NYILATKOZAT

Név: Kepes Tamás

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika BSc

NEPTUN azonosító: AN6ELW

Szakdolgozat címe:
Nagy lefogó ponthalmazok véges geometriákban

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.01.02.

Kepes Tamás

a hallgató aláírása

Nagy lefogó ponthalmazok véges geometriákban

Szakdolgozat

Kepes Tamás
Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Szőnyi Tamás
Egyetemi tanár
ELTE Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest
2023

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a konzulensemnek, Szőnyi Tamásnak a sok segítséget és hasznos tanácsot, illetve a tartalmas konzultációs alkalmakat.

Bevezető

Dolgozatomban véges geometriák, azon belül is véges projektív síkok minimális lefogó halmazainak maximális méretét vizsgálom. A projektív sík fogalma pontok és egyenesek euklideszi geometriában ismert illeszkedési viszonyait általánosítja, és az absztrakció ellenére megőrzi a megszokott szemléletünk több fontos elemét. Elsőként tehát véges projektív síkokról esik majd szó, ebben a kontextusban vezetem be a lefogó ponthalmazok fogalmát is. Minden véges projektív sík egyben egy igencsak szabályos illleszkedési struktúra, úgynevezett négyzetes blokkrendszer. A tágabb kontextus felé való lépést indokolja az is, hogy lefogó halmazokat már általános illeszkedési struktúrákon vagy velük ekvivalens hipergráfokon is lehet értelmezni. Persze teljes általánosságban lefogó ponthalmazokról nem sok minden mondható, így érdemes a fókuszt az ún. t-rendszerekre szűkíteni, melyeket az illeszkedési struktúrák pontjaira és blokkjaira vonatkozó regularitási feltételekkel (szimmetria-szabályokkal) definiálunk, jellemzően úgy, hogy fixáljuk a blokkok, illetve közös metszeteik méretét, az egy vagy valahány fix számú ponton átmenő blokkok számát, stb. Speciálisan egy projektív síknál a blokkokat egyeneseknek nevezzük, bármely két ponthoz pontosan egy olyan egyenes van, amelyre mindketten illeszkednek, bármely két egyenes egy pontban metszi egymást, és véges esetben az egy ponton átmenő egyenesek és az egy egyenesre illeszkedő pontok száma ugyanaz a rögzített pozitív egész szám.

Projektív síkokon definiált, speciális ponthalmazok méretére vonatkozó becslésekhez sokszor elemi kombinatorikus megfontolások segítségével (leszámlálással) is eljuthatunk. Az általános tárgyalási keret azonban a közvetlen szemlélettől talán távolabbi, de igencsak erős, lineáris algebrai eszközöket biztosít, jelen esetben a sajátértékek vizsgálatán keresztül. Az itt bemutatott technika az ún. összefonódó sajátértékek módszere, melyet t-rendszerekben tetszőleges részsturktúra méretének becslésére tudunk alkalmazni.

Ebből a szempontból tehát közvetlen, kombinatorikus és komplexebb, lineáris algebrai módszereket hasonlítok össze a lefogó ponthalmazok kapcsán.

1. Projektív síkok és lefogó ponthalmazaik

Elsőként tekintsük a projektív síkok és lefogó ponthalmazaik megszokott szemlélethez közelebb álló témáját Kiss György és Szőnyi Tamás Véges geometriák c. könyve [8] alapján, az általános keretre ez után térünk át. A fejezetben található bizonyítások lényegüket tekintve megegyeznek a könyvben szereplőkkel, ezért csak az ettől eltérő esetekben tűntetem fel külön a forrást.

1.1. Projektív síkok

1.1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ két diszjunkt halmaz, $\mathbf{I}$ egy $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ típusú ún. illeszkedési reláció. Ekkor a $\Pi := (\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathbf{I})$ hármas *projektív sík*ot alkot, ha kielégítik az alábbi axiómákat:

($\mathbf{A}1$) $\mathcal{P}$ bármely két különböző eleméhez egyértelműen létezik egy $\mathcal{E}$-beli elem, amellyel mindketten relációban állnak,

($\mathbf{A}2$) $\mathcal{E}$ bármely két különböző eleméhez egyértelműen létezik egy $\mathcal{P}$-beli elem, amely mindkettőjükkel relációban áll,

($\mathbf{A}3$) $\mathcal{P}$ minden eleméhez létezik legalább három különböző $\mathcal{E}$-beli elem, melyekkel relációban áll,

($\mathbf{A}4$) $\mathcal{E}$ minden eleméhez létezik legalább három különböző $\mathcal{P}$-beli elem, melyek vele relációban állnak.

$\mathcal{P}$ elemeit pontoknak, $\mathcal{E}$ elemeit egyeneseknek nevezzük, a pontokat latin nagybetűkkel, az egyeneseket latin kisbetűkkel fogjuk jelölni. Továbbá ha egy P pont és egy e egyenes relációban állnak, ezt a tényt $P\,\mathbf{I}\,e$ módon jelöljük, és azt mondjuk, hogy a P pont illeszkedik az e egyenesre, vagy másképp az e egyenes átmegy a P ponton, vagy megint másképp a P pont rajta van az e egyenesen. Két pont összekötő egyenesét, vagyis azt az egyenest, amelyre mindkét pont illeszkedik, a pontok betűjeleinek egymásutánjával (P, Q pontok esetén PQ-val) jelöljük. Két egyenes metszéspontját pedig a halmazelméletből megszokott metszettel ($e \cap f$).

Érdemes megjegyezni, hogy $\mathcal{E}$-re tekinthetünk úgy is, mint a $\mathcal{P}$ részhalmazainak egy halmazára, ahol egy $e \in \mathcal{E}$ egyenes épp a rá illeszkedő pontokat tartalmazó részhalmaznak felel meg. Így a megszokott módon egy illeszkedési táblázat (véges esetben mátrix) segítségével jól reprezentálhatóak projektív síkok.

Az ($\mathbf{A}3$) és ($\mathbf{A}4$) feltételek az elfajuló esetek kizárására szolgálnak, ezek az alábbi alternatív axiómákkal helyettesíthetőek:

($\mathbf{A}'3$) Létezik négy általános helyzetű pont, azaz olyan pontok, amelyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre.

($\mathbf{A}''3$) Bármely két egyeneshez létezik rajtuk kívül eső pont

1.1.2. Lemma. A $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathbf{I})$ hármas pontosan akkor alkot projektív síkot, ha ($\mathbf{A}1$), ($\mathbf{A}2$) mellett kielégíti az ($\mathbf{A}'3$) vagy az ($\mathbf{A}''3$) axiómák valamelyikét.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathbf{I})$ hármasra teljeülnek a ($\mathbf{A}1$)-($\mathbf{A}4$) axiómák. Ekkor ($\mathbf{A}3$) miatt tetszőleges $P \in \mathcal{P}$ pontra illeszkedik legalább három egyenes, jelöljön ezek közül kettőt e, f. Viszont ($\mathbf{A}4$) szerint e-nek és f-nek van további két-két pontja, ezeket jelölje E_1, E_2, F_1, F_2. Persze $E_1E_2 = e$ és $F_1F_2 = f$, de $e \cap f = P \notin \{E_1, E_2, F_1, F_2\}$, így E_1, E_2, F_1, F_2 kielégítik ($\mathbf{A}'3$)-at.

Ha ($\mathbf{A}1$), ($\mathbf{A}2$) és ($\mathbf{A}'3$) teljesülnek, és e és f két tetszőleges egyenes, akkor legfeljebb az lehetséges, hogy e-re és f-re is kettő-kettő illeszkedik a négy általános helyzetű pont közül. Jelölje ezeket E_1, E_2, F_1, F_2, ahol $E_1E_2 = e$ és $F_1F_2 = f$, és legyen továbbá $P = E_1F_1 \cap E_2F_2$. Ekkor P nem lehet rajta e-n, mert akkor $E_1P = E_1F_1$ miatt F_1 is rajta lenne e-n, a szimmetria miatt P f-en se lehet rajta, így ($\mathbf{A}''3$) is teljesül.

Tegyük fel most, hogy teljesül ($\mathbf{A}1$), ($\mathbf{A}2$) és ($\mathbf{A}''3$), és legyen $P \in \mathcal{P}$ egy tetszőleges pont, e, f pedig két egyenes. Ha P nincs rajta, se e-n, se f-en, akkor tekintsük e helyett az P és $e \cap f$ pontok által meghatározott egyenest (ezen már P nyilván rajta van), tehát választhatjuk e-t úgy, hogy $P \,\mathbf{I}\, e$ teljesüljön. De $P = e \cap f$ is feltehető, hisz ellenkező esetben ($\mathbf{A}''3$) értelmében létezik olyan $Q \in \mathcal{P}$ pont, mely sem f-en, sem e-n nincs rajta – így P-től is különbözik–, és ekkor f helyett vehetjük a PQ egyenest. Ha viszont $P = e \cap f$, akkor ($\mathbf{A}''3$) értelmében létezik egy e-n és f-en kívüli R pont, ekkor pedig e, f és PR három különböző P-n átmenő pont, ezzel ($\mathbf{A}3$)-at beláttuk. Legyen most e egy tetszőleges egyenes, e-hez ($\mathbf{A}''3$) következtében létezik rá nem illeszkedő P pont, ezen viszont a már belátott ($\mathbf{A}3$) értelmében átmegy három különböző egyenes, melyeknek az e-vel vett metszéspontjainak mind különbözőek kell lennie, hisz mindegyik átmegy P-n, így ($\mathbf{A}4$) is teljesül. □

Az eredeti definíció előnye, hogy az ($\mathbf{A}1$)-($\mathbf{A}4$) axiómákon keresztül közvetlenül kitűnik a pontok és egyenes fogalmainak *dualitása*, az, hogy a két halmaz felcserélésével szintén projektív síkot kapunk. Éppen ezért bármely olyan projektív sík pontjaira vonatkozó állítás, amely az axiómákból levezethető, ugyanúgy igaz az egyenesekre is és viszont, mint ezt a következő, véges projektív síkokra vonatkozó tétel is példázza.

1.1.3. Tétel. Ha egy projektív sík valamelyik egyenesére $n+1$ pont illeszkedik ($n \in \mathbb{N}$), akkor minden egyenesre $n+1$ pont illeszkedik, minden ponton át $n+1$ egyenes megy, és összesen n^2+n+1 pontja és ugyanennyi egyenese van a síknak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $e \in \mathcal{E}$ egyenesre $n+1$ pont illeszkedik, és legyen $P \in \mathcal{P}$ egy tetszőleges pont. Ha P nem illeszkedik az e-re, akkor az e pontjaival ($\mathbf{A}1$) alapján $n+1$ rajta átmenő egyenest kapunk. (Más egyenes már nem mehet át P-n mert egy ilyennek az e-vel vett metszéspontja nem egyezhetne az eredeti $n+1$ pont egyikével sem.) Ezzel beláttuk, hogy bármely e-re nem illeszkedő ponton át $n+1$ egyenes megy, és az eddigi érvelés duálisát P-re alkalmazva kapjuk, hogy bármely P-n át nem menő egyenesnek $n+1$ pontja van. Tekintsük most az e egy tetszőleges E pontját, ehhez (**A**3) miatt van olyan e-től különböző f egyenes, amely átmegy E-n, de P-n nem, így $n+1$ pontja van. e további pontjait f $n+1$ pontjával összekötve azt kapjuk, hogy e minden E-től különböző pontjára illeszkedik $n+1$ egyenes (több nem is lehetne az ilyen egyenesek f-fel vett metszéspontjainak száma miatt). Így persze E helyett e-nek egy másik pontjából kiindulva adódik, hogy E is $n+1$ egyenesre illeszkedik, azaz minden pont $n+1$ egyenesre illeszkedik, de akkor a dualitás miatt minden egyenesen is $n+1$ pontnak kell lennie.

Ami a pontok számát illeti, induljunk ki egy tetszőleges P pontból. Erre illeszkedik $n+1$ egyenes, és mindegyiknek van további n pontja a P-n kívül. (Ez az $(n+1)n$ pont a P-n átmenő egyenesek által pontosan egyszer van lefedve, hisz az ilyen egyenesek épp P-ben metszik egymást). Más pont pedig nem is lehetséges, mert azt P-vel összekötve egy $n+2$-edik P-re illeszkedő egyenest kapnánk. Így P-vel együtt $1+(n+1)n = n^2+n+1$ pont, és a dualitás miatt ugyanennyi egyenes van összesen. □

Ha a Π projektív sík véges, akkor a fenti tétel alapján van olyan $n > 0$ természetes szám, hogy Π-nek n^2+n+1 pontja és egyenese van, és minden pontján át $n+1$ egyenes megy, minden egyenesére $n+1$ pont illeszkedik. Ekkor n a *projektív sík rendje*, ezt hangsúlyozandó Π helyett a Π_n jelölést használjuk.

A projektív síkok talán legfontosabb osztályát háromdimenziós vektorterek segítségével definiálhatjuk.

1.1.4. Példa. Kommutatív $\mathbb{K}$ test feletti háromdimenziós V vektortéren legyen $\mathcal{P}$ az egy-, $\mathcal{E}$ pedig a kétdimenziós alterek halmaza. Az illeszkedést pedig a szokásos tartalmazással definiáljuk.

(A vektorterek fogalmához lásd pl. [5] I. rész, 2. fejezet.)

1.1.5. Állítás. A fenti konstrukció projektív síkot ad.

Bizonyítás. Bármely két különböző egydimenziós alteret pontosan egy kétdimenziós altér tartalmaz és bármely két különböző kétdimenziós altér metszete egy egydimenziós altér, így az első két axióma teljesül. Ami a pontokra illeszkedő egyenesek számát illeti, legyen e_1 egy egydimenziós altér valamely bázisvektora. Ekkor léteznek olyan e_2, e_3 vektorok, melyekkel együtt e_1 már V egy bázisát adja. Ilyenkor viszont az e_1, e_2, és e_1, e_3, illetve az e_1, e_2+e_3 vektorpárok által feszített kétdimenziós alterek páronként különbözőek, de mindegyik tartalmazza az e_1 által meghatározott egydimenziós alteret. Másrészt ha e_1, e_2 egy kétdimenziós altér bázisa, ennek mindenképp tartalmaznia kell az e_1, az e_2, és az e_1+e_2 vektorok által feszített, páronként különböző egydimenziós altereket, így a második két axióma szintén teljesül. □

1.1.6. Megjegyzés. Evvel az algebrai reprezentáció is ölünkbe hull: a pontok $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ módon reprezentálhatóak, ahol bármely $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ skalárra x és λx ugyanazt a pontot jelentik, az egyeneseknek pedig $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ módon jelölt hármasok felelnek meg, ahol $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ a megfelelő kétdimenziós altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisa. (Így tehát az egyenesek esetén is bármely $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ skalárra $[u_1, u_2, u_3]$ és $[\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3]$ is ugyanazt az egyenest reprezentálja.) És végül az x pont pontosan akkor illeszkedik az $\mathbf{u}$ egyenesre, ha $\mathbf{u}^{\intercal}\mathrm{x} = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$. Az így definiált projektív síkot $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$, vagy ha $\mathbb{K}$ q elemű véges test, $\mathrm{PG}(2, q)$ módon szokás jelölni.

1.2. Projektív síkok lefogó és blokkoló ponthalmazai

1.2.1. Definíció. Legyen S a Π projektív sík pontjainak egy részhalmaza. Ekkor S *lefogó ponthalmaz*, ha minden egyenes legalább egy pontban metszi S-t. Az S lefogó ponthalmaz *minimális*, ha egyetlen pontja sem hagyható el úgy, hogy továbbra is lefogó halmaz maradjon.

Pontok helyett természetesen megközelíthetnénk a problémát az egyenesek (*lefedő egyenesek*) felől is, erre azonban a dualitás miatt nincs külön szükség.

A szokásos szemléletnek megfelelően egy ponthalmaz kapcsán beszélhetünk kitérő, érintő és szelő egyenesekről

1.2.2. Definíció. Az $S \subset \mathcal{P}$ ponthalmazra nézve egy $e \in \mathcal{E}$ egyenes

- *kitérő*, ha nincs S-beli pontja,
- *érintő*, ha egy pontban metszi S-t
- *szelő*, ha legalább két pontja S-beli

Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy e-nek pontosan t pontja esik S-be, e-re t-szelőként hivatkozhatunk. (Alapvetően $t \geq 2$, de az érintőket 1-, a kitérő egyeneseket pedig 0-szelőknek is tekinthetjük.)

Az érintők fogalmával már pontos kritériumot adhatunk arra, hogy mikor miniális egy lefogó ponthalmaz.

1.2.3. Állítás. Az S lefogó ponthalmaz pontosan akkor minimális, ha bármely pontjában van érintője.

Bizonyítás. Ha S-nek van olyan pontja, melyben nincs érintő, akkor ez a pont minden további nélkül elhagyható, hisz a rajta átmenő egyeneseket továbbra is lefogja S többi pontja. Másfelől ha egy pontban van az S-nek érintője, ezt nem hagyhatjuk el, hisz az érintőt már nem fogja le S más pontja. $\square$

Természetes a kérdés, hogy milyen korlátok adhatók lefogó ponthalmazok méretére. Ami a felső korlátot illeti, maga $\mathcal{P}$, vagyis az összes pont halmaza is lefogó ponthalmaz, tehát ilyenkor érdemes a problémát a minimális lefogó ponthalmazok körére szűkíteni. Hasonlóan adható triviális alsó korlát: projektív síkon bármely két egyenesnek van metszéspontja, így már egyetlen egyenes pontjai lefogják az összes egyenest. Nem nehéz belátni, hogy véges projektív síkon ennél az $n+1$ pontnál kevesebb nem is elegendő, hisz n pont még $n(n+1)$ egyenest se foghat le ($(n(n+1)-1)$-et már igen). Így a minimalitás kérdésében a triviális megoldás kizárására vezették be a blokkoló halmazok fogalmát.

1.2.4. Definíció. A Π projektív sík pontjainak egy S részhalmaza *blokkoló ponthalmaz*, ha S lefogó és nem tartalmaz teljes egyenest.

Lássunk néhány példát blokkoló ponthalmazokra!

1.2.5. Példa. Π_n projektív síkon $n \geq 3$ esetében vegyünk három olyan egyenest, amelyek páronként különböző pontokban metszik egymást. Ekkor e három egyenes pontjai közül a metszéspontokat elhagyva $3(n-1)$ pontból álló blokkoló ponthalmazt kapunk. (Az eredeti egyeneseket így nyilván lefogtuk, de bármely más egyenesnek mindhárom eredeti egyenessel van metszéspontja, melyek közül legfeljebb egy lehet az elhagyott pontok között, így még az ilyen egyenesek is valamelyik eredeti egyenest szükségképp el nem hagyott pontban metszik. Emellett minden egyenesnek legalább két pontja kimarad a kiválasztottak közül.)

1.2.6. Példa. Π_n projektív síkon $n \geq 3$ esetében vegyünk két egyenest és egy rajtuk kívül eső pontot, majd hagyjuk el egy olyan harmadik egyenesnek az eredetiekkel vett metszéspontjait, amelyik átmegy a kitüntett ponton, de a két egyenes metszéspontján nem. Ez egy $2(n+1)$ pontból álló blokkoló ponthalmazt eredményez.

Hogy legalább hány pontja van egy blokkoló ponthalmaznak, viszonylag alaposan körbejárt kérdéskör, véges projektív síkok esetbén azonban minimális lefogó ponthalmazok éles felső korlátja is ismert.

1.2.7. Tétel (Bruen-Thas)**.** Ha S minimális lefogó ponthalmaz a Π_n véges projektív síkon, akkor

$$|S| \leq n\sqrt{n} + 1.$$

Egyenlőség esetén S unitál, vagyis minden egyenes 1 vagy $\sqrt{n}+1$ pontban metszi.

Bizonyítás. Jelölje l_i az S ponthalmaz i-szelőinek számát, és legyen $x = |S|$. Ekkor kétféleképpen megszámolva S szelőit, az S-beli illeszkedéseket és végül az S-beli pontpárokat az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\sum_{i=0}^{n+1} l_i = n^2 + n + 1, \tag{C1}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i l_i = (n+1)\, x, \tag{C2}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i(i-1) l_i = x\,(x-1)\,. \tag{1}$$

(C2)-t és (1)-et összeadva

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 l_i = x\,(x-1) + (n+1)\, x = x\,(x+n)\,. \tag{C3}$$

Legyen $\mathcal{E}_1 \coloneqq \{e \in \mathcal{E} \colon\ |e \cap S| > 1\}$ az S szelőinek halmaza. Mivel S lefogó ponthalmaz, $l_0 = 0$, így

$$|\mathcal{E}_1| = \sum_{i=2}^{n+1} l_i = n^2 + n + 1 - l_1,$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_1} |e \cap S| = \sum_{i=2}^{n+1} i l_i = (n+1)\, x - l_1,$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_1} |e \cap S|^2 = \sum_{i=2}^{n+1} i^2 l_i = x\,(x+n) - l_1.$$

Most a négyzetes és számtani közepek közti egyenlőtlenségből

$$\left(\frac{\sum_{e \in \mathcal{E}_1} |e \cap S|}{|\mathcal{E}_1|}\right)^2 \le \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}_1} |e \cap S|^2}{|\mathcal{E}_1|},$$

ezért

$$\left(\sum_{i=2}^{n+1} i l_i\right)^2 \le \left(n^2 + n + 1 - l_1\right) \sum_{i=2}^{n+1} i^2 l_i,$$

vagyis

$$\left((n+1)\, x - l_1\right)^2 \le \left(n^2 + n + 1 - l_1\right) \left(x\,(x+n) - l_1\right).$$

Átrendezve

$$\left(n^2+n+1+x^2-(n+2)\,x\right) l_1 \le \left(n^3+n^2+n-n\,x\right) x$$

adódik. De mivel S minimális lefogó, $x \le l_1$, és így

$$\left(n^2+n+1+x^2-(n+2)\,x\right) x \le \left(n^3+n^2+n-n\,x\right) x$$

$x > 0$, ezért

$$\begin{aligned} n^2+n+1+x^2-(n+2)\,x &\le n^3+n^2+n-n\,x \\ x^2-2\,x+1 &\le n^3 \\ x &\le n\sqrt{n}+1. \end{aligned}$$

Ha pedig egyenlőség teljesül, akkor egyrészt $l_1 = x = n\sqrt{n}+1$, másrészt minden $\mathcal{E}_1$-beli egyenesnek ugyanannyi pontban kell metszenie S-t, mert a számtani és négyzetes közepek is egyeznek. Mivel az S-beli illeszkedések száma $(n+1)\,(n\sqrt{n}+1)$, és ezekből az $n\sqrt{n}+1$ érintő ennyit el is vesz, a többi $n^2-n\sqrt{n}+n$ egyenesre egyenként $\frac{n\left(n\sqrt{n}+1\right)}{n^2-n\sqrt{n}+n} = \sqrt{n}+1$ illeszkedés jut, tehát minden $\mathcal{E}_1$-beli egyenes pontosan $\sqrt{n}+1$ pontban metszi S-t. □

1.2.8. Megjegyzés. A fenti bizonyítás mintájára Illés Tibor, Szőnyi Tamás és Wettl Ferenc megmutatta [3], hogy ugyanez a korlát érvényes, ha csak annyit követelünk meg, hogy a ponthalmaznak legalább annyi érintője legyen, ahány pontja.

Az alábbi példa mutatja, hogy a tételben szereplő korlát éles.

1.2.9. Példa. A PG $(2, s^2)$ síkon az $x_1^{s+1}+x_2^{s+1}+x_3^{s+1}=0$ egyenlettel definiált pontok halmazát *Hermite-görbé*nek nevezik. Ennek szép tulajdonsága, hogy minden egyenes vagy egy, vagy $s+1$ pontban metszi, minden pontjában van érintője, és összesen s^3+1 pontból áll (lásd [8] 4.20-4.22). Ebből kifolyólag minden Hermite-görbe egyben minimális lefogó ponthalmaz, amely $n = s^2$ esetén épp $n\sqrt{n}+1$ pontból áll, vagyis egyenlőséggel teljesíti a Bruen-Thas-tételt, azaz a felső becslés éles.

Ha n nem négyzetszám, valamivel javítható a korlát:

1.2.10. Tétel. Legyen S minimális lefogó ponthalmaz a Π_n projektív síkon, ahol $n \neq 5$. Ekkor

$$|S| \le n\sqrt{n}+1-\frac{s(s-1)}{4}n,$$

ahol s $\sqrt{n}$ törtrészét jelöli [6].

2. A sajátértékekről röviden

Mielőtt véges projektív síkokról rátérnénk az általános illeszkedési struktúrákra, a sajátértékek témakörét alaposabban szemügyre vesszük, ez ugyanis központi fogalma a későbbiekben a lefogó ponthalmazok méretének becslésére felhasznált eszköznek, az összefonódó sajátértékek módszerének. Így már az illeszkedési struktúrák lineáris algebrai reprezentációjánál is beszélni fogunk sajátértékekről.

Hely szűkében feltételezzük a kevésbé témába vágó lineáris algebrai alapfogalmak és összefüggések (pl. mátrix, determináns, rang, vektortér, lineáris függetlenség, bázis, stb.) ismeretét, amelyek többek közt megtalálhatóak Rózsa Pál *Lineáris algebra és alkalmazásai* c. könyvében [5].

2.1. Alapfogalmak

2.1.1. Definíció. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ négyzetes mátrix, ahol $\mathbb{K}$ kommutatív test. Ekkor a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátérték*e, és az $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor az $\mathbf{A}$ λ-hoz tartozó *sajátvektor*a, ha

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$$

$\mathbf{A}$ sajátértékeinek halmazát a mátrix *spektrum*ának nevezzük .

Könnyen meggondolható, hogy ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ is λ-hoz tartozó sajátvektorai $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ bármilyen lineáris kombinációja is λ-hoz tartozó sajátvektor, speciálisan tetszőleges c skalárra $c\,\mathbf{u}$ is az. Ezek alapján világos, hogy bármelyik λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok $\underline{0}$-val kiegészítve alteret alkotnak, ezt a λ-hoz tartozó *sajátaltér*nek nevezzük. A λ sajátérték *multiplicitás*a a λ-hoz tartozó lineáris független sajátvektorok számának maximuma, vagy másképp a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója.

λ pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha valamely nemnulla $\mathbf{u}$ vektorra, $\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$, vagyis ha $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{u} = 0$, ez pedig avval ekvivalens, hogy a $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})$ mátrix szinguláris, vagyis a determinánsa nulla. Tehát $\mathbf{A}$ sajátértékei épp a $p(x) := \det(\mathbf{A} - x\,\mathbf{E})$ karakterisztikus polinom gyökei.

Praktikus okokból e szakasz tételeit, állításait a komplex számtest fölött mondjuk ki (noha később alkalmazni csak $\{0,1\}$ értékű mátrixokra fogjuk). Így a komplex számok témaköréhez kapcsolódó alapfogalmak és elemi összefüggések ismeretét is feltételezzük (pl. konjugálás tulajdonságai, komplex szám abszolútértéke, stb. lásd [5]). Egy $\mathbf{A}$ mátrix (elemenkénti) komplex konjugáltját a megszokott módon, $\overline{\mathbf{A}}$-val fogjuk jelölni.

2.1.2. Definíció. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ komplex mátrix, ekkor $\mathbf{A}$ *transzponált*ja az az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$-val jelölt, $\mathrm{m}\times\mathrm{n}$-es komplex mátrix, melynek ij-edik eleme épp $\mathbf{A}$ ji-edik eleme ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$). $\mathbf{A}^* := \overline{\mathbf{A}}^\mathsf{T}$ pedig az $\mathbf{A}$ *adjungált*ja.

2.1.3. Definíció. Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix *önadjungált*, ha $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, és *szimmetrikus*, ha $\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}$.

2.1.4. Megjegyzés. Valós értékű mátrixok esetén az adjungálás és transzponálás, illetve az önadjungált és szimmetrikus mátrixok fogalmai nyilván egybeesnek.

2.1.5. Állítás. Önadjungált mátrixok sajátértékei valósak.

Speciálisan valós értékű, szimmetrikus mátrixok minden sajátértéke valós.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ önadjungált, és $\lambda \in \mathbb{C}$ az $\mathbf{A}$ sajátértéke:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$$

valamely $\mathbf{u} \neq \underline{0}$ sajátvektorra. Ekkor, a komplex konjungálás összeg és szorzattartó tulajdonságait kihasználva

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{u}}$$

De mivel $\mathbf{A}$ önadjungált, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^\intercal$, így

$$\mathbf{A}^\intercal\,\overline{\mathbf{u}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{u}}$$

is teljesül. Viszont $\mathbf{u}^\intercal\,\mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{A}\,\mathbf{u})^\intercal = \lambda\,\mathbf{u}^\intercal$, így mindkét oldalt $\mathbf{u}^\intercal$-val balról szorozva adódik, hogy

$$\lambda\,\mathbf{u}^\intercal\,\overline{\mathbf{u}} = \overline{\lambda}\,\mathbf{u}^\intercal\,\overline{\mathbf{u}}$$

És mivel $\mathbf{u} \neq \underline{0}$, ebből $\lambda = \overline{\lambda}$ adódik, vagyis λ szükségképp valós. □

2.2. Néhány további összefüggés

2.2.1. Állítás. Legyen $c \neq 0$ skalár, ekkor λ akkor és csak akkor sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak, ha $c\lambda$ sajátértéke $c\,\mathbf{A}$-nak. Ráadásul $\mathbf{u}$ akkor és csak akkor $\mathbf{A}$ λ-hoz tartozó sajátvektora, ha $c\,\mathbf{A}$-nak $c\lambda$-hoz tartozó sajátvektora is egyben, vagyis a két sajátaltér megegyezik.

2.2.1.1. Következmény. Speciálisan $c = -1$-re $\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u} \longleftrightarrow -\mathbf{A}\,\mathbf{u} = -\lambda\,\mathbf{u}$.

2.2.1.2. Következmény. Tegyük fel, hogy az $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei valósak, és jelölje a sajátértékeket $\lambda_1(\mathbf{A}), \lambda_2(\mathbf{A}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{A})$ nagyság szerint csökkenő sorrendben. Ekkor $\lambda_k(-\mathbf{A}) = -\lambda_{n+1-k}(\mathbf{A})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{u}_k$ az $\mathbf{A}$ $\lambda_k(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektora ($k = 1, 2, \ldots, n$). Ekkor $-\lambda_k(\mathbf{A})$ sajátértéke $-\mathbf{A}$-nak $\mathbf{u}_k$ sajátvektorral, így
$(\lambda_1(-\mathbf{A}), \lambda_2(-\mathbf{A}), \ldots, \lambda_n(-\mathbf{A})) = (-\lambda_n(\mathbf{A}), -\lambda_{n-1}(\mathbf{A}), \ldots, -\lambda_1(\mathbf{A}))$ □

2.2.2. Tétel. Legyen $\mathbf{A}$ n × n-es mátrix, $\mathbf{P}$ n × n-es invertálható mátrix, ekkor λ akkor és csak akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha $\mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}$-nek is sajátértéke ugyanakkora multplicitással.

Bizonyítás. Legyen λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak és $\mathbf{V}$ olyan mátrix, melynek oszlopai λ-hoz tartózó, lineárisan független sajátvektorok, vagyis

$$\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \lambda\,\mathbf{V}$$

Legyen most $\mathbf{U} = \mathbf{P}\,\mathbf{V}$. Mivel $\mathbf{P}$ invertálható, $\operatorname{rang}\mathbf{U} = \operatorname{rang}\mathbf{V}$. Másrészt

$$\mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{U} = \mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{P}\,\mathbf{V} = \mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \lambda\,\mathbf{P}\,\mathbf{V} = \lambda\,\mathbf{U}$$

Tehát λ legalább annyiszoros sajátértéke $\mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}$-nek, mint $\mathbf{A}$-nak. Ugyanezt az eljárást $\mathbf{A}$ és $\mathbf{P}$ helyett rendre $\mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}$-re és $\mathbf{P}^{-1}$-re alkalmazva adódik a fordított egyenlőtlenség. □

Az alábbi tétel a t-rendszerek sajátértékeinek vizsgálatánál kap nagy szerepet.

2.2.3. Tétel ([2] 1.1.2. Lemma)**.** Legyen $\mathbf{B}^*, \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ és legyen $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}$ a következő

$$\mathbf{N} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Legyen továbbá $\lambda \neq 0$ ekkor az alábbi feltételek ekvivalensek

(i) λ az $\mathbf{N}$ sajátértéke t-szeres multiplicitással,

(ii) $-\lambda$ az $\mathbf{N}$ sajátértéke t-szeres multiplicitással,

(iii) λ^2 a $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ sajátértéke t-szeres multiplicitással,

(iv) λ^2 az $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ sajátértéke t-szeres multiplicitással.

A bizonyításhoz szükségünk lesz az alábbi összefüggésre:

2.2.4. Állítás. Legyen $\mathbf{A}$ egy n × m-es, $\mathbf{B}$ pedig $m \times k$-as méretű mátrix, ekkor

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \leq \min(\operatorname{rang}\mathbf{A}, \operatorname{rang}\mathbf{B})$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{a}_1, , \dots, \mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ a $\mathbf{B}$ sorait (ezek tehát sorvektorok), ekkor $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ sorainak egy lineáris kombinációja $(i = 1, 2, \dots, n)$, így bármely vektor, amely felírható az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ sorainak lineáris kombinációjaként, egyben a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ vektoroknak is lineáris kombinációja, ebből pedig $\operatorname{rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \operatorname{rang} \mathbf{B}$ következik. Ekkor viszont

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\intercal = \operatorname{rang}(\mathbf{B}^\intercal \cdot \mathbf{A}^\intercal) \leq \operatorname{rang} \mathbf{A}^\intercal = \operatorname{rang} \mathbf{A}\,.$$

□

A 2.2.3 Tétel bizonyítása. Legyen $\mathbf{U}$ olyan $n + m$ sort tartalmazó mátrix, melynek oszlopai λ-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok, és bontsuk ketté $\mathbf{U}$-t egy n és egy m sorból álló részre:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{U}_1$-nek n, $\mathbf{U}_2$-nek pedig m sorból van. Felhasználva, hogy $\mathbf{N}\,\mathbf{U} = \lambda\,\mathbf{U}$,

$$\begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{U}_1 \\ \lambda\,\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \lambda\,\mathbf{U} = \mathbf{N}\,\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\,\mathbf{U}_2 \\ \mathbf{B}\,\mathbf{U}_1 \end{bmatrix}$$

adódik, vagyis

$$\mathbf{A}\,\mathbf{U}_2 = \lambda\,\mathbf{U}_1 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{B}\,\mathbf{U}_1 = \lambda\,\mathbf{U}_2\,.$$

Ezért

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{U}_1 = \lambda^2\,\mathbf{U}_1 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}_2 = \lambda^2\,\mathbf{U}_2$$

és

$$\lambda\,\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{U}_1 \\ \lambda\,\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{U}_1 \\ \mathbf{B}\,\mathbf{U}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{U}_1,$$

így

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} \mathbf{U}_1 \leq \operatorname{rang} \mathbf{U} = \operatorname{rang} \lambda\,\mathbf{U} = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{U}_1 \right) \leq \\ \leq \min\left(\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \right), \operatorname{rang} \mathbf{U}_1 \right) \leq \operatorname{rang} \mathbf{U}_1\,. \end{aligned}$$

Vagyis $\operatorname{rang}\mathbf{U}_1 = \operatorname{rang}\mathbf{U}$, és mivel $\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{U}_1 = \lambda^2\,\mathbf{U}_1$, így λ^2 multiplicitása $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$-nél legalább $\operatorname{rang}\mathbf{U}$. Másrészt, ha $\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{U}_1' = \lambda^2\,\mathbf{U}_1'$ valamely $\mathbf{U}_1'$ mátrixra, akkor az

$$\mathbf{U}' := \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{U}_1' \qquad \text{esetén} \qquad \mathbf{N}\,\mathbf{U}' = \lambda\,\mathbf{U}'$$

és $\operatorname{rang}\mathbf{U}' = \operatorname{rang}\mathbf{U}_1'$ a fenti módon adódik, így λ multiplicitása $\mathbf{N}$-nél legalább $\operatorname{rang}\mathbf{U}_1'$. Tehát λ^2 multplicitása $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$-nél és λ multiplicitása $\mathbf{N}$-nél szükségképp megegyezik. ($\mathbf{U}_2$-re ugyanígy járhatunk el.)

Mindebből közvetlenül adódik, hogy $-\lambda$ ugyanekkora multiplicitású sajátérték, hisz $-\lambda$ is gyöke λ^2-nek, de a szemléltetés végett megadunk egy invertálható lineári leképezést, melynek segítségével λ sajátvektoraiból $-\lambda$ sajátvektorait nyerhetjük. Legyen

$$\mathbf{E}' := \begin{bmatrix} -\,\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{V} := \mathbf{E}'\,\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\,\mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $\mathbf{V}$ oszlopai $-\lambda$-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok, ugyanis:

$$\mathbf{N}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\,\mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\,\mathbf{U}_2 \\ -\,\mathbf{B}\,\mathbf{U}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{U}_1 \\ -\lambda\,\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda\,\mathbf{V}_1 \\ -\lambda\,\mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = -\lambda\,\mathbf{V}\,.$$

És, ha $\mathbf{V}'$ $-\lambda$-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorokból áll, akkor $\mathbf{U}' = \mathbf{E}'\,\mathbf{V}'$ oszlopai λ-hoz tartozó lin. független sajátvektorok. $\square$

3. Illeszkedési struktúrák és lefogó ponthalmazaik

Ebben a fejezetben a lefogó ponthalmazok értelmezésének körét általános illeszkedési struktúrákra is kiterjesztjük, melyek közül néhány szabályosabbat közelebbről is szemügyre veszünk. Egyúttal a jól használható mátrix-reprezentációkról is szó esik. Az itt használt terminológiát elsősorban [7]-ből kölcsönözzük, ideértve egy-egy nevezetesebb, t-rendszerekre vonatkozó állítást és bizonyítást is.

3.1. Illeszkedési struktúrák

3.1.1. Definíció (Illeszkedési struktúrák)**.** Legyenek $\mathcal{P}$ és $\mathcal{B}$ diszjunk halmazok, $\mathbf{I}$ pedig egy $\mathcal{P} \times \mathcal{B}$ típusú, ún. illeszkedési reláció. Ekkor a $\Sigma := (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ hármas illeszkedési struktúrát alkot.

Az illeszkedési struktúrák fogalma geometriai indíttatású, így $\mathcal{P}$ elemeit pontoknak, $\mathcal{B}$ elemeit blokkoknak, az $\mathbf{I}$ szerint relációban álló pont-blokk párokat pedig zászlóknak szokás nevezni. Azonban itt a véges projektív síkoknál megszokott konvencióval szemben a pontokat latin kisbetűkkel, a blokkokat latin nagybetűkkel jelöljük. A zászlókat $p\,\mathbf{I}\,B$ módon jelöljük ($p \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}$), és $p\,\mathbf{I}\,B$ esetén azt mondjuk, hogy a p pont illeszkedik a B blokkra, vagy egyszerűen p rajta van B-n, illetve p szemszögéből: B átmegy p-n.

3.1.2. Definíció (Hipergráf)**.** Legyen $\mathcal{H}$ egy alaphalmaz és $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ alaphalmaz részhalamazainak egy rendszere. A $(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ páros ekkor hipergráfot alkot, ahol $\mathcal{H}$ elemei a hipergráf csúcsai vagy pontjai, $\mathcal{E}$ elemei pedig a hiperélek (röviden élek).

Ha a blokkokhoz a rájuk illeszkedő pontok részhalmazát rendeljük, hipergráfot kapunk, míg egy hipergráfnak az éleit blokkoknak, az illeszkedést pedig a tartalmazásnak tekintve illeszkedési struktúrához jutunk. Vagyis a hipergráfok és illeszkedési struktúrák fogalma ekvivalens, a párhuzamos tárgyalási keret azonban lehetővé teszi, hogy a két terület előnyeit ötvözve szemléletesebb képet adjunk. A hipergráfos megközelítésből öröklődik például a pontok fokának fogalma és a szokásos illeszkedési mátrixos reprezentáció, noha ez az illeszkedési struktúráknál is könnyen definiálható a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{B}$ elemei közti szomszédsági mátrixszal. Az illeszkedési struktúra fogalma inherens módon magába foglalja a pontok és blokkok dualitását, vagyis, hogy a két halmazt felcserélve is illeszkedési struktúrát kapunk. Ennek például a projektív síkoknál vehetjük hasznát, ahol a pontok és egyenesek (blokkok) között további szimmetria áll fenn. A továbbiakban elsősorban az illeszkedési struktúrákról esik szó.

3.1.3. Definíció. A $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ illeszkedési struktúrán egy pont foka a rajta átmenő blokkok, egy blokk foka pedig a rá illeszkedő pontok száma. Ezeket rendre $\deg(p)$-vel és $\deg(B)$-vel jelöljük ($p \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}$).

3.2. Általános illeszkedési struktúrák lefogó ponthalmazai

Általános illeszkedési struktúrákon pontosan ugyanúgy definiálhatjuk a lefogó ponthalmazokat, mint projektív síkok esetén, avval az egy különbséggel, hogy egyenesek helyett blokkról beszélünk. Így tehát itt csak az általánosabb többszörösen lefogó halmazokat fogjuk vizsgálni.

3.2.1. Definíció. Egy $B \in \mathcal{B}$ blokk az $S \subset \mathcal{P}$ halmazra nézve *kitérő*, *érintő*, vagy *t-szelő* ($t \geq 1$), ha S-sel rendre 0, 1 vagy t közös pontja van, azaz $|B \cap S| = 0$, 1 vagy t.

3.2.2. Definíció (t-szeresen lefogó pontalmaz)**.** Legyen t pozitív egész, ekkor a $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ illeszkedési struktúrán egy $S \subset \mathcal{P}$ halmaz *t-szeresen lefogó*, vagy röviden *t-lefogó* (a $\mathcal{B}$-re nézve), ha minden blokk legalább t pontban metszi S-t, vagyis S t-szer lefogja a $\mathcal{B}$ elemeit, és a blokkok közt van t-szelő. *S minimális t-lefogó ponthalmaz*, ha a tartalmazásra nézve az, vagyis egyetlen pontja sem hagyható el úgy, hogy továbbra is t-lefogó maradjon.

Ez a definíció diszjunkt osztályokra bontja $\mathcal{P}$ részhalmazait a t értéke szerint, ugyanis minden $S \subset \mathcal{P}$ ponthalmazhoz pontosan egy olyan t létezik, melyre S t-lefogó. (A nem lefogó halmazokat formálisan a $t = 0$ esethez sorolhatjuk.)

A 1.2.3 állítás mintájára könnyen belátható, a t-lefogó ponthalmazok minimalitására vonatkozó feltétel is.

3.2.3. Állítás. Egy t-lefogó ponthalmaz pontosan akkor minimális, ha bármely pontján át megy t-szelő.

Bizonyítás. Ha az S t-lefogó ponthalmaznak van olyan pontja, amely nem illeszkedik t-szelőre, minden ezen átmenő blokk legalább $t + 1$ pontban metszi S-t, így egy ilyen pont minden további nélkül elhagyható, hisz a rajta átmenő blokkokat továbbra is legalább t-szeresen lefogja S többi pontja. Másfelől ha egy pontban van t-szelő, nem hagyhatjuk el, hisz különben a szelőt már csak $t - 1$ pont fogná. □

3.3. Lineáris algebrai reprezentáció

Az illeszkedési struktúrákat a hipergráfoknál megszokott illeszkedési mátrix segítségével fogjuk reprezentálni. A könnyebb áttekinthetőség érdekében $\mathbf{0}$-val fogunk jelölni bármilyen méretű csak nullákat tartalmazó (röviden csupanulla) mátrixot, $\mathbf{E}$-vel pedig az egységmátrixokat. Ha a kontextusból egyéb információ hiányában a dimenziók nem lennének egyértelműen meghatározhatóak, a $\mathbf{0}_{\mathrm{n} \times \mathrm{m}}$, illetve a $\mathbf{0}_n$ és $\mathbf{E}_n$ jelöléseket alkalmazzuk a $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$-es és $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$-es mátrixokra.

Vekotorok alatt mindig oszlopvektort értünk, az n-dimenziós csupaegy vektort $\mathbf{1}_n$-nel fogjuk jelölni.

Legyen $\mathbf{M}$ a $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ struktúra illeszkedési mátrixa. Ekkor $\mathbf{M} \in \{0,1\}^{v \times b}$, ahol v a pontok, b pedig a blokkok számát jelöli, továbbá a mátrix i-edik sorának j-edik eleme

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik pont illeszkedik a } j\text{-edik blokkra,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Természetesen ehhez implicite a pontok és blokk egy-egy fix sorrendjére van szükség, de számunkra ez egyáltalán nem lényeges, $\mathbf{M}$ sorai és oszlopai tetszőlegesen permutálhatók. Illeszkedéi mátrix alatt így tulajdonképpen mátrixok egy egész családját értjük, melynek tagjai a sorok és oszlopok cserélgetésével egymásba átvihetőek. Ekkor a pontok szomszédsági mátrixa[1] épp $\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{\intercal}$, a blokkoké pedig $\mathbf{M}^{\intercal}\,\mathbf{M}$. A továbbiakban, ha hangsúlyozni szeretnék, hogy a $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ illeszkedési struktúra illeszkedési mátrixáról van szó $\mathbf{M}$, helyett $\mathbf{M}(\Sigma)$-t fogunk írni. Ha $v = b$ vagyis a pontok és a blokkok száma egyezik, akkor $\mathbf{M}(\Sigma)$ négyzetes, így létezik $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_v$ sajátértéke, ezeket Σ sajátértékeinek nevezzük.

Egy másik természetes reprezentációt ad annak páros gráfnak a szomszédsági mátrixa, ahol a két csúcshalmazt az illeszkedési struktúra pontjaival és blokkjaival azonosítjuk, és éleket az illeszkedések (zászlók) adják. Ezt szokás illeszkedési gráfnak nevezni. Az illeszkedési gráf szomszédsági mátrixát $\mathbf{N}(\Sigma)$-val vagy egyszerűen $\mathbf{N}$-nel fogjuk jelölni és a Σ illeszkedési struktúra *teljes szomszédsági mátrix*aként fogunk hivatkozni rá. Könnyen adódik az összefüggés a két reprezentáció között:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^{\intercal} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{0}$ mindenhol a megfelelő méretű csupanulla mátrixot jelöli. $\mathbf{M}$-mel ellentétben $\mathbf{N}$ mindig négyzetes és önadjungált ($\mathbf{N} \in \{0,1\}^{(v+b)\times(v+b)}$), így léteznek sajátértékei és ráadásul valósak is. A 2.2.3 Tétel alapján viszont $\mathbf{N}$ minden sajátértékének ellentetstje is sajátérték ugyanavval a multiplicitással, így elég a nem-negatívakat ismernünk. Ezek épp $\mathbf{M}$ szinguláris értékei ($\mathbf{M}^{\intercal}\,\mathbf{M}$ nemnegatív sajátértékeinek a gyökei). A továbbiakban ezeket a Σ szinguláris értékeinek nevezzük és $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$-val jelöljük $\left(\frac{v+b}{2} \leq k \leq v+b\right)$. $\mathbf{N}$ amellett, hogy tartalmazza $\mathbf{M}$-et, a pontok és a blokkok szomszédsági mátrixait is kódolja az alábbi módon:

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}\,\mathbf{M}^{\intercal} \\ \mathbf{M}^{\intercal}\,\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

[1] A pontok szomszédsági mátrixában a sorok és az oszlopok is a pontoknak felelnek meg, és egy sor és oszlop metszetében az a szám áll, ahány blokkra a megfelelő pontok mindketten illeszkednek. Értelemszerűen a mátrixnak a sorok és oszlopok ugyanahhoz a ponthoz tartozó (vagyis a főátlóban álló) elemei épp a pontok fokát adják meg.

A teljes szomszédsági mátrixnak az *Sajátérték korlát* lineáris algebrai felépítésénél fogjuk legnagyobb hasznát venni.

3.3.1. Példa. Természetesen a lefogó ponthalmazok fogalmát is meg lehet ragadni lineáris algebrai eszközökkel: adott $S \subset \mathcal{P}$ ponthalmaz, $B \in \mathcal{B}$ blokk esetén B pontosan akkor t-szelője S-nek, ha $\mathbf{M}$-ben a B-nek megfelelő oszlop és az S-nek megfelelő sorok metszéspontjaiban pontosan t darab 1-es áll. Továbbá S pontosan akkor legalább t-lefogó, ha a hozzá tartozó sorok minden oszlopból legalább t darab 1-est tartalmaznak. Formálisan ezek a következő módon fejezhetőek ki: legyen $X_S \in \{0,1\}^v$ az S halmaz karakterisztikus vektora, azaz X_S i-edik eleme pontosan akkor 1, ha az i-edik pont benne van S-ben. Hasonlóan $\mathbf{e}_B \in \{0,1\}^b$ az az egységvektor, ahol csak a B-nek megfelelő elem 1-es, a többi 0. Ekkor B akkor és csak akkor t-szelője S-nek, illetve S akkor és csak akkor legalább t-lefogó halmaz, ha

$$X_S^\intercal \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_B = t \quad \text{és} \quad \mathbf{M}^\intercal \cdot X_S \geq t\,\mathbf{1}_b$$

ahol a vektorok közti egyenlőtlenség elemenként értendő.

3.4. t-rendszerek

3.4.1. Definíció. A $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ illeszkedési struktúra *t-(v,k,λ)-rendszer*, ha a pontok száma v, minden blokkra k pont illeszkedik ($\deg(B) = k, \forall B \in \mathcal{B}$), és bármely t ponthoz pontosan λ olyan blokk létezik, amelyre a t pont mindegyike illeszkedik. A $t = 2$ eset külön figyelemet érdemel: a 2-(v,k,λ)-rendszereket *blokkrendszer*nek szokás nevezni. Az elfajuló eseteket eleve kizárjuk a $v > k \geq t > 0$, $\lambda > 0$ feltételekkel.

t-(v,k,λ)-rendszer helyett sokszor csak t-rendszert írunk. A külön elnevezés miatt blokkrendszereknél a 2-est szokás elhagyni a paraméterek közül, és egyszerűen (v,k,λ)-blokkrendszerekről beszélni.

3.4.2. Megjegyzés. Egy t-rendszer paraméterei egyrészt természetes számok, másrészt az alábbi egyenlőtlenségnek nyilvánvalóan teljesülnie kell:

$$t \leq k \leq v$$

A t-rendszerek szép tulajdonsága, hogy minden ponton ugyanannyi blokk megy át, mint alább látni fogjuk.

3.4.3. Állítás. Jelölje b a blokkok számát egy t-(v,k,λ)-rendszerben, r pedig egy tetszőleges pont fokát, ekkor

$$r = \lambda \frac{\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}} \quad \text{és} \quad b = \lambda \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$$

3.4.3.1. Következmény. Mivel r értéke az előző állítás szerint nem függ a kiválasztott ponttól, az is igaz, hogy minden ponton pontosan r darab blokk megy át.

3.4.3 állítás bizonyítása. Egy ponthoz a maradék $v-1$ közül tetszőlegesen $t-1$ pontot választva $\lambda\binom{v-1}{t-1}$ blokkot kapunk, de ekkor minden blokkot annyiszor megszámoltunk, ahányféleképpen a fixált ponton túli $k-1$ eleme közül kiválasztható $t-1$ darab, vagyis $\binom{k-1}{t-1}$-féleképpen.

A b-re vonatkozó összefüggéshez pedig elég, hogy akárhogyan választunk t pontot a v közül, λ-szor ennyi blokkot kapunk. De ekkor minden blokkot annyiszor megszámoltunk, ahányféleképp az egy blokkra illeszkedő k pont közül kiválasztható t darab. $\square$

A fenti bizonyításban a következő egyszerű, de hasznos összefüggést is használhattuk volna, ami az illeszkedő pont-blokk párok kétféleképpen történő megszámolásából adódik:

3.4.4. Állítás. $bk = vr$

Ebből az is kitűnik, hogy egy t-rendszer a t, v, k, λ paraméterek heleyett t-vel és v, b, r, k közül bármelyik hárommal is egyértelműen megadható, hisz ilyenkor a $\{v, b, r, k\}$-ból kimaradt paraméter a $vr = bk$ összefüggésből egyértelműen meghatározható, λ pedig épp $r\frac{\binom{k-1}{t-1}}{\binom{v-1}{t-1}}$.

3.4.5. Tétel. Adott t-(v, k, λ)-rendszerben legyen

$$\kappa_s := \lambda \prod_{i=s}^{t-1} \frac{v-i}{k-i}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, t.$$

Ekkor minden $s \in \{1, 2, \ldots, t\}$ indexre a t-rendszer egyben s-(v, k, κ_s)-rendszer is. [7]

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy $t > 1$ esetén a t-rendszer egyben $(t-1)$-$\left(v, k, \lambda\frac{v-(t-1)}{k-(t-1)}\right)$-rendszer is, ebből rekurzíve adódik a teljes állítás:

Tetszőleges $t-1$ pontot $v-(t-1)$-féleképpen tudunk kiegészíteni t ponttá, és bármely t darab ponthoz λ olyan blokk létezik, amelyik a pontok mindegyikét tartalmazza. Ez eddig $\lambda(v-(t-1))$ blokkot jelent. De ilyenkor minden blokkot annyiszor megszámoltunk, ahányféleképp az eredeti $t-1$-en kívüli $k-(t-1)$ pontjából kiválaszthatunk egyet. Ez viszont azt jelenti, hogy bármely $t-1$ pont épp $\lambda\frac{v-(t-1)}{k-(t-1)}$ darab blokkra illeszkedik egyszerre, így a rendszer valóban $(t-1)$-$\left(v, k, \lambda\frac{v-(t-1)}{k-(t-1)}\right)$-rendszer is. $\square$

Ez azt is jelenti, hogy minden $s \leq t$ pozitív egészre teljesül, hogy bárhogyan választunk ki s pontot, ezekhez fix számú – nevezetesen κ_s – olyan blokk létezik, melyekre mind illeszkednek.

Fontos még, hogy κ_s szebb alakban is írható:

3.4.6. Állítás. $\kappa_s = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, t.$

Bizonyítás.

$$\kappa_s = \lambda \prod_{i=s}^{t-1} \frac{v-i}{k-i} = \lambda \frac{(v-s) \cdot \ldots \cdot (v-t+1)}{(k-s) \cdot \ldots \cdot (k-t+1)} = \lambda \frac{\frac{(v-s)!}{(v-t)!}}{\frac{(k-s)!}{(k-t)!}} = \lambda \frac{\frac{(v-s)!}{(t-s)!(v-t)!}}{\frac{(k-s)!}{(t-s)!(k-t)!}} = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}$$

□

3.4.7. Példa. A κ_s számok azért is kifejezőek, mert a struktúra három paraméterét eleve kódolják, ugyanis

$$\kappa_t = \lambda, \qquad \kappa_1 = r, \qquad \kappa_0 = b.$$

3.4.8. Megjegyzés. A fentiek alapján a t-rendszerek halmazai t-ben monoton szűkülő halmazsorozatot alkotnak, így speciálisan minden t-(v, k, λ)-rendszer egyben 1-(v, k, r)-rendszer is.

A κ_s számok további haszna, hogy segítségükkel a t-rendszerek létének egy fontos szükséges feltétele is megragadható.

3.4.9. Megjegyzés. Csak olyan t, v, k, λ értékekre létezhet t-(v, k, λ)-rendszer, ahol minden κ_s egész szám ($s = 0, 1 \ldots, t$). Ezt az alábbi oszthatósági követelményekkel ragadhatjuk meg:

$$\lambda \binom{v-s}{t-s} \equiv 0 \qquad \left(\bmod \binom{k-s}{t-s}\right)$$

tetszőleges $s = 0, 1, \ldots, t$ indexre. (Az $s = 0$ eset a $b = \frac{vr}{k}$ összefüggésnek felel meg.)

3.4.10. Példa. Blokkrendszereknél ez az alábbi feltételekkel ekvivalens:

$$\begin{aligned} \lambda(v-1) &\equiv 0 \qquad (\bmod\ k-1), \\ \lambda v &\equiv 0 \qquad (\bmod\ k), \end{aligned}$$

és persze, hogy λ egész.

Térjünk most rá a t-rendszereket jellemző mátrixok vizsgálatára.

3.4.11. Megjegyzés. Egy t-rendszer pontjainak szomszédsági mátrixára ($\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal$) mindig teljesül, hogy a főátlóban minden elem r, míg a blokkok szomszédsági mátrixának ($\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}$) főátlójában mindenhol k áll.

t-rendszerek esetén a legnagyobb sajátérték is ismert.

3.4.12. Tétel. Egy t-(v,k,λ)-rendszer teljes szomszédsági mátrixának legnagyobb sajátértéke $\lambda_1(\mathbf{N}) = \sqrt{rk}$, továbbá $\sqrt{rk}$ és $-\sqrt{rk}$ is egyszeres sajátértékei $\mathbf{N}$-nek kivéve, ha a t-rendszer előáll legalább két diszjunkt 1-(v,k,r)-rendszer uniójaként, ekkor a multiplicitást az összefüggő komponensek száma adja.

Erre közvetlen bizonyítást adok, mely az egyszeres multiplicitáson kívül a tétel minden elemét pusztán a vektornorma fogalmának (lásd például [5] 10. fejezet), és a szintén elemi eszközökkel bizonyított 2.2.3 Tételnek segítségével igazolja . Az egyszeres multplicitás Perron-Frobenius-tételből következik, mert diszjunkt struktúrák uniójának kivételétől eltekintve $\mathbf{N}$ irreducibilis, mint látni fogjuk, és mivel önadjungált, a sajátértékei valósak.

Fontos még, hogy a $t \geq 2$ esetben $\lambda > 0$ miatt semmiképp nem bontható diszjunkt komponensekre a struktúra, ezért is csak a $t = 1$ esetnél van kivétel.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\sqrt{rk}$ és $-\sqrt{rk}$ is sajátértékei $\mathbf{N}$-nek minden esetben. Ehhez elég lenne a 2.2.3 Tételt alkalmazni, hisz $\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}\,\mathbf{1}_v = r\,\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{1}_b = rk\,\mathbf{1}_v$. Azonban a megfelelő sajátvektorokat közvetlenül is könnyen megadhatjuk: legyen $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} \sqrt{r}\,\mathbf{1}_v \\ \sqrt{k}\,\mathbf{1}_b \end{bmatrix}$, ekkor

$$\mathbf{N}\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^\intercal & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r}\,\mathbf{1}_v \\ \sqrt{k}\,\mathbf{1}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k}\,\mathbf{M}\,\mathbf{1}_b \\ \sqrt{r}\,\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{1}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sqrt{k}\,\mathbf{1}_v \\ k\sqrt{r}\,\mathbf{1}_b \end{bmatrix} = \sqrt{rk} \begin{bmatrix} \sqrt{r}\,\mathbf{1}_v \\ \sqrt{k}\,\mathbf{1}_b \end{bmatrix} = \sqrt{rk}\,\mathbf{u}\,.$$

Az $\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} -\sqrt{r}\,\mathbf{1}_v \\ \sqrt{k}\,\mathbf{1}_b \end{bmatrix}$ definícióval adódik, hogy $-\sqrt{rk}$ is sajátérték.

Legyen most $\|\cdot\|$ tetszőleges vektornorma, ekkor egy $\mathbf{A}$ mátrix $\|\cdot\|$ által indukált mátrixnormáját az alábbi módon definiáljuk:

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{u} \neq \underline{0}} \frac{\|\mathbf{A}\,\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Az, hogy $\sqrt{rk}$ a legnagyobb sajátérték, a mátrixnorma következő három tulajdonságán múlik:

(i) $\|\mathbf{A}\,\mathrm{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathrm{x}\|$ minden x vektorra, ahol értelmes az $\mathbf{A}\,\mathrm{x}$ szorzat

(ii) $\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$ minden
B mátrix esetén, ahol a dimenziók lehetővé teszik az $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ szorzást

(iii) ha $\mathbf{A}$ négyzetes, $\lambda_1(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$

Most ezt a három tulajdonságot indukált mátrixnormákra belátjuk, és azonnal alkalmazzuk is a $\|\cdot\|_1$ normára és a t-rendszert jellemző mátrixokra.

(i) Legyen $\|\mathbf{A}\|$ indukált mátrixnorma. Ekkor a supremumos definíció alapján tetszőleges $\mathbf{u} \neq \underline{0}$ vektorra

$$\frac{\|\mathbf{A}\,\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \|\mathbf{A}\|\,,$$

vagyis

$$\|\mathbf{A}\,\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{u}\|$$

(ii) Az előző pont alapján tetszőleges $\mathbf{u} \neq \underline{0}$ vektorra

$$\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\,\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{u}\|\,.$$

Ebből pedig

$$\frac{\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,,$$

így

$$\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\| = \sup_{\mathbf{u}\neq\underline{0}} \frac{\|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,.$$

(iii) Legyen most $\mathbf{u} \neq \underline{0}$ az $\mathbf{A}$ λ-hoz tartozó sajátvektora, ekkor

$$\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{A}\,\mathbf{u}\| = \|\lambda\,\mathbf{u}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{u}\|\,,$$

amiből $\|\mathbf{A}\| \geq |\lambda|$ adódik minden λ sajátértékre

Jelölje $\mathbf{m}_i$ az $\mathbf{M}$ i-edik sorát, azaz $\mathbf{m}_i$ egy b-dimenziós sorvektor ($i = 1, 2, \ldots, v$). Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\|\mathbf{M}\,\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{v} |\mathbf{m}_i\,\mathbf{u}| \leq \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{b} |m_{ij}u_j| = \sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{v} |m_{ij}u_j| = \sum_{j=1}^{b} |u_j| \sum_{i=1}^{v} |m_{ij}|\,,$$

de $\mathbf{M}$ minden oszlopában pontosan k darab 1-es áll, így

$$\|\mathbf{M}\,\mathbf{u}\|_1 \leq \sum_{j=1}^{b} |u_j| \sum_{i=1}^{v} |m_{ij}| = \sum_{j=1}^{b} k\,|u_j| = k\,\|\mathbf{u}\|_1\,,$$

és ezért $\|\mathbf{M}\|_1 \leq k$.

Ugyanígy látható be az is, hogy $\|\mathbf{M}^\intercal\|_1 \leq r$. Ekkor viszont

$$\lambda_1\left(\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}\right) \leq \|\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}\|_1 \leq \|\mathbf{M}^\intercal\|_1\,\|\mathbf{M}\|_1 \leq rk.$$

Azonban $\lambda_1\left(\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}\right) \geq rk$ is teljesül, mert $\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}\,\mathbf{1}_v = r\,\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{1}_b = rk\,\mathbf{1}_v$. Így $\lambda_1\left(\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}\right) = rk$, amiből a 2.2.3 Tétel alapján $\lambda_1\left(\mathbf{N}\right) = \sqrt{\lambda_1\left(\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}\right)} = \sqrt{rk}$ is következik.

A Perron-Frobenius-tétel értelmében (lásd [5]: 9.1.5 Frobenius II. tétele), ha egy (elemenként) nem negatív, négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix irreducibilis, és összesen h maximális abszolút értékű sajátértéke van, akkor ezek a $\lambda^h = \lambda_1\left(\mathbf{A}\right)^h$ egyenlet komplex gyökei.

$\mathbf{N}$ nyilván nem negatív. Tegyük fel először, hogy a struktúra nem áll elő legalább két diszjunkt 1-(v,k,r)-rendszer uniójaként. Ilyenkor $\mathbf{N}$ irreducibilis is, mert ha reducibilis lenne, akkor a sorok és oszlopok együttes (szimmetrikus) permutációjával az alábbi alakra lehetne hozni:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ négyzetes mátrixok. Pontosabban fogalmazva: $\mathbf{N}$ reducibilitása esetén létezne olyan $\mathbf{P}$ permutációmátrix, amelyre $\mathbf{P}\,\mathbf{N}\,\mathbf{P}^\intercal$ a fenti alakot öltené. Azonban $\mathbf{N}$ szimmetrikus mátrix, így a $\mathbf{P}\,\mathbf{N}\,\mathbf{P}^\intercal$ is szükségképp szimmetrikus, tehát $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ lehetséges csak, de ez azt jelentené, hogy a t-rendszer felbontható két diszjunk részsturktúrára, ami $k > 0$ miatt csak a kizárt esetben lehetséges.

Ha a struktúra előáll legalább két diszjunkt 1-(v,k,r)-rendszerek uniójaként, akkor az összefüggő komponensek teljes szomszédsági mátrixaira már teljesül a tétel egyszeres multiplicitással is, ebből pedig következik, hogy az eredeti teljes szomszédsági mátrixban a sajátértékek multiplicitása épp az összefüggő komponensek száma, hisz ezek teljes szomszédsági mátrixai diszjunkt részmátrixai az eredeti mátrixnak. □

Ennek a tételnek tulajdonképpen csak a $t = 1$ esetben lesz számunkra jelentősége, hisz a 3.4.5 Tétel következtében $t \geq 2$ esetén minden t-rendszer egyben blokkrendszer is, és blokkrendszereknek minden sajátértéke pontosan megadható, ahogy ezt alább meg is mutatjuk.

3.4.13. Megjegyzés. Blokkrendszer pontjainak szomszédsági mátrixa

$$\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal = \begin{bmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ \lambda & \dots & \lambda & r \end{bmatrix}$$

Ugyanis $\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal$ ij-edik eleme az i-edik és j-edik pontokon egyszerre átmenő blokkok számával egyezik, melyekből $i \neq j$ esetén λ, $i = j$ esetén pedig r darab van.

Ezt felhasználva blokkrendszereknél pontosan meghatározhatóak a teljes szomszédsági mátrix sajátértékei multiplicitással együtt.

3.4.14. Tétel. Jelölje $\mathbf{N}$ a (v, k, λ)-blokkrendszer teljes szomszédsági mátrixát és jelölje $\mathbf{N}$ sajátértékeit nagyság szerint csökkenő sorrendben $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{v+b}$. Ekkor

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -\lambda_{v+b} = \sqrt{rk}, \\ &\lambda_2 = \dots = \lambda_v = -\lambda_{\max(v,b)+1} = \dots = -\lambda_{v+b-1} = \sqrt{r-\lambda}, \end{aligned}$$

és $b > v$ esetén $\lambda_{v+1} = \dots = \lambda_b = 0$.

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{e}_i$ az i-edik v-dimenziós egységvektort (melynek tehát csak az i-edik eleme 1, a többi 0), és legyen $\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_i$. Ekkor a 3.4.13 megjegyzés alapján

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{1}_v = (r + (v-1)\lambda)\,\mathbf{1}_v = (r + r(k-1))\,\mathbf{1}_v = rk\,\mathbf{1}_v \\ &\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{u}_i = (r-\lambda)\,\mathbf{u}_i \qquad\qquad (i = 2, 3, \dots, v) \end{aligned}$$

Vagyis rk 1-szeres, $r - \lambda$ pedig $(v-1)$-szeres sajátértéke $\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal$-nek ($\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_v$ nyilvánvalóan lineárisan függetlenek). Így a 2.2.3 Tétel alapján $\sqrt{rk}$ és $-\sqrt{rk}$ 1-szeres, $\sqrt{r-\lambda}$ és $-\sqrt{r-\lambda}$ pedig $(v-1)$-szeres sajátértékei $\mathbf{N}$-nek, és ha $b > v$, a többi sajátérték csak 0 lehet. □

A 3.4.5 Tétel értelmében $t \geq 2$ esetén bármely két pont pontosan κ_2 blokkra illeszkedik egyszerre, így ilyenkor λ helyett κ_2-vel érvényes a tétel. Azonban $r - \kappa_2 = r\frac{v-k}{v-1}$, így általánosan az mondható, hogy $t \geq 2$ esetén $\pm\sqrt{rk}$ egyszeres, $\pm\sqrt{r\frac{v-k}{v-1}}$ pedig $(v-1)$-szeres sajátértékei a teljes szomszédsági mátrixnak.

3.5. Négyzetes t- és blokkrendszerek

A $vr = bk$ összefüggés mutatja, hogy pontosan akkor egyezik a blokkok és pontok száma, ha minden ponton ugyanannyi blokk megy át, ahány pontja egy blokknak van, azaz a $b = v$ és $r = k$ feltételek ekvivalensek. Az ilyen t-rendszereket *négyzetes t-rendszer*nek nevezzük a négyzetes illeszkedési mátrix miatt.

3.5.1. Megjegyzés. A 3.4.12 Tétel alapján négyzetes t-rendszer legnagyobb sajátértéke épp r.

3.5.2. Tétel. Négyzetes blokkrendszerben bármely két blokknak is λ közös pontja van.

Bizonyítás. Tekintsük a (v, k, λ)-blokkrendszer $\mathbf{M}$ illeszkedési mátrixát. Ekkor $\mathbf{M}$ egy olyan $v \times v$-s mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában r darab 1-es található ($k = r$). Jelölje $\mathbf{U}_v$ az $v \times v$-es csupaegy mátrixot. Ekkor a pontok szomszédsági mátrixa a 3.4.13 megjegyzés alapján

$$\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal = (r - \lambda)\,\mathbf{E}_v + \lambda\,\mathbf{U}_v$$

De $\mathbf{M}\,\mathbf{U}_v = r\,\mathbf{U}_v = \mathbf{U}_v\,\mathbf{M}$ vagyis $\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal$ felcserélhetőek a mátrix-szorzásnál, így

$$\mathbf{M}\,\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal = \mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}$$

de mivel $\det\left(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal\right) = (r + (v-1)\lambda)\,(r-\lambda)^{v-1} = r^2\,(r-\lambda)^{v-1}$. Ez csak $r = \lambda$ esetén 0 (amikor is $k = v$, így minden blokkra illeszkedik minden pont). Tehát $r > \lambda$ esetén $\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal$ invertálható, ezért $\mathbf{M}$ is az, így

$$\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal = \mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}$$

$\mathbf{M}^\intercal\,\mathbf{M}$ viszont a blokkok szomszédsági mátrixa, így bármely két blokknak is pontosan λ közös pontja van. $\square$

Ebből az összefüggésből az is következik, hogy a projektív síkoknál megszokott dualitás a négyzetes blokkrendszerek halmazán belül is fennáll, vagyis $\mathbf{M}^\intercal$ szintén egy négyzetes blokkrendszer illeszkedési mátrixa.

3.5.3. Példa. Minden n-edrendű, véges projektív sík négyzetes $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-blokkrendszer.

A 3.4.9 megjegyzésben szereplő feltételek mellett páros pontú, négyzetes t-rendszereknél az alábbi állítás is érvényes.

3.5.3.1. Következmény (Schützenberger)**.** Páros sok pontból álló, négyzetes t-rendszerben $t \geq 2$ esetén $r - \kappa_2$ négyzetszám.

Bizonyítás. Mint a 3.5.2 Tétel bizonyításában láttuk, $\det(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^\intercal) = r^2\,(r-\kappa_2)^{v-1}$, így $\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}^\intercal$ miatt $(\det\mathbf{M})^2 = r^2\,(r-\kappa_2)^{v-1}$, de $\mathbf{M}$ elemei egész számok, így $\det\mathbf{M}$ is egész, $v-1$ viszont páratlan, ebből pedig már következik az állítás. $\square$

4. Az összefonódó sajátértékek módszere

Ebben a fejezetben egy olyan, sajátérték-egyenlőtlenségeken alapuló, lineáris algebrai módszert vezetünk le, melyet később t-rendszerekben speciális – például lefogó – ponthalmazok méretének becslésére alkalmazhatunk a 4.2.2 Tételt felhasználva. A szóbanforgó módszert, melyre összefonódó sajátértékek módszereként fogunk hivatkozni, Willem H. Haemers PhD tézisének [2] idevágó részei alapján mutatjuk be.

4.1. Összefonódó sajátértékek

Innentől csak olyan mátrixokat vizsgálunk, melyeknek minden sajátértéke (vagyis a spektruma) valós. Ennek elégséges feltétele, ha a mátrix önadjungált (2.1.5 állítás). Egy valós spektrumú, n × n-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit $\lambda_1(\mathbf{A}), \lambda_2(\mathbf{A}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{A})$ fogja jelölni nagyság szerint csökkenő sorrendben. (Ahol a kontextusból világos, $\lambda_i(\mathbf{A})$ helyett egyszerűen λ_i-t írunk.) Azaz $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ a továbbiakban mindig teljesül.

4.1.1. Definíció. Legyenek $m \leq n$ pozitív természetes számok, $\mathbf{A}$ egy n × n-es, $\mathbf{B}$ egy m × m-es valós spektrumú mátrix. Ekkor $\mathbf{B}$ sajátértékei *összefonódnak* $\mathbf{A}$ sajátértékeivel – az angol *interlace* után –, ha minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ indexre

$$\lambda_i(\mathbf{A}) \geq \lambda_i(\mathbf{B}) \geq \lambda_{n-m+i}(\mathbf{A})$$

Ha ezen felül van olyan $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ index, hogy $\lambda_i(\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{B})$, ha $1 \leq i \leq k$ és $\lambda_i(\mathbf{B}) = \lambda_{n-m+i}(\mathbf{A})$, ha $k + 1 \leq i \leq m$, akkor az összefonódást *szoros*nak nevezzük (eredetiben *tight interlacing*).

Speciálisan az $m = n - 1$ esetben az összefonódás az alábbi feltétellel ekvivalens:

$$\lambda_1(\mathbf{A}) \geq \lambda_1(\mathbf{B}) \geq \lambda_2(\mathbf{A}) \geq \lambda_2(\mathbf{B}) \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}(\mathbf{A}) \geq \lambda_{n-1}(\mathbf{B}) \geq \lambda_n(\mathbf{A})$$

innen az elnevezés is.

A fenti definíció elsőre talán túlságosan mesterségesnek tűnik, de mint látni fogjuk, az összefonódó sajátértékek fogalma valójában a 2.2.2 Tételbeli alapvető összefüggés általánosítása, miszerint azonos méretű, négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{P}$ mátrixok esetén $\mathbf{A}$ és $\mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}$ sajátértékei megegyeznek. Ehhez az invertálható mátrixoknak csak egy szűkebb osztályát tekintjük, ahol az inverz épp az adjungált, vagyis $\mathbf{P}^*\,\mathbf{P} = \mathbf{E}$ – ezek az unitér mátrixok –, és $\mathbf{A}$-ról is feltesszük, hogy önadjungált. Ezekkel a megszorításokkal biztosíthatjuk, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ sajátértékei valósak, így nagyság szerint rendezhetőek legyenek. Ha most $\mathbf{P}$ nem feltétlen négyzetes, de $\mathbf{P}^*\,\mathbf{P} = \mathbf{E}$ továbbra is teljesül, akkor $\mathbf{P}^*\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ sajátértékei ugyan nem feltétlen egyeznek, de legalább összefonódnak $\mathbf{A}$ sajátértékeivel. Ennek belátásához szükségük lesz a Rayleigh-elvre.

Adott vektortéren jelölje $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok által generált alteret és tetszőleges $\mathcal{H}$ altér esetén $\mathcal{H}^\perp$ a $\mathcal{H}$ merőleges kiegészítő alterét.

4.1.2. Lemma (Rayleigh-elv)**.** Legyen $\mathbf{A}$ n $\times$ n-es, önadjungált mátrix, és legyen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ ortonormált sajátbázis a sajátértékeknek megfelelően rendezve, azaz $\mathbf{A}\,\mathbf{u}_k = \lambda_k\,\mathbf{u}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbb{1}_{i=j}$ (statisztikából kölcsönzött jelöléssel élve). Ekkor bármely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexre:

(i) $\lambda_k \leq \frac{\mathbf{u}^*\mathbf{A}\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}^*\,\mathbf{u}}$ minden $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektorra, és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\mathbf{u}$ λ_k-hoz tartozó sajátvektor.

(ii) $\lambda_k \geq \frac{\mathbf{u}^*\mathbf{A}\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}^*\,\mathbf{u}}$ minden $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektorra, és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\mathbf{u}$ λ_k-hoz tartozó sajátvektor.

Bizonyítás. (i) legyen $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, ekkor léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ skalárok, melyekre $\mathbf{u} = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{u}_i$, így

$$\mathbf{u}^*\,\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{u}^*\,\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{u}_i\right) = \mathbf{u}^*\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{A}\,\mathbf{u}_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{k} c_j\,\mathbf{u}_j\right)^*\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i\,\mathbf{u}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 \lambda_i\,\mathbf{u}_i^*\,\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 \lambda_i$$

mert a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vektorok ortogonálisak. De $\lambda_k \leq \lambda_i$ minden $i \leq k$ indexre, ezért

$$\mathbf{u}^*\,\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 \lambda_i \geq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 = \lambda_k\,\mathbf{u}^*\,\mathbf{u}$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha csak olyan i-kre teljesül $|c_i| > 0$, ahol $\lambda_i = \lambda_k$. Ekkor viszont $\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \lambda_k\,\mathbf{u}$, vagyis $\mathbf{u}$ λ_k-hoz tartozó sajátvektor. Ráadásul $\mathbf{u}^*\,\mathbf{u} > 0$, mert $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, így evvel osztva az egyenlőtlenség mindkét oldalát adódik az első állítás.

(ii) a fentiekhez nagyon hasonló módon látható be, de a változatosság kedvéért álljon itt példának egy visszavezetés: használjuk ki, hogy $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle^\perp = \langle \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_{n-k} \rangle$, illetve, hogy $-\,\mathbf{A}$ is önadjungált és $\lambda_k(\mathbf{A}) = -\lambda_{n+1-k}(-\,\mathbf{A})$, és alkalmazzuk (i)-t $-\,\mathbf{A}$-ra és az $n+1-k$ indexre az $\mathbf{v}_i := \mathbf{u}_{n+1-i}$ módon definiált, ortonormált sajátbázison. Ebből

$$-\lambda_k(\mathbf{A}) = \lambda_{n+1-k}(-\,\mathbf{A}) \leq \frac{\mathbf{u}^*\,(-\,\mathbf{A})\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}^*\,\mathbf{u}} = -\frac{\mathbf{u}^*\,\mathbf{A}\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}^*\,\mathbf{u}}$$

adódik minden $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-k+1} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle^\perp$ vektorra, az egyenlőségre vonatkozó, kívánt feltétellel.

□

Így már a 2.2.2 Tétel unitér mátrixokra való megszorításának általánosítása is belátható, ami egyben alá is támasztja az összefonódó sajátértékek fogalmának létjogosultságát.

4.1.3. Tétel ([2] 1.2.1)**.** Legyen $\mathbf{S}$ olyan n × m-es mátrix, melyre $\mathbf{S}^* \mathbf{S} = \mathbf{E}_m$ teljesül, és tetszőleges n × n-es, önadjungált $\mathbf{A}$ mátrixhoz legyen $\mathbf{B} \coloneqq \mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{S}$ és $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ a $\mathbf{B}$ ortonormált sajátbázisa. Ekkor

(i) $\mathbf{B}$ sajátértékei összefonódnak $\mathbf{A}$ sajátértékeivel,

(ii) ha valamely $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ indexre $\lambda_k(\mathbf{B}) = \lambda_k(\mathbf{A})$ vagy $\lambda_k(\mathbf{B}) = \lambda_{n-m+k}(\mathbf{A})$, akkor $\mathbf{B}$-nek van olyan $\lambda_k(\mathbf{B})$-hez tartozó $\mathbf{v}$ sajátvektora, melyre $\mathbf{S}\,\mathbf{v}$ az $\mathbf{A}$ $\lambda_k(\mathbf{B})$-hez tartozó sajátvektora,

(iii) ha van olyan $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ index, hogy minden $i \in \{1, \dots, k\}$ nála nem nagyobb indexre $\lambda_i(\mathbf{B}) = \lambda_i(\mathbf{A})$, akkor $\mathbf{S}\,\mathbf{v}_i$ az $\mathbf{A}$ $\lambda_i(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektora ($i = 1, \dots, k$),

(iv) ha a sajátértékek összefonódása szoros, akkor $\mathbf{S}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}\,\mathbf{S}$.

Bizonyítás. (i) Legyen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ $\mathbf{A}$ ortonormált sajátbázisa, és $k \in \{1, 2, \dots, m\}$-re

$$V_k \coloneqq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \cap \langle \mathbf{S}^* \mathbf{u}_1, \mathbf{S}^* \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{S}^* \mathbf{u}_{k-1} \rangle^\perp$$

Ekkor V_k legalább 1-dimenziós altér, mert egy k-dimenziós és egy legalább $(n - k + 1)$-dimenziós altér metszete. Legyen most

$$\mathbf{w}_k \in V_k, \quad \mathbf{w}_k \neq \mathbf{0}$$

Ekkor az ortogonalitást skalárszorzattal kifejezve

$$0 = \mathbf{S}^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_k = (\mathbf{S}^* \mathbf{u})^* \mathbf{w}_k = \mathbf{u}^* \mathbf{S}\,\mathbf{w}_k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\,\mathbf{w}_k$$

bármely $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle$ vektorra, így $\mathbf{S}\,\mathbf{w}_k \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle^\perp$ vagyis a Rayleigh-elv (4.1.2 Lemma, (ii) majd (i)) alapján

$$\lambda_k(\mathbf{A}) \geq \frac{\mathbf{w}_k^* \mathbf{S}^* \mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_k^* \mathbf{S}^* \mathbf{S}\,\mathbf{w}_k} = \frac{\mathbf{w}_k^* \mathbf{B}\,\mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_k^* \mathbf{w}_k} \geq \lambda_k(\mathbf{B})$$

Így $\lambda_k(\mathbf{A}) \geq \lambda_k(\mathbf{B})$. Ugyanez k helyett $(m-k+1)$-re, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ helyett $-\mathbf{A}, -\mathbf{B}$-re is teljesül, vagyis a 2.2.1.2 állítás értelmében

$$-\lambda_k(\mathbf{B}) = \lambda_{m-k+1}(-\mathbf{B}) \leq \lambda_{m-k+1}(-\mathbf{A}) = -\lambda_{n-m+k}(\mathbf{A})$$

tehát

$$\lambda_k(\mathbf{B}) \geq \lambda_{n-m+k}(\mathbf{A})$$

(ii) ilyenkor (i)-ben az egyik egyenlőtlenségnél egyenlőségnek kell teljesülnie, így $\lambda_k(\mathbf{B}) = \lambda_k(\mathbf{A})$ esetén a Rayleigh-elv szerint $\mathbf{v} := \mathbf{w}_k$ kielégíti a feltételeket. ($\mathbf{w}_k$ a $\mathbf{B}$ $\lambda_k(\mathbf{B})$-hez tartozó sajátvektora és $\mathbf{S}\,\mathbf{w}_k$ $\mathbf{A}$-nak a $\lambda_k(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektora.) A $\lambda_k(\mathbf{B}) = \lambda_{n-m+k}(\mathbf{A})$ esetben pedig legyen $\mathbf{v} := \mathbf{w}_{m-k+1}(-\mathbf{B})$, ez egyrészt sajátvektora $-\mathbf{B}$-nek a $\lambda_{m-k+1}(-\mathbf{B})$ sajátértékkel, így $\mathbf{B}$-nek az $\lambda_k(\mathbf{B})$, másrészt $\mathbf{S}\,\mathbf{v}$ a $-\mathbf{A}$-nak a $\lambda_{m-k+1}(-\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektora, vagyis az $\mathbf{A}$ $\lambda_{n-m+k}(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektora.)

(iii) használjuk fel (i) és (ii) bizonyítását: (ii) szerint az (i)-ben szereplő $\mathbf{w}_k$ a $\mathbf{B}$ $\lambda_k(\mathbf{B})$-hoz tartozó sajátvektora, de $\mathbf{w}_k \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \subset V_k$, így $\mathbf{w}_k = c\,\mathbf{v}_k$ lehet csak valamilyen $c \neq 0$ skalárral, mert a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ ortogonális saját-bázis. De $c := 1$-nek is választható, tehát $\mathbf{S}\,\mathbf{v}_k$ az $\mathbf{A}$ $\lambda_k(\mathbf{A})$-hez tartozó saját-vektora (ii) alapján. Ez viszont elég is, mert minden $k' < k$ indexre szintén teljesülnek a bizonyítandó állítás feltételei, így minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$-re $\mathbf{S}\,\mathbf{v}_i$ az $\mathbf{A}$ $\lambda_i(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektora.

(iv) legyen $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ az az index, melyre $\lambda_i(\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{B})$, ha $1 \leq i \leq l$, és $\lambda_i(\mathbf{B}) = \lambda_{n-m+i}(\mathbf{A})$, ha $l+1 \leq i \leq m$-re. És alkalmazzuk (iii)-t egyszer $k = l$-re, és másodszor $-\mathbf{A}$-ra és $k = m-l+1$-re. Ekkor a 2.2.1.2 állítást felhasználva adódik, hogy $\mathbf{S}\,\mathbf{v}_1, \mathbf{S}\,\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{S}\,\mathbf{v}_m$ az $\mathbf{A}$-nak $\lambda_1(\mathbf{B}), \lambda_2(\mathbf{B}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{B})$-hez tartozó, ortogonális sajátvektorai. Legyen $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1(\mathbf{B}), \lambda_2(\mathbf{B}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{B}))$ (az az m × m-es, mátrix, melynek főátlójában sorban $\lambda_1(\mathbf{B}), \lambda_2(\mathbf{B}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{B})$ áll, és a többi eleme 0).
Ekkor $\mathbf{B}\,\mathbf{V} = \mathbf{V}\,\mathbf{D}$ és $\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\mathbf{V} = \mathbf{S}\,\mathbf{V}\,\mathbf{D}$, így

$$\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\mathbf{V} = \mathbf{S}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}$$

de $\mathbf{V}$ invertálható, ezért $\mathbf{A}\,\mathbf{S} = \mathbf{S}\,\mathbf{B}$ is teljesül.

□

A következő tételben azt mutatjuk meg, hogy egy önadjungált mátrixot felosztva kisebb mátrixokra valamilyen (nem feltétlen egyenlő felosztású) rács mentén, a részmátrixok sorösszegeinek átlagaiból kapott mátrix sajátértékei összefonódnak az eredeti mátrix sajátértékeivel. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket: legyen $s(\mathbf{A}) := \mathbf{A}\,\mathbf{1}$ az $\mathbf{A}$ sorösszegeinek, $o(\mathbf{A}) := \mathbf{A}^\intercal\,\mathbf{1}$ pedig az $\mathbf{A}$ oszlopösszegeinek vektora, és jelölje $\sum \mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ mátrix elemeinek összegét. Ekkor $\sum \mathbf{A} = \mathbf{1}^\intercal\,\mathbf{A}\,\mathbf{1} = \mathbf{1}^\intercal\, s(\mathbf{A}) = o(\mathbf{A})^\intercal\,\mathbf{1}$.

4.1.4. Tétel ([2] 1.2.3.)**.** Legyen $\mathbf{A}$ egy n × n-es önadjungált mátrix, $m \leq n$ pozitív egész, és $n_1, n_2, \ldots, n_m$ olyan pozitív egészek, melyeknek összege épp n. Osszuk fel $\mathbf{A}$-t részmátrixokra az alábbi módon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \ldots & \mathbf{A}_{mm} \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{A}_{ij}$ egy $n_i \times n_j$ méretű részmátrix $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Jelölje b_{ij} az $\mathbf{A}_{ij}$ részmátrix sorösszegeinek átlagát, azaz

$$b_{ij} := \frac{\sum \mathbf{A}_{ij}}{n_i} = \frac{\mathbf{1}_{n_i}^\intercal\, \mathbf{A}_{ij}\, \mathbf{1}_{n_j}}{n_i}$$

Legyen $\mathbf{B}$ az az m × m-es mátrix, amelynek ij-edik eleme épp b_{ij}:

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

Ekkor a következők teljesülnek

(i) $\mathbf{B}$ sajátértékei összefonódnak $\mathbf{A}$ sajátértékeivel, vagyis minden $k = 1, 2, \ldots m$ indexre

$$\lambda_k(\mathbf{A}) \geq \lambda_k(\mathbf{B}) \geq \lambda_{n-m+k}(\mathbf{A})$$

(ii) Tegyük fel, hogy az összefonódás szoros, vagyis van olyan $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ index, melyre $\lambda_l(\mathbf{A}) = \lambda_l(\mathbf{B})$, ha $l \leq k$, és $\lambda_l(\mathbf{B}) = \lambda_{n-m+l}(\mathbf{A})$, ha $l > k$. Ekkor minden $\mathbf{A}_{ij}$ sorösszegei és oszlopösszegei konstans számok $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, azaz az $\mathbf{A}_{ij} \cdot \mathbf{1}$ és az $\mathbf{1}^\intercal \cdot \mathbf{A}_{ij}$ konstans vektorok.

(iii) Ha $\mathbf{A}_{ij}$ sor- és oszlopösszegei konstans számok, akkor $\mathbf{B}$ minden λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke legalább akkora multiplicitással, mint $\mathbf{B}$-nél.

Bizonyítás. (i) Legyen $\mathbf{s}_{n_k} = \frac{1}{\sqrt{n_k}} \mathbf{1}_{n_k}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$, és $\mathbf{S}$ a következő n × m-es mátrix

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{n_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{s}_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{s}_{n_m} \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{0}$ alatt mindenhol megfelelő – a k-adik sorban n_k – méretű csupanulla oszlopvektort kell érteni.
Legyen továbbá $\mathbf{D} := \mathrm{diag}\left(\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \dots, \sqrt{n_m}\right)$ az az m × m-es mátrix melynek a főátlójában rendre $\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \dots, \sqrt{n_m}$ áll, a többi eleme 0. Ekkor egyrészt $\mathbf{S}^* \mathbf{S} = \mathbf{E}_m$, másrészt $\widetilde{\mathbf{B}} := \mathbf{S}^* \mathbf{A}\,\mathbf{S}$ sajátértékei a 4.1.3 Tétel, (i) pontja alapján összefonódnak $\mathbf{A}$ sajátértékeivel. $\widetilde{\mathbf{B}}$ már majdnem jó is, mert a főátlójában a megfelelő átlagok állnak, ugyanis

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \widetilde{b}_{11} & \widetilde{b}_{12} & \dots & \widetilde{b}_{1m} \\ \widetilde{b}_{21} & \widetilde{b}_{22} & \dots & \widetilde{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{b}_{m1} & \widetilde{b}_{m2} & \dots & \widetilde{b}_{mm} \end{bmatrix}$$

ahol $\widetilde{b}_{ij} = \frac{\sum \mathbf{A}_{ij}}{\sqrt{n_i n_j}} = \sqrt{\frac{n_i}{n_j}} b_{ij}$. Ekkor viszont $\mathbf{D}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{B}}\,\mathbf{D}$ már épp $\mathbf{B}$-t adja, így a 2.2.2 Tétel miatt $\mathbf{B}$ és $\widetilde{\mathbf{B}}$ sajátértékei megegyeznek multiplicitásossal együtt. Tehát $\mathbf{B}$ sajátértékei is összefonódnak $\mathbf{A}$ sajátértékeivel.

(ii) A 4.1.3 Tétel (iv) pontja alapján $\mathbf{S}\,\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\,\mathbf{S}$, kifejtve

$$\mathbf{A}\,\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{s}_{n_1} & \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{s}_{n_2} & \dots & \mathbf{A}_{1m}\,\mathbf{s}_{n_m} \\ \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{s}_{n_1} & \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{s}_{n_2} & \dots & \mathbf{A}_{2m}\,\mathbf{s}_{n_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1}\,\mathbf{s}_{n_1} & \mathbf{A}_{m2}\,\mathbf{s}_{n_2} & \dots & \mathbf{A}_{mm}\,\mathbf{s}_{n_m} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{S}\,\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \widetilde{b}_{11}\,\mathbf{s}_{n_1} & \widetilde{b}_{12}\,\mathbf{s}_{n_1} & \dots & \widetilde{b}_{1m}\,\mathbf{s}_{n_1} \\ \widetilde{b}_{21}\,\mathbf{s}_{n_2} & \widetilde{b}_{22}\,\mathbf{s}_{n_2} & \dots & \widetilde{b}_{2m}\,\mathbf{s}_{n_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{b}_{m1}\,\mathbf{s}_{n_m} & \widetilde{b}_{m2}\,\mathbf{s}_{n_m} & \dots & \widetilde{b}_{mm}\,\mathbf{s}_{n_m} \end{bmatrix}$$

Bármely $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ indexpárra $\mathbf{A}_{ij}\,\mathbf{s}_{n_j}$ épp az $\mathbf{A}_{ij}$ sorösszegeinek $n_j^{-1/2}$-szerese. Másrészt könnyen meggondolható, hogy $\mathbf{A}\,\mathbf{S}$-ben az $\mathbf{A}_{ij}\,\mathbf{s}_{n_j} \in \mathbb{C}^{n_i}$-nek megfelelő rész $\mathbf{S}\,\widetilde{\mathbf{B}}$-ben épp $\widetilde{b}_{ij}\,\mathbf{s}_{n_i}$. De $\widetilde{b}_{ij}\,\mathbf{s}_{n_i}$ konstans vektor, így $\mathbf{A}_{ij}$ minden sorának ugyanaz az összege. Az önadjungáltságból következik az oszlopösszegek egyenlősége is, mert $\mathbf{A}_{ij}$ oszlopösszegei megegyeznek az $\overline{\mathbf{A}}_{ji}$ sorösszegeivel, $\overline{\mathbf{A}}_{ji}$ sorösszegeinek vektora pedig épp $\mathbf{A}_{ji}$ sorösszegvektorának konjugáltja.

(iii) Legyen λ a $\mathbf{B}$ (és így $\widetilde{\mathbf{B}}$) egy sajátértéke, továbbá $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_t$ ($t \geq 1$) a λ-hoz tartozó sajátaltér egy bázisa $\widetilde{\mathbf{B}}$-nél, és végül $\mathbf{U} := \left[\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_t\right]$. Ekkor $\widetilde{\mathbf{B}}\,\mathbf{U} = \lambda\,\mathbf{U}$, így

$$\lambda\,\mathbf{S}\,\mathbf{U} = \mathbf{S}\,\widetilde{\mathbf{B}}\,\mathbf{U} = \mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\mathbf{U}$$

Ráadásul $t = \operatorname{rang}\mathbf{U} = \operatorname{rang}(\mathbf{S}^*\,\mathbf{S}\,\mathbf{U}) \leq \operatorname{rang}(\mathbf{S}\,\mathbf{U})$. Vagyis $\mathbf{S}\,\mathbf{U}$ oszlopai közül kiválasztható $\mathbf{A}$-nak t darab lineárisan független λ-hoz tartozó sajátvektora.

□

4.2. Sajátérték- és Illeszkedési korlát

Mint a minimális lefogó ponthalmazoknál láttuk, véges projektív síkokon közvetlen kombinatorikus módszerekkel levezethetőek speciális ponthalmazok méretére vonatkozó korlátok. Ezek a bizonyítások azonban nem igazán világítanak rá a mögöttes összefüggésekre. Ebben a szakaszban az összefonódó sajátértékek módszerét felhasználva levezetünk egy W. H. Haemerstől származó, általánosabb összefüggést ([2] 3.1.1. Tétel), melyből aztán az Illeszkedési korláton keresztül a kombinatorikus módszerrel kiszámolt eredmények speciális esetként adódnak. Ez az összefüggés egy t-rendszerek részstruktúráira vonatkozó egyenlőtlenség, melynek ügyes átalakításával speciális ponthalmazok teljes gyűjteményére felső és alsó korlátot nyerhetünk.

Ennek érdekében definiáljuk a részstruktúra fogalmát!

4.2.1. Definíció. A $D_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathbf{I}_1)$ illeszkedési struktúra részstruktúrája $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ illeszkedési struktúrának, ha $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ és $\mathbf{I}_1$ mint rendezett pont-blokk párok halmaza része $\mathbf{I}$-nek.

Fontos, hogy a $\mathcal{B}_1$-beli blokkok pontjai nem feltétlenül mind $\mathcal{P}_1$-beliek, vagyis minden $B \in \mathcal{B}_1$ blokkra $|B \cap \mathcal{P}_1| \leq |B \cap \mathcal{P}|$. Most már ráterhetünk az előzőekben tárgyalt sajátérték-módszer fő tételére, melyre a továbbiakban Sajátérték-korlátként fogunk hivatkozni.

4.2.2. Tétel ([2] 3.1.1., Sajátérték-korlát)**.** Adott D 1-(v,k,r)-rendszerben legyen D_1 egy $v_1 > 0$ pontból és $b_1 > 0$ blokkból álló részstruktúra, és jelölje r_1 a D_1-ben egy ponton átmenő blokkok, k_1 az egy blokkra illeszkedő pontok számainak átlagát. Legyen továbbá σ_2 a D nagyság szerint második szinguláris értéke. Ekkor

(i) $$(vr_1 - b_1k)\,(bk_1 - v_1r) \leq \sigma_2^2\,(v - v_1)\,(b - b_1)$$

(ii) egyenlőség esetén D_1 minden pontján át r_1 D_1-beli blokk megy és minden blokkjára k_1 D_1-beli pont illeszkedik, feltéve, hogy D_1 nem elfajuló, azaz $0 < v_1 < v$ és $0 < b_1 < b$.

Bizonyítás. Elfajuló esetekben könnyű dolgunk van. Ha $v_1 = v$, akkor $k_1 = k$, így $bk_1 - v_1r = bk - vr = 0$. Ha $b_1 = b$, akkor $r_1 = r$ és $vr_1 - b_1k = vr - bk = 0$, így mindkét feltétel hatására (i) $0 \leq 0$-vá egyszerűsödik.

Nézzük tehát a $v_1 < v$ és $b_1 < b$ esetet. A 4.1.4 Tételt fogjuk alkalmazni.

Ehhez legyen $\mathbf{M} \coloneqq \mathbf{M}(D) \in \{0,1\}^{v\times b}$, $\mathbf{M}_1 \coloneqq \mathbf{M}(D_1) \in \{0,1\}^{v_1\times b_1}$ rendre a D és D_1 illeszkedési mátrixa. Ekkor $\mathbf{M}_1$ részmátrixa $\mathbf{M}$-nek, így a sorok és oszlopok esetleges permutálásával – ettől nem változnak a sajátértékek – elérhető, hogy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} \quad \text{alakú legyen,}$$

ahol a $v_2 = v - v_1, b_2 = b - b_1$ jelölésekkel $\mathbf{M}_1$ $v_1 \times b_1$-es, $\mathbf{M}_2$ $v_1 \times b_2$-es, $\mathbf{M}_3$ $v_2 \times b_1$-es, $\mathbf{M}_4$ pedig $v_2 \times b_2$-es mátrix.

Ekkor D teljes szomszédsági mátrixa

$$\mathbf{N} \coloneqq \mathbf{N}(D) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^\intercal & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \\ \mathbf{M}_1^\intercal & \mathbf{M}_3^\intercal & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_2^\intercal & \mathbf{M}_4^\intercal & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{1}$$

és a 2.2.3 Tétel alapján $\sigma_2 = \sigma_2(\mathbf{M}) = \lambda_2(\mathbf{N})$.

Jelölje r_i és k_i az $\mathbf{M}_i$ mátrix sorösszegeinek és oszlopösszegeinek átlagát ($i \in \{1,2,3,4\}$), azaz $r_i = s(\mathbf{M}_i)$ és $k_i = o(\mathbf{M}_i)$, egészen pontosan

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\mathbf{1}_{v_1}^\intercal\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{1}_{b_1}}{v_1} & k_1 &= \frac{\mathbf{1}_{v_1}^\intercal\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{1}_{b_1}}{b_1} \\ r_2 &= \frac{\mathbf{1}_{v_1}^\intercal\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{1}_{b_2}}{v_1} & k_2 &= \frac{\mathbf{1}_{v_1}^\intercal\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{1}_{b_2}}{b_2} \\ r_3 &= \frac{\mathbf{1}_{v_2}^\intercal\,\mathbf{M}_3\,\mathbf{1}_{b_1}}{v_2} & k_3 &= \frac{\mathbf{1}_{v_2}^\intercal\,\mathbf{M}_3\,\mathbf{1}_{b_1}}{b_1} \\ r_4 &= \frac{\mathbf{1}_{v_2}^\intercal\,\mathbf{M}_4\,\mathbf{1}_{b_2}}{v_2} & k_4 &= \frac{\mathbf{1}_{v_2}^\intercal\,\mathbf{M}_4\,\mathbf{1}_{b_2}}{b_2}. \end{aligned}$$

Tudva, hogy $\mathbf{M}$ minden sorában r, minden oszlopában k darab 1-es áll, az alábbi összefüggések adódnak:

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = r, \qquad r_2 = r - r_1, \qquad r_4 = r - r_3 \tag{2}$$
$$k_1 + k_3 = k_2 + k_4 = k, \qquad k_3 = k - k_1, \qquad k_4 = k - k_2 \tag{3}$$

továbbá az $\mathbf{M}_i$ mátrixok elemeinek összegét kétféleképp felírva (a $vr = bk$ mintára)

$$\begin{aligned} v_1 r_1 &= b_1 k_1, & v_1(r - r_1) &= b_2 k_2 = (b - b_1)k_2 \\ v_2 r_3 &= (v - v_1)r_3 = b_1(k - k_1), & v_2(r - r_3) &= b_2(k - k_2) = (b - b_1)(k - k_2) \end{aligned}$$

$$\text{így} \quad r_3 = \frac{b_1}{v - v_1}(k - k_1), \qquad k_2 = \frac{v_1}{b - b_1}(r - r_1) \tag{4}$$

Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{N}$ (1) szerinti felosztásához tartozó sorátlagok mátrixa, mint a 4.1.4 Tételben, azaz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_1 & r_2 \\ 0 & 0 & r_3 & r_4 \\ k_1 & k_3 & 0 & 0 \\ k_2 & k_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel $\mathbf{N}$ önadjungált, a 4.1.4 Tétel alapján $\mathbf{B}$ sajátértékei összefonódnak $\mathbf{N}$ sajátértékeivel, így szükségképp valósak. $\mathbf{B}$ sajátértékeit a karakterisztikus polinomjának gyökeiként tudjuk legegyszerűbben meghatározni:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda\,\mathbf{E}_4) = \lambda^4 - (r_1k_1 + r_2k_2 + r_3k_3 + r_4k_4)\,\lambda^2 + (r_1r_4 - r_3r_2)(k_1k_4 - k_2k_3)$$

de (2) és (3) alapján az együtthatók átírhatók:

$$\begin{aligned} r_1k_1 + r_2k_2 + r_3k_3 + r_4k_4 &= r_1k_1 + (r - r_1)k_2 + r_3(k - k_1) + (r - r_3)(k - k_2) = \\ &= rk + (r_1 - r_3)(k_1 - k_2) \\ (r_1r_4 - r_3r_2)(k_1k_4 - k_2k_3) &= (r_1(r - r_3) - r_3(r - r_1))(k_1(k - k_2) - k_2(k - k_1)) = \\ &= rk(r_1 - r_3)(k_1 - k_2) \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 - ((r_1 - r_3)(k_1 - k_2) + rk)\,\lambda^2 + rk(r_1 - r_3)(k_1 - k_2) = \\ &= \left(\lambda^2 - rk\right)\left(\lambda^2 - (r_1 - r_3)(k_1 - k_2)\right) \end{aligned}$$

Vagyis $\mathbf{B}$ sajátértékei épp $\pm\sqrt{rk}$ és $\pm\sqrt{(r_1 - r_3)(k_1 - k_2)}$, ahol $(r_1 - r_3)(k_1 - k_2)$ nem lehet negatív, mert $\mathbf{B}$ sajátértékei valósak. $r \geq r_1, r_3$ és $k \geq k_1, k_2$, ezért $rk \geq (r_1 - r_3)(k_1 - k_2) \geq 0$, így a nagyság szerint csökkenő sorrend:

$$\sqrt{rk} \geq \sqrt{(r_1 - r_3)(k_1 - k_2)} \geq -\sqrt{(r_1 - r_3)(k_1 - k_2)} \geq -\sqrt{rk}$$

A korábbiak alapján viszont

$$r_1 - r_3 = r_1 - \frac{k-k_1}{v-v_1}b_1 = \frac{(v-v_1)r_1 - (k-k_1)b_1}{v-v_1} = \frac{vr_1 - b_1k + b_1k_1 - r_1v_1}{v-v_1} = \frac{vr_1 - b_1k}{v-v_1}$$

és

$$k_1 - k_2 = k_1 - \frac{r-r_1}{b-b_1}v_1 = \frac{(b-b_1)k_1 - (r-r_1)v_1}{b-b_1} = \frac{bk_1 - v_1r + r_1v_1 - b_1k_1}{b-b_1} = \frac{bk_1 - v_1r}{b-b_1}$$

Ebből adódik, hogy

$$\lambda_1(\mathbf{B}) = -\lambda_4(\mathbf{B}) = \sqrt{rk}$$
$$\lambda_2(\mathbf{B}) = -\lambda_3(\mathbf{B}) = \sqrt{\frac{vr_1 - b_1k}{v-v_1} \cdot \frac{bk_1 - v_1r}{b-b_1}}$$

Az összefonódás miatt ekkor viszont $\lambda_2^2(\mathbf{B}) \leq \lambda_2^2(\mathbf{N}) = \sigma_2^2$, tehát

$$\frac{vr_1 - b_1k}{v-v_1} \cdot \frac{bk_1 - v_1r}{b-b_1} \leq \sigma_2^2$$
$$(vr_1 - b_1k)(bk_1 - v_1r) \leq \sigma_2^2(v-v_1)(b-b_1)$$

$\sqrt{rk}$ közös sajátértéke $\mathbf{N}$-nek (lásd 3.4.12 Tétel) és $\mathbf{B}$-nek, így $\lambda_2(\mathbf{B}) = \lambda_2(\mathbf{N})$ vagyis az (i)-beli egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az összefonódás szoros. Ekkor viszont (megintcsak a 4.1.4 Tétel alapján) $\mathbf{N}$ minden (1)-beli részmátrixának sorösszege konstans, így az $\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i^\intercal$ mátrixoknak is, amiből pedig (ii) következik. □

4.2.3. Megjegyzés. A Sajátérték-korlátot ugyan csak 1-(v,k,r)-rendszerekre mondtuk ki, de a 3.4.5 Tételből tudjuk, hogy minden t-(v,k,λ)-rendszer egyben 1-(v,k,r)-rendszer is, ahol $r = \lambda\frac{\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}}$, így az egyenlőtlenség minden t-rendszerre érvényes. Ráadásul $t > 1$ esetén σ_2 pontos értéke is ismert a 3.4.14 Tétel alapján: $\sigma_2^2 = r - \kappa_2 = r\frac{v-k}{v-1}$.

Az egyenlőtlenség abban az egy esetben semmitmondó, ha $\sigma_2 = \sigma_1 = \sqrt{rk}$, ami pedig avval ekvivalens, hogy a rendszer előáll diszjunkt részstruktúrákra uniójaként, de korábban már láttuk, hogy ez csak a $t = 1$ esetben lehetséges. Ráadásul ilyenkor egyenként is vizsgálhatjuk az összefüggő komponenseket, melyekre a 3.4.12 Tétel következtében már $\sigma_2 < \sigma_1$ teljesül.

Mindezek tudatában néhány speciális esetben egyszerűsíthető a Sajátérték-korlát egyenlőtlenség, vagy legalábbis kevesebb paraméterből kifejezhető.

4.2.4. Példa. Négyzetes blokkrendszer esetén

$$(br_1 - b_1r)(bk_1 - v_1r) \leq r\frac{b-r}{b-1}(b-v_1)(b-b_1)$$

Bizonyítás. A négyzetesség miatt $b = v$ és $k = r$, továbbá $t \geq 2$ esetén $\sigma_2^2 = r - \kappa_2 = r\frac{b-r}{b-1}$. □

4.2.5. Megjegyzés. A Sajátérték-korlát több ekvivalens alakban is felírható, melyek a $bk = vr$ és $b_1k_1 = v_1r_1$ egyenlőségekből vezethetőek le. Például

$$\left(r_1 - \frac{b_1}{b}r\right)\left(k_1 - \frac{v_1}{v}k\right) \leq \sigma_2^2\left(1 - \frac{v_1}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)$$

Itt a bal oldalon az átlagos fokszám és várható értékének különbsége szerepel, az első zárójelben a pontokra, a másodikban a blokkokra vonatkozólag.

A Sajátérték-korlát talán legismertebb alakja a szakirodalomban az ún. Illeszkedési korlát (pl. [4] 8-as Lemma vagy [1] 2.1-es Lemma).

4.2.5.1. Következmény (Illeszkedési korlát)**.** Legyen $S \subset \mathcal{P}$ és $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ a $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ t-(v, k, λ)-rendszerben, és jelölje $i(S, \mathcal{L})$ az illeszkedések számát S és $\mathcal{L}$ elemei között, ekkor

$$\left| i(S, \mathcal{L}) - \frac{r\,|S|\,|\mathcal{L}|}{b} \right| \leq \sigma_2 \sqrt{|S|\,|\mathcal{L}|\left(1 - \frac{|S|}{v}\right)\left(1 - \frac{|\mathcal{L}|}{b}\right)}$$

Noha ezen a néven szélesebb körben találkozhatunk az egyenlőtlenséggel, általában csak gyengébb, $\left(1 - \frac{|S|}{v}\right)$, $\left(1 - \frac{|\mathcal{L}|}{b}\right)$ tényezők nélküli formája ismert.

Az egyenlőtlenségnek ehhez az alakjához fontos szemléletes jelentés is társítható, ugyanis a bal oldali kifejezés épp az S és $\mathcal{L}$ közti illeszkedések számának a várható értéktől való eltérését jelenti S és $\mathcal{L}$ méretében.

Bizonyítás. Legyen D_1 az S pont- és $\mathcal{L}$ blokkhalmaz által definiált részstruktúra a 4.2.2 Tételnél. Ekkor felhasználva a $bk = vr$ és $b_1k_1 = v_1r_1$ azonosságokat

$$\begin{aligned}
(vr_1 - b_1k)(bk_1 - v_1r) &\leq \sigma_2^2(v - v_1)(b - b_1) && \Big/ \cdot \frac{v_1b_1}{vb}; \\
\left(v_1r_1 - v_1b_1\frac{k}{v}\right)\left(b_1k_1 - v_1b_1\frac{r}{b}\right) &\leq \sigma_2^2 v_1b_1\left(1 - \frac{v_1}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right) && \Big/ \quad \frac{k}{v} = \frac{r}{b}; \quad b_1k_1 = v_1r_1 \\
\left(v_1r_1 - v_1b_1\frac{r}{b}\right)\left(v_1r_1 - v_1b_1\frac{r}{b}\right) &\leq \sigma_2^2 v_1b_1\left(1 - \frac{v_1}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right) \\
\left(v_1r_1 - v_1b_1\frac{r}{b}\right)^2 &\leq \sigma_2^2 v_1b_1\left(1 - \frac{v_1}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right) && \Big/ \sqrt{\cdot} \\
\left|v_1r_1 - v_1b_1\frac{r}{b}\right| &\leq \sigma_2\sqrt{v_1b_1\left(1 - \frac{v_1}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)}.
\end{aligned}$$

Viszont itt D_1-nél $v_1 = |S|$, $b_1 = |\mathcal{L}|$ és $v_1 r_1 = i(S, \mathcal{L})$, ami ez épp az Illeszkedési korlátot adja. $\square$

5. Becslések minimális lefogó és más ponthalmazokra

Ebben a fejezetben először egy konkrét példán keresztül nézzük meg, hogyan használható az Illeszkedési korlát speciális ponthalmazok méretének becslésére, egyúttal összehasolítjuk ezt a módszer a megszokott kombintorikus megfontolásokra épülő bizonyításokkal. Ezt követően általánosítom azt az eljárást, ahogy az Illeszkedési korlátot a példában felhasználtuk. Ennek köszönhetően ponthalmazok egy teljes osztályára egy két paramétertől függő, közvetlen becslés nyerhető. Végül általánosabb és kevésbé általános példákon keresztül vizsgálom az így kapott korlátot.

5.1. Az Illeszkedési korlát egy alkalmazása

Először is lássuk Bishnoi *et al.* minimális, többszörösen lefogó ponthalmazok méretére vonatkozó becslését véges projektív síkon (1.1 Tétel [1]-ben), amelyet a szerzők kombinatorikus módon, és az Illeszkedési korlát segítségével is bizonyítanak.

5.1.1. Tétel. Legyen S minimális t-szeresen lefogó ponthalmaz az n-edrendő Π_n projektív síkon. Ekkor

$$|S| \leq n \cdot \frac{t-1+\sqrt{4tn-(3t+1)(t-1)}}{2} + t.$$

Egyenlőség esetén S-t minden egyenes vagy t vagy $\frac{t-1+\sqrt{4tn-(3t+1)(t-1)}}{2}+1$ pontban metszi.

Ez tulajdonképpen a Bruen-Thas-tétel általánosítása, ugyanis $t = 1$ esetén visszakapjuk az $(n\sqrt{n}+1)$-es korlátot. A tételre kétféle módszer felhasználásával három bizonyítást is megnézünk. Az első bizonyításban a Bruen-Thas-tétel (1.2.7) kombinatorikus levezetését módosítom kissé. Maguk a szerzők a kombinatorikus módszernél a számtani és négyzetes közepek helyett egy ügyesen megválasztott másodfokú összegzés segítségével jutnak el az egyenlőtlenséghez, de az elsődleges bizonyításuk az Illeszkedési korláton alapszik.

Kombinatorikus bizonyítás. Jelölje l_i az S i-szelőinek számát mint a 1.2.7 Tétel bizonyításában, és legyen $\mathcal{E}_t := \{e \in \mathcal{E} \colon |e \cap S| > t\}$ az S-t nem t pontban metsző egyenesek halmaza, és $x := |S|$. Most, mivel S t-lefogó, $i < t$ esetén $l_i = 0$, így a

(C1), (C2) és (C3) kombinatorikus összefüggések alapján:

$$|\mathcal{E}_t| = \sum_{i=t+1}^{n+1} l_i = n^2 + n + 1 - l_t$$

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_t} |e \cap S| = \sum_{i=t+1}^{n+1} il_i = (n+1)\,x - tl_t$$

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_t} |e \cap S|^2 = \sum_{i=t+1}^{n+1} i^2 l_i = x\,(x + n) - t^2 l_t$$

Írjuk fel most is a négyzetes és számtani közepek közti egyenlőtlenséget

$$\left(\frac{\sum_{e\in\mathcal{E}_t} |e\cap S|}{|\mathcal{E}_t|}\right)^2 \le \frac{\sum_{e\in\mathcal{E}_t} |e\cap S|^2}{|\mathcal{E}_t|}.$$

Ezért

$$\left(\sum_{i=t+1}^{n+1} il_i\right)^2 \le \left(n^2+n+1-l_t\right) \sum_{i=t+1}^{n+1} i^2 l_i$$

vagyis

$$((n+1)\,x - tl_t)^2 \le \left(n^2+n+1-l_t\right)\left(x\,(x+n) - t^2 l_t\right)$$

átrendezve

$$\left(t^2\left(n^2+n+1\right) - 2t(n+1)\,x + x\,(x+n)\right) l_t \le n\left(n^2+n+1-x\right) x$$

De mivel S minimális lefogó, $\frac{x}{t} \le l_t$, és ezért

$$\left(t^2\left(n^2+n+1\right) - 2t(n+1)\,x + x\,(x+n)\right) \frac{x}{t} \le n\left(n^2+n+1-x\right) x\,.$$

$x > 0$, így

$$\begin{aligned} t^2\left(n^2+n+1\right) - 2t(n+1)\,x + x\,(x+n) &\le tn\left(n^2+n+1-x\right) \\ x^2 - (n(t-1)+2t)\,x - (n-t)t\left(n^2+n+1\right) &\le 0. \end{aligned}$$

Gyökvonás után

$$x \le \frac{n(t-1)+2t+\sqrt{((t(n+2)-n)^2 + 4(n-t)t\,(n^2+n+1))}}{2},$$

a gyök alatti kifejezés összevonva pedig épp $n^2\left(4nt-(3t-1)(t+1)\right)$, így

$$x \leq \frac{n(t-1)+n\sqrt{4nt-(3t-1)(t+1)}}{2}+t$$

Evvel az egyenlőtlenséget beláttuk. Egyenlőség esetén legyen $d=\frac{t-1+\sqrt{4nt-(3t-1)(t+1)}}{2}$, vagyis $x=nd+t$. Ekkor egyrészt $tl_t=x=nd+t$, vagyis a t-szelők particionálják S pontjait, mert S minimális t-lefogó, másrészt minden $\mathcal{E}_t$-beli egyenesnek ugyanannyi pontban kell metszenie S-t, mert ilyenkor a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség is egyenlőséggel teljesül.

Az $\mathcal{E}_t$-beli egyenesek közös fokszámának meghatározásához rögzítsük az egyik t-szelő egy P pontját. Ezen át a t-szelő által le nem fogott nd pontot a maradék P-n átmenő n darab egyenes lefedi, de mivel ezek egyike sem t-szelő, mindegyikre pontosan $d+1$ S-beli pontnak kell illeszkednie P-t is beleszámolva. Ekkor viszont minden $\mathcal{E}_t$-beli egyenes $d+1$ pontban metszi S-t. $\square$

5.1.2. Megjegyzés. Bishnoi *et al.* nyomán a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőség helyett egy másik becslést is alkalmazhattunk volna, kihasználva, hogy a tételbeli egyenlőség esetén minden egyenes vagy t vagy $d+1$ pontban metszi S-t, ahol

$$d=\frac{t-1+\sqrt{4tn-(3t+1)(t-1)}}{2}=\frac{x-t}{n}.$$

Ekkor a kombinatorikus összefüggéseinkből kifejezhető $\sum(i-(d+1))^2 l_i$ összegzés egyetlen tagra, $(t-(d+1))^2 l_t$-re egyszerűsödik. Ebből az egyenlőségből pedig egy d-ben másodfokú egyenletet nyerhető. Általános esetben persze csak az egyenlőtlenséget tudjuk biztosítani:

$$\alpha(d) := \sum_{i=0}^{n+1}(i-d-1)^2 l_i \geq (t-(d+1))^2 l_t \geq (t-(d+1))^2\frac{x}{t} \tag{1}$$

ahol az utóbbi becslés azért teljesül, mert minimális t-lefogó ponthalmaz minden pontja illeszkedik alamelyik t-szelőre. Viszont $\alpha(d)$ ekkor is ugyanúgy fejezhető ki a kombinatorikus összefüggésekből:

$$\alpha(d)=x(x+n)-2(d+1)(n+1)\,x+(d+1)^2\left(n^2+n+1\right) \tag{2}$$

Legyen most

$$\begin{aligned}\beta(d) &= t\alpha(d)-(t-d-1)^2\,x = \\ &= \left(t\left(n^2+n+1\right)-x\right)(d+1)^2-2nt\,x(d+1)+t\,x(x+n-t)\end{aligned}$$

Ekkor egyrészt (1) miatt $\beta(d) \geq 0$, másrészt ha $d = \frac{x-t}{n}$ vagyis $x = nd + t$, a tételbeli egyenlőség esetén reményeink szerint a jó eredményt kell kapjuk. Tehát x helyére $nd + t$-t írva

$$\beta(d) = \ldots = n(d+1)\left(-d^2 + (t-1)\,d + (n-t+1)t\right)$$

így $\beta(d) \geq 0$ miatt

$$d^2 - (t-1)\,d - (n-t+1)t \leq 0$$

ahonnan a másodfokú kifejezést megoldva

$$d \leq \frac{t-1+\sqrt{4nt-(3t+1)(t-1)}}{2}$$

és $x = nd + t$ miatt

$$x \leq \frac{t-1+\sqrt{4tn-(3t+1)\,(t-1)}}{2}n + t$$

A fenti két módszer tehát ugyanazon a három kombinatorikus összefüggésen alapul. Lássunk most, hogyan bizonyítható ugyanez a Sajátérték- ill. Illeszkedési korlát alkalmazásával!

Bizonyítás az Illeszkedési korlát segítségével. Vezessük be most is az $x = |S|$ rövidítést, evvel is hangúlyozva, hogy mire is keresünk becslést. Jelölje továbbá $\mathcal{L}$ az S t-szelőinek halmazát. Mivel S minimális t-lefogó, minden pontja rajta van legalább egy t-szelőn, így $|\mathcal{L}| \geq \frac{x}{t}$. Néhány t-szelő esetleges elhagyásával elérhető $|\mathcal{L}| = \left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil$. Alkalmazzuk az Illeszkedési korlátot S-re és $\mathcal{L}$-re. Először is $i\,(S, \mathcal{L}) = t \left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil$, másrészt véges projektív síkon $r = k = n+1$, $\lambda = 1$, $v = b = n^2+n+1$, és $\sigma_2 = \sqrt{r-\lambda} = \sqrt{n}$, tehát

$$\left| t\left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil - \frac{(n+1)\,x \left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil}{b} \right| \leq \sqrt{n}\sqrt{x\left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil \left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{\left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil}{b}\right)}$$

$\left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil$-vel osztva majd négyzetre emelve mindkét oldalt

$$\left(t - \frac{(n+1)\,x}{b}\right)^2 \leq n\,x\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(\left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil^{-1} - \frac{1}{b}\right)$$

Ha most a jobb oldalon $\left\lceil \frac{x}{t} \right\rceil$ helyére $\frac{x}{t}$-t írunk, csak növelhetjük a kifejezés értékét, így

$$\left(t - \frac{(n+1)\,x}{b}\right)^2 \leq n\,x\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{b}\right) = n\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(t-\frac{x}{b}\right)$$

Ezt kifejtve és x-re rendezve az alábbi másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk x-ben

$$x^2 - (n(t-1) + 2t)\, x - t(n-t)\left(n^2 + n + 1\right) \le 0$$

Innentől a bizonyítás szóról szóra megegyezik az első kombinatorikus változat végével. □

Ennél a becslésnél tehát ugyanúgy működik a kombinatorikus összefüggésekre épülő módszer, mint az Illeszkedési korlát.

5.2. Egy általánosított séma

A továbbiakban általánosítom azt az eljárást, melyet a legutóbbi, Illeszkedési korlát segítségével történt bizonyításban láttunk. Ennek segítségével közvetlenül az Illeszkedési korlátból nemcsak többszörösen lefogó, de bármilyen részstruktúra méretére becslést nyerhetünk. A motiváló probléma után különböző tulajdonságokkal definiált ponthalmazok méretére állítok elő becsléseket.

Tekintsük az $\mathbf{M}$ illeszkedési mátrixszal definiált t-(v, k, λ)-rendszert. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy nem diszjunk részstruktúrákból álló t-rendszerről van szó, ahogy korábban is. (Ez amúgy is csak a $t = 1$ esetben lehetséges.). Részstruktúrákat fogunk vizsgálni, méghozzá úgy, hogy $\mathbf{M}$ sorai és oszlopai közül kiválasztunk néhányat. Jelölje S és $\mathcal{L}$ rendre a megfelelő pont- és blokkhalmazokat, $\mathbf{M}_1$ pedig az S és $\mathcal{L}$ által meghatározott részmátrixot. Legyen $v_1 = |S|$, $b_1 = |\mathcal{L}|$ a kiválasztott sorok és oszlopok száma ($v_1, b_1 > 0$), és r_1 az $\mathbf{M}_1$ soraiban található 1-esek számainak átlaga, k_1 pedig az oszlopokban található 1-esek számainak átlaga, ahogy eddig is. Pontosabban:

$$r_1 := \frac{\mathbf{1}_{v_1}^{\intercal}\, \mathbf{M}_1\, \mathbf{1}_{b_1}}{v_1}, \qquad k_1 := \frac{\mathbf{1}_{v_1}^{\intercal}\, \mathbf{M}_1\, \mathbf{1}_{b_1}}{b_1}.$$

5.2.1. Tétel. Összefüggő t-(v, k, λ)-rendszerben legyen S és $\mathcal{L}$ a pontok és blokkok egy-egy nemüres halmaza, és jelölje $c := \frac{|\mathcal{L}|}{|S|}$ az S és $\mathcal{L}$ által meghatározott részstruktúra pontjainak és blokkjainak arányát. Ekkor

$$|S| \le \frac{2vrr_1 - (b + cv)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(b - cv)^2\,\sigma_2^2 + 4vb\,(r - r_1)\,(ck - r_1)}}{2c\,(rk - \sigma_2^2)}, \tag{1}$$

vagy r_1 és c helyett r_1 és k_1 segítségével kifejezve:

$$|S| \le \frac{2vrr_1k_1 - (bk_1 + vr_1)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(bk_1 - vr_1)^2\,\sigma_2^2 + 4vbr_1k_1\,(r - r_1)\,(k - k_1)}}{2r_1\,(rk - \sigma_2^2)}. \tag{2}$$

Ez utóbbi esetben feltéve, hogy $r_1 > 0$.

A becslés ugyan elemi lépésekből levezethető az Illeszkedési korlátból, ám a sok paraméter és változó miatt ez kissé bonyodalmas.

Bizonyítás. Az Illeszkedési korlát miatt

$$\left(v_1 r_1 - \frac{r}{b} v_1 b_1\right)^2 \leq \sigma_2^2 v_1 b_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)$$

Az átláthatóság kedvéért innentől megint x-szel fogjuk jelölni v_1-et, evvel is hangsúlyozva, hogy $|S|$-re próbálunk becslést előállítani.

Ekkor c definíciójából $b_1 = c\,x$ mellett $r_1 = ck_1$ is következik (még $r_1 = 0$ esetén is, hisz ekkor $k_1 = 0$ is teljesül). A $bk = vr$ és $b_1 k_1 = x\,r_1$ azonosságokat használva rendezzük x-re ezt az egyenlőtlenséget:

$$\left(r_1\,x - \frac{r}{b} b_1\,x\right)^2 \leq \sigma_2^2\,x\,b_1 \left(1 - \frac{x}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)$$

$x > 0$ miatt mindkét oldalt oszthatjuk x-szel:

$$\left(r_1 - \frac{r}{b} b_1\right)^2 \leq \sigma_2^2 \frac{b_1}{x} \left(1 - \frac{x}{v}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)$$

felhasználva, hogy $b_1 = c\,x$

$$\left(r_1 - \frac{r}{b} c\,x\right)^2 \leq \sigma_2^2 c \left(1 - \frac{x}{v}\right)\left(1 - \frac{c\,x}{b}\right)$$

Kifejtve és x hatványai szerint rendezve

$$\left(\frac{r^2}{b^2} - \frac{\sigma_2^2}{vb}\right) c^2\,x^2 + \left(\frac{c\sigma_2^2}{b} + \frac{\sigma_2^2}{v} - 2\frac{rr_1}{b}\right) c\,x \leq \sigma_2^2 c - r_1^2$$

de $\frac{r}{b} = \frac{k}{v}$, így

$$\frac{rk - \sigma_2^2}{vb} c^2\,x^2 + \frac{(vc + b)\,\sigma_2^2 - 2vrr_1}{vb} c\,x \leq \sigma_2^2 c - r_1^2$$

A 3.4.12 Tétel következtében $\sigma_2^2 = rk$ csak diszjunkt komponensekre bontható 1-rendszereknél fordul elő, melyeket az összefüggőséggel itt ki is zártunk.

Tehát $\sigma_2^2 < rk$ $(= \sigma_1^2)$ teljesül, így másodfokú egyenlőtlenséget kapunk x-re. A pozitív főegyütthatóval osztva adódik, hogy

$$x^2 + \frac{(vc + b)\,\sigma_2^2 - 2vrr_1}{c\,(rk - \sigma_2^2)}\,x \leq \frac{vb\,(\sigma_2^2 c - r_1^2)}{c^2\,(rk - \sigma_2^2)}$$

Teljes négyzetté alakítva

$$\left(x - \frac{2vrr_1 - (vc+b)\,\sigma_2^2}{2c\,(rk-\sigma_2^2)}\right)^2 \le \frac{vb\,(\sigma_2^2 c - r_1^2)}{c^2\,(rk-\sigma_2^2)} + \left(\frac{2vrr_1 - (vc+b)\,\sigma_2^2}{2c\,(rk-\sigma_2^2)}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{2vrr_1 - (vc+b)\,\sigma_2^2}{2c\,(rk-\sigma_2^2)}\right)^2 \le \frac{4vb\,(rk-\sigma_2^2)\,(\sigma_2^2 c - r_1^2) + (2vrr_1 - (vc+b)\,\sigma_2^2)^2}{4c^2\,(rk-\sigma_2^2)^2}$$

Fejtsük ki a jobb oldalon a számlálóban található kifejezést, ismét a $vr = bk$ összefüggést alkalmazva:

$$\begin{aligned}
&4vb\left(rk-\sigma_2^2\right)\left(\sigma_2^2 c - r_1^2\right) + \left(2vrr_1 - (vc+b)\,\sigma_2^2\right)^2 = \ldots = \\
&= (vc+b)^2\,\sigma_2^4 - 4vb\sigma_2^4 c + 4vbrkr_1^2 - 4vbrkr_1^2 + 4vb\sigma_2^2\left(rkc + r_1^2 - kr_1c - rr_1\right) = \\
&= (vc-b)^2\,\sigma_2^4 + 4vb\sigma_2^2\,(r-r_1)\,(kc-r_1)\,.
\end{aligned}$$

Vagyis

$$\left(x - \frac{2vrr_1 - (vc+b)\,\sigma_2^2}{2c\,(rk-\sigma_2^2)}\right)^2 \le \frac{(vc-b)^2\,\sigma_2^4 + 4vb\sigma_2^2\,(r-r_1)\,(kc-r_1)}{4c^2\,(rk-\sigma_2^2)^2}.$$

Itt a jobb oldali számlálóban egyik összeadandó sem negatív ($r_1 > 0$ esetén $kc - r_1 = r_1\frac{k-k_1}{k_1} > 0$), így gyököt lehet vonni

$$\left|x - \frac{2vrr_1 - (vc+b)\,\sigma_2^2}{2c\,(rk-\sigma_2^2)}\right| \le \sigma_2 \frac{\sqrt{(vc-b)^2\,\sigma_2^2 + 4vb\,(r-r_1)\,(kc-r_1)}}{2c\,(rk-\sigma_2^2)}$$

$$x \le \frac{2vrr_1 - (b+cv)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(b-cv)^2\,\sigma_2^2 + 4vb\,(r-r_1)\,(ck-r_1)}}{2c\,(rk-\sigma_2^2)}$$

$r_1 > 0$ esetén $k_1 > 0$ és $c = \frac{r_1}{k_1}$ is teljesül, így k_1-gyel beszorozva a számlálót és a nevezőt is, adódik az (r_1, k_1)-től függő alak. $\square$

Mielőtt rátérnénk konkrét példákra, nézzük meg, mi mondható általánosan speciálisabb t-rendszerek esetén!

Emlékezzünk, ha t legalább 2, azaz legalább blokkrendszer a struktúra, akkor σ_2 pontos értéke is ismert, nevezetesen $\sigma_2^2 = r\frac{v-k}{v-1} = r - \kappa_2$.

A következő példákban csak a (r_1, c) pártól függő alakokat vesszük sorra, de természetesen az (r_1, k_1) paraméterű változatok ezekből egy lépésben előállíthatóak a számláló és nevező k_1-gyel való beszorzásával.

5.2.1.1. Következmény. Ha a t-rendszer négyzetes:

$$|S| \le \frac{2rr_1 - (1+c)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(1-c)^2\,\sigma_2^2 + 4\,(r-r_1)\,(cr-r_1)}}{2c\,(r^2-\sigma_2^2)} \cdot b$$

5.2.1.2. Következmény. Ha a t-rendszer n-edrendű véges projektív sík:

$$|S| \leq \frac{2(n+1)r_1 - (1+c)\,n + \sqrt{n}\sqrt{(1-c)^2\,n + 4\,(n+1-r_1)\,(c(n+1)-r_1)}}{2c}$$

A 5.2.1 Tételbeli korlát elemzéséhez jelöljük D-vel a t-rendszerünket, és legyen

$$F_D\,(r_1,c) := \frac{2vrr_1 - (b+cv)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(b-cv)^2\,\sigma_2^2 + 4vb\,(r-r_1)\,(ck-r_1)}}{2c\,(rk-\sigma_2^2)} \tag{3}$$

$$F_D\,(r_1,k_1) := \frac{2vrr_1k_1 - (bk_1+vr_1)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(bk_1-vr_1)^2\,\sigma_2^2 + 4vbr_1k_1\,(r-r_1)\,(k-k_1)}}{2r_1\,(rk-\sigma_2^2)} \tag{4}$$

$F_D(r_1,c)$ mint a $(0,r]\times(0,b]$ téglalapon folytonos függvény, illetve $F_D(r_1,k_1)$ mint a $(0,r]\times(0,k]$ téglalapon folytonos függvény elemzésével az alábbi megállapításokhoz jutottam, melyeket – jelentőségükre, és a bizonyításukhoz szükséges elemi, de bonyodalmas számításokra való tekintettel – itt bizonyítás nélkül vagy csak vázlatos bizonyítással közlök.

5.2.2. Állítás. $\partial_{r_1}F_D\,(r_1,k_1) < 0$ a $(0,r]\times(0,k]\setminus\{(r,k)\}$ téglalapon.

A rend kedvéért ezt az állítást még bizonyítom, egyrészt mert mintául szolgál a további hasonló állítások igazolására, másrészt mert nem minden eleme magától értetődő. Evvel együtt az elemi, de a sok tényező miatt mégis bonyodalmas átalakítások köztes lépéseit mellőzöm, hogy a bizonyítás terjedelmét kordában tudjam tartani.

Bizonyítás. A rövidség kedvéért $F_D\,(r_1,k_1)$ helyett most egyszerűen F-et írunk, és bevezetjük az f jelölést a gyök alatti kifejezésre, melyet r_1 hatványai szerint rendezünk:

$$f\,(r_1,k_1) := v\left(v\sigma_2^2 - 4bk_1\,(k-k_1)\right)r_1^2 + 2vbk_1\left(2r\,(k-k_1)-\sigma_2^2\right)r_1 + b^2\sigma_2^2k_1^2$$

Ekkor tehát

$$F\,(r_1,k_1) = \frac{2vrr_1k_1 - (bk_1+vr_1)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{f}}{2r_1\,(rk-\sigma_2^2)}.$$

Viszont f mindkét változójában differenciálható és

$$\partial_{r_1}f = 2v\left(v\sigma_2^2 - 4bk_1\,(k-k_1)\right)r_1 + 2vbk_1\left(2r\,(k-k_1)-\sigma_2^2\right),$$

így

$$\partial_{r_1} F = -\partial_{r_1} \frac{bk_1\sigma_2^2}{2r_1\left(rk-\sigma_2^2\right)} + \frac{\sigma_2}{2\left(rk-\sigma_2^2\right)}\partial_{r_1}\frac{\sqrt{f}}{r_1} =$$
$$= \frac{bk_1\sigma_2^2}{2r_1^2\left(rk-\sigma_2^2\right)} + \frac{\sigma_2}{2\left(rk-\sigma_2^2\right)}\left(\frac{\partial_{r_1} f}{2r_1\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}}{r_1^2}\right).$$

Ez pontosan akkor negatív, ha

$$\frac{bk_1\sigma_2^2}{2r_1^2\left(rk-\sigma_2^2\right)} + \frac{\sigma_2}{2\left(rk-\sigma_2^2\right)}\left(\frac{\partial_{r_1} f}{2r_1\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}}{r_1^2}\right) < 0.$$

$f > 0$ $(r_1, k_1) \neq (r, k)$ esetén mint a 5.2.1 Tétel bizonyításából látszik, így átrendezés után ez az alábbi alakra hozható:

$$\sigma_2\sqrt{f} < 2vr\left(k-k_1\right)r_1 + \left(bk_1 - vr_1\right)\sigma_2^2$$

Lehet-e itt a jobb oldal negatív? Ehhez legyen

$$g\left(r_1,k_1\right) := 2vr\left(k-k_1\right)r_1 + \left(bk_1 - vr_1\right)\sigma_2^2.$$

Ekkor $g\left(r_1,k_1\right)$ a $[0,r]\times[0,k]$ téglalapon differenciálható függvény, így mivel az előjelével kapcsolatban közvetlenül nem tűnik ki semmi, próbáljuk k_1 szerinti derivált segítségével vizsgálni a $g<0$ egyenlőtlenséget

$$\partial_{k_1} g\left(r_1,k_1\right) = -2vrr_1 + b\sigma_2^2$$
$$\text{és}\quad \partial_{k_1} g\left(r_1,k_1\right) = 0 \longleftrightarrow r_1 = \frac{\sigma_2^2}{2k},$$
$$\text{továbbá}\quad r_1 < \frac{\sigma_2^2}{2k} : \partial_{k_1} g\left(r_1,k_1\right) > 0, \quad r_1 > \frac{\sigma_2^2}{2k} : \partial_{k_1} g\left(r_1,k_1\right) < 0.$$

Tehát $r_1 < \frac{\sigma_2^2}{2k}$ esetén $g\left(r_1,k_1\right)$ k_1-ben szigorúan monton nő, így minél kisebb k_1, annál kisebb $g\left(r_1,k_1\right)$ azaz

$$g\left(r_1,k_1\right) \geq g\left(r_1,0\right) = v\left(2rk-\sigma_2^2\right)r_1 \geq 0.$$

$r_1 > \frac{\sigma_2^2}{2k}$ esetén viszont $g\left(r_1,k_1\right)$ k_1-ben szigorúan monton csökken, így minél nagyobb k_1, annál kisebb $g\left(r_1,k_1\right)$ így

$$g\left(r_1,k_1\right) \geq g\left(r_1,k\right) = v\left(r-r_1\right)\sigma_2^2 \geq 0.$$

Végül az $r_1 = \frac{\sigma_2^2}{2k}$ esetben

$$g\left(r_1,k_1\right) = v\left(r-r_1\right)\sigma_2^2 \geq 0$$

vagyis $g(r_1, k_1)$ sehol sem negatív, és csak akkor 0, ha $r_1 = r$ és $k_1 = k$ vagy $r_1 = 0$ és $k_1 = 0$. Vagyis négyzetre emelhetünk. Ezek szerint $\partial_{r_1} F < 0$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_2^2 f < g^2$. Ez utóbbi egy sor átrendezés után az alábbi alakra hozható

$$4vbr_1k_1(r - r_1)(k - k_1)\sigma_2^2 < 4vr(k - k_1)r_1(bk_1 - vr_1)\sigma_2^2 + 4v^2r^2(k - k_1)^2 r_1^2.$$

Ez pedig $r_1 > 0$ miatt a következővel ekvivalens

$$\sigma_2^2 < rk,$$

ami mindig teljesül, mert $\sigma_2^2 < \sigma_1^2 = rk$ minden összefüggő t-rendszerben. □

Ennek az állításnak például akkor mutatkozik meg a jelentősége, ha $\mathcal{L}$-ben S-nek csak s-szelői találhatóak valamilyen $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ természetes számra, ekkor úgy kapjuk a legszigorúbb becslést, ha $\mathcal{L}$ az összes s-szelőt tartalmazza, ilyenkor ugyanis $k_1 = s$ nem változik, de r_1 az s-szelők számával szigorúan nő. Mi a helyzet azonban az $r_1 = 0$ esettel? Ekkor $k_1 = 0$ is teljesül, ami csak úgy lehetséges, ha $\mathcal{L}$-ben csak S-re nézve kitérő blokkok találhatóak, vagyis ez épp az $s = 0$ eset. A fenti bizonyítás mintájára könnyen belátható az alábbi állítás

5.2.3. Állítás. $c \in (0, b]$ esetén $\partial_{r_1} F_D(0, c) > 0$.

Vagyis ha egyszer $\mathcal{L}$-ben már csak kitérő blokkok vannak, úgy kapjuk a legjobb becslést, ha $|\mathcal{L}| = 1$, azaz $\mathcal{L}$ egyetlen 0-szelőből áll.

5.2.4. Példa. Mindezek segítségével a 5.1.1 Tételben szereplő korlátot már egyetlen bekezdéssel igazolhatjuk: ebben az esetben ugyanis $D = \Pi_n$ projektív sík, és ha $\mathcal{L}$ a t-lefogó S halmaz néhány t-szelőjéből áll, akkor $k_1 = t$ $\mathcal{L}$ elemszámától függetlenül. Mivel S minden pontján át megy t-szelő, elérhető, hogy $r_1 \geq 1$ teljesüljön. Ekkor viszont a 5.2.2 Állítás miatt $F_n := F_D$-re mint folytonos függvényre tekintve:

$$|S| \leq F_n(r_1, t) \leq F_n(1, t) = \frac{t - 1 + \sqrt{4nt - (3t+1)(t-1)}}{2} \cdot n + t$$

Ezek alapján a minimális, többszörösen lefogó ponthalmazok méretére vonatkozó korlátot könnyen általánosíthatjuk tetszőleges t-rendszerre, első lépésként például négyzetes blokkrendszerre.

5.2.5. Tétel. Legyen S minimális t-lefogó ponthalmaz négyzetes (v, k, λ)-blokkrendszerben, ekkor

$$|S| \leq \frac{k(t-1) + (t+1)\lambda + \sqrt{k - \lambda}\sqrt{(t-1)^2(k - \lambda) + 4t(k-1)(k-t)}}{2\lambda}$$

Lássuk most e sémának néhány alkalmazását általánosabb példákon.

5.2.6. Példa. Tetszőleges t-rendszerben legyen $\mathcal{L}$ az S ponthalmaz s-szelőinek egy nemüres halmaza, ekkor $k_1 = s$, ezért $r_1 > 0$, így $c = \frac{r_1}{s}$, és

$$|S| \leq \frac{2vrsr_1 - (bs + vr_1)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(bs - vr_1)^2\,\sigma_2^2 + 4vbsr_1\,(r - r_1)\,(k - s)}}{2r_1\,(rk - \sigma_2^2)}.$$

- Négyzetes blokkrendszerben:

$$|S| \leq \frac{2rsr_1 - (s + r_1)\,(r - \lambda) + \sqrt{r - \lambda}\sqrt{(s - r_1)^2\,(r - \lambda) + 4sr_1\,(r - r_1)\,(r - s)}}{2r_1\lambda}$$

- Véges projektív síkon:

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{2(n+1)cs - (1 + c)\,n + \sqrt{n}\sqrt{(1 - c)^2\,n + 4c\,(n + 1 - cs)\,(n + 1 - s)}}{2c} \\ &= \frac{2(n+1)sr_1 - (s + r_1)\,n + \sqrt{n}\sqrt{(s - r_1)^2\,n + 4sr_1\,(n + 1 - r_1)\,(n + 1 - s)}}{2r_1} \end{aligned}$$

5.2.7. Megjegyzés. A fenti példa véges prokektív síkokra vonatkozó része tulajdonképpen [3] 1.2.8 megjegyzésben említett eredményének általánosítása, hisz ha csak annyit tudunk S-ről, hogy legalább $\frac{|S|}{s}$ t-szelője van, akkor $\mathcal{L}$-nek a s-szelőket választva a 5.2.2 Állítás következtében

$$|S| \leq F_n(r_1, s) \leq F_n(1, s) = n\frac{s - 1 + \sqrt{4sn - (3s + 1)\,(s - 1)}}{2} + s$$

Így tehát a 5.1.1 tétel apró általánosítását kapjuk.

5.2.8. Példa. Fontos példa, ha ugyanannyi oszlopot választunk ki, mint ahány sort, azaz $|S| = |\mathcal{L}|$, vagy másképp $c = 1$, ilyenkor a képletek jelentősen egyszerűsödnek:

$$|S| \leq \frac{2vrr_1 - (b + v)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(b - v)^2\,\sigma_2^2 + 4vb\,(r - r_1)\,(k - r_1)}}{2\,(rk - \sigma_2^2)}.$$

- Négyzetes t-rendszerben:

$$|S| \leq \frac{r_1 + \sigma_2}{r + \sigma_2}b$$

- Véges projektív síkon:

$$|S| \leq \left(n - \sqrt{n} + 1\right)\left(\sqrt{n} + r_1\right)$$

5.2.9. Példa. A $c = \frac{b}{v}$ eset az előző példát általánosítja kissé. Ekkor a kiválaszott sorok és oszlopok aránya ugyanaz, mint az eredeti mátrixnál, és $cv = b$ és $ck = r$ is teljesül, így

$$|S| \leq \frac{b\sqrt{b}}{v} \frac{\sqrt{v}r_1 + \sqrt{b}\sigma_2}{\sqrt{rk} + \sigma_2}$$

A négyzetes t-rendszer és a véges projektív sík esetei pedig egybeesnek az előző példának ezen aleseteivel.

5.2.10. Példa. Tekintsük még az $r_1 = r$ esetet, ekkor

$$|S| \leq = \frac{b}{r} k_1,$$

Az $r_1 = 0$ esetben pedig

$$|S| \leq \frac{\sigma_2 \sqrt{(b - cv)^2 \sigma_2^2 + 4cvbrk} - (b + cv)\sigma_2^2}{2c\left(rk - \sigma_2^2\right)} = \frac{2vb\sigma_2}{\sqrt{(b - cv)^2 \sigma_2^2 + 4cvbrk} + (b + cv)\sigma_2}$$

- Négyzetes t-rendszerben:

$$|S| \leq \frac{\sigma_2 \sqrt{(1 - c)^2 \sigma_2^2 + 4cr^2} - (1 + c)\sigma_2^2}{2c\left(r^2 - \sigma_2^2\right)} \cdot b = \frac{2b\sigma_2}{\sqrt{(1 - c)^2 \sigma_2^2 + 4cr^2} + (1 + c)\sigma_2}$$

- Véges projektív síkon:

$$|S| \leq \frac{\sqrt{(1 + c)^2 n^2 + 4cn\left(n^2 + n + 1\right)} - (1 + c)n}{2c} =$$
$$= \frac{2n\left(n^2 + n + 1\right)}{\sqrt{(1 + c)^2 n^2 + 4cn\left(n^2 + n + 1\right)} + (1 + c)n}$$

5.3. Még egy alkalmazás

Ebben a szakaszban olyan ponthalmazok méretére keresek felső becslést, amelyeknek van ugyanannyi kitérő egyenesük (blokkjuk) és érintőjük, ahány pontból állnak. Az eddig megszokott módon jelölje S a ponthalmazt, D a struktúrát. Ekkor a 5.2.1 Tétel kontextusában $r_1 = 1$ és $c = 2$, így

- általános t-rendszer esetén

$$|S| \leq F_D(1,2) = \frac{2vr - (b+2v)\,\sigma_2^2 + \sigma_2\sqrt{(b-2v)^2\,\sigma_2^2 + 4vb\,(r-1)\,(2k-1)}}{4\left(rk - \sigma_2^2\right)}$$

- négyzetes blokkrendszerben

$$|S| \leq F_D(1,2) = \frac{3\lambda - r + \sqrt{r-\lambda}\sqrt{8r^2 - 11r + 4 - \lambda}}{4\lambda}$$

- véges projektív síkon

$$|S| \leq F_n(1,2) = \frac{\sqrt{8n+5}-1}{4}\cdot n + \frac{1}{2}$$

Véges projektív sík esetén azonban ennél kicsit jobb becslés is adható méghozzá a közvetlen, kombinatorikus módszerrel, ismét a nevezetes közepek közti egyenlőtlenséget alkalmazva.

5.3.1. Tétel. Legyen $S \neq \emptyset$ olyan ponthalmaz egy n-edrendű projektív síkon, melynek legalább annyi kitérő és érintő egyenese van, mint ahány pontja. Ekkor

$$|S| \leq \frac{3 - n + \sqrt{n+1}\sqrt{8n^2 - 7n + 1}}{4}.$$

A tételt a 5.1 Tétel kombinatorikus bizonyításainak mintájára vezetem le.

Bizonyítás. A szokásos módon jelölje l_i az S i-szelőinek számát, és legyen $\mathcal{E}_1 := \{e \in \mathcal{E} \colon |e \cap S| > 1\}$ az S szelőinek halmaza. Ekkor a Bruen-Thas-tételnél használt (C1), (C2) és (C3) összefüggések alapján

$$|\mathcal{E}_1| = \sum_{i=2}^{n+1} l_i = n^2 + n + 1 - (l_0 + l_1)\,,$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_1} |e \cap S| = \sum_{i=2}^{n+1} i l_i = (n+1)\,x - l_1,$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_1} |e \cap S|^2 = \sum_{i=2}^{n+1} i^2 l_i = x\,(x+n) - l_1.$$

Itt is felírva a négyzetes és számtani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{\sum_{e\in\mathcal{E}_1}|e\cap S|}{|\mathcal{E}_1|}\right)^2 \leq \frac{\sum_{e\in\mathcal{E}_1}|e\cap S|^2}{|\mathcal{E}_1|},$$

amiből

$$\left(\sum_{i=2}^{n+1} il_i\right)^2 \leq \left(n^2+n+1-(l_0+l_1)\right)\sum_{i=2}^{n+1} i^2 l_i,$$

vagyis

$$\left((n+1)\,x - l_1\right)^2 \leq \left(n^2+n+1-(l_0+l_1)\right)\left(x\,(x+n)-l_1\right).$$

$l_0, l_1 \geq x$ miatt

$$\begin{aligned} n^2\,x^2 &\leq \left(n^2+n+1-2\,x\right) x\,(x+n-1) \\ n^2\,x &\leq \left(n^2+n+1-2\,x\right)(x+n-1) \\ 2\,x^2+(n-3)\,x-n^3+1 &\leq 0, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} x &\leq \frac{-n+3+\sqrt{(n-3)^2+8\,(n^3-1)}}{4} = \\ &= \frac{-n+3+\sqrt{8n^3+n^2-6n+1}}{4} = \frac{3-n+\sqrt{n+1}\sqrt{8n^2-7n+1}}{4}. \end{aligned}$$

□

Noha ez nagyságrendben ugyanúgy $\mathcal{O}\left(n\sqrt{n}\right)$-es, mint az Illeszkedési korlátból származó becslés, ráadásul ugyanavval az $\frac{1}{\sqrt{2}}$-es konstans szorzóval, a másiknál szigorúan kisebb, tehát ebben az esetben a kombinatorikus módszerrel erősebb korlátot sikerült bizonyítani. A következő példa megmutatja, hogy valójában ilyenkor nem is tévedünk olyan nagyot.

5.3.2. Példa. Legyen n négyzetszám. Ekkor a $\mathrm{PG}\,(2,n)$ síkon egy Hermite-görbe pontjait egyenként elhagyva, amíg a görbe pontjainak legfeljebb a fele marad meg, olyan ponthalmazt kapunk, amely egyrészt kielégíti a kitérő és érintő egyenesekre vonatkozó kritériumokat, másrészt épp $\left\lfloor\frac{n\sqrt{n}+1}{2}\right\rfloor$ pontja van.

Hivatkozások

[1] Anurag Bishnoi, Sam Mattheus, and Jeroen Schillewaert. Minimal multiple blocking sets. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 25(4), 2018.

[2] W. H. Haemers. *Eigenvalue techniques in design and graph theory*. PhD thesis, Technische Hogeschool Eindhoven, 1979.

[3] Tibor Illés, Tamás Szőnyi, and Ferenc Wettl. Blocking sets and maximal strong representative systems in finite projective planes. *Mitt. Math. Sem. Giessen*, 201:91–107, 01 1991.

[4] Ben Lund and Shubhangi Saraf. Incidence bounds for block designs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30(4):1997–2010, 2016.

[5] Rózsa Pál. *Lineáris algebra és alkalmazásai*. Műszaki Könyvkiadó, 1991.

[6] Tamás Szőnyi, Antonello Cossidente, András Gács, Csaba Mengyán, Alessandro Siciliano, and Zsuzsa Weiner. On large minimal blocking sets in PG(2,q). *Journal of Combinatorial Designs*, 13(1):25–41, 2005.

[7] Szőnyi Tamás. *Szimmetrikus struktúrák*. Typotex Kiadó, 2013.

[8] Kiss György és Szőnyi Tamás. *Véges geometriák*. Polygon könyvtár. SZTE Bolyai Intézet, 2001.