terjesztésén, vagyis eredeti jelöléseink szerint a $C_{va,vc,b}$ körrel kezdve. Lásd 5.3. ábra.

Mi van azonban, hogyha a három csúcs különböző komponensbe esik (5.4. ábra)? Ekkor használhatjuk a 3.3.8. Lemmát! Ha a kiválasztott v csúcs valamelyik összefüggő komponensébe csak 1 él megy, akkor annak az élnek a szalagstruktúrabeli helye nem változtatja meg a szalaggráf génuszát az idézett lemma miatt. Tegyük fel ezért,



5.3. ábra. Ha minden $a \rightarrow b$ út c -n keresztül vezet, akkor az $a \rightarrow c$ út két kiterjesztésén nézzük a β_v hatást vb kezdőélel.

hogy minden komponensbe legalább két él megy. Ekkor egyrészt az eddigiek alapján minden összefüggő komponensen belül meghatározhatjuk a sorrendet. Bármely két komponens éleinek az összefésülését is meghatározhatjuk: az egyik komponens egyik élét vegyük bázisélnék, és hasonlítsuk össze a másik komponens tetszőleges két élével, majd fordítva. Ezzel minden ilyen él-hármasra meghatároztuk a sorrendet, így magának a teljes összefésülésnek is. Ha egy csúc körül kettőnél több összefüggési komponens van, akkor fésüljük össze először tetszőleges kettőt. A harmadikat fésüljük össze az egyikkel is és a másikkal is. Ez alapján a harmadik egyértelműen befésülhető az első kettő összefésülésébe is. Ezt ismételve minden összefüggési komponens „befésülhető”.



5.4. ábra. Összefüggőségi komponensek. Ha egy komponensbe csak egy él megy v -ből, akkor azon él helye nem változtat a génuszon, kettőnél több él esetén pedig össze tudjuk fésülni a komponensek éleit.

Bebizonyítottuk tehát a következő tételt.

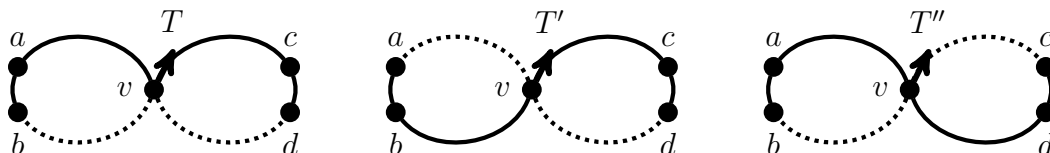
5.1.6. Tétel. *Legyen G véges, egyszerű, összefüggő szalaggráf. Ekkor a Bernardi-konfigurációk ismeretében egyértelműen meghatározható a szalaggráf génusza, a szalagstruktúra explicit ismerete nélkül is.*

Bizonyítás. Minden csúc körül az eddigiek alapján fejtjük vissza a szalagstruktúrát, amíg lehet. Elvágó csúc körül az egy éllel kapcsolódó összefüggő komponens elvágó élének vegyük egy tetszőleges szalagstruktúrába ágyazását. Vegyük a kapott szalagstruktúra egy tetszőleges ρ kiterjesztését. Erre $cyc(G, \rho)$ -t meghatározva kapunk egy lehetséges génuszt, mely a 3.3.8. Lemma alapján nem függ a szalagstruktúra kiterjesztésétől. Így minden esetben ugyanazt a génuszt kapjuk, mely tehát a szalaggráfunk génusza. \square

Mi romolhat el az általános esetben, amikor a feszítőfapárok Bernardi-konfigurációinak csak az ekvivalenciaosztálya van megadva? Nyilvánvalóan az, ha – mint azt már egyszer előrevetítettük – a két beágyazásra a Bernardi-konfigurációk lineárisan ekvivalensek. A következő gráf erre mutat példát.

5.1.7. Példa. Nézzük az 5.5. ábrát! Tegyük fel, hogy (a rajzzal ellentétben) v körül a szalagstruktúra egyszer $\rho_v = (va, vd, vb, vc)$, másodjára $\rho'_v = (va, vc, vb, vd)$, és nézzük a $T = \{va, ab, vc, cd\}$ és $T' = \{vb, ab, vc, vd\}$ feszítőfákat. Ezek az 5.1.4. Állítás $C_{va, vb, c}$ köréhez tartozó feszítőfák. A β_v hatást vc kezdőélel nézve a ρ beágyazásnál $\{T, T'\}$ Bernardi-konfigurációja $x = \mathbf{v} - \mathbf{b}$, a ρ' beágyazásnál $y = \mathbf{a} - \mathbf{v}$. A $\{v, c, d\}$ csúcsok együttes kitérésével megmutatható, hogy ekkor $x \sim y$. Nem igaz tehát az 5.1.4. Állítás általánosítása, hogy ezen konstrukció a Bernardi-konfigurációinak ekvivalencia osztályai eldöntik a va, vb, vc élek ciklikus sorrendjét.

Elsőre ugyan elszomorító lehet a fenti ellenpélda, valójában bizonyos értelemben ez egy *ritka* eset. Fontos ugyanis – mint azt nemsokára látni fogjuk –, hogy nem csak hogy itt v elvágó csúcs (elvételével szétesik a gráf), de a többi csúcs körül is igen speciális a szalagstruktúra. Általában a kétféle beágyazásra vett x, y konfigurációk nem ekvivalensek.



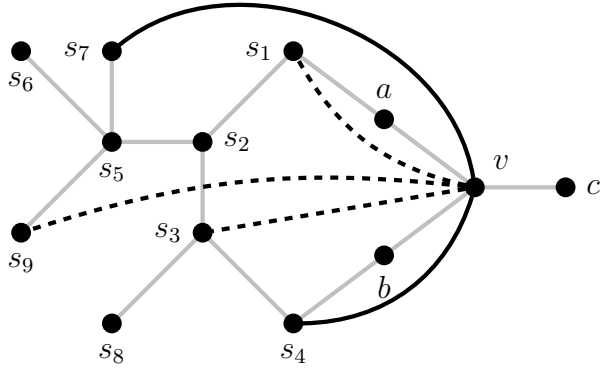
5.5. ábra. A β_v hatást nézve a T és T' fák Bernardi-konfigurációi a $(va, vd, vb, vc)_v$ és $(va, vc, vb, vd)_v$ beágyazásokra ekvivalensek, ám a T és T'' fáké már nem.

Az előző példa persze annyiban is sántít, hogy mindkét beágyazásra a génusz 1. Ha ρ'_v -nek a (va, vc, vd, vb) sorrendet választanánk se lennénk azonban előrébb: ekkor ugyanis a gráf síkbaágyazott, márpedig azokat *mindig* meg tudjuk különböztetni a nem sík esettől. Mindkét esetben tehát (erre) a konkrét gráfra tudjuk a génuszt az $S(G)$ -hatások ismeretében. Még egy komponens hozzáadásával azonban elérhető, hogy a gráf már ne legyen síkba rajzolható, sőt, hogy a két beágyazás génusza különbözzék! Az ábra egyszerűsége érdekében mi ezeket nem akartuk berajzolni, csak megmutatni, hogy a két Bernardi-konfiguráció lehet ekvivalens erre a konstrukcióra.

5.2. Részeredmények az általános esetben

Nézzük az általános esetet. Most a hatás $S(G)$ -n van megadva, vagyis minden $\{T, T'\}$ feszítőpárra azon $\gamma \in S(G)$ ekvivalenciaosztály van megadva, amire $\gamma \cdot T = T'$. Nézzük meg, milyen beágyazásokra lesznek az 5.1.4. Állítás x és y Bernardi konfigurációi lineárisan ekvivalensek. Ehhez meg kell értsük a konfigurációkat a v csúcson kívül is.

A ρ beágyazásra. Rögzítsük a ρ beágyazást, tekintsük először azt az esetet, amikor a va, vb, vc élek ciklikus sorrendje (va, vb, vc) . Vizsgáljuk elsőnek, hogy v milyen élek mentén nyert chipeket. Ezen élek v -től különböző végpontjai ekkor chipet vesztek. Az 5.1.4. Állítás bizonyításában azt láttuk, hogy ezen beágyazásra a $\beta_{v,vc}(T, T') = x$ Bernardi konfigurációra $x_v > 0$. Ez azért volt igaz, mert megmutattuk, hogy T -ben a



5.6. ábra. A v és S közötti élek három csoportja: folytonos vonallal a köztes élek halmaza $W = \{vs_1, vs_3, vs_9\}$, sűrűn szaggatva az elő- $\{vs_7\}$ és utóélek $\{vs_4\}$. Ha v körül a va, vb, vc élek az említett ciklikus sorrendben vannak, akkor $T \mapsto T'$ irányban v Bernardi élei az elő- és utóéleken nem változott, a köztes éleken pedig nőtt.

vb nem faél b felé, míg T' -ben a va él v felé néz, és minden más v -re illeszkedő élen v csak nyerhetett chipet. Nézzük, hogy pontosan milyen élek mentén nőtt v Bernardi éleinek a száma T -ből T' -be haladva.

A v -re illeszkedő nemfa éleket három részre oszthatjuk. A vc és va közti éleket *előélek*nek, a va, vb köztieket *köztesélek*nek, míg a vb és vc köztieket *utóélek*nek nevezzük. A három kitüntetett élet nem soroljuk be ezen kategóriákba, így a két fa ilyen felosztása megegyezik (5.6. ábra). Könnyű látni, hogy az elő- és utóéleken a Bernardi-élek megegyeznek, hiszen mindkét fa bejárásakor ugyanonnan láttuk ezen éleket. Ha az előéleket v felől láttuk, akkor ennek az élnek a végpontja $T \setminus v$ -nek olyan részfájára esik, amin még nem jártunk; ha pedig a másik vége felől, akkor olyan részfára esik, hogy onnan láttuk előbb. Az utóélek esetén hasonlóan okoskodhatunk. A gondolatmenet mindkét beágyazásra működik, így ezen élek mentén a Bernardi-élek valóban nem változtak.

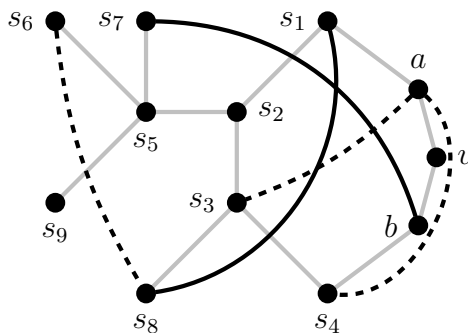
A v Bernardi élei tehát csak a köztes éleken változhatnak. Ott sem változnak azonban mindig. Ha egy köztes él v -től különböző u csúcsa $V \setminus S$ -be esik, akkor mindkét fa bejárásakor ugyanonnan látjuk az előző érveléssel összhangban. Ha ugyanis az $u \rightarrow v$ fabeli út v -re illeszkedő utolsó éle vc és va közé esik v -ben, akkor mindkét bejárás során az él v -től elfelé; ha pedig vb és vc közé, akkor v felé néz. Első esetben ugyanis mielőtt v felől látnánk az élet, vc felől forogva bejárjuk a kérdéses részfát, ellenkező esetben a v felőli meglátás után csak. Ha ez a csúcs $T \setminus v$ -nek c -vel egybeeső komponensébe esik, akkor az állítás nyilvánvaló.

Jelölje $W \subseteq S$ azon S -beli csúcsokat, amiknek v -vel összekötő éle köztes él (ha van ilyen). Azt állítjuk, hogy pontosan ezen élek mentén nyert v Bernardi éleket. Valóban. T bejárásakor ezen éleket v felől csak S teljes bejárása után láttuk, tehát ekkor ezek az élek W felé néznek. T' bejárásakor ellenben S -et csak a köztes élek v felőli meglátása után járjuk be, így ekkor v felé néznek.

Vannak-e v -n kívüli változások a Bernardi élekben? Lehetnek. A vb és va közti élek (vagyis vc -t is beleértve) által kifeszített erdőn ugyan a két bejárás megegyezik, mint ahogy azt már beláttuk, de S -en lehet változás. Vegyük a $C = C_{va, vb, c}$ kört, és nézzük $G[S]$ nem fa éleit. Ha egy e nemfaél $s_1, s_2 \in S$ végpontjaira e mindkét csúcs szalagstruktúrája szerint a C körön belül halad, akkor ezen élet nevezzük S *belső* élének; ha C -n kívül, akkor *külső*nek; ha pedig s_1 körül C -n belül, s_2 körül viszont

kívül, vagy fordítva, akkor pedig S váltóélének. Ha ρ sík szalaggráfot indukálna, akkor ez utóbbi élek nem lennének. Most azonban nem ismerjük a gráf génuszát, így nem tudhatjuk, üres-e ez az élhalmaz, lásd 5.7. ábra.

Hogyan alakulnak ezen élek Bernardi irányításai? Világos, hogy a belső és külső élek irányításai megegyeznek. A belső éleket ugyanis mindig b felől a felé járva, a kör „belsején felfelé” haladva látjuk; a külsőket pedig a „külsőjén lefelé”, a -ból b felé haladva. A váltóéleken azonban változik az irányítás. T bejárásakor egy e váltóél akkor volt az s_1 csúcsa felé irányítva, ha e s_1 felől nézve néz a kör külseje felé. Ekkor T -ben s_1 felé, T' -ben azonban a másik vége felé lesz irányítva az e él. Ha a másik végét s_2 jelöli, akkor minden ilyen váltóél az x konfigurációhoz $\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$ divizorokat ad hozzá.



5.7. ábra. Az S -en belüli élek három csoportja: szaggatva a belső $\{as_3\}$ és külső $\{as_4, s_6s_8\}$ élek halmaza, folytonos vonállal a váltó élek $\{bs_7, s_1s_8\}$ élek.

Összefoglalva ekkor x -et a következőképp írhatjuk fel:

$$x = (|W| + 1)\mathbf{v} - \mathbf{b} - \sum_{w \in W} \mathbf{w} + \sum_{s_1s_2 \in G[S] \text{ váltóél}} \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1.$$

A ρ' beágyazásra. Hogyan néz ki a ρ' beágyazásra az y konfiguráció? Lényegében megismételhető az előző gondolatmenet, csak az $a \leftrightarrow b$ csúcsok szerepét kell megcserélni. A v előélei ekkor a vc, vb közöttiek, a köztesek a vb, va közöttiek, az utók a va, vc közöttiek. A $W' \subset S$ halmaz elemei azon csúcsok, amik v -hez köztes éleken, tehát vb és va között kapcsolódnak. $G[S]$ éleit ugyanúgy osztjuk fel belső-, külső- és váltóélekre, ám vigyázzunk, mert a két élhalmaz a két beágyazásra csak akkor egyezik, meg ha ρ és ρ' S -en ugyanazt a beágyazást indukálja S -en. A továbbiakban ezért ha szükséges a váltóéleket ellátjuk a hozzá kapcsolódó szalagstruktúrával és ρ -váltó- vagy ρ' -váltóélekről fogunk beszélni.

Vegyünk most egy másik y konfiguráció x -től annyiban különbözik, hogy W' -n a csúcsok chipet nyernek v -vel szemben (ha T -ből megyünk T' felé), továbbá a vb helyett most a va élen változik v egy Bernardi éle, mégpedig olyan módon, hogy a va Bernardi élét v elveszíti. A ρ' típusú váltóélek továbbra is nem triviálisan járulnak hozzá y -hoz.

Összefoglalva

$$y = -(|W'| + 1)\mathbf{v} + \mathbf{a} + \sum_{w' \in W'} \mathbf{w}' + \sum_{\substack{s'_1s'_2 \in G[S] \\ \text{váltóél}}} \mathbf{s}'_2 - \mathbf{s}'_1.$$

Alapeset. Az a kérdés, hogy a $z = x - y$ konfiguráció mikor lesz 0-val lineárisan ekvivalens. Nézzük először az egyszerű esetet. Tegyük fel, hogy ρ és ρ' olyanok, hogy $W \cap W' = \emptyset$, és a váltóélek halmaza is üres. (Ez például olyankor fordul elő, ha ρ' -t ρ -ból tényleg úgy kapjuk, hogy va -t kicseréljük vb -vel.) Ekkor z -t

$$z = (|W| + |W'| + 2)\mathbf{v} - \mathbf{b} - \mathbf{a} - \sum_{w \in W} \mathbf{w} - \sum_{w' \in W'} \mathbf{w}'$$

alakban írhatjuk fel. Ha v elvágó csúcs, és a W, W' halmazok üresek, akkor az 5.1.7. példában pont egy ilyen konfigurációról láttuk be, hogy 0-val ekvivalens. Tegyük tehát fel, hogy v nem elvágó csúcs, speciálisan hogy létezik S és $V \setminus S$ között egy e él, amelynek két végpontját jelölje most $s \in S$ és $t \in V \setminus S$. Azt állítjuk, hogy ekkor $z \not\sim 0$.

Két, korábban már ismertetett állítást használunk fel ehhez. Egyrészt, ha $z \sim 0$, akkor van olyan kilövés sorozat, amiben valamely csúcs nem tüzelt soha. Elég tehát azt megmutatni, hogy bármely lehetséges $z \mapsto 0$ kilövés sorozatban minden csúcsnak legalább egyszer tüzelnie kellett. Ehhez azt használjuk, hogy egy csúcs csak úgy tud chipet veszteni, ha lő. Valójában tehát arra hajtunk, hogy bármely kilövés sorozatot véve minden csúcsnak lesz pozitív számú chipje valamikor, ami miatt akkor minden csúcsnak legalább egyszer lőnie kell, hogy egy $z \mapsto 0$ kilövés sorozatot kapjunk.

Ezt 4 fő lépésben mutatjuk meg. Lássuk!

1. Mivel v -n pozitív számú chip van, ezért muszáj lőnie. $W \cap W' = \emptyset$ miatt $|W| + |W'| < |S|$, és mivel vc felé is lőtt v , ezért rajta most negatív számú chip van. S -en ezzel szemben nemnegatív, ugyanis minden $W \cup W'$ -beli csúcsot v 0-ra egyenlített, hiszen $W \cap W' = \emptyset$. (Ellenkező esetben v egyszeri kitörése egy $w \in W \cap W'$ csúcs -2 chipjét nem egyenlitené ki.)
2. $V \setminus S$ -en z kezdetben azonosan nulla volt, most azonban v minden $V \setminus S$ -beli szomszédjára került chip. Mivel a chipvesztés egyetlen módja a kitörés, ezek a csúcsok mind kitörnek sorban, majd ezek szomszédai, és így tovább. Vegül minden $V \setminus S$ -beli csúcsra került chip, így ki is kellett törjön. Speciálisan v visszakapja a $V \setminus S$ felé küldött chipjeit, vagyis most olyan, mintha v csak S felé tört volna ki.
3. Ha létezik olyan v -re illeszkedő vs nemfa él, hogy $s \in S \setminus \{a, b\}$ és $vs \notin W \cup W'$, akkor s -en most pozitív számú chip van. (Ez pontosan akkor teljesül, ha vs a korábbi elnevezéseinkkel élve elő- vagy utóél.) Így s -nek is muszáj kitörnie, ami S további csúcsait is kitörésre készíti. S minden csúcsán ugyanis az előző lépés végén nemnegatív számú chip volt.
4. Ha S -en a 2. lépés után nem volt chip (vagyis $W \cup W'$ a v -t S -el összekötő élék végpontjainak egy partíciója), akkor használjuk ki, hogy v nem elvágó él, vagyis létezik az említett $e = st$ ún. hídél S és $V \setminus S$ között. Ellenkező esetekben lehetne, hogy a 0 konfigurációt kapjuk a 2. lépés végén. Erre volt példa az 5.5. ábra T és T' fái. Az e élen azonban $s \in S$ -re a 2. lépésben foglaltak szerint valamikor jut chip, ugyanis $t \in V \setminus S$ is valamikor kitört. Ha S -en tehát történetesen a nulla konfigurációt is kapnánk az 1. lépés végén, ezen s -re került chip kitörési S minden csúcsát. (Ne felejtsük el, hogy S -en nincs most negatív chipű csúcs.)

Mi a helyzet, ha $W \cap W' \neq \emptyset$ vagy ha léteznek váltóélek? Az első két lépés mindig ugyanaz lesz: v és $V \setminus S$ csúcsai kitörnek. Így elég azt nézni, hogy v S felé tör ki.

Precízen $z \sim 0$ pontosan akkor igaz, ha a $z' = z - L\chi_{V \setminus S} \sim 0$. (Figyelem: ezen z' konfigurációba $V \setminus S$ csúcsainak elkerülhetetlen kitörését v kitörése elé vettük. Fontos, hogy v ekkor még nem tört ki.)

Többszörös élek. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $W \cap W' \subset S$ nem üres, de nincsenek váltóélek. S -nek azon csúcsait, melyek v -vel összeköttetésben vannak, particionáljuk 3 részre a Bernardi-élek szerint:

$$W^+ = W \cap W' \neq \emptyset, \quad W^0 = W \Delta W', \quad W^- = V(v, S) \setminus (W \cup W'),$$

ahol $W \Delta W'$ a két halmaz szimmetrikus differenciája, $V(v, S) = N(v) \cap S$ pedig v -nek S -beli szomszédai. W^+ csúcsai z' -höz $2\mathbf{v} - 2\mathbf{w}_+$ alakban, W^0 csúcsai $\mathbf{v} - \mathbf{w}_0$ alakban, míg W^- csúcsai nem járulnak hozzá z' -höz. W^+ csúcsait v -vel összekötő éleket nevezzük *többszörös* éleknek, a W^0 és v közötti éleket *egyszeres* éleknek, a W^- csúcsait v -vel összekötő éleket *tolvaj* éleknek. Speciálisan va és vb egyszeres élek.

5.2.1. Megfigyelés. A tolvajélek pontosan azon v és S közötti élek, amik valamelyik struktúra szerint v -nek elő- vagy utóélei; az egyszeres- vagy többszörös élek pedig v valamelyik beágyazás szerinti köztes élei. A többszörös élek pontosan azok, amelyek mindkét beágyazás szerint köztesek.

5.2.2. Példa. Tekintsük az 5.6. és 5.7. ábrákat! Az első ábrán vs_7 és vs_4 tolvajélek és így $W^- = \{s_4, s_7\}$. A ρ és ρ' beágyazások v körüli viszonyából meghatározható, hogy a $W^+ \cup W^0 = \{s_1, s_3, s_9\}$ halmaz csúcsai közül melyek a többszörösek: amik mindkét struktúra szerint v -nek köztes élei.

Jelölje z^* a v kitörésével z' -ből keletkezett konfigurációt. Ekkor

$$z^*|_S = (|W^+| - |W^-|)\mathbf{v} - \sum_{w_+ \in W^+} \mathbf{w}_+ + \sum_{w_- \in W^-} \mathbf{w}_-,$$

vagyis az egyszeres élek mentén a chipszám kiegyenlítődt, a többszörös élek mentén 1-szeres deficit megmaradt, a tolvaj élek mentén pedig v -től egy-egy chip elvevődött. Ha $|W^+| > |W^-|$, akkor v -nek még egyszer ki kell törnie, ekkor S -en már minden csúcson nemnegatív számú chip van, tehát S minden csúcsa is az összefüggőség miatt ki kell törjön. Ha $|W^+| \leq |W^-|$, akkor törjenek ki előbb W^- csúcsai. Ekkor v visszakapta a tolvajélek felé „ elveszett ” chipeket, így $|W^+| > 0$ miatt ebben az esetben is ki kell törjön másodszer is. (Vigyázat: ha $z' \sim 0$, akkor néhány csúcs többszöri kitörése nem tiltott, sőt!, ám *minden csúcs legalább egyszeri kitörése* igen.) A keletkezett konfigurációt S -en

$$\left((|W^+| - |S|)\mathbf{v} + \sum_{w \in S \setminus W^+} \mathbf{w} \right) - \left(\sum_{w_- \in W^-} \deg(w_-)\mathbf{w}_- + \sum_{\substack{u \in N(w_-): \\ w_- \in W^-}} \mathbf{u} \right)$$

alakban kaphatjuk meg, hiszen W^- kitörésével azok szomszédai nyertek chipet (második tag), ám v kitörésével minden nem többszörös él mentén áthaladó chip tovább növeli végpontjának értékét (első tag). Átrendezve

$$(|W^+| - |S|)\mathbf{v} + \sum_{w_0 \in W^0} \mathbf{w}_0 - \sum_{w_- \in W^-} (\deg(w_-) - 1)\mathbf{w}_- + \sum_{\substack{u \in N(w_-): \\ w_- \in W^-}} \mathbf{u},$$

és ekkor v , W^- csúcsai már kitörtek. W^0 csúcsain szintén pozitív számú chip van, így azok is kitörnek. Ki kell-e hogy törjön minden más S -beli csúcs is, köztük W^+ csúcsai is? A kitörések láncreakcióját S -en csak W^- csúcsai akadályozhatnák meg, hiszen rajtuk most negatív számú chip van. Ám emlékezzünk, hogy ők egyszer már kitörtek! Ha ők *most törnének ki*, akkor S minden csúcsa ki kéne törjön. Vehetjük hát úgy, hogy W^- csúcsai *előredolgoztak* és hamarabb törtek ki, mint kellett volna, a végeredményen ez nem változtat. Másként szólva minden olyan kezdetben 0 chipű S -beli csúcsnak, amely még nem tört ki, vagy van $W^0 \cup W^-$ -beli szomszédja (tehát olyan, amelyik mostanra már kitört), vagy van olyan, 0 chipű csúcsokból álló út, mely $W^0 \cup W^-$ -beli csúcsba vezet. Ezen út mentén elérkezik hozzá is legalább egy chip, mely miatt ki kell hogy törjön. Ez az okfejtés a W^+ -beli csúcsokra is igaz.

Az előző eredményeket röviden úgy lehet összefoglalni, hogy ha azt a játékot játszuk, hogy minden lépésben mindazon csúcsok, amiknek pozitív számú chipe van, kitörnek, akkor minden csúcs kitörik valamikor.

Váltóélek. Mi változik, ha a váltóélek halmaza sem üres? Ekkor z -ben a v -re illeszkedő divizorokon kívül S -beli $\mathbf{s} - \mathbf{s}'$ alakú divizorok is ülnek. Továbbra is elég azt az esetet nézni, amikor v S felé tör csak ki, vagyis amikor v és $V \setminus S$ csúcsai egyszerre törnek ki.

A váltóéleket particionáljuk kétfelé. Y^+ -ba kerüljenek mindazon váltóélek, amik ρ és ρ' szerint is váltóélek, Y^0 -ba azok, amik csak az egyik beágyazás szerint. A keletkezett $z = x - y$ konfiguráció ekkor

$$z = (|W| + |W'| + 2)\mathbf{v} - \mathbf{b} - \mathbf{a} - \sum_{w \in W \cup W'} \mathbf{w} + \sum_{y_1 y_2 \in Y^0} \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 + \sum_{y'_1 y'_2 \in Y^+} 2\mathbf{y}'_2 - 2\mathbf{y}'_1$$

alakba írható. Mivel sem v -re, sem $V \setminus S$ semelyik csúcsára nem illeszkedhet váltóél, v -n pontosan $|W| + |W'| + 2$ darab chip van, $V \setminus S$ -en pedig nincs.

5.2.3. Példa. Az 5.7. ábrán $s_1 s_8$ és $b s_7$ váltóélek. Ha valamelyikük mindkét beágyazás szerint váltóél, akkor többszörös váltóéllé válik.

Játsszuk továbbra is azt a játékot, hogy minden csúcs, amelyiken egy lépés után pozitív számú chip van, kitörik. Elég megmutatni, hogy minden csúcsra kerül pozitív számú chip. Ekkor $z \not\sim 0$.

Tegyük fel, hogy $Y^+ = \emptyset$ üres, vagyis csak egyszeres váltóélek vannak. Nézzük a váltóélek részgráfját, vagyis csak azon $G[S]$ -beli éleket, amelyek váltóélek az egyik beágyazás szerint. Egy váltóélet irányítsunk a $+1$ chipű csúcsa felé. Ha a váltóélek ilyen irányítása tartalmaz kört, akkor ezen váltóéleket figyelmen kívül hagyhatjuk, hiszen ha egy e irányított váltóél fejét e^+ jelöli, a tövét e^- , akkor

$$\sum_{\substack{e \in \vec{C}, \\ \text{irányított kör}}} \mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^- = 0$$

harmonikus összeg, tehát ezen váltóélek z -ben egymást kioltják. (Egy él a két beágyazás által lehet különböző irányba indukálva, azaz „másik irányba” váltóél. Ezek is kört alkotnak, ezeket is töröljük.) Feltehető tehát, hogy a váltóélek ilyen irányítása aciklikus részgráfot indukál. Ha ezen részgráf egy nyelője *általános* helyzetű, vagyis a nyelőcsúcs z -beli értéke a váltóélek nélkül 0 lenne, akkor ezen nyelő mentén mindaddig eliminálhatjuk a váltóélek negatív chipjeit, amíg egy *speciális*, z -ben nemnulla chipű

csúcshoz nem értünk. Ez a csúcs vagy W^+ -beli vagy W^0 -beli. Ha W^0 -beli, tehát egyszeres él töve, akkor v első kitörése után ezen a csúcson már pozitív számú chip van, tehát hamarabb törhet ki, mint eddig, ha pedig W^+ -beli, akkor v első kitörése után nemnegatív chip van rajta (ha több váltóél szomszédja van, akkor pozitív is lehet), így ezen csúcsok kitöréséhez sem szükséges v második kitörése. S minden további csúcsának elkerülhetetlen kitörését a tolvajcsúcsokéhoz hasonlóan láthatjuk: nézzük meg, hogy egy általános csúcs mikor tör ki, ha a játékot a váltóélek figyelembe nem vételével (képzeletbeli eltörlésével játszanánk). Ha a váltóélekkel együtt játszunk a játékot, akkor ezek a csúcsok csak hamarabb, de nem később szintén kifognak törni. A váltócsúcsok mondhatni megint *előredolgoztak* csak.

Ha $Y^+ \neq \emptyset$ nem üres, akkor nem tudtuk belátni, lehet-e $z \sim 0$. A fenti gondolatmenet ugyanis nem ismételhető meg teljes egészében, mert a vizsgálandó esetek száma túlságosan megnő a többszörös váltóélek megjelenésével. A váltóköröket eltávolíthatjuk a többszörös élek jelenléte esetén is (speciel a kétszúcsú váltóköröket is, vagyis azokat, ahol ugyanaz az él van különbözőképp irányítva), ám ha például egy ilyen él -2 -es csúcsa v -nek szomszédja, akkor v kitörése nem „tölti fel” ezt a csúcsot. Ha az él másik végpontját is el tudjuk csúfítani úgy, hogy az se tudjon kitörni, akkor az eddigi gondolatmenet kudarcot vall. Azonban ellenpéldát sem találtunk még, így azt gyanítjuk, hogy továbbra sem lehet z 0-val ekvivalens. Igaznak látszik tehát a következő sejtés.

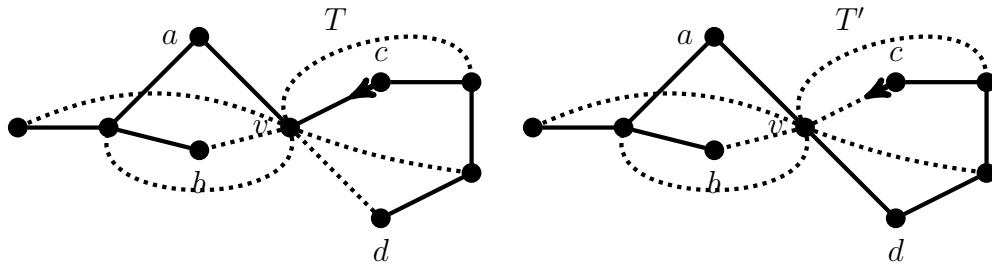
5.2.4. Sejtés. *Ha G 2-összefüggő egyszerű gráf, akkor a hatás meghatározza a szalaggráf génuszát, sőt a szalagstruktúra minden csúcs körül egyértelműen visszafejthető.*

5.3. Megoldási javaslatok

Az előző alszakaszban azt láthattuk, hogy az alapkonstrukció által megadott Bernardi konfigurációk speciális esetben lineárisan ekvivalensek, amikor is egy v elvágó csúcs körül vizsgálva a β_v hatást a W és W' csúcsalmazok particionálják a v és S közti élek S -beli végpontjait. Milyen lehetőségeink maradtak erre az esetre? Nézzük más alapcsúcsra a hatásokat, és rengeteg másik feszítőfa párokra vizsgálhatjuk a Bernardi-konfigurációik ekvivalencia osztályait. Nézzünk először egy példát, ami megmutatja, hogy alkalmas fákat nézve az előző esetben is meg tudtuk volna különböztetni a két beágyazást.

5.3.1. Példa. Nézzük az 5.5. ábrát megint. Nézzük továbbra is a β_v hatást, de a T' fa helyett a $T'' = \{va, ab, vd, cd\}$ feszítőfát! A ρ beágyazásra $\beta_v(T, T'') = \mathbf{v} - \mathbf{d}$, ρ' -re $\beta_v(T, T'') = \mathbf{b} - \mathbf{d}$. Ezen két elem különbsége $(\mathbf{v} - \mathbf{d}) - (\mathbf{b} - \mathbf{d}) = \mathbf{v} - \mathbf{b} \not\sim 0$, vagyis a $\{T, T''\}$ pár Bernardi-konfigurációk nem lineárisan ekvivalensek.

Egy megoldási javaslatunk a következő. Ha a gráf összefüggő, de nem 2-összefüggő, vegyünk egy nagyon hasonló elrendezést. Ha v egy összefüggő komponensébe csak egy él megy, akkor a 3.3.8. Lemma miatt annak az élnek a helye nem érdekes a génusz szempontjából. Tegyük fel hát, hogy minden komponensbe legalább két él megy! Legyen v elvágó csúcs, és tegyük fel, hogy a va, vb élek az egyik, a vc, vd élek egy másik ilyen komponensbe esnek. Vegyünk egy $a \rightarrow b$ utat és $c \rightarrow d$, vegyük hozzá a va, vc éleket, majd egészítsük ki G feszítőfájává. Legyen ez a T fa. Most is figyeljünk rá, hogy T ezen két komponensben ne tartalmazzon további v -re illeszkedő éleket. A T' fát T -ből a vc él elhagyásával és vd él hozzávételével nyerjük (5.8. ábra). Jelölje S az $a \rightarrow b$ úttal egy összefüggőségi komponensben levő csúcsokat, S' a $c \rightarrow d$ komponens csúcsait.



5.8. ábra. Sematikus rajz 5.3.2. Állításhoz.

Azt mondjuk, hogy a $\{va, vb\}$ pár elvágja ρ_v -ben a $\{vc, vd\}$ párt (vagy csak röviden elvágja), ha v körül az élek ciklikus sorrendje

$$\rho_v = (va, vc, vb, cd) \quad \text{vagy} \quad (va, vd, vb, vc).$$

Nem nehéz az eddigiek alapján meggondolni a következő állítást.

5.3.2. Állítás. *Legyen v elvágó csúcs és vegyük az ábra szerinti T, T' fákat és nézzük a β_c hatást! Ha $\{va, vb\}$ elvágja $\{vc, vd\}$ -t, akkor $\{T, T'\}$ Bernardi-konfigurációját jelölje x , egyébként y . Ekkor $x \neq y$, sőt, tudjuk, hogy $x_b \neq 0$, $y_b = 0$, $x_c = y_c = 1$ és $x_a = y_a = x_d = y_d = 0$.*

5.3.3. Sejtés. *Az előbbi konstrukciókra $x \neq y$.*

Ekkor valóban visszafejthető lenne a szalaggráf génusza tetszőleges G összefüggő gráfra. Az állítást több példa is igazolja, ám általános bizonyítást a dolgozat elkészültéig nem sikerült találnunk.

Hátra maradt még azonban a nem egyszerű gráfok esete is. Nem nehéz látni, hogy ez az amúgy is rengeteg esetet tartalmazó bizonyításunkat végtelenül elbonyolítja. Nem tudható ilyenkor ugyanis, hogy például a v és a közötti élek közül (ha több van), mely elő-, köztes vagy utóél, és így a -n melyik pillanatban mennyi chip van. Azt valószínűsítjük, hogy ebben az esetben valami egészen más konstrukciót érdemes venni, például a csúcspfüggvényként megadott $S(G)$ csoport helyett élfüggvényként megadott divizorokat érdemes nézni. Ezt az is motiválja, hogy a Bernardi konfigurációkat z -ben valóban élek, a Bernardi élek generálják.

Irodalomjegyzék

- [ABKS14] Yang An, Matthew Baker, Greg Kuperberg, and Farbod Shokrieh. Canonical representatives for divisor classes on tropical curves and the matrix–tree theorem. In *Forum of Mathematics, Sigma*, volume 2. Cambridge University Press, 2014.
- [Bac17] Spencer Backman. Riemann–roch theory for graph orientations. *Advances in Mathematics*, 309:655–691, 2017.
- [BBY19] Spencer Backman, Matthew Baker, and Chi Ho Yuen. Geometric bijections for regular matroids, zonotopes, and ehrhart theory. In *Forum of Mathematics, Sigma*, volume 7. Cambridge University Press, 2019.
- [Ber06] Olivier Bernardi. Tutte polynomial, subgraphs, orientations and sandpile model: new connections via embeddings. *arXiv preprint math/0612003*, 2006.
- [Big97] Norman Biggs. Algebraic potential theory on graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 29(6):641–682, 1997.
- [Big99] Norman L Biggs. Chip-firing and the critical group of a graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 9(1):25–45, 1999.
- [BLHN97] Roland Bacher, Pierre de La Harpe, and Tatiana Nagnibeda. The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph. *Bulletin de la société mathématique de France*, 125(2):167–198, 1997.
- [BLS91] Anders Björner, László Lovász, and Peter W Shor. Chip-firing games on graphs. *European Journal of Combinatorics*, 12(4):283–291, 1991.
- [BW18] Matthew Baker and Yao Wang. The bernardi process and torsor structures on spanning trees. *International Mathematics Research Notices*, 2018(16):5120–5147, 2018.
- [CCG15] Melody Chan, Thomas Church, and Joshua A Grochow. Rotor-routing and spanning trees on planar graphs. *International Mathematics Research Notices*, 2015(11):3225–3244, 2015.
- [CLB03] Robert Cori and Yvan Le Borgne. The sand-pile model and tutte polynomials. *Advances in Applied Mathematics*, 30(1-2):44–52, 2003.
- [Din21] Changxin Ding. The rotor-routing torsor and the bernardi torsor disagree for every non-planar ribbon graph. *arXiv preprint arXiv:2103.01137*, 2021.
- [EJ60] John Robert Edmonds Jr. *A combinatorial representation for oriented polyhedral surfaces*. PhD thesis, 1960.

- [HLM⁺08] Alexander E Holroyd, Lionel Levine, Karola Mészáros, Yuyal Peres, James Propp, and David B Wilson. Chip-firing and rotor-routing on directed graphs. In *In and out of equilibrium 2*, pages 331–364. Springer, 2008.
- [Ist48] Fáry István. On straight-line representation of planar graphs. *Acta scientiarum mathematicarum*, 11(229-233):2, 1948.
- [JNR03] Brian Jacobson, Andrew Niedermaier, and Victor Reiner. Critical groups for complete multipartite graphs and cartesian products of complete graphs. *Journal of Graph Theory*, 44(3):231–250, 2003.
- [Kli18] Caroline J Klivans. *The mathematics of chip-firing*. CRC Press, 2018.
- [McD18] Alex McDonough. Determining genus from sandpile torsor algorithms. *arXiv preprint arXiv:1804.07807*, 2018.
- [Sta16] Richard P Stanley. Smith normal form in combinatorics. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 144:476–495, 2016.
- [SW21] Farbod Shokrieh and Cameron Wright. Torsor structures on spanning trees. *arXiv preprint arXiv:2103.10370*, 2021.
- [Tar88] Gábor Tardos. Polynomial bound for a chip firing game on graphs. *SIAM journal on discrete mathematics*, 1(3):397–398, 1988.
- [Tho96] Mikkel Thorup. Firing games. 1996.
- [Wag00] David G Wagner. The critical group of a directed graph. *arXiv preprint math/0010241*, 2000.