

# NYILATKOZAT

**Név:** Péter Kristóf

**ELTE Természettudományi Kar, szak:** Matematika BSc

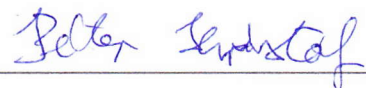
**NEPTUN azonosító:** FCNPKS

**Szakedolgozat címe:**

A Laplace-operátor véges differencia közelítései

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.05.31



*a hallgató aláírása*

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
Természettudományi Kar

# A Laplace-operátor véges differencia közelítései

BSc Szakdolgozat

**Írta:**

Péter Kristóf  
Matematika BSc  
Alkalmazott matematikus szakirány

**Témavezető:**

Dr. Izsák Ferenc  
Egyetemi Docens  
Alkalmazott Analízis és  
Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2023

# Tartalomjegyzék

<b>1. A Laplace-operátor</b>	<b>5</b>
1.1. Példák a Laplace-operátor gyakorlati alkalmazására . . . . .	5
<b>2. Az egydimenziós Laplace-operátor közelítése</b>	<b>6</b>
2.1. Másodrendű közelítés konstrukciója . . . . .	6
2.1.1. A másodrendű közelítésből adott egyenletrendszer . . . . .	7
2.2. Magasabb rendű közelítés konstrukciója . . . . .	8
2.2.1. Az első negyedrendű közelítésből adott egyenletrendszer . . . . .	10
2.3. Egy másik negyedrendű közelítés . . . . .	11
2.3.1. A második negyedrendű közelítésből adott egyenletrendszer . . . . .	12
2.4. Teszt egy adott peremérték feladatra . . . . .	12
<b>3. A kétdimenziós Laplace-operátor közelítése</b>	<b>16</b>
3.1. Másodrendű közelítés kétdimenziós esetben . . . . .	16
3.2. Magasabb rendű közelítés kétdimenziós esetben . . . . .	17
3.2.1. A feladat definiálása . . . . .	17
3.2.2. Egyenletek felírása . . . . .	18
3.2.3. Negyedik deriváltak kezelése . . . . .	19
3.3. A feladatra felírt egyenletrendszer . . . . .	20
3.4. Mátrixos forma az egyenletrendszerre . . . . .	20
3.5. Mátrixos forma a másodrendű közelítésből adott módszerhez . . . . .	24
3.6. Teszt egy kétdimenziós peremérték feladatra . . . . .	25
<b>4. Nem egyenletes felosztás: egydimenziós eset</b>	<b>27</b>
4.1. Másodrendű közelítés nem egyenletes felosztás esetén . . . . .	27
4.1.1. Másodrendű közelítésből adott egyenletrendszer mátrixa . . . . .	29
4.2. Magasabb rendű közelítés nem egyenletes felosztás esetén . . . . .	30
4.2.1. A negyedrendű közelítésből kapott egyenletrendszer mátrixa . . . . .	32
4.3. Teszt nem egyenletes felosztás esetén . . . . .	33
<b>5. Nem egyenletes felosztás: kétdimenziós eset</b>	<b>38</b>
5.1. Általános helyzetű pontok . . . . .	38
5.2. Fő koordinátában eltérő rácspontok . . . . .	40
5.2.1. A rács elkészítése . . . . .	40
5.2.2. A közelítés konstrukciója . . . . .	42
5.2.3. Hasonló távolságok esete . . . . .	44
5.2.4. Rombusz csúcsai . . . . .	45
5.2.5. Egyenletrendszer a közelítésre . . . . .	46
5.2.6. Mátrix-vektor alak a közelítésre . . . . .	47
5.2.7. Teszt egy peremértékfeladatra . . . . .	48
5.3. Azonos távolságra lévő egyeneseken elhelyezkedő rácspontok . . . . .	50
5.4. Közelítés függvénygrafikon alatti tartományon . . . . .	54
5.4.1. Rács definiálása . . . . .	54
5.4.2. A közelítés konstrukciója . . . . .	56
<b>6. Az (5.39) egyenletrendszer megoldásai az (5.42) feltétellel és jelöléssel (Függelék)</b>	<b>60</b>

## **Köszönetnyilvánítás**

A köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Dr. Izsák Ferencnek, aki rengeteg segítséget nyújtott a szakdolgozat tartalmi és formai megvalósításában. A dolgozat nem jöhetett volna létre a tartalmas konzultációs alkalmak nélkül, ahol megannyi kérdésemre választ kaptam és lehetőségem volt elmélyedni a matematika ezen ágában.

## Bevezetés

A szakdolgozatban egy- és kétdimenzióban keressek minél magasabb rendű numerikus közelítéseket egy függvény adott pontbeli Laplace-ára. A közelítéseket a Taylor-módszer segítségével konstruálom meg és rendjüket eszerint bizonyítom.

Ezen közelítéseket pedig olyan peremértékfeladatok numerikus megoldására alkalmazom, melyben az adott dimenziós Laplace-operátoron kívül nem jelennek meg a keresett függvény további deriváltjai. Ezért a közelítésekhez alapvető feltétel lesz hogy az ismeretlen függvény Laplace-án kívül a függvény más deriváltjaitól ne függjenek.

A közelítések egy részében, főleg a negyedrendű közelítések esetén egy és két dimenzióban kihasználom az adott differenciálegyenlet (amelyben a Laplace-operátor is szerepel) struktúráját. Viszont számos másodrendű közelítésnél nem teszek fel ilyen feltételt, tehát azok bármilyen a Laplace-operátort tartalmazó differenciálegyenletre alkalmazhatóak lesznek. Természetesen az esetleges további deriváltakat is közelíteni kell ehhez.

A peremértékfeladatok megoldási tartományát az adott dimenzióban diszkrétizálom egy véges sok pontból álló halmazra, amelyet rácsnak neveznek. Ennek pontjaiban az ismeretlen függvény Laplace-a függhet egy ismert függvényről, az adott peremértékektől és az ismeretlen pontbeli értékeitől aszerint, ahogyan azt a peremértékfeladat meghatározza. A Laplace-operátort ezután kicserélem az adott pontban rá adott nulladrendű tagokból (pontbeli értékekből) álló közelítésre, így egy egyenletrendszerre jutok, amelyben a rács pontjaiban lévő ismeretlen függvényértékek lesznek a változók.

Az így kapott egyenletrendszerekből esetenként mátrix-vektor egyenletet készítek, amely már könnyen megoldható lesz egy számítógépes szoftvernek, például a MatLab-nak. Ezek után a módszert kipróbálom egy konkrét peremértékfeladat esetén. Az egyenletrendszer megoldása után kiszámolom a különböző módszerek összes hibáját a valódi megoldáshoz képest amit a tesztfeladatok esetében matematikailag meg lehet határozni. A kiszámolt összes hibát ábrázolom az egyes módszerek esetén, egyre növelve a felosztási pontok számát és megfelelően teljesen újra számolva a pontbeli közelítéseket, így könnyen össze tudjuk majd hasonlítani a módszerek hatékonyságát egymással és a Laplace-operátor megfelelő közelítésének rendjével, amely segítségével az egyes egyenletrendszereket elkészítettük.

Olyan eseteket is vizsgálok, amikor valamilyen oknál fogva nem lehet egyenletes felosztást konstruálni. Ilyen esetekben általában mesterségesen szimulálom a hibát véletlen számokkal eltolva a rácspontokat. Kiderül, hogy annak függvényében lehet kellően magasrendű módszert találni, hogy mennyire kevésé toljuk el a rácspontokat egy egyenletesebb esethez képest.

A dolgozat elején az egyenletes felosztásokkal foglalkozom, egydimenzióban majd a kétdimenziós esetben, ezután pedig különböző további felosztásokkal.

# 1. A Laplace-operátor

A Laplace-operátort  $\mathbb{R}^n$ -ben a klasszikus esetben  $k \geq 2$ -re az

$$\Delta : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{k-2}(\mathbb{R}^n), \quad \Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$$

definícióval értelmezzük. A gyakorlatban ezt általában korlátos tartományon definiáljuk, amely  $\Delta$  értelmezési tartományát specifikálja. Itt  $k$  értékét azért nem rögzítjük, mert a különböző rendű közelítésekhez különböző simasági feltevésekre lesz szükség.

## 1.1. Példák a Laplace-operátor gyakorlati alkalmazására

A Laplace-operátor számos ismert differenciálegyenletben szerepel. A későbbiekben látott numerikus módszerek segítséget nyújthatnak olyan fizikai folyamatok gyakorlati leírásában, amelyekhez tartozó differenciálegyenleteket elméleti úton, formulákkal nehéz vagy lehetetlen megoldani. Az alábbi modellek jó példát szolgáltatnak az operátor széleskörű megjelenésére.

A Laplace egyenlet [5]:

$$\Delta \Phi(x, t) = 0.$$

Áramlási feladatokban, ha összenyomhatatlan folyadékot vizsgálunk, akkor a sebesség potenciálfüggvényére, vagyis az itt látható  $\Phi(x, t)$  függvényre teljesülni fog a Laplace-egyenlet, feltéve, hogy az áramlás örvénymentes és nincsen benne forrás.

A hővezetési/diffúziós egyenlet egy egyszerű változata [5]:

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t).$$

Itt  $u(x, t)$  a  $t$  időpillanatban az  $x$  pontban lévő mennyiség, amely lehet modelltől függően hőmérséklet, koncentráció, vagy töltéssűrűség is például.

Schrödinger egyenlete [4]:

$$i\hbar \partial_t \Psi(x, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) = V(x, t) \Psi(x, t).$$

$\Psi(x, t)$  egy részecske hullámfüggvénye, amely egy komplex számot rendel a tér minden  $x$  pontjához minden  $t$  időpillanatban.  $i$  a képzetes egység,  $\hbar$  a Planck állandó,  $m$  a részecske tömege,  $V(x, t)$  pedig a potenciál, amely azt a környezetet reprezentálja, ahol a részecske található.

A hullámeqyenlet [5]:

$$\partial_t^2 u(x, t) - c \Delta u(x, t) = 0.$$

Az  $u(x, t)$  függvény modelltől függően az idő függvényében leírhat egy rezgő húr, gumiszál vagy membrán mozgását, egy elasztikus anyag deformációját, akár hang vagy ultrahang terjedését és vízhullámokat is.

A viszkozitás modellje, a viszkózus Burgers-egyenlet [5]:

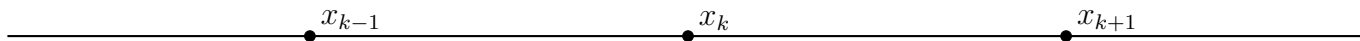
$$\partial_t v(x, t) + v(x, t) \partial_x v(x, t) = \mu \Delta v(x, t).$$

Ez a Navier–Stokes-egyenletek egydimenziós verziójaként is felfogható. Itt  $v(x, t)$  egy áramló folyadék sebességét definiálja az  $x$  pontban a  $t$  időpillanatban, továbbá  $\mu$  jelöli a folyadékra jellemző dinamikus viszkozitást.

## 2. Az egydimenziós Laplace-operátor közelítése

Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egyváltozós függvény. Ekkor szimplán  $\Delta f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = f''(x)$ .

Legyenek  $x_{k-1}, x_{k+1}$  az  $x_k$  pont körüli pontok, úgy, hogy  $x_{k-1} = x_k - h$  és  $x_{k+1} = x_k + h$ .



Itt  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$  lehetnek egy intervallum  $h$  lépésközű felosztásának elemei.

Ha az  $f$  függvény  $n+1$ -szer folytonosan differenciálható az  $[x_{k-1}, x_{k+1}]$  intervallumon ( $x_k$  körüli  $h$  sugarú zárt intervallumon), akkor a Taylor-tétel szerint:

$$f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_k)(x_{k-1} - x_k)^i}{i!} + O((x_{k-1} - x_k)^{n+1}), \quad (2.1)$$

$$f(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_k)(x_{k+1} - x_k)^i}{i!} + O((x_{k+1} - x_k)^{n+1}). \quad (2.2)$$

### 2.1. Másodrendű közelítés konstrukciója

A fenti egyszerű esetben adjuk meg először a Laplace-operátor klasszikus közelítését. A módszer részletes leírása és további példák a [1] könyvben található.

Most a (2.1) és (2.2) közelítéseket  $n = 3$  esetén felírva, továbbá az  $x_{k-1} - x_k = -h$  és  $x_{k+1} - x_k = h$  egyenlőségeket felhasználva kapjuk, hogy

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) - h \cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_k) - \frac{h^3}{6} \cdot f'''(x_k) + O(h^4)$$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + h \cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_k) + \frac{h^3}{6} \cdot f'''(x_k) + O(h^4).$$

Ezeket összeadva:

$$f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) = 2f(x_k) + h^2 \cdot f''(x_k) + O(h^4),$$

vagyis  $f''(x_k)$ -ra rendezve,

$$f''(x_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{h^2} + O(h^2). \quad (2.3)$$

A fenti közelítést használhatjuk differenciálegyenletek numerikus megoldására.

Adott  $u(a)$  és  $u(b)$  esetén tekintsük a következő közönséges differenciálegyenletre vonatkozó peremérték feladatot:

$$\begin{cases} u''(x) + c \cdot u(x) = f(x), \\ u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b, \\ x \in [a, b] \end{cases} \quad (2.4)$$

ahol  $u(x)$ -et keressük az adott  $[a, b]$  intervallum  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$   $h$  lépésközű felosztásának pontjaiban. Itt  $x_0 = a$ ;  $x_{n+1} = b$  és minden  $k = 1, 2, \dots, n$ -re  $x_{k-1} = x_k - h$ , továbbá  $f(x)$ -et ismerjük ezen pontokban.

Ha minden  $k = 1, 2, \dots, n$ -re felírjuk az  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$  pontbeli értékekkel  $u''(x_k)$  közelítését (2.3), akkor kapjuk, hogy

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} + O(h^2). \quad (2.5)$$

A jobb oldalon lévő közelítést behelyettesítve a (2.4)-beli differenciálegyenletbe:

$$\frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} + c \cdot u(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

amely egy  $n$  ismeretlenes  $n$  egyenletből álló lineáris egyenletrendszer az  $u(x_k)$  értékekre ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Az  $u''(x_k)$  értékeket az ismeretlen függvény pontbeli értékeiből álló (2.5) másodrendű közelítésre cseréltük, ezért azt reméljük, hogy az egyenletrendszer megoldása is  $O(h^2)$  rendben fogja közelíteni a peremértékfeladat valódi, pontos megoldását az  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pontokban.

### 2.1.1. A másodrendű közelítésből adott egyenletrendszer

Az (2.6) egyenletrendszert egy fokkal összeszedettebb módon a [3] forrásból kölcsönzött jelöléssel, az alábbi mátrix-vektor alakban is írhatjuk:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{h^2}, -\frac{2}{h^2} + c, \frac{1}{h^2} \right] \cdot \underline{u}_k &= f(x_k), \\ \underline{u}_k &= [u(x_{k-1}), u(x_k), u(x_{k+1})]^T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ezt minden  $k = 1, 2, \dots, n$ -re véve a bal oldalon egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tridiagonális valós mátrixot kapunk, melynek sorai az

$$\begin{aligned} (A)_1 &= \left[ -\frac{2}{h^2} + c, \frac{1}{h^2}, 0, \dots, 0 \right]^T \\ (A)_k &= \left[ 0, \dots, 0, \frac{1}{h^2}, -\frac{2}{h^2} + c, \frac{1}{h^2}, 0, \dots, 0 \right]^T \\ (A)_n &= \left[ 0, \dots, 0, \frac{1}{h^2}, -\frac{2}{h^2} + c \right]^T \end{aligned}$$

vektorok lesznek,  $k = 2, \dots, n-1$ -re egymás alatt, ahol a nemnulla tagok a  $k-1$ ,  $k$  és  $k+1$ -edik helyeken állnak. Az  $\underline{u}$ ,  $\underline{f}$  és  $\underline{u}_0$   $n$ -dimenziós vektorok az alábbi módon vannak definiálva

$$\underline{u} = [u(x_1), \dots, u(x_n)]^T, \quad \underline{f} = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T, \quad \underline{u}_0 = \left[ \frac{u(a)}{h^2}, 0, \dots, 0, \frac{u(b)}{h^2} \right]^T$$

ahol  $\underline{u}$  az egyenletrendszer változóinak vektora,  $\underline{f}$  ismert valós vektor,  $\underline{u}_0$  pedig a peremfeltételeket tartalmazza.

Tehát a teljes egyenletrendszer

$$A \cdot \underline{u} = \underline{f} - \underline{u}_0$$

alakban írható.

Az eljárás implementációjához célszerű a következő jelölés is.

Legyen

$$\begin{aligned} \text{diag}(n, \underline{v}, k) &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \text{diag}(n, \underline{v}) &= \text{diag}(n, \underline{v}, 0), \end{aligned} \quad (2.8)$$

ahol

$$\underline{v} \in \mathbb{R}^{n-|k|}, \quad -n+1 \leq k \leq n-1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Itt a  $\text{diag}(n, \underline{v}, k)$ -mátrixnak alulról felfelé az  $n+k$ -adik átlója (ahol értelemszerűen az  $n$ -edik átló a főátló) rendre az  $\underline{v}$  elemeiből áll, a mátrix összes többi eleme pedig 0. Ezen jelöléssel, ha

$$\begin{aligned} \underline{d}_1 &= \left[ \frac{1}{h^2}, \dots, \frac{1}{h^2} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \underline{d}_2 &= \left[ -\frac{2}{h^2} + c, \dots, -\frac{2}{h^2} + c \right] \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{d}_3 &= \left[ \frac{1}{h^2}, \dots, \frac{1}{h^2} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned}$$

akkor a tárgyalt  $A$  mátrix az alábbi módon írható,

$$A = \text{diag}(n, \underline{d}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{d}_2) + \text{diag}(n, \underline{d}_3, +1).$$

## 2.2. Magasabb rendű közelítés konstrukciója

Lehet a fenténél pontosabb, negyedrendű közelítést is találni a második deriváltra a következő módon.

Feltéve, hogy  $u(x)$  kielégíti a Taylor-tétel megfelelő feltételeit, írjuk fel  $u(x_{k-1})$ -et és  $u(x_{k+1})$ -et  $u(x)$ -nek  $x_k$ -pont körüli Taylor-sorával az előzőekhez hasonlóan, az ötödik tagig:

$$\begin{aligned} u(x_{k-1}) &= \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)(x_{k-1} - x_k)^i}{i!} + O((x_{k-1} - x_k)^6), \\ u(x_{k+1}) &= \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)(x_{k+1} - x_k)^i}{i!} + O((x_{k+1} - x_k)^6). \end{aligned}$$

Vagyis az  $x_{k-1} = x_k - h$  és  $x_{k+1} = x_k + h$  egyenlőségeket használva

$$\begin{aligned} u(x_{k-1}) &= \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)(-h)^i}{i!} + O(h^6), \\ u(x_{k+1}) &= \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)h^i}{i!} + O(h^6), \end{aligned}$$

tehát az egyenlőségeket összegezve,

$$u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)h^i(1 + (-1)^i)}{i!} + O(h^6).$$

Ha  $i$  páratlan, akkor  $1 + (-1)^i = 0$ , vagyis azon tagok kiesnek, a többi tagra pedig  $1 + (-1)^i = 2$ , tehát:

$$u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) = 2u(x_k) + h^2 \cdot u''(x_k) + \frac{h^4}{12} \cdot u''''(x_k) + O(h^6).$$

Innen nyerjük, hogy

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot u''''(x_k) + O(h^4), \quad (2.9)$$

amelyben egy  $u''''(x_k)$  tag még benne maradt. Ezután egy, a [3] forrásból tanult ötletet használok. A negyedik deriváltat tartalmazó tag eltüntetéséhez kihasználjuk a (2.4) peremértékfeladatban szereplő differenciálegyenlet struktúráját, ami természetesen azt jelenti, hogy az eszerint kaptott közelítés csak ilyen

típusú differenciálegyenletet tartalmazó peremértékfeladatokra lesz alkalmazható komolyabb változtatás nélkül.

A (2.4)-ben szereplő differenciálegyenlet:

$$u''(x) + c \cdot u(x) = f(x). \quad (2.10)$$

Ezen egyenletnek mindkét oldalát kétszer deriválva kapjuk hogy

$$u''''(x) + c \cdot u''(x) = f''(x).$$

Vagyis minden  $x_k$  pontra fennáll,

$$u''''(x_k) = f''(x_k) - c \cdot u''(x_k).$$

Továbbá használjuk a  $f''(x_k)$  és  $u''(x_k)$  mennyiségek  $O(h^2)$  rendbeli (2.3) klasszikus közelítését, azaz

$$f''(x_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{h^2} + O(h^2),$$

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} + O(h^2),$$

feltéve, hogy  $f$  szintén kielégíti az ehhez szükséges simasági feltételeket.

Ezzel az  $O(h^4)$  pontosságú (2.9) közelítésben szereplő  $-\frac{h^2}{12}u''''(x_k)$  tagra teljesül a következő:

$$-\frac{h^2}{12}u''''(x_k) = -\frac{h^2}{12} \left( \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{h^2} - c \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} + O(h^2) \right).$$

Tehát

$$-\frac{h^2}{12}u''''(x_k) = -\frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{12} + \frac{c}{12} \left( u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k) \right) + O(h^4),$$

amelyet visszahelyettesítve az  $u''(x_k)$ -ra adott (2.9) közelítésbe nyerjük végül, hogy

$$u''(x_k) = \left( \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12} \right) \left( u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k) \right) - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{12} + O(h^4). \quad (2.11)$$

Ez tehát egy negyedrendű közelítése az  $u$  ismeretlen függvény  $x_k$ -pontbeli második deriváltjának. A módszer láthatóan függ az  $f$  függvény megfelelő pontbeli értékeitől is. Látni fogjuk, hogy a közelítés (2.4) típusú peremértékfeladatra való alkalmazásakor ez nem jelent problémát.

Ez a közelítés már közvetlenül visszahelyettesíthető az (2.10) differenciálegyenletbe, hiszen nem tartalmaz derivált függvényeket:

$$\left( \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12} \right) \left( u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k) \right) - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{12} + c \cdot u(x_k) = f(x_k), \quad (2.12)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Azt reméljük, hogy mivel a második derivált egyes pontbeli értékeire mostmár negyedrendű közelítést adtunk, az ennek felhasználásával nyert egyenletrendszer is negyedrendben fogja közelíteni a pontos megoldást a felosztás pontjaiban.

### 2.2.1. Az első negyedrendű közelítésből adott egyenletrendszer

Ha (2.12)-ben az  $u$ -t tartalmazó tagokat balra és az  $f$ -et tartalmazó tagokat jobb oldalra rendezzük, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left[ \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12}, \quad -\frac{2}{h^2} + \frac{10c}{12}, \quad \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12} \right] \cdot \underline{u}_k = \left[ \frac{1}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{1}{12} \right] \cdot \underline{f}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

ahol

$$\underline{u}_k = [u(x_{k-1}), u(x_k), u(x_{k+1})]^T, \quad \underline{f}_k = [f(x_{k-1}), f(x_k), f(x_{k+1})]^T.$$

A (2.6) egyenletrendszerhez hasonlóan ezt is fel tudjuk mátrix-vektor alakban írni. Most is  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tri-diagonális mátrix lesz, annyi különbséggel, hogy az alsó átlóban mindenhol  $\frac{1}{h^2} + \frac{c}{12}$ , a főátlóban mindenhol  $-\frac{2}{h^2} + \frac{10c}{12}$  és a felső átlóban mindenhol  $\frac{1}{h^2} + \frac{c}{12}$  áll. A mátrix többi tagja 0.

Az  $\underline{u} = [u(x_1) \ \cdots \ u(x_n)]^T$  vektor a változók  $n$ -dimenziós vektora, viszont a jobb oldalon szereplő konstans vektort először ki kell számolni. Legyen

$$\underline{f} = [f(x_1), \ \cdots, f(x_n)]^T,$$

és  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  azon tridiagonális mátrix, amelynek alsó átlója  $\frac{1}{12}$ , a főátló  $\frac{10}{12}$ , és a felső átló  $\frac{1}{12}$  mindenhol. A peremfeltételek által adott vektorok megfelelően

$$\underline{u}_0 = \left[ \left( \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12} \right) u(a), \quad 0, \quad \cdots, \quad 0, \quad \left( \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12} \right) u(b) \right]^T,$$

$$\underline{f}_0 = \left[ \left( \frac{1}{12} \right) u(a), \quad 0, \quad \cdots, \quad 0, \quad \left( \frac{1}{12} \right) u(b) \right]^T$$

lesznek. Az (2.8) jelöléssel felírva, ha

$$\underline{a}_1 = \left[ \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12} \right] \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\underline{a}_2 = \left[ -\frac{2}{h^2} + \frac{10c}{12}, \quad \cdots, \quad -\frac{2}{h^2} + \frac{10c}{12} \right] \in \mathbb{R}^n,$$

$$\underline{a}_3 = \left[ \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{h^2} + \frac{c}{12} \right] \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\underline{q}_1 = \left[ \frac{1}{12}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{12} \right] \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\underline{q}_2 = \left[ \frac{10}{12}, \quad \cdots, \quad \frac{10}{12} \right] \in \mathbb{R}^n,$$

$$\underline{q}_3 = \left[ \frac{1}{12}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{12} \right] \in \mathbb{R}^{n-1},$$

akkor

$$A = \text{diag}(n, \underline{a}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{a}_2) + \text{diag}(n, \underline{a}_3, +1),$$

$$Q = \text{diag}(n, \underline{q}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{q}_2) + \text{diag}(n, \underline{q}_3, +1).$$

Ekkor a teljes egyenletrendszert felírhatjuk

$$A \cdot \underline{u} = Q \cdot \underline{f} + \underline{f}_0 - \underline{u}_0$$

alakban.

Ez szintén egy  $n$ -változós egyenletrendszer, és a  $Q \cdot \underline{f}$  valós vektor  $O(n)$  időben kiszámolható, hiszen minden sorban csak három szorzást és két összeadást végzünk (implementáláskor a  $Q$ -t nem szükséges létrehozni, egy egyszerű  $n$ -lépésből álló ciklus elég az

$$(Q \cdot \underline{f})_k = \frac{1}{12} f(x_{k-1}) + \frac{10}{12} f(x_k) + \frac{1}{12} f(x_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

jobb oldali értékek kiszámolásához).

Tehát ezen egyenletrendszer megkonstruálása és megoldása bonyolultságelméleti szempontból ugyan olyan gyors, mint a másodrendű közelítésből adott (2.7) módszeré.

### 2.3. Egy másik negyedrendű közelítés

Most egy másik módon érünk el negyedrendű közelítésig, ami egy ténylegesen különböző módszerre vezet. Térjünk vissza a (2.9)

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot u''''(x_k) + O(h^4)$$

közelítéshez. Már láttuk hogy  $u''''(x_k)$  kifejezhető az alábbi módon:

$$u''''(x_k) = f''(x_k) - c \cdot u''(x_k),$$

amelyet (2.9)-ba behelyettesítve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} (f''(x_k) - c \cdot u''(x_k)) + O(h^4).$$

Ebből fejezzük ki az  $u''(x_k)$ -t az alábbi módon, ahogyan arra a [3] forrás utal:

$$\left(1 - \frac{ch^2}{12}\right) u''(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f''(x_k) + O(h^4)$$

Ekkor újra használjuk  $f''(x_k)$ -re a másodrendű (2.3) közelítést, amelyet behelyettesítünk a fenti egyenletbe:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{ch^2}{12}\right) u''(x_k) &= \\ &= \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left( \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{h^2} + O(h^2) \right) + O(h^4) = \\ &= \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{12} + O(h^4). \end{aligned}$$

Tehát összefoglalva a

$$\left(1 - \frac{ch^2}{12}\right) u''(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{12} + O(h^4) \quad (2.14)$$

közelítést kaptuk.

Az  $u''(x_k)$ -nak még maradt egy  $h^2$ -et is tartalmazó együtthatója, amellyel bátran oszthatnánk az egyenlet mindkét oldalát (de a későbbi számolás egyszerűsítése érdekében nem tesszük), hiszen ha  $h$  tart nullához, akkor ez az együttható az 1-hez tart, tehát a jobb oldalon továbbra is  $O(h^4)$  lenne a rend a konstansrendű taggal való leosztás után. Vagyis (2.14) valóban negyedrendű közelítése az  $u''(x_k)$ -nak.

Továbbá fontos megjegyezni hogy ez a közelítés a (2.11) közelítéshez hasonlóan függ az  $f$  megfelelő pontbeli értékeitől és komolyabb változtatás nélkül csak a (2.10) alakú differenciálegyenletek esetében alkalmazható a második derivált közelítésére.

A (2.10) differenciálegyenletnek megfelelően:

$$u''(x_k) = f(x_k) - c \cdot u(x_k),$$

vagyis  $u''(x_k)$  helyére az (2.14)-be az  $f(x_k) - c \cdot u(x_k)$  mennyiséget helyettesítve az

$$\left(1 - \frac{ch^2}{12}\right) (f(x_k) - c \cdot u(x_k)) = \frac{u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) - 2u(x_k)}{h^2} - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1}) - 2f(x_k)}{12} + O(h^4)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszeret kapjuk. Ennek megoldásaitól (az (2.13) egyenletrendszerhez hasonlóan) azt reméljük, hogy a valódi megoldást negyedrendű pontossággal közelíti a felosztás pontjaiban.

### 2.3.1. A második negyedrendű közelítésből adott egyenletrendszer

Ha az  $u$ -t tartalmazó tagokat balra, az  $f$ -et tartalmazó tagokat jobb oldalra rendezzük, akkor ebből az alábbi negyedrendben pontos egyenletrendszert kapjuk:

$$\left[ \frac{1}{h^2}, \quad -\frac{2}{h^2} + c \left( 1 - \frac{ch^2}{12} \right), \quad \frac{1}{h^2} \right] \cdot \underline{u}_k = \left[ \frac{1}{12}, \quad -\frac{2}{12} + \left( 1 - \frac{ch^2}{12} \right), \quad \frac{1}{12} \right] \cdot \underline{f}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

$$\underline{u}_k = [u(x_{k-1}), \quad u(x_k), \quad u(x_{k+1})]^T, \quad \underline{f}_k = [f(x_{k-1}), \quad f(x_k), \quad f(x_{k+1})]^T.$$

Ha mátrixos alakba hozzuk az egyenletrendszert, akkor az (2.13) közelítés mátrixos egyenletéhez nagyon hasonló struktúrájú mátrixos egyenletet kapunk:

$$A \cdot \underline{u} = Q \cdot \underline{f} + \underline{f}_0 - \underline{u}_0.$$

Itt  $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tridiagonális mátrixok, és a (2.8) jelöléssel felírva, ha

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \left[ \frac{1}{h^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{h^2} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \underline{a}_2 &= \left[ -\frac{2}{h^2} + c \left( 1 - \frac{ch^2}{12} \right), \quad \dots, \quad -\frac{2}{h^2} + c \left( 1 - \frac{ch^2}{12} \right) \right] \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{a}_3 &= \left[ \frac{1}{h^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{h^2} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \underline{q}_1 &= \left[ \frac{1}{12}, \quad \dots, \quad \frac{1}{12} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \underline{q}_2 &= \left[ -\frac{2}{12} + \left( 1 - \frac{ch^2}{12} \right), \quad \dots, \quad -\frac{2}{12} + \left( 1 - \frac{ch^2}{12} \right) \right] \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{q}_3 &= \left[ \frac{1}{12}, \quad \dots, \quad \frac{1}{12} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned}$$

akkor

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(n, \underline{a}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{a}_2) + \text{diag}(n, \underline{a}_3, +1), \\ Q &= \text{diag}(n, \underline{q}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{q}_2) + \text{diag}(n, \underline{q}_3, +1), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \underline{u} &= [u(x_1), \quad \dots, \quad u(x_n)]^T, \quad \underline{f} = [f(x_1), \quad \dots, \quad f(x_n)]^T, \\ \underline{u}_0 &= \left[ \frac{u(a)}{h^2}, \quad 0, \quad \dots, \quad 0, \quad \frac{u(b)}{h^2} \right]^T, \quad \underline{f}_0 = \left[ \frac{f(a)}{12}, \quad 0, \quad \dots, \quad 0, \quad \frac{f(b)}{12} \right]^T. \end{aligned}$$

Itt természetesen az  $\underline{u}$  a változók vektora, minden más tag számokat tartalmaz.

## 2.4. Teszt egy adott peremérték feladatra

Három módszert, nevezetesen a (2.7), (2.13), és (2.15) eljárásokat is megadtunk, melyek alkalmazhatóak az (2.4) peremértékfeladat numerikus megoldására. Most alkalmazzuk és összehasonlítjuk őket egy konkrét esetben.

Azt várjuk hogy a kapott megoldások abszolút hibája a negyedrendű (2.11) és (2.14) közelítésekből megfelelően kapott (2.13) és (2.15) módszereket alkalmazva lényegesen kisebb legyen, mint a másodrendű (2.5) közelítésből nyert (2.7) módszert használva. Szintén érdekes kérdés, hogy a (2.13) és (2.15) különböző negyedrendű közelítések felhasználásával nyert módszerek közül melyik eredményez kisebb abszolút hibát, ha egyáltalán van köztük különbség.

Tekintsük az alábbi peremérték feladatot:

$$\begin{cases} u''(x) + 4 \cdot u(x) = 4 \cdot x, \\ u(0) = 1, \quad u\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{9\pi}{4} + 3, \\ x \in \left[0, \frac{9\pi}{4}\right]. \end{cases} \quad (2.16)$$

A feladat klasszikus módszerekkel általánosan megoldható, és a megoldása

$$u(x) = 3 \sin(2x) + \cos(2x) + x.$$

Adott  $n$ -re elkészítjük a  $\left[0, \frac{9\pi}{4}\right]$  intervallum  $n+2$ -pontból álló  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  felosztását, és megoldjuk mindhárom módszer által adott egyenletrendszert. Legyen  $\underline{u}_1$  a (2.7),  $\underline{u}_2$  az (2.13),  $\underline{u}_3$  pedig a (2.15) módszer által adott megoldások vektora. Az egyszerűbb jelölés érdekében legyen  $\underline{u}_i$   $k$ -adik koordinátája  $u_i(k)$  mindhárom módszer esetén (nyilván  $i = 1, 2, 3$ ). Tehát az

$$\{u_1(k), u_2(k), u_3(k) : k = 0, 1, \dots, n+1\}$$

számok lesznek az különböző módszerek által a

$$\{u(x_k) : k = 0, 1, \dots, n+1\}$$

pontos függvényértékre adott közelítések. Ezeknek segítségével elkészítjük az

$$\{|u_i(x_k) - u(x_k)| : k = 0, 1, \dots, n+1, i = 1, 2, 3\}$$

értékeket. Ezek az értékek a különböző módszerek valódi megoldáshoz képest vett  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  pontokban mért abszolút hibáját adják meg. Ahhoz, hogy a felosztási pontok számának függvényében meghatározhassuk a módszerek összes hibáját, az egyes  $n$ -ekre a felosztási pontokban felvett abszolút hibákat átlagoljuk. Így megkapjuk adott  $n$ -re az adott módszer összes hibáját a pontos megoldáshoz képest. Legyen  $\underline{U}_i \in \mathbb{R}^{n+2}$  a megfelelő módszerre az abszolút hibák vektora, vagyis

$$(U_i)_k = |u_i(x_k) - u(x_k)| : k = 0, 1, \dots, n+1, i = 1, 2, 3.$$

Ekkor az összes hiba adott  $n$ -re

$$\|\underline{U}_i\|_{l_2} \cdot \sqrt{h} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n+1} |u_i(x_k) - u(x_k)|^2 \cdot h}$$

lesz, ahol

$$h = \frac{b-a}{n+1} = \frac{\frac{9\pi}{4} - 0}{n+1}$$

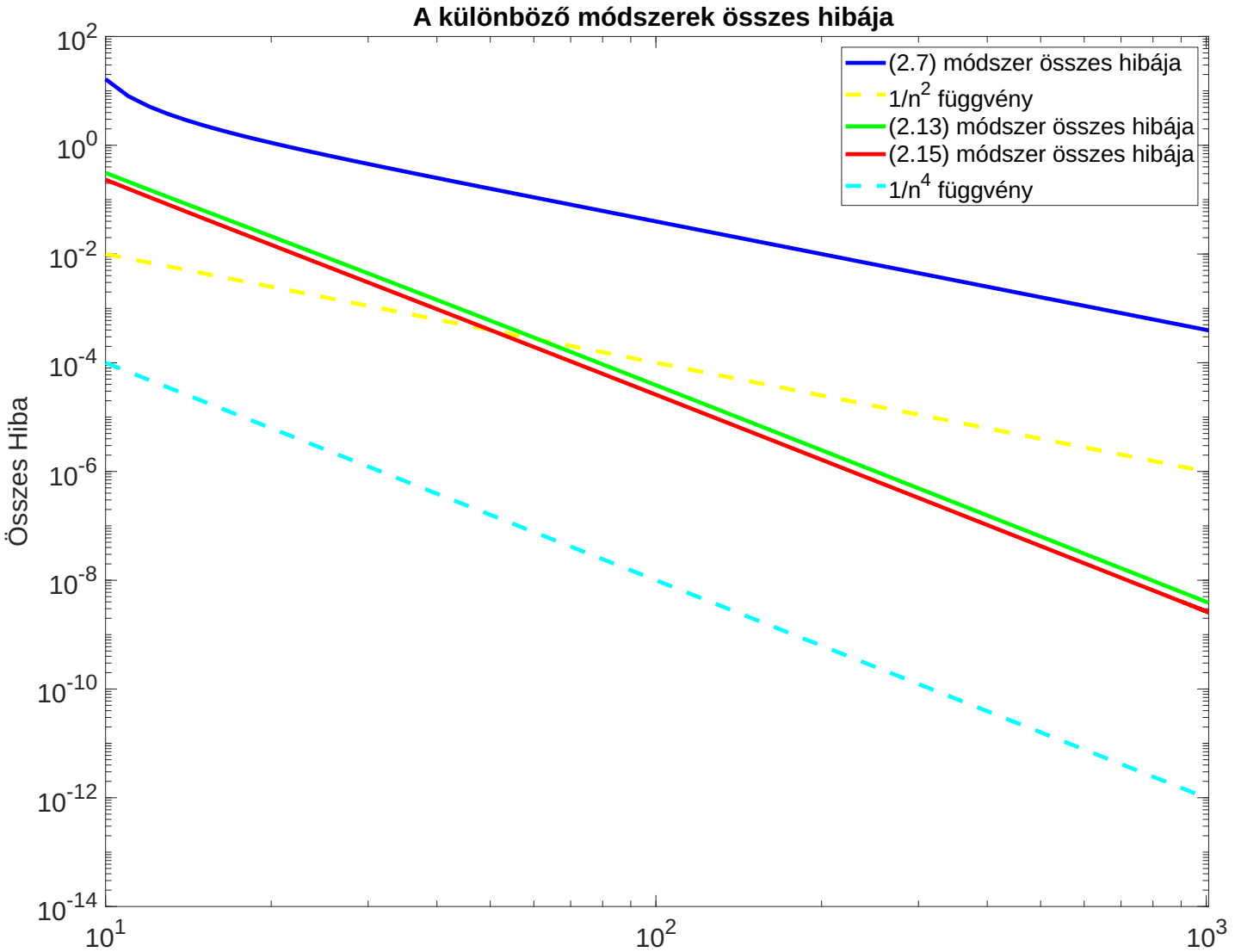
a lépésköz értéke. Ennek megfelelően legyen

$$y_i(n) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n+1} |u_i(x_k) - u(x_k)|^2 \cdot h}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

a három módszer összes hibája az  $n$ , vagyis a felosztási pontok számának függvényében.

Tehát  $y_1(n)$  az (2.7) az módszer összes hibája,  $y_2(n)$  az (2.13) módszeré,  $y_3(n)$  pedig az (2.15) módszeré. Ábrázoljuk ezeket az  $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$  függvényeket ugyanabban a koordináta rendszerben. Összehasonlításképpen ábrázoljuk ezek mellett az  $f(n) = \frac{1}{n^2}$  és  $g(n) = \frac{1}{n^4}$  függvényeket is. Mivel  $h = \frac{b-a}{n+1}$ , ezért  $f(n) = O(h^2)$  és  $g(n) = O(h^4)$ .

A tengelyek legyenek logaritmikus beosztásúak.

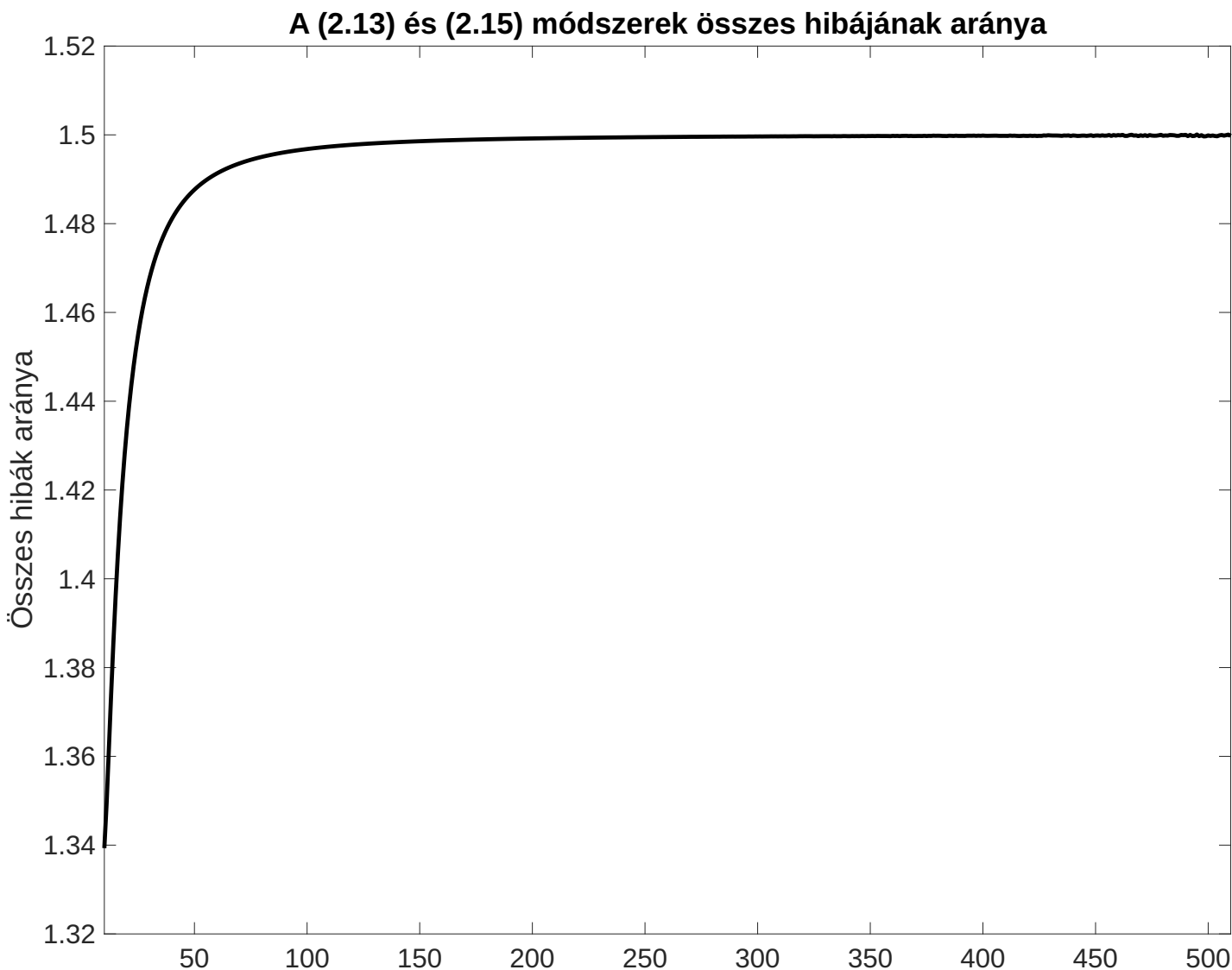


2.1. ábra. Y tengely: A (2.17) szerinti  $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$  függvények, tehát a (2.7), (2.13) és (2.15) módszerek összes hibája a (2.16) peremértékfeladatra alkalmazva, a  $\frac{1}{n^2}$  és  $\frac{1}{n^4}$  függvények. X tengely:  $10 \leq n \leq 1010$  a felosztási pontok száma.

Ezen példa esetén látszik hogy a negyedrendű közelítésekből adott módszerek tényleg körülbelül két nagyságrenddel kisebb hibát eredményeznek mint amit a másodrendű közelítés felhasználásával adtunk. A (2.7) módszer gráfja a logaritmikus koordinátarendszerben az  $f(n) = \frac{1}{n^2} = O(h^2)$ -el párhuzamos egyenes, míg a (2.13), és (2.15) módszerek gráfja az  $g(n) = \frac{1}{n^4} = O(h^4)$  el párhuzamos egyenes. Tehát ezen példa esetében látható, hogy  $y_1(n) = O(h^2)$  és  $y_2(n), y_3(n) = O(h^4)$ . Vagyis a (2.16) peremérték feladat esetében a módszerek összes hibájának rendje a gyakorlatban megfelel azon közelítés rendjével amellyel a módszert konstruáltuk.

Szintén leolvasható, hogy a (2.15) módszer abszolút hibája mindenhol egy kicsit kisebb, mint az (2.13) módszeré. Alább látható, hogy nagyjából 1.5-szerese az első módszer hibája a másodikénak, és ahogy növeljük a pontok számát, az arány egyre közeledik az 1.5-höz. Ez megegyezik azzal a megfigyeléssel, amit a [3] munka szerzője tett.

Tehát az ábrázolt függvény  $\frac{y_2(n)}{y_3(n)}$  lesz, és most lineáris beosztású koordináta rendszerben:



2.2. ábra. Y tengely: A (2.17)-alapján az  $\frac{y_2(n)}{y_3(n)}$  függvény, tehát a (2.13) és (2.15) módszerek összes hibájának aránya a (2.16) peremértékfeladatra alkalmazva. X tengely:  $10 \leq n \leq 510$  a felosztási pontok száma.



### 3. A kétdimenziós Laplace-operátor közelítése

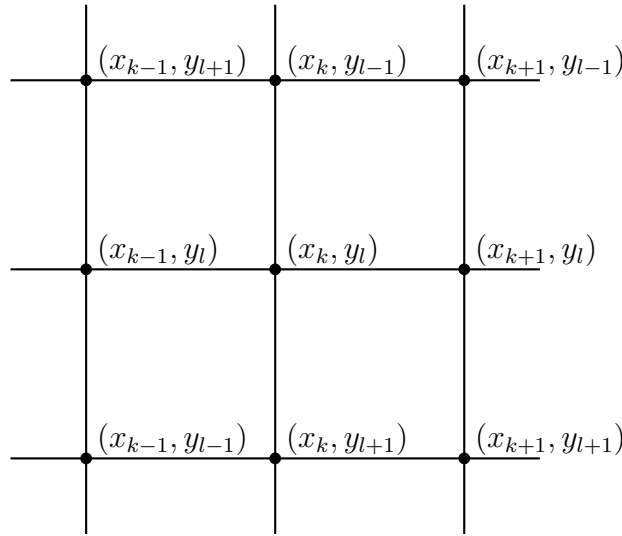
Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétváltozós függvény. Ekkor:

$$\Delta f(x, y) = \partial_x^2 f(x, y) + \partial_y^2 f(x, y).$$

Legyenek az

$$\{(x_{k-1}, y_{l-1}), (x_{k-1}, y_l), (x_{k-1}, y_{l+1}), (x_k, y_{l-1}), (x_k, y_l), (x_k, y_{l+1}), (x_{k+1}, y_{l-1}), (x_{k+1}, y_l), (x_{k+1}, y_{l+1})\}$$

pontok az  $(x_k, y_l)$  középpontú  $2h$  oldalhosszúságú négyzet oldalfelező és csúcspontjai az alábbi módon:



Tehát  $x_{k-1} = x_k - h$ ,  $x_{k+1} = x_k + h$  és  $y_{l-1} = y_l - h$ ,  $y_{l+1} = y_l + h$ .

Legyen  $f(x, y)$  egy a fenti pontokat tartalmazó,  $(x_k, y_l)$  középpontú zárt körlapon  $n + 1$ -szer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor a többváltozós Taylor-tétel alapján:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} f(x_k, y_l)}{i!} (x - x_k)^j (y - y_l)^{i-j} + O((x - x_k)^{n+1} + (y - y_l)^{n+1}). \quad (3.1)$$

#### 3.1. Másodrendű közelítés kétdimenziós esetben

Az [1] könyvben megismert módon a kétdimenziós esetben is alkalmazható a Taylor-módszer, legegyszerűbb esetben négy különböző pontra támaszkodva.

Írjuk fel (3.1)-t egyenként az  $(x_k, y_{l-1})$ ,  $(x_k, y_{l+1})$ ,  $(x_{k-1}, y_l)$ ,  $(x_{k+1}, y_l)$  oldalfelező pontokra,  $n = 3$  esetén. Ekkor  $x - x_k = 0$  vagy  $y - y_l = 0$  lesz minden esetben. Tehát csak a tisztán egy változóban vett parciális deriváltak maradnak meg.  $x - x_k = 0$  esetén az  $y$ -beli,  $y - y_l = 0$  esetén az  $x$ -beli deriváltakat kell csak figyelembe venni:

$$f(x_k, y_{l-1}) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_y^i f(x_k, y_l)}{i!} (-h)^i + O(h^4),$$

$$f(x_k, y_{l+1}) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_y^i f(x_k, y_l)}{i!} (h)^i + O(h^4),$$

$$f(x_{k-1}, y_l) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_x^i f(x_k, y_l)}{i!} (-h)^i + O(h^4),$$

$$f(x_{k+1}, y_l) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_x^i f(x_k, y_l)}{i!} (h)^i + O(h^4).$$

Adjuk össze az előző négy egyenletet. Ebből azt kapjuk, hogy

$$f(x_k, y_{l-1}) + f(x_k, y_{l+1}) + f(x_{k-1}, y_l) + f(x_{k+1}, y_l) = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial_y^i f(x_k, y_l) + \partial_x^i f(x_k, y_l)}{i!} h^i (1 + (-1)^i) + O(h^4).$$

Ekkor hasonlóan, mint egyváltozós esetben, páratlan  $i$  esetén  $(1 + (-1)^i) = 0$ , tehát ezen tagok kiesnek. Hha  $i$  páros, akkor  $(1 + (-1)^i) = 2$ , tehát azon tagokat kétszer számoljuk, a nulladik derivált maga  $f(x_k, y_l)$  lesz mindig. Így kapjuk tehát, hogy

$$f(x_k, y_{l-1}) + f(x_k, y_{l+1}) + f(x_{k-1}, y_l) + f(x_{k+1}, y_l) = 4f(x_k, y_l) + \frac{2}{2!} (\partial_x^2 f(x_k, y_l) + \partial_y^2 f(x_k, y_l)) \cdot h^2 + O(h^4).$$

Ebből átrendezve nyerjük a

$$\partial_x^2 f(x_k, y_l) + \partial_y^2 f(x_k, y_l) = \frac{f(x_k, y_{l-1}) + f(x_k, y_{l+1}) + f(x_{k-1}, y_l) + f(x_{k+1}, y_l) - 4f(x_k, y_l)}{h^2} + O(h^2) \quad (3.2)$$

közelítést. Vagyis sikerült  $O(h^2)$  rendű közelítést adni a  $\Delta f(x_k, y_l)$  értékére.

Ezt a közelítést már felhasználhatjuk bizonyos parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásához, viszont a későbbiekben megpróbálunk egy negyedrendű közelítést is találni.

## 3.2. Magasabb rendű közelítés kétdimenziós esetben

### 3.2.1. A feladat definiálása

Tekintsük az alábbi parciális differenciálegyenletet:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad x, y \in \Omega, \quad (3.3)$$

ahol az  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értékeit szeretnénk közelíteni az  $\Omega = [a, b] \times [a, b]$  halmaz  $\{x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}\} \times \{y_0, y_1, \dots, y_N, y_{N+1}\}$   $h$  lépésközű felosztásának (belső) pontjaiban ahol  $x_0 = a$ ;  $x_{N+1} = b$  és  $y_0 = a$ ;  $y_{N+1} = b$ . Vagyis minden  $k, l \in \{1, 2, \dots, N\}$  -re

$$x_{k-1} = x_k - h; \quad x_{k+1} = x_k + h; \quad y_{l-1} = y_l - h; \quad y_{l+1} = y_l + h.$$

Ismertnek vesszük  $f$  értékeit a felosztás pontjaiban, és feltételezzük hogy  $f$  és  $u$  rendelkeznek a Taylor-tétel felhasznált alakjához szükséges simasági tulajdonságokkal. Továbbá minden  $k \in \{0, 1, \dots, N+1\}$ -re az  $u(a, x_k)$ ,  $u(b, x_k)$ ,  $u(x_k, a)$ , és  $u(x_k, b)$  értékek adott peremfeltételek.

Használhatnánk rögtön a  $\Delta u(x_k, y_l)$ -ra adott, másodrendű (3.2), fentiekben megadott közelítést, viszont adható az egydimenziós esethez hasonlóan egy jobb, negyedrendű közelítés is az egyenlet tulajdonságainak felhasználásával. Ennek levezetésével foglalkozunk ebben a szakaszban.

Ehhez szükségünk lesz a már tárgyalt  $(x_k, y_l)$  körüli négyzet sarokpontjaira is, továbbá az oldalfelvező pontokra is. Az erre vonatkozó ötlet a [2] könyvből származik. Most az ötödik deriváltig kell felírunk a Taylor-formulát mindegyik pontban.

### 3.2.2. Egyenletek felírása

Az oldalfelező pontok esetében már láttuk hogy a nem kizárólag egy változó szerinti deriváltat tartalmazó tagok mindegyike nulla, hiszen  $(x - x_k) = 0$  vagy  $(y - y_l) = 0$  itt is fennáll minden esetben. Innentől az  $u(x_k, y_l) = u_{kl}$  jelölést használjuk, és megfelelően a deriváltakat is. Ezekkel azt kapjuk, hogy

$$u(x_k, y_{l-1}) = \sum_{i=0}^5 \binom{i}{0} \frac{\partial_y^i u_{kl}}{i!} (-h)^i + O(h^6),$$

$$u(x_k, y_{l+1}) = \sum_{i=0}^5 \binom{i}{0} \frac{\partial_y^i u_{kl}}{i!} (h)^i + O(h^6),$$

$$u(x_{k-1}, y_l) = \sum_{i=0}^5 \binom{i}{0} \frac{\partial_x^i u_{kl}}{i!} (-h)^i + O(h^6),$$

$$u(x_{k+1}, y_l) = \sum_{i=0}^5 \binom{i}{0} \frac{\partial_x^i u_{kl}}{i!} (h)^i + O(h^6).$$

A négy egyenlet összeadásakor pedig a páratlan tagok (ha az  $i$  páratlan) ugyanúgy kiesnek, és a páros tagokat ugyanúgy kétszer vesszük. Tehát az  $U_1 = u(x_k, y_{l-1}) + u(x_k, y_{l+1}) + u(x_{k-1}, y_l) + u(x_{k+1}, y_l)$  jelölést bevezetve

$$U_1 = 4u_{kl} + \Delta u_{kl} \cdot h^2 + \frac{1}{12} (\partial_x^4 u_{kl} + \partial_y^4 u_{kl}) \cdot h^4 + O(h^6). \quad (3.4)$$

Most tekintsük az  $(x_{k-1}, y_{l-1})$ ,  $(x_{k-1}, y_{l+1})$ ,  $(x_{k+1}, y_{l-1})$ ,  $(x_{k+1}, y_{l+1})$  csúcspontokat. Ekkor

$$u(x_{k-1}, y_{l-1}) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} u_{kl}}{i!} (-h)^i + O(h^6),$$

$$u(x_{k-1}, y_{l+1}) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} u_{kl}}{i!} (-h)^j (h)^{i-j} + O(h^6),$$

$$u(x_{k+1}, y_{l-1}) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} u_{kl}}{i!} (h)^j (-h)^{i-j} + O(h^6),$$

$$u(x_{k+1}, y_{l+1}) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} u_{kl}}{i!} (h)^i + O(h^6).$$

Tekintsük most az

$$U_2 = u(x_{k-1}, y_{l-1}) + u(x_{k-1}, y_{l+1}) + u(x_{k+1}, y_{l-1}) + u(x_{k+1}, y_{l+1})$$

összeget, amely tehát

$$U_2 = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} u_{kl}}{i!} h^i \left( 1 + (-1)^{i-j} + (-1)^j + (-1)^i \right) + O(h^6).$$

Ekkor  $(-1)^{2j} = 1$  miatt

$$1 + (-1)^{i-j} + (-1)^j + (-1)^i = 1 + (-1)^{i+j} + (-1)^j + (-1)^i = (1 + (-1)^i)(1 + (-1)^j),$$

ahol

$$(1 + (-1)^i)(1 + (-1)^j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (2 \nmid i) \vee (2 \nmid j) \\ 4, & \text{ha } (2 \mid i) \wedge (2 \mid j). \end{cases}$$

Tehát

$$\begin{aligned} U_2 &= \sum_{(2 \mid i)}^5 \sum_{(2 \mid j)}^i \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} u_{kl}}{i!} h^i + O(h^6) = 4 \cdot \sum_{(2 \mid i)}^5 \sum_{(2 \mid j)}^i \frac{4h^i}{(i-j)!(j)!} \partial_x^j \partial_y^{i-j} u_{kl} + O(h^6) = \\ &= 4u_{kl} + \frac{4h^2}{2!} (\partial_x^2 u_{kl} + \partial_y^2 u_{kl}) + \frac{4h^4}{4!} (\partial_x^4 u_{kl} + \partial_y^4 u_{kl}) + \frac{4h^4}{2!2!} \partial_x^2 \partial_y^2 u_{kl} + O(h^6) = \\ &= 4u_{kl} + 2h^2 \Delta u_{kl} + \frac{h^4}{6} (\partial_x^4 u_{kl} + \partial_y^4 u_{kl}) + h^4 \partial_x^2 \partial_y^2 u_{kl} + O(h^6). \end{aligned}$$

Felhasználva a már szerepelt (3.4)

$$U_1 = 4u_{kl} + h^2 \Delta u_{kl} + \frac{h^4}{12} (\partial_x^4 u_{kl} + \partial_y^4 u_{kl}) + O(h^6)$$

egyenlőséget, kapjuk, hogy

$$U_2 + 4U_1 = 20u_{kl} + 6h^2 \Delta u_{kl} + \frac{h^4}{2} (\partial_x^4 u_{kl} + \partial_y^4 u_{kl}) + h^4 \partial_x^2 \partial_y^2 u_{kl} + O(h^6),$$

azaz

$$\Delta u_{kl} = \frac{U_2 + 4U_1 - 20u_{kl}}{6h^2} - \frac{h^2}{12} (\partial_x^4 u_{kl} + 2\partial_x^2 \partial_y^2 u_{kl} + \partial_y^4 u_{kl}) + O(h^4). \quad (3.5)$$

### 3.2.3. Negyedik deriváltak kezelése

Ahogy az egyváltozós esetnél is, a negyedik deriváltak benn maradtak a (3.5) formulában. Viszont  $\Delta$  definíciójának alkalmazásával látható hogy:

$$\partial_x^4 u_{kl} + 2\partial_x^2 \partial_y^2 u_{kl} + \partial_y^4 u_{kl} = \Delta \Delta u_{kl},$$

tehát (3.5) a következő alakba írható:

$$\Delta u_{kl} = \frac{U_2 + 4U_1 - 20u_{kl}}{6h^2} - \frac{h^2}{12} \Delta \Delta u_{kl} + O(h^4). \quad (3.6)$$

Emlékezzünk az [3] forrásból tanult ötletre, amely egydimenziós esetben hasznos volt a negyedik derivált eltüntetésére. Ezt két dimenzióra próbáljuk általánosítani. Vagyis a (3.3) differenciálegyenlet

$$\Delta u(x, y) = f(x, y)$$

mindkét oldalára a Laplace-operátort alkalmazva kapjuk, hogy

$$\Delta \Delta u(x, y) = \Delta f(x, y),$$

ahol  $\Delta f(x, y)$  közelíthető a klasszikus  $O(h^2)$  rendű (3.2) formulával, azaz a

$$F_1 = f(x_k, y_{l-1}) + f(x_k, y_{l+1}) + f(x_{k-1}, y_l) + f(x_{k+1}, y_l)$$

jelölést használva (3.2) szerint,

$$\Delta f_{kl} = \frac{F_1 - 4f_{kl}}{h^2} + O(h^2).$$

Ezt  $\Delta\Delta u_{kl}$  helyére visszahelyettesítve a (3.6) közelítésbe kapjuk, hogy

$$\Delta u_{kl} = \frac{U_2 + 4U_1 - 20u_{kl}}{6h^2} - \frac{h^2}{12} \left( \frac{F_1 - 4f_{kl}}{h^2} + O(h^2) \right) + O(h^4),$$

tehát a

$$\Delta u_{kl} = \frac{U_2 + 4U_1 - 20u_{kl}}{6h^2} - \frac{F_1 - 4f_{kl}}{12} + O(h^4). \quad (3.7)$$

negyedrendű közelítést nyertük a Laplace-operátor  $(x_k, y_l)$  pontbeli értékeire.

Fontos megjegyezni hogy ezen közelítéshez felhasználtuk a (3.3)-ban szereplő differenciálegyenlet struktúráját, ezért komolyabb változtatás nélkül csak ilyen alakú differenciálegyenletekre lesz alkalmazható. A közelítés tartalmazza a differenciálegyenletben szereplő  $f$  függvény rácspontokbeli megfelelő értékeit, de ez nem fog problémát jelenteni abban hogy egy peremérték feladatra alkalmazzuk a közelítést.

### 3.3. A feladatra felírt egyenletrendszer

Ha a (3.7) formulát behelyettesítjük a  $\Delta u(x_k, y_l)$  helyére a (3.3) kétdimenziós peremértékfeladatba, és az  $u$ -t tartalmazó tagokat balra, az  $f$ -et tartalmazó tagokat jobbra rendezzük, akkor a következő közelítő egyenletrendszert kapjuk a felosztás pontjaiban a  $u$  függvény pontos értékeire,

$$\frac{1}{6h^2}U_2 + \frac{4}{6h^2}U_1 + \frac{-20}{6h^2}u_{kl} = \frac{1}{12}F_1 + \frac{8}{12}f_{kl}, \quad k, l \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (3.8)$$

Ezen formula helyességét ellenőrizhetjük összevetve a [2] könyben látott azonos eredménnyel. Ez egy  $N^2$  ismeretlenes egyenletrendszer az  $u(x_k, y_l) : k, l \in \{1, 2, \dots, N\}$  pontokbeli függvényértékekre. A jelölések a levezetés során használt definíciók szerint az alábbiak:

$$\begin{aligned} U_1 &= u(x_k, y_{l-1}) + u(x_k, y_{l+1}) + u(x_{k-1}, y_l) + u(x_{k+1}, y_l), \\ U_2 &= u(x_{k-1}, y_{l-1}) + u(x_{k-1}, y_{l+1}) + u(x_{k+1}, y_{l-1}) + u(x_{k+1}, y_{l+1}), \\ F_1 &= f(x_k, y_{l-1}) + f(x_k, y_{l+1}) + f(x_{k-1}, y_l) + f(x_{k+1}, y_l), \\ u_{kl} &= u(x_k, y_l), \\ f_{kl} &= f(x_k, y_l). \end{aligned}$$

Azt reméljük hogy mivel a (3.7) negyedrendű közelítést használtuk a Laplace-operátorra az egyenletrendszer elkészítéséhez, ezért annak megoldása is  $O(h^4)$  pontossággal fogja közelíteni a peremértékfeladat valódi megoldását a rács pontjaiban. Erről a későbbiekben gyakorlati teszt alapján akarunk majd információt szerezni.

### 3.4. Mátrixos forma az egyenletrendszerre

Ahhoz hogy egyszerűen implementálni tudjuk ezen módszert, az egyenletrendszert érdemes ismét mátrixvektor formában is megadni.

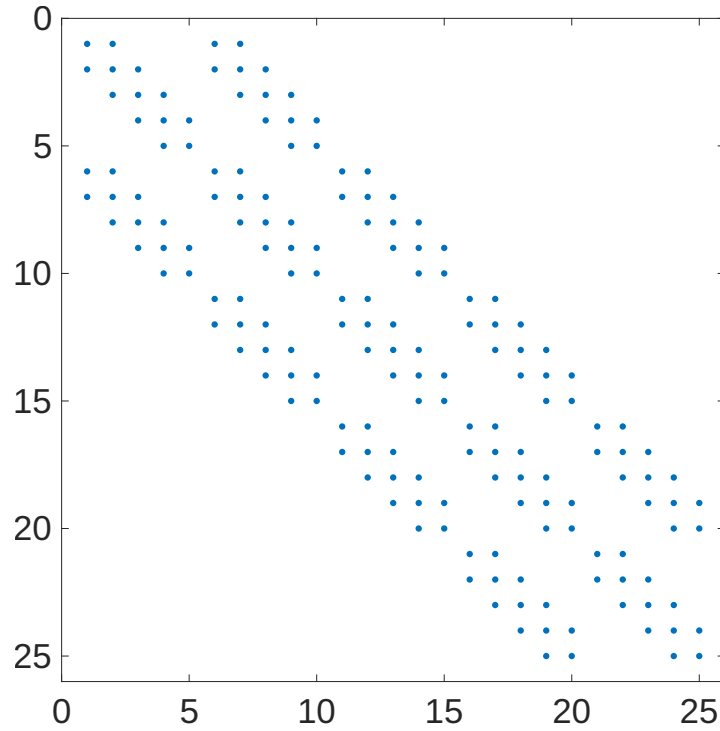
Legyen  $\underline{u}$  az ismeretlenek  $N^2$  dimenziós vektora, amelyet úgy kapunk hogy a  $\Omega = [a, b] \times [a, b]$  halmaz  $\{x_0, \dots, x_{N+1}\} \times \{y_0, \dots, y_{N+1}\}$  felosztásának  $\{x_1, \dots, x_N\} \times \{y_1, \dots, y_N\}$  belső gridpontjaiban kerestett függvényértékeket mint változók soronként vesszük és egy  $N^2$  hosszú vektorba rendezzük őket az alábbi módon,

$$\underline{u} = [u(x_1, y_1), \dots, u(x_N, y_1), u(x_1, y_2), \dots, u(x_N, y_2), \dots, u(x_1, y_N), \dots, u(x_N, y_N)]^T.$$

Az ilyen alakú ismeretlenekből álló vektorra a (3.8) véges differencia közelítések úgy hatnak hogy egy adott pont esetében annak szomszédait és az ennél eggyel távolabb lévő (sarok) pontokat vesszük figyelembe, ahogy azt a fejezet elején található ábra is szemléltet. Összefoglalva a közelítő Laplace hatásának a következő  $A \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$  mátrix felel meg.

Az  $A$  főátlóján végig az (3.8)-ból leolvasott  $u(x_k, y_l)$  együtthatója, vagyis  $\frac{-20}{6h^2}$  áll, hiszen ezek az elemek felelnek meg az adott ismeretlen pontbeli függvényérték (3.8) közelítés szerinti együtthatójának. Minden sorban az átlóelemektől jobbra és balra ha van ilyen szomszéd akkor az (3.8)-ból leolvasott  $U_1$  együtthatója, vagyis  $\frac{4}{6h^2}$  áll. Minden sorban az átlóelemektől  $N$ -el jobbra és balra ha van ilyen elem akkor az  $U_1$  együtthatója, vagyis  $\frac{4}{6h^2}$  áll. Hiszen ezek az elemek felelnek meg az adott ismeretlen pont szomszédaiban lévő függvényértékek (3.8) közelítés szerinti együtthatójának. Végül minden sorban az átlóelemektől  $N-1$ -el és  $N+1$ -el jobbra és  $N-1$ -el és  $N+1$ -el balra ha van ilyen elem akkor az (3.8)-ból leolvasott  $U_2$  együtthatója, vagyis  $\frac{1}{6h^2}$  áll, hiszen ezek az elemek felelnek meg az adott ismeretlen ponttól eggyel távolabb lévő sarokpontokbeli függvényértékek (3.8) közelítés szerinti együtthatójának.

Az  $A$  mátrix nemnulla elemeinek pozícióját a következő ábra mutatja  $N = 5$  esetén:

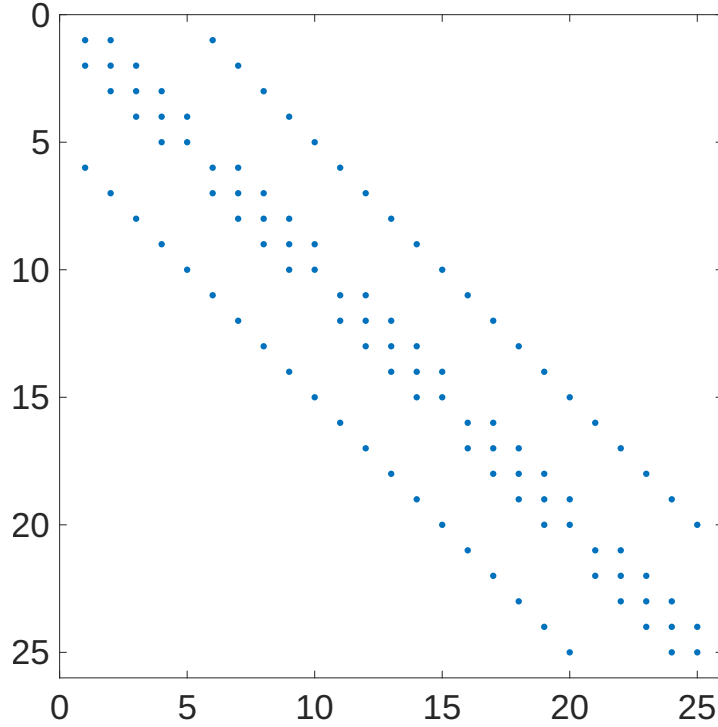


3.3. ábra. Az  $A$  mátrix nemnulla elemeinek pozíciója  $N = 5$  esetén.

Hasonló módon meghatározható az egyenletrendszer jobb oldala. A (3.8) közelítés szerinti együtthatóival az  $f(x_k, y_l)$  és  $f(x_k, y_{l-1}), f(x_k, y_{l+1}), f(x_{k-1}, y_l), f(x_{k+1}, y_l)$  ismert függvényértékeknek. Legyen

$$\underline{f} = [f(x_1, y_1) \quad \cdots \quad f(x_N, y_1) \quad f(x_1, y_2) \quad \cdots \quad f(x_N, y_2) \quad \cdots \quad f(x_1, y_N) \quad \cdots \quad f(x_N, y_N)]^T.$$

az  $f$  ismert értékei a rácspontokon az  $\underline{u}$ -nak megfelelően soronként egy  $N^2$  hosszú vektorba rendezve. Ekkor erre a vektorra, összefoglalva a közelítő Laplace hatásának az alábbi  $Q \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$  mátrix felel meg. A  $Q$  főátlóján végig a (3.8) képletből kiolvasható  $f(x_k, y_l)$  együttható, vagyis  $\frac{8}{12}$  áll. Minden sorban az átlóelemektől jobbra és balra (ha van ilyen szomszéd), akkor az (3.8)-ból leolvasott  $F_1$  együtthatója, vagyis  $\frac{1}{12}$  szerepel. Minden sorban az átlóelemektől  $N$ -el jobbra és balra (ha van ilyen elem), akkor az  $F_1$  együtthatója, vagyis  $\frac{1}{12}$  áll. A  $Q$  mátrix nemnulla elemeinek pozícióját a következő ábra mutatja  $N = 5$  esetén:



3.4. ábra. A  $Q$  mátrix nemnulla elemeinek pozíciója  $N = 5$  esetén.

Viszont ezen kívül még szükség van a peremértékek megfelelő együttthatóval való hozzávételére. Legyen

$$\underline{up}_0 = [u(x_0, y_0), u(x_1, y_0), \dots, u(x_{N+1}, y_0)],$$

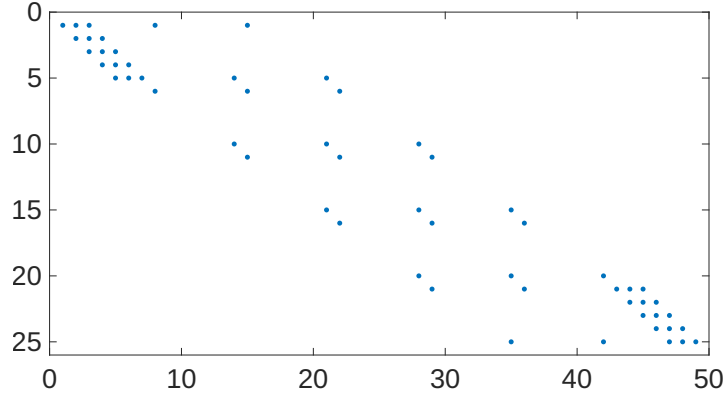
$$\{\underline{up}_i = [u(x_0, y_i), 0, \dots, 0, u(x_{N+1}, y_i)] : i = 1, 2, \dots, N\},$$

$$\underline{up}_{N+1} = [u(x_0, y_{N+1}), u(x_1, y_{N+1}), \dots, u(x_{N+1}, y_{N+1})],$$

és összegezve az  $u$ -hoz tartozó peremértékeket tartalmazó  $(N + 2)^2$  dimenziós vektor ezen jelölésekkel

$$\underline{up} = [\underline{up}_0 \quad \underline{up}_1 \quad \dots \quad \underline{up}_N \quad \underline{up}_{N+1}]^T.$$

A (3.8) formula alapján pedig a  $B \in \mathbb{R}^{N^2 \times (N+2)^2}$  ehhez a vektorhoz tartozó együtttható mátrix az alábbi módon néz ki. A  $B$  bal felső és a jobb alsó  $N \times (N + 2)$ -es részmátrixainak főátlójában végig az  $U_1$  együttthatója, vagyis  $\frac{4}{6h^2}$  áll, továbbá ezen részmátrixokban a főátlótól balra és jobbra (ha van ilyen szomszéd), akkor  $U_2$  együttthatója, vagyis  $\frac{1}{6h^2}$  áll. A  $B$  középső  $N^2 \times N(N + 2)$ -es részmátrixának a főátlóján fekvő  $N \times (N + 2)$ -es részmátrixainak bal felső és jobb alsó elemében  $U_1$  együttthatója, vagyis  $\frac{4}{6h^2}$  áll, továbbá minden ezen részmátrixoktól balra és jobbra lévő  $N \times (N + 2)$ -es részmátrixban ha van ilyen akkor azok bal felső és jobb alsó elemében  $U_2$  együttthatója vagyis  $\frac{1}{6h^2}$  áll. A  $B$  mátrix nemnulla elemeinek pozícióját a következő ábra mutatja  $N = 5$  esetén:



3.5. ábra. Az  $B$  mátrix nemnulla elemeinek pozíciója  $N = 5$  esetén.

Végül az  $f$  értékeire is szükség van a peremen, amelyhez legyen:

$$\underline{fp}_0 = [f(x_1, y_0), f(x_2, y_0), \dots, f(x_N, y_0)],$$

$$\{\underline{fp}_i = [f(x_0, y_i), 0, \dots, 0, f(x_{N+1}, y_i)] : i = 1, 2, \dots, N\},$$

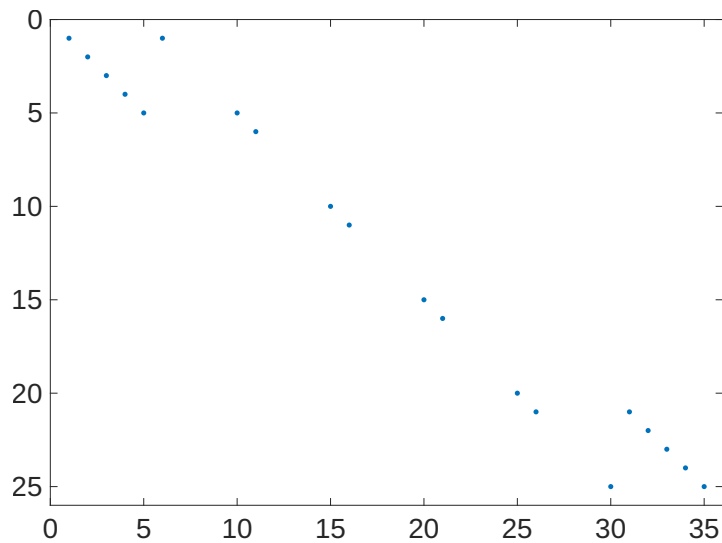
$$\underline{fp}_{N+1} = [f(x_1, y_{N+1}), f(x_2, y_{N+1}), \dots, f(x_N, y_{N+1})],$$

és összegezve az  $f$ -hoz tartozó peremértékeket tartalmazó  $N(N+2)$  dimenziós vektor ezen jelölésekkel

$$\underline{fp} = [\underline{fp}_0, \underline{fp}_1, \dots, \underline{fp}_N, \underline{fp}_{N+1}]^T.$$

A (3.8) formula alapján pedig a  $P \in \mathbb{R}^{N^2 \times N(N+2)}$  vektorhoz tartozó együtthatómátrix az alábbi módon néz ki.

A  $P$  bal felső és a jobb alsó  $N \times N$ -es részmátrixainak főátlójában végig az  $F_1$  együtthatója, vagyis  $\frac{1}{12}$  áll, továbbá A  $P$  középső  $N^2 \times N^2$ -es részmátrixának a főátlóján fekvő  $N \times N$ -es részmátrixainak bal felső és jobb alsó elemében szintén  $F_1$  együtthatója, vagyis  $\frac{1}{12}$  áll. A  $P$  mátrix nemnulla elemeinek pozícióját a következő ábra mutatja  $N = 5$  esetén:



3.6. ábra. Az  $P$  mátrix nemnulla elemeinek pozíciója  $N = 5$  esetén.



Ezen definíciókkal a (3.8) egyenletrendszer az alábbi alakra hozható:

$$A \cdot \underline{u} = Q \cdot \underline{f} + P \cdot \underline{fp} - B \cdot \underline{up} . \quad (3.9)$$

Itt a jobb oldalon minden vektor és mátrix számokból áll, a bal oldalon pedig az  $A$  együttható mátrix mellett az  $\underline{u}$  az ismeretlenek vektora.

### 3.5. Mátrixos forma a másodrendű közelítésből adott módszerhez

Ahogy már korábban utaltam rá, egy a (3.9)-höz hasonló egyenletrendszert felírhatunk csak a (3.2) másodrendű közelítés felhasználásával is. Ezt az  $u$  függvény rácspontokban vett értékeire alkalmazva a (3.8)-nak megfelelő jelöléssel az  $U_1$ -re, az

$$\begin{aligned} \Delta u(x_k, y_l) &= \frac{u(x_k, y_{l-1}) + u(x_k, y_{l+1}) + u(x_{k-1}, y_l) + u(x_{k+1}, y_l) - 4u(x_k, y_l)}{h^2} + O(h^2) = \\ &= \frac{1}{h^2} U_1 + \frac{-4}{h^2} u(x_k, y_l) + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

közelítésre jutunk. Ha ezt a másodrendű közelítést  $\Delta u(x_k, y_l)$  helyére behelyettesítjük a (3.3) kétdimenziós peremértékfeladatba, akkor a

$$\frac{1}{h^2} U_1 + \frac{-4}{h^2} u_{kl} = f_{kl} , \quad k, l \in \{1, 2, \dots, N\} . \quad (3.11)$$

$N^2$  ismeretlenes egyenletrendszert nyerjük a  $u(x_k, y_l) : k, l \in \{1, 2, \dots, N\}$  pontokbeli függvényértékekre. A jelölések megfelelnek a (3.8) alatt látott definícióknak.

Az egydimenziós közelítések alkalmazásával nyert tapasztalatok alapján itt is azt reméljük hogy ezen egyenletrendszer hibája körülbelül másodrendű lesz a valódi, pontos megoldáshoz képest. Erről a későbbiekben egy konkrét peremértékfeladatra lefuttatott teszt alapján szeretnénk információt szerezni.

Innen tehát (3.9)-hez hasonlóan elkészíthetünk egy összefoglaló mátrixos felírást. Legyen

$$\begin{aligned} \underline{u} &= [u(x_1, y_1), \dots, u(x_N, y_1), u(x_1, y_2), \dots, u(x_N, y_2), \dots, u(x_1, y_N), \dots, u(x_N, y_N)]^T , \\ \underline{f} &= [f(x_1, y_1), \dots, f(x_N, y_1), f(x_1, y_2), \dots, f(x_N, y_2), \dots, f(x_1, y_N), \dots, f(x_N, y_N)]^T , \end{aligned}$$

és a peremértékeket tartalmazó vektor,

$$\begin{aligned} \underline{up}_0 &= [u(x_1, y_0), u(x_2, y_0), \dots, u(x_N, y_0)] , \\ \{\underline{up}_i &= [u(x_0, y_i), 0, \dots, 0, u(x_{N+1}, y_i)] : i = 1, 2, \dots, N\} , \\ \underline{up}_{N+1} &= [u(x_1, y_{N+1}), u(x_2, y_{N+1}), \dots, u(x_N, y_{N+1})] , \end{aligned}$$

tehát összegezve az  $\underline{up}$  peremértékeket tartalmazó  $N(N+2)$  dimenziós vektor ezen jelölésekkel

$$\underline{up} = [\underline{up}_0, \underline{up}_1, \dots, \underline{up}_N, \underline{up}_{N+1}]^T .$$

Ekkor a (3.11) egyenletrendszernek megfelelő, az  $\underline{u}$  ismeretlenvektorhoz tartozó együttható mátrix struktúrája megegyezik a (3.9) meghatározásában látott  $Q$  mátrixéval, míg a peremértékek  $\underline{up}$  vektorához tartozó mátrix struktúrája megegyezik a (3.9) meghatározásában látott  $P$  mátrixéval. De fontos különbség hogy

a  $Q$  főátlójában szereplő számok most a (3.11) szerinti  $u_{kl}$  együtthatói, vagyis végig  $\frac{-4}{h^2}$  lesznek, továbbá a főátlón kívüli nemnulla számok mindenhol a (3.11) szerinti  $U_1$  együtthatói, vagyis  $\frac{1}{h^2}$  lesz. Szintúgy a  $P$  nemnulla elemei a  $U_1$  együtthatói, vagyis mindenhol  $\frac{1}{h^2}$  lesznek. Ezen meghatározásokkal ellátva a (3.11) egyenletrendszer mátrixos alakja

$$Q \cdot \underline{u} = \underline{f} - P \cdot \underline{up}. \quad (3.12)$$

lesz.

### 3.6. Teszt egy kétdimenziós peremérték feladatra

A (3.12) alakban felírt (3.11) és a (3.9) alakban felírt (3.8) közelítő egyenletrendszereket már jól lehet (például MatLab-ban) implementálni a (3.3)-nál tárgyalt kétdimenziós peremértékfeladat megoldásának numerikus közelítésére. Az (3.11) módszert a másodrendű (3.3) közelítés segítségével direkt módon konstruáltuk, míg a (3.8) módszer elkészítéséhez a (3.5) negyedrendű közelítést használtuk. Ezért azt várjuk hogy a (3.8) bonyolultabb módszer nagyobb pontossággal fogja közelíteni az egyenletrendszer valódi megoldását mint az (3.11) egyszerűbb módszer, és remélhetően a kiszámolt összes hiba rendje meg fog egyezni a megfelelő közelítések rendjével.

Próbaképpen tekintsük az alábbi kétdimenziós peremértékfeladatot

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -400(x^2 + y^2) \sin(20xy), \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \sin(20x), \\ u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = \sin(20y), \\ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ennek pontos megoldása könnyen ellenőrizhetően  $u(x, y) = \sin(20xy)$ .

A két módszer összes hibáját szeretnénk ábrázolni az egy oldalon lévő rácspontok számának függvényében. Ehhez az általános (3.3) feladatnak megfelelően adott  $n$ -re tekintsük a  $[0, 1] \times [0, 1]$  halmaz  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} \times \{y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\}$   $h$  lépésközű egyenletes felosztásának pontjait, ahol  $x_0 = 0$ ;  $x_{n+1} = 1$  és  $y_0 = 0$ ;  $y_{n+1} = 1$  és az

$$\{(x_k, y_0), (x_k, y_{n+1}), (x_0, y_l), (x_{n+1}, y_l) : k = 0, 1, \dots, n+1, l = 0, 1, \dots, n+1$$

pontok a perem pontjai.

Legyen  $\underline{u}_1(n) \in \mathbb{R}^{n^2}$  a (3.11) módszer által a (3.13) peremértékfeladatra adott közelítő megoldások vektora, a  $n$ -nek megfelelően sűrű rácstra, vagyis ha a rács egy oldala a perem pontjai nélkül  $n$  pontból áll. Továbbá legyen  $\underline{u}_2(n) \in \mathbb{R}^{n^2}$  a (3.8) módszer által a (3.13) feladatra adott közelítő megoldások ugyanilyen vektora. Legyen

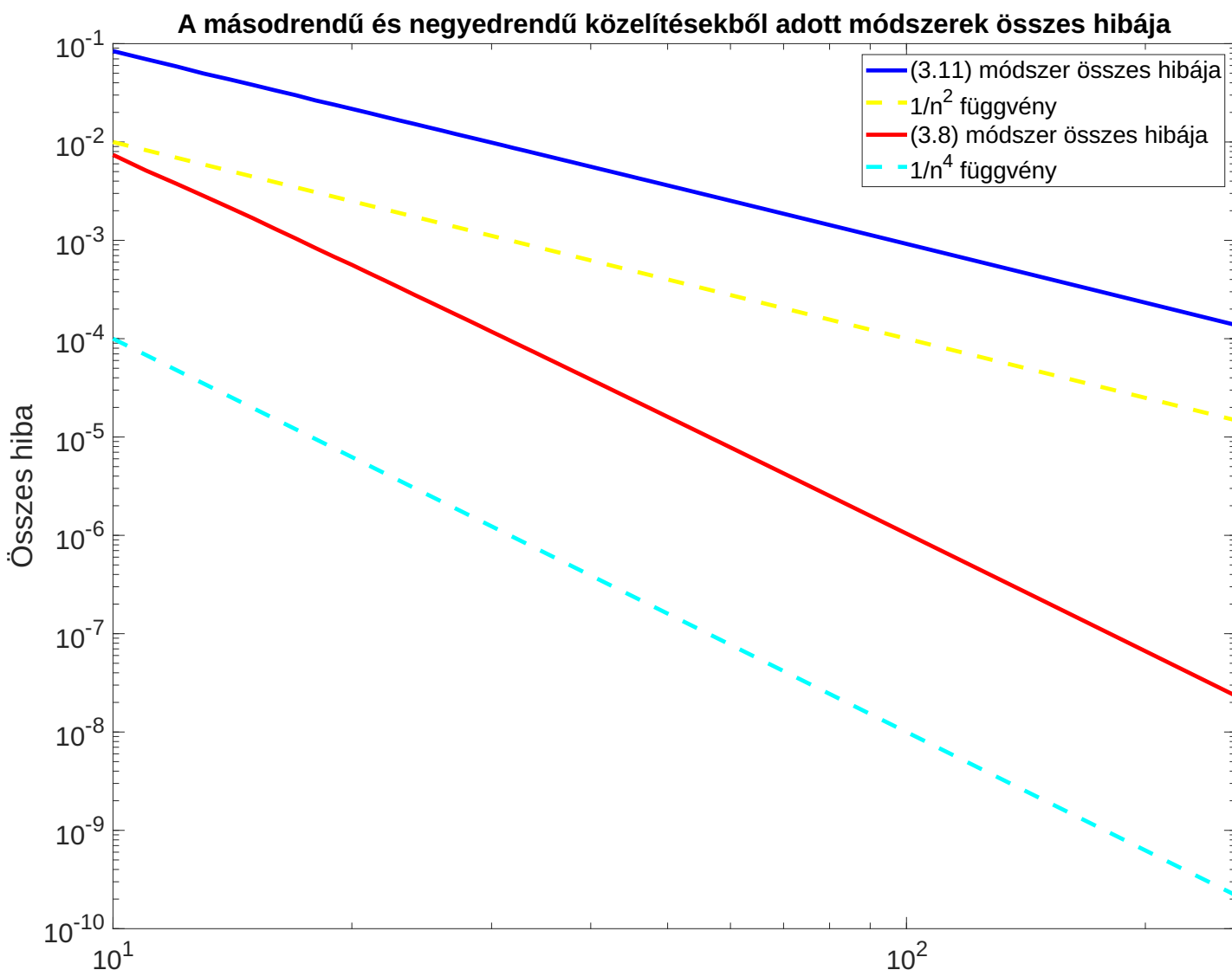
$$\underline{u}(n) = [u(x_1, y_1), \dots, u(x_n, y_1), u(x_1, y_2), \dots, u(x_n, y_2), \dots, u(x_1, y_n), \dots, u(x_n, y_n)]^T,$$

ahol  $u(x, y) = \sin(20xy)$  a pontos megoldás függvénye. Ekkor legyen

$$\begin{aligned} y_1(n) &= h \cdot \|\underline{u}_1(n) - \underline{u}(n)\|_{L_2}, \\ y_2(n) &= h \cdot \|\underline{u}_2(n) - \underline{u}(n)\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tehát  $y_1(n)$  és  $y_2(n)$  rendre az (3.11) és (3.8) módszerek összes hibája a (3.13) peremértékfeladat esetén  $n$ , vagyis a rács egy oldalán lévő felosztási pontok (a perempontok nélkül) számának függvényében.

Ábrázoljuk az  $y_1(n)$  és  $y_2(n)$  függvényeket, illetve a rend ellenőrzéséhez az  $1/n^2 = O(h^2)$  és  $1/n^4 = O(h^4)$  függvényeket, hiszen a lépésköz továbbra is  $h = \frac{b-a}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ .

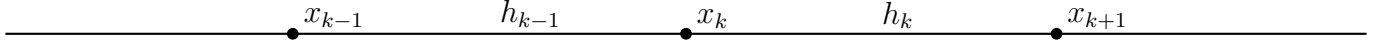


3.7. ábra.  $y$ -tengely: A kétdimenziós (3.13) probléma numerikus megoldásának diszkrét  $L_2$ -hibája az (3.11) és (3.8) módszereket használva, vagyis az (3.14) szerinti  $y_1(n)$  és  $y_2(n)$  függvények.  $x$ -tengely: a rács egy oldalán lévő felosztási pontok száma  $10 \leq n \leq 260$ . Mindkét tengelyen logaritmikus skálát használtunk. A rend ellenőrzéséhez szaggatott vonallal adtuk meg az  $n^{-2}$  és  $n^{-4}$  függvények grafikonját.

Észrevehetjük, hogy érdemes volt a negyedrendű közelítéssel foglalkozni, hiszen az abból nyert módszer hibája láthatóan sokkal kisebb lesz már viszonylag kevés felosztási pont esetén is. Továbbá a módszerek alkalmazása során kapott összes hiba mértéke követi azon Laplace-operátorra adott közelítés rendjét, amelyből az adott módszert konstruáltuk. Tehát az (3.11) esetén valóban  $O(h^2)$  mértékű hibát tapasztalunk, (3.8) esetén pedig  $O(h^4)$  hibát.

## 4. Nem egyenletes felosztás: egydimenziós eset

Ebben a részben visszatérünk az egydimenziós Laplace-operátor, vagyis a második derivált közelítéséhez. Viszont most nem követeljük meg, hogy a vizsgált intervallum felosztása egyenletes legyen. Most is minél magasabb rendű közelítés megkonstruálása a cél, de látni fogjuk, hogy ez nehezebb, mint az egyenletes felosztás esetén.



Tehát az  $x_k$  körüli  $x_{k-1}$  és  $x_{k+1}$  pontok olyanok, hogy  $x_{k-1} = x_k - h_{k-1}$  és  $x_{k+1} = x_k + h_k$ . Most  $h_{k-1}$  és  $h_k$  lehetnek különböző számok.

### 4.1. Másodrendű közelítés nem egyenletes felosztás esetén

Az egyenletes esethez hasonlóan felírhatjuk a Taylor-tételt mindkettő pontra  $n = 3$  esetén, vagyis a harmadik deriváltig megadva a tagokat:

$$f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(x_k)(x_{k-1} - x_k)^i}{i!} + O((x_{k-1} - x_k)^4) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(x_k)(-h_{k-1})^i}{i!} + O(h_{k-1}^4),$$

$$f(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(x_k)(x_{k+1} - x_k)^i}{i!} + O((x_{k+1} - x_k)^4) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(x_k)(h_k)^i}{i!} + O(h_k^4).$$

Tekintsük most az  $h_k f(x_{k-1}) + h_{k-1} f(x_{k+1})$  összeget:

$$h_k f(x_{k-1}) + h_{k-1} f(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(x_k)(h_{k-1}(h_k)^i + h_k(-h_{k-1})^i)}{i!} + O(h_k h_{k-1}^4 + h_{k-1} h_k^4), \quad (4.1)$$

amelyet felbontva az első derivált együtthatója  $(h_{k-1}h_k - h_k h_{k-1}) = 0$  lesz. Azaz kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h_k f(x_{k-1}) + h_{k-1} f(x_{k+1}) &= f(x_k)(h_{k-1} + h_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(h_{k-1}h_k^2 + h_k h_{k-1}^2) + \\ &+ \frac{1}{6} f'''(x_k)(h_{k-1}h_k^3 - h_k h_{k-1}^3) + O(h_{k-1}h_k(h_{k-1}^3 + h_k^3)). \end{aligned}$$

Most  $f''(x_k)$ -ra rendezzük az egyenletet, és kihasználjuk az  $h_{k-1}^3 + h_k^3 = (h_{k-1} + h_k)(h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2)$  azonosságot, amiből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f''(x_k) &= \frac{2h_k f(x_{k-1}) + 2h_{k-1} f(x_{k+1}) - 2(h_{k-1} + h_k) f(x_k)}{h_{k-1}h_k(h_{k-1} + h_k)} - \frac{1}{3}(h_k - h_{k-1}) f'''(x_k) + \\ &+ O(h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ez a közelítés még elsőrendű együtthatóval tartalmazza a harmadik deriváltat, tehát szigorúan csak első rendűnek mondható. Viszont elképzelhető hogy egy adott alkalmazásban tudjuk garantálni, hogy

$$h_k - h_{k-1} \leq O(h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2)$$

legyen. Ilyen esetben másodrendű közelítést kapnánk. Ezt az esetet vizsgáljuk meg az alábbiakban.

Tegyük fel hogy a  $\{h_k : k = 0 \dots n\}$  számok az  $[a, b]$  intervallum egy  $n + 2$  pontból álló  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$  felosztásának lépésközei, ahol  $x_0 = a$  és  $x_{n+1} = b$ . Vagyis  $\{h_k = x_{k+1} - x_k : k = 0, \dots, n\}$ . Ebben a felállásban egy egyenletes felosztás lépésköze

$$h = \frac{b - a}{n + 1}$$

lenne. Tegyük fel, hogy az általunk vizsgált felosztás nagyjából egyenletes. Tehát a  $\{h_k : k = 0 \dots n\}$  számok viszonylag közel vannak  $h$ -hoz. Legyen

$$\{h_k = h + \varepsilon_k : k = 0, 1, \dots, n\}. \quad (4.3)$$

Innen rögtön következik

$$\{h_k - h_{k-1} = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} : k = 0, 1, \dots, n\}.$$

Ezt felhasználva kapjuk hogy

$$O(h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2) = O(h^2 + h\varepsilon_k + h\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k-1}^2 - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k). \quad (4.4)$$

Tegyük fel hogy

$$\{\varepsilon_k \leq O(h^2) : k = 0 \dots n.\} \quad (4.5)$$

Ez jelenti a vizsgált esetben azt, hogy a felosztás nagyjából egyenletes. Ekkor

$$O(h^2 + h\varepsilon_k + h\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k-1}^2 - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k) = O(h^2), \quad (4.6)$$

hiszen az összegben a  $h^2$ -en kívüli összes többi magasabb rendű lesz a feltevés következtében. Hasonlóan

$$h_k - h_{k-1} = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} = O(h^2)$$

szintén teljesül. Innen a (4.2) egyenletbe visszahelyettesítve

$$\frac{1}{3}(h_k - h_{k-1})f'''(x_k) = O(h^2)$$

lesz, továbbá a (4.4) és (4.6) formulákat felhasználva az

$$f''(x_k) = \frac{2h_k f(x_{k-1}) + 2h_{k-1} f(x_{k+1}) - 2(h_{k-1} + h_k) f(x_k)}{h_{k-1} h_k (h_{k-1} + h_k)} + O(h^2) \quad (4.7)$$

általánosan használható, másodrendű közelítést nyerjük. Ahol

$$h = \frac{b - a}{n + 1},$$

a megfelelően sűrű egyenletes felosztás lépésköze. Megjegyzendő hogy ezen közelítés csak a (4.3) és (4.5) feltételek fennállása mellett igaz.

#### 4.1.1. Másodrendű közelítésből adott egyenltrendszer mátrixa

A (4.7) közelítés általánosan használható, de a későbbiekben a negyedrendű közelítéssel való összehasonlításhoz szükségünk lesz ezen közelítés alkalmazására a (2.4)-ban már felírt

$$\begin{cases} u''(x) + c \cdot u(x) = f(x), \\ u(a) = u_a, u(b) = u_b, \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

peremértékfeladat numerikus megoldásához. Legyen  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  az  $[a, b]$  intervallum szabálytalan felosztása, ahol  $x_0 = a$ ;  $x_{n+1} = b$  és

$$\{h_{k-1} = x_k - x_{k-1} : k = 0, 1, \dots, n\}$$

a lépésközök értékei.

A szigorúan másodrendű közelítéshez fel kell tennünk, hogy a  $h_k$  rácstávolságokra a (4.5)-beli becslés ellátva fennáll (ld. a (4.3) formulát is). Tehát ezen felosztási pontokban keressük az  $u$  függvényt, vagyis olyan  $\{u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_n), u(x_{n+1})\}$  és  $\{u''(x_0), u''(x_1), \dots, u''(x_n), u''(x_{n+1})\}$  értékeket, amelyekre

$$\begin{cases} u''(x_k) + c \cdot u(x_k) = f(x_k), \\ u(x_0) = u_a, u(x_{n+1}) = u_b, \\ x_k \in [a, b], \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.8)$$

fennáll. Ezen  $\{u(x_1), \dots, u(x_n)\}$  értékeket tudjuk közelíteni, ha a (4.7)-es közelítést az  $u$  függvényre alkalmazzuk, vagyis

$$u''(x_k) = \frac{2h_k u(x_{k-1}) + 2h_{k-1} u(x_{k+1}) - 2(h_{k-1} + h_k)u(x_k)}{h_{k-1}h_k(h_{k-1} + h_k)} + O(h^2).$$

Ha  $u''(x_k)$ -helyére ezt a közelítést írjuk, akkor a

$$\begin{aligned} \frac{2h_k u(x_{k-1}) + 2h_{k-1} u(x_{k+1}) - 2(h_{k-1} + h_k)u(x_k)}{h_{k-1}h_k(h_{k-1} + h_k)} + c \cdot u(x_k) &= f(x_k), \\ u(x_0) = u_a, u(x_{n+1}) &= u_b, \\ k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.9)$$

közelítő egyenletrendszert kapjuk a feladatra. Ez összetettebb formában és a lehetséges egyszerűsítések után az

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2}{h_{k-1}(h_{k-1} + h_k)}, c - \frac{2}{h_{k-1}h_k}, \frac{2}{h_k(h_{k-1} + h_k)} \right] \cdot \underline{u}_k &= f(x_k), \\ k = 1, 2, \dots, n \\ \underline{u}_k &= [u(x_{k-1}), u(x_k), u(x_{k+1})]^T, \end{aligned}$$

egyenletrendszernek felel meg.

Ezt a (2.8) jelölés alapján az

$$A \cdot \underline{u} = \underline{f} - \underline{u}_0$$

alakba hozhatjuk, ahol

$$\underline{u} = [u(x_1), \dots, u(x_n)]^T, \underline{f} = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T, \underline{u}_0 = \left[ \frac{2u(a)}{h_0(h_0+h_1)}, 0, \dots, 0, \frac{2u(b)}{h_n(h_{n-1}+h_n)} \right]^T$$

és a

$$\begin{aligned} \underline{d}_1 &= \left[ \frac{2}{h_1(h_1+h_2)}, \frac{2}{h_2(h_2+h_3)}, \dots, \frac{2}{h_{n-1}(h_{n-1}+h_n)} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \underline{d}_2 &= \left[ c - \frac{2}{h_0 h_1}, c - \frac{2}{h_1 h_2}, \dots, c - \frac{2}{h_{n-1} h_n} \right] \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{d}_3 &= \left[ \frac{2}{h_1(h_0+h_1)}, \frac{2}{h_2(h_1+h_2)}, \dots, \frac{2}{h_{n-1}(h_{n-2}+h_{n-1})} \right] \in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

jelölésekkel

$$A = \text{diag}(n, \underline{d}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{d}_2) + \text{diag}(n, \underline{d}_3, +1).$$

Természetesen  $\underline{u}$  az ismeretlenek vektora.

Ezen közelítő egyenletrendszer esetében is arra számítunk, hogy ahogyan egyenletes felosztás esetén, mivel egy másodrendű közelítést használtunk fel a módszer elkészítéséhez, (4.7)-et, ezért az egyenletrendszer által vétett összes hiba is  $O(h^2)$  mértékű lesz. Ezt a későbbiekben tesztelni fogjuk egy adott peremérték-feladatra.

## 4.2. Magasabb rendű közelítés nem egyenletes felosztás esetén

Nem egyenletes felosztás esetén is tudunk találni negyedrendű közelítést a második deriváltra a (2.4) peremértékfeladat numerikus megoldásához. Viszont csak a  $h_{k-1}$  és  $h_k$  közötti kellően kis eltérés esetén. Emlékeztetünk rá, hogy az ehhez tartozó differenciálegyenlet

$$u''(x) + c \cdot u(x) = f(x)$$

volt. Írjuk fel az  $u(x_{k-1})$  és  $u(x_{k+1})$ -hez tartozó Taylor-sorokat az előzőekhez hasonlóan az ötödrendű tagig nem egyenletes felosztás esetén:

$$\begin{aligned} u(x_{k-1}) &= \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)(-h_{k-1})^i}{i!} + O(h_{k-1}^6) \\ u(x_{k+1}) &= \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)(h_k)^i}{i!} + O(h_k^6). \end{aligned}$$

Az első deriváltat tartalmazó tag eliminációjához az (4.1) egyenlőséghez hasonlóan újból a  $h_k u(x_{k-1}) + h_{k-1} u(x_{k+1})$  összeget használjuk, de most az  $u$  függvényre vonatkozólag és az ötödik tagig írjuk fel az összeget:

$$h_k u(x_{k-1}) + h_{k-1} u(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^5 \frac{u^{(i)}(x_k)(h_k(-h_{k-1})^i + h_{k-1}(h_k^i))}{i!} + O(h_k h_{k-1}^6 + h_{k-1} h_k^6).$$

Ha ezt a szummát kibontjuk és  $u''(x_k)$ -ra rendezzük, akkor a nulladrendű tagok együtthatóiban nem lesz változás. Ezért legyen mostantól:

$$H(u) = \frac{2h_k u(x_{k-1}) + 2h_{k-1} u(x_{k+1}) - 2(h_{k-1} + h_k)u(x_k)}{h_{k-1} h_k (h_{k-1} + h_k)}. \quad (4.10)$$

Ekkor

$$u''(x_k) = H(u) - \frac{1}{12}(h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2)u^{(4)}(x_k) - (h_k - h_{k-1}) \left( \frac{1}{3}u^{(3)}(x_k) + \frac{h_{k-1}^2 + h_k^2}{60}u^{(5)}(x_k) \right) + O\left(\frac{h_{k-1}^5 + h_k^5}{h_{k-1} + h_k}\right). \quad (4.11)$$

Ahhoz hogy ezen közelítésből eliminálni tudjuk a deriváltakat tartalmazó tagokat, és később negyedrendű közelítést kaphassunk, a (4.3) és (4.5) feltételekhez hasonlóan feltesszük hogy

$$\{h_k = h + \varepsilon_k : k = 0, 1, \dots, n\}, \{|\varepsilon_k| \leq O(h^4) : k = 0, 1, \dots, n\}. \quad (4.12)$$

Ahol

$$h = \frac{b-a}{n+1},$$

a megfelelően sűrű egyenletes felosztás lépésköze. Ekkor a (4.11) egyenlet jobb oldalának harmadik és ötödik deriváltat tartalmazó tagjai azonnal egyszerűsíthetők:

$$(h_k - h_{k-1}) \left( \frac{1}{3}u^{(3)}(x_k) + \frac{h_{k-1}^2 + h_k^2}{60}u^{(5)}(x_k) \right) = O(h^4),$$

hiszen

$$h_k - h_{k-1} = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} = O(h^4),$$

$$\left( \frac{1}{3}u^{(3)}(x_k) + \frac{h_{k-1}^2 + h_k^2}{60}u^{(5)}(x_k) \right) = O(1),$$

legalább teljesülnek. Továbbá

$$O\left(\frac{h_{k-1}^5 + h_k^5}{h_{k-1} + h_k}\right) = O\left(\frac{(h + \varepsilon_k)^5 + (h + \varepsilon_{k-1})^5}{2h + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}}\right) \leq O(h^4).$$

(4.12) alapján felhasználva még a

$$h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2 = h^2 + h\varepsilon_k + h\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k-1}^2 - \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k = h^2 + O(h^5),$$

egyenlőséget, nyerjük, hogy

$$u''(x_k) = H(u) - \frac{1}{12}h^2u^{(4)}(x_k) + O(h^4). \quad (4.13)$$

A negyedrendű tagot az egyenletes felosztás esetéhez hasonlóan kifejezhetjük a (2.4)-hez tartozó differenciálegyenletet kétszer deriválva az alábbi módon:

$$u^{(4)}(x) = f''(x) - c \cdot u''(x), \quad (4.14)$$

amelyben felhasználhatjuk a (4.7) másodrendű közelítést, hiszen  $\varepsilon_k \leq O(h^4) \leq O(h^2)$  kellően sűrű felosztás esetén, vagyis ha  $h < 1$ , ezért teljesülnek a (4.3) és (4.5) feltételek. Ekkor (4.7) szerint a bevezetett  $H(u)$  jelöléssel, és  $f$ -re megegyező jelentésű  $H(f)$  jelöléssel

$$u''(x_k) = H(u) + O(h^2),$$

$$f''(x_k) = H(f) + O(h^2),$$

amiből az (4.14) egyenletbe  $u''(x_k)$  és  $f''(x_k)$  helyére behelyettesítve kapjuk, hogy

$$u^{(4)}(x_k) = H(f) - c \cdot H(u) + O(h^2).$$



Ezt az  $u^{(4)}(x_k)$ -ra kapott formulát visszahelyettesítve a (4.13) negyedrendű közelítésbe kapjuk, hogy

$$u''(x_k) = H(u) - \frac{1}{12}h^2(H(f) - c \cdot H(u) + O(h^2)) + O(h^4) = \left(1 + \frac{h^2c}{12}\right) H(u) - \frac{h^2}{12}H(f) + O(h^4). \quad (4.15)$$

Tehát a megfelelő (4.10) jelöléssel  $H(u)$  és  $H(f)$ -re az

$$u''(x_k) = \left(1 + \frac{h^2c}{12}\right) H(u) - \frac{h^2}{12}H(f) + O(h^4). \quad (4.16)$$

negyedrendű közelítést nyertük az  $u$  függvény  $x_k$  pontbeli második deriváltjára.

Majd ezen  $u''(x_k)$ -ra kapott formulát a (4.8)-felosztási pontokban vett peremértékfeladathoz tartozó differenciálegyenletbe visszahelyettesítve végül az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left(1 + \frac{h^2c}{12}\right) H(u) + c \cdot u(x_k) = f(x_k) + \frac{h^2}{12}H(f) + O(h^4),$$

ahol

$$H(u) = \frac{2h_k u(x_{k-1}) + 2h_{k-1} u(x_{k+1}) - 2(h_{k-1} + h_k)u(x_k)}{h_{k-1}h_k(h_{k-1} + h_k)}.$$

Tehát a (4.12) feltételek esetén a negyedrendű (4.15) közelítésből a következő közelítő egyenletrendszert kapjuk a peremérték feladat felosztási pontokbeli megoldására:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{12 + h^2c}{6h_{k-1}(h_{k-1} + h_k)}, c - \frac{12 + h^2c}{6h_{k-1}h_k}, \frac{12 + h^2c}{6h_k(h_{k-1} + h_k)} \right] \cdot \underline{u}_k = \\ & = \left[ \frac{h^2}{6h_{k-1}(h_{k-1} + h_k)}, 1 - \frac{h^2}{6h_{k-1}h_k}, \frac{h^2}{6h_k(h_{k-1} + h_k)} \right] \cdot \underline{f}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.17)$$

ahol

$$\underline{u}_k = [u(x_{k-1}), u(x_k), u(x_{k+1})]^T \quad \text{és} \quad \underline{f}_k = [f(x_{k-1}), f(x_k), f(x_{k+1})]^T.$$

Azt várjuk hogy ezen módszer összes hibája  $O(h^4)$  méretű legyen a (4.12) feltételek esetén a peremértékfeladat valódi megoldásához képest. Az ennek teszteléséhez szükséges mátrixos alakot a következő részben állítjuk elő.

#### 4.2.1. A negyedrendű közelítésből kapott egyenletrendszer mátrixa

A (4.17) negyedrendben közelítő egyenletrendszert a (2.8) jelölés alapján az

$$A \cdot \underline{u} = Q \cdot \underline{f} + \underline{f}_0 - \underline{u}_0$$

alakba hozhatjuk, ahol

$$\begin{aligned} \underline{u} &= [u(x_1), \dots, u(x_n)]^T, \quad \underline{f} = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T \\ \underline{u}_0 &= \left[ u(a) \frac{12+h^2c}{6h_0(h_0+h_1)}, 0 \dots, 0, u(b) \frac{12+h^2c}{6h_n(h_{n-1}+h_n)} \right]^T \\ \underline{f}_0 &= \left[ f(a) \frac{h^2}{6h_0(h_0+h_1)}, 0 \dots, 0, f(b) \frac{h^2}{6h_n(h_{n-1}+h_n)} \right]^T. \end{aligned}$$

Továbbá bevezetve a

$$\begin{aligned}\underline{d}_1 &= \left[ \frac{12+h^2c}{6h_1(h_1+h_2)}, \frac{12+h^2c}{6h_2(h_2+h_3)}, \dots, \frac{12+h^2c}{6h_{n-1}(h_{n-1}+h_n)} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \underline{d}_2 &= \left[ c - \frac{12+h^2c}{6h_0h_1}, c - \frac{12+h^2c}{6h_1h_2}, \dots, c - \frac{12+h^2c}{6h_{n-1}h_n} \right] \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{d}_3 &= \left[ \frac{12+h^2c}{6h_1(h_0+h_1)}, \frac{12+h^2c}{6h_2(h_1+h_2)}, \dots, \frac{12+h^2c}{6h_{n-1}(h_{n-2}+h_n)} \right] \in \mathbb{R}^{n-1},\end{aligned}$$

valamint a

$$\begin{aligned}\underline{q}_1 &= \left[ \frac{h^2}{6h_1(h_1+h_2)}, \frac{h^2}{6h_2(h_2+h_3)}, \dots, \frac{h^2}{6h_{n-1}(h_{n-1}+h_n)} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \underline{q}_2 &= \left[ 1 - \frac{h^2}{6h_0h_1}, 1 - \frac{h^2}{6h_1h_2}, \dots, 1 - \frac{h^2}{6h_{n-1}h_n} \right] \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{q}_3 &= \left[ \frac{h^2}{6h_1(h_0+h_1)}, \frac{h^2}{6h_2(h_1+h_2)}, \dots, \frac{h^2}{6h_{n-1}(h_{n-2}+h_{n-1})} \right] \in \mathbb{R}^{n-1}\end{aligned}$$

jelöléseket

$$\begin{aligned}A &= \text{diag}(n, \underline{d}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{d}_2) + \text{diag}(n, \underline{d}_3, +1), \\ Q &= \text{diag}(n, \underline{q}_1, -1) + \text{diag}(n, \underline{q}_2) + \text{diag}(n, \underline{q}_3, +1).\end{aligned}$$

Természetesen  $\underline{u}$  az ismeretlenek vektora.

### 4.3. Teszt nem egyenletes felosztás esetén

Láttunk egy másodrendű közelítést (4.7)-ben, amelyből a (4.9) módszert nyertük és egy negyedrendű közelítést (4.16)-ben, amelyből a (4.17) egyenletrendszert kaptuk. Ezen módszereket a (2.4) peremértékfeladat numerikus közelítésére szeretnénk alkalmazni nem egyenletes felosztás esetén, ahogyan ahhoz a közelítéseket konstruáltuk. Teszteljük most ezen módszerek hatékonyságát a (2.16) konkrét peremértékfeladaton,

$$\begin{cases} u''(x) + 4 \cdot u(x) = 4 \cdot x, \\ u(0) = 1, \quad u\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{9\pi}{4} + 3, \\ x \in \left[0, \frac{9\pi}{4}\right], \end{cases}$$

amelynek a pontos megoldása

$$u(x) = 3 \sin(2x) + \cos(2x) + x.$$

Fontos megjegyezni hogy most az  $\left[0, \frac{9\pi}{4}\right]$  intervallum egy  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  szabálytalan felosztásával dolgozunk, ahol  $x_0 = a$ ;  $x_{n+1} = b$  és

$$\{h_{k-1} = x_k - x_{k-1} : k = 0, 1, \dots, n\}.$$

A (4.7) közelítésről beláttuk, hogy másodrendű lesz a (4.3) és (4.5) feltételek mellett. A (4.16) közelítésről pedig a (4.12) feltétel teljesülése esetén láttuk be, hogy negyedrendű. Ebben a tesztben is legyen a (4.3) és a (4.12) egy részének megfelelően

$$\{h_k = h + \varepsilon_k : k = 0, 1, \dots, n\},$$

viszont a

$$\{\varepsilon_k : k = 0, 1, \dots, n\}$$

hiba értékeire egyelőre nem adunk meg becslést. Helyette három tesztet is futattunk a (4.7) és (4.17) módszerek használatával. Az első tesztben

$$\{\varepsilon_k = O(h) : k = 0, 1, \dots, n\},$$

a másodikban

$$\{\varepsilon_k = O(h^2) : k = 0, 1, \dots, n\},$$

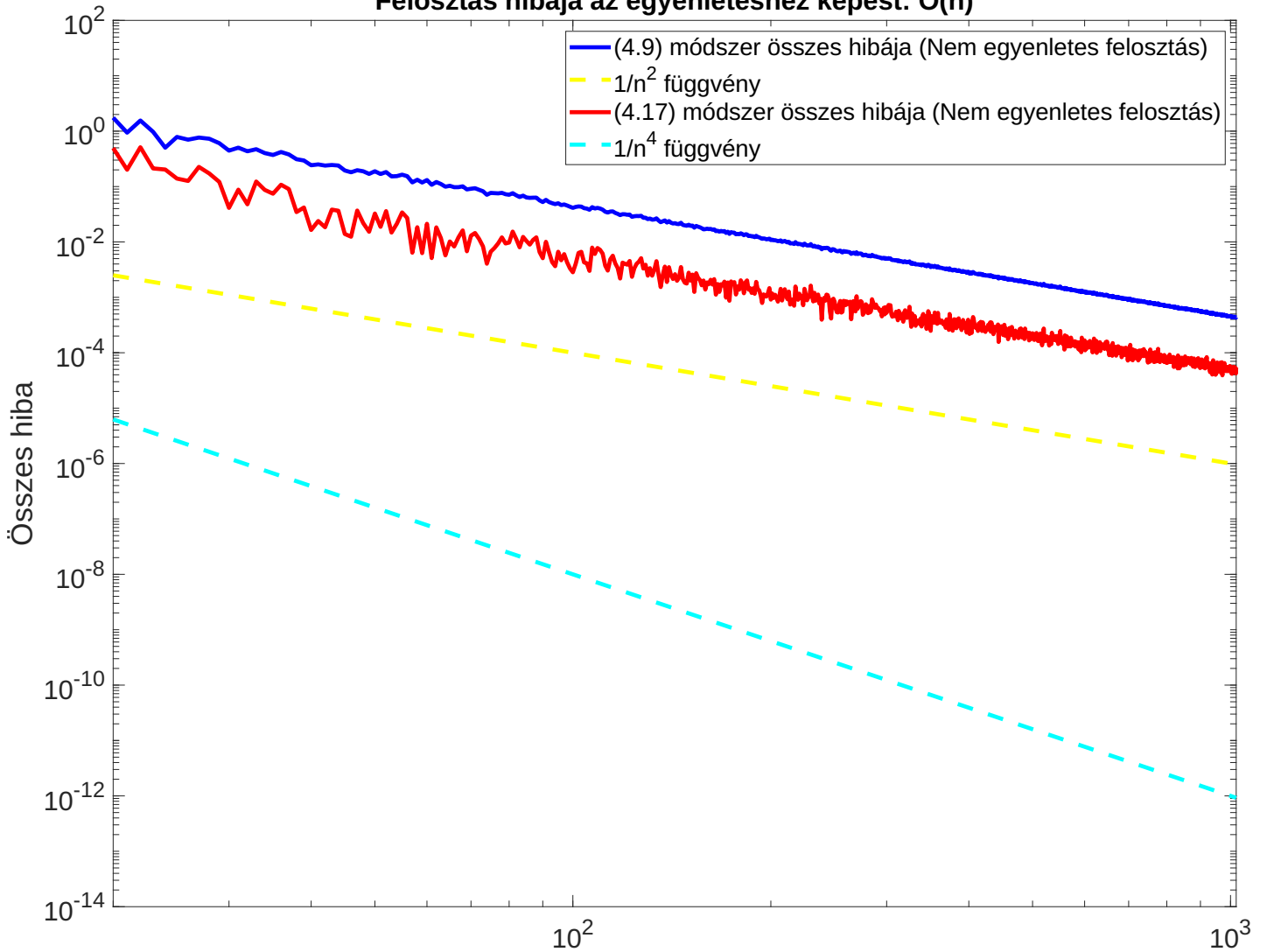
a harmadikban pedig

$$\{\varepsilon_k = O(h^4) : k = 0, 1, \dots, n\}$$

eltéréseket feltételezünk. Ezen tesztek eredményeit fogjuk ábrázolni. Tehát az  $y$  tengelyen megjelenő  $y_1(n)$  függvényt, vagyis az (4.9) módszer összes hibáját, és a megjelenő  $y_2(n)$  függvényt, vagyis az (4.17) módszer összes hibáját. Ezeket a (2.17) függvényekkel teljesen analóg módon határozzuk meg az  $n$ , vagyis a felosztási pontok számának függvényében. Tehát  $\{u(x_k) : k = 1, \dots, n\}$  pontos függvényértékek és az egyes módszerek által adott  $\{u_1(x_k) : k = 1, \dots, n\}$  és  $\{u_2(x_k) : k = 1, \dots, n\}$  közelítő értékek alapján, az  $\{x_1, \dots, x_n\}$  szabálytalan felosztás pontjaiban.

A három ábra alább látható:

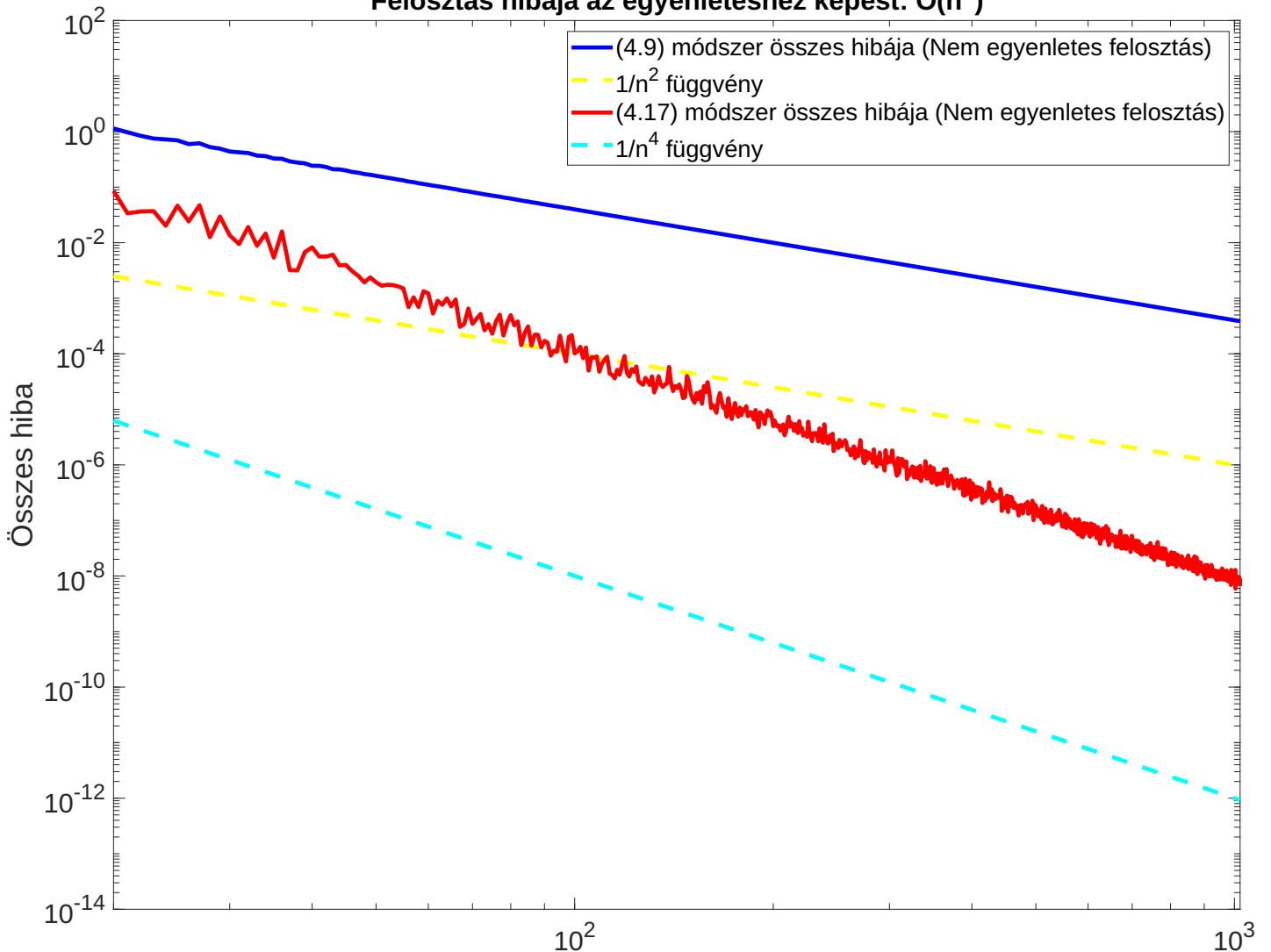
**A másodrendű és a negyedrendű közelítésekből adott módszerek összes hibája**  
**Felosztás hibája az egyenleteshez képest:  $O(h)$**



4.8. ábra. Az ábrán a (4.9) és (4.17) módszerek összes hibája látható, illetve az  $\frac{1}{n^2}$  és  $\frac{1}{n^4}$  függvények, ahol  $n$  a felosztás pontjainak száma. Mindkét tengelyen logaritmikus skálát használtunk. Ebben az esetben  $\{\varepsilon_k = O(h) : k = 0, 1, \dots, n\}$  a lépésközöknek az egyenletes  $h$  lépésköztől vett véletlenszerű eltérése.

Észrevehetjük hogy ekkor mindkét módszer  $O(h^2)$  nagyságú összes hibát ad, és a hiba - bár kisebb a jobb esetben negyedrendű közelítésből adott (4.17) módszernél - erősen fluktuál a véletlenszerű felosztástól függően.

**A másodrendű és a negyedrendű közelítésekből adott módszerek összes hibája**  
**Felosztás hibája az egyenleteshez képest:  $O(h^2)$**

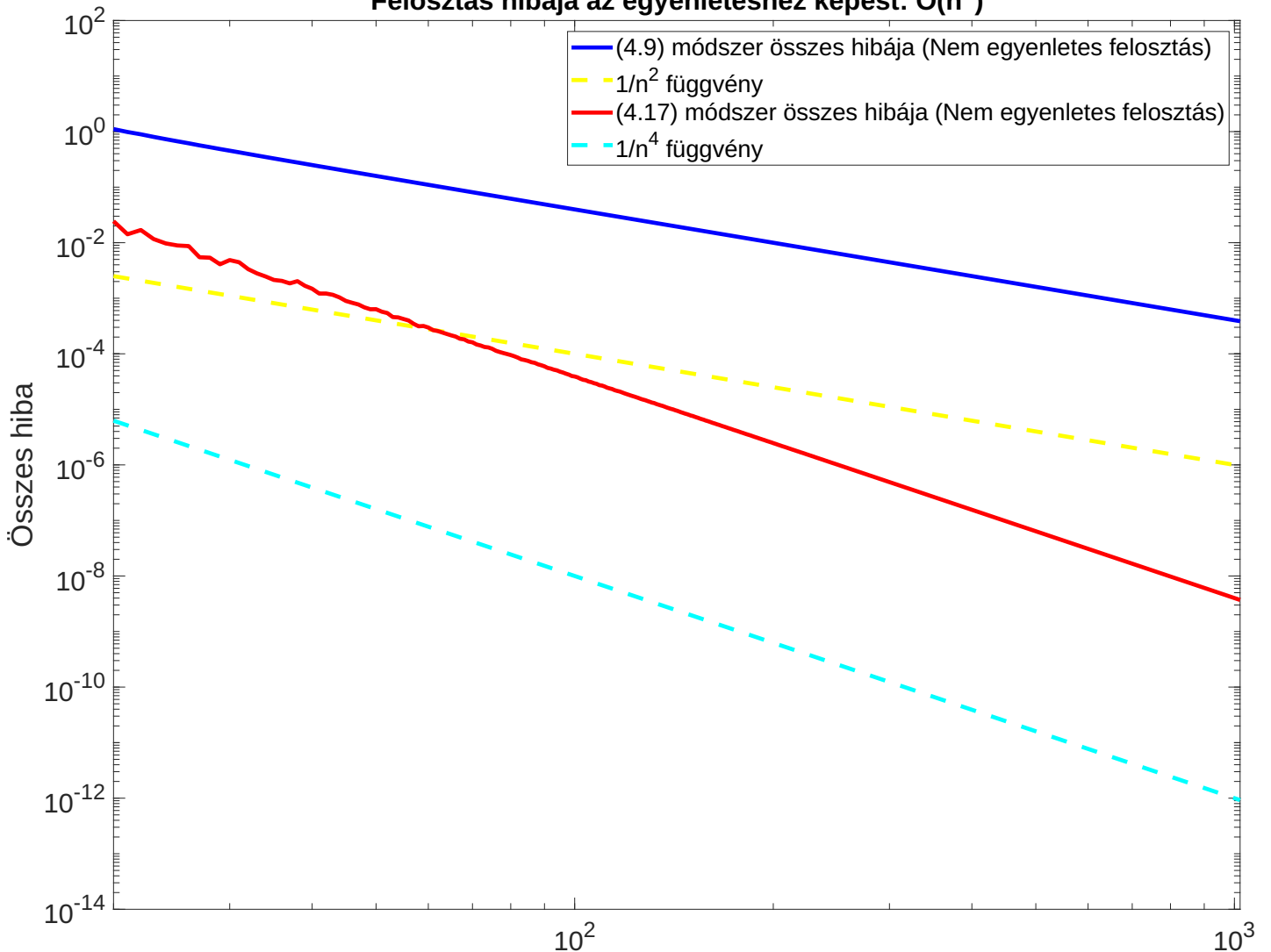


4.9. ábra. Az ábrán a (4.9) és (4.17) módszerek összes hibája látható, illetve az  $\frac{1}{n^2}$  és  $\frac{1}{n^4}$  függvények, ahol  $n$  a felosztás pontjainak száma. Mindkét tengelyen logaritmikus skálát használtunk.

Ebben az esetben  $\{\varepsilon_k = O(h^2) : k = 0, 1, \dots, n\}$  a lépésközöknek az egyenletes  $h$  lépésköztől vett véletlenszerű eltérése.

Ekkor már a  $O(h^4)$ -rendű csökkenéshez áll közelebb a második módszer (4.17) összes hibája, annak ellenére, hogy ezt nem bizonyítottuk a módszer alapjául szolgáló (4.16) közelítésről ezen feltételek mellett. Viszont még mindig sokat változik a hiba a felosztástól függően.

**A másodrendű és a negyedrendű közelítésekből adott módszerek összes hibája**  
**Felosztás hibája az egyenleteshez képest:  $O(h^4)$**



4.10. ábra. Az ábrán a (4.9) és (4.17) módszerek összes hibája látható, illetve az  $\frac{1}{n^2}$  és  $\frac{1}{n^4}$  függvények, ahol  $n$  a felosztás pontjainak száma. Mindkét tengelyen logaritmikus skálát használtunk. Ebben az esetben  $\{\varepsilon_k = O(h^4) : k = 0, 1, \dots, n\}$  a lépésközöknek az egyenletes  $h$  lépésköztől vett véletlenszerű eltérése.

A második módszer (4.17) esetén már tényleg  $O(h^4)$  nagyságú összes hibát tapasztalunk, ahogyan azt a (4.16) formulára levezettük a felosztásbeli véletlen hibákra vonatkozó (4.12) feltételezést használva.

Vagyis tényleg érdemes volt a második módszert vizsgálni és alkalmazni, hiszen az minden esetben alacsonyabb hibát eredményezett mint az első. Ráadásul, ha a felosztásbeli egyenetlenségek kicsik, akkor a módszer annál jobban fog működni, ami az elsőre nem lesz igaz.

## 5. Nem egyenletes felosztás: kétdimenziós eset

### 5.1. Általános helyzetű pontok

Az egyenletes felosztás esetéhez hasonlóan az  $(x, y)$  pont körüli pontokban felvett függvényértékek segítségével szeretnénk kifejezni a  $\Delta f(x, y)$  mennyiséget. Most egy általános esetet vizsgálunk, ahol öt általános helyzetű pont értékét tudjuk az  $(x, y)$  körüli  $h$  sugarú körben. Ezen pontokat az alábbi módon jelöljük,

$$(x + h_{11}, y + h_{12}), (x + h_{21}, y + h_{22}), (x + h_{31}, y + h_{32}), (x + h_{41}, y + h_{42}), (x + h_{51}, y + h_{52}). \quad (5.1)$$

Arra hogy ezen esetben miért érdemes éppen öt ponttal próbálkozni majd a későbbiekben visszatérünk. Ha egy nagyobb ponthalmazunk van, akkor érdemes minden  $k$  és  $l$ -re az  $(x, y)$  ponthoz legközelebbi öt másik rácspontot kiválasztani az (5.1) pontoknak, tehát ha

$$A = \{(x, y) : k = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, \dots, M\}$$

a vizsgált ponthalmaz, akkor egy adott  $(x, y)$  pontra az (5.1)

$$A_{kl} = \{(x + h_{ij}, y + h_{ij}) : i = 1, 2, 3, 4, 5, j = 1, 2\}$$

halmaz pontjai olyanok lesznek, hogy

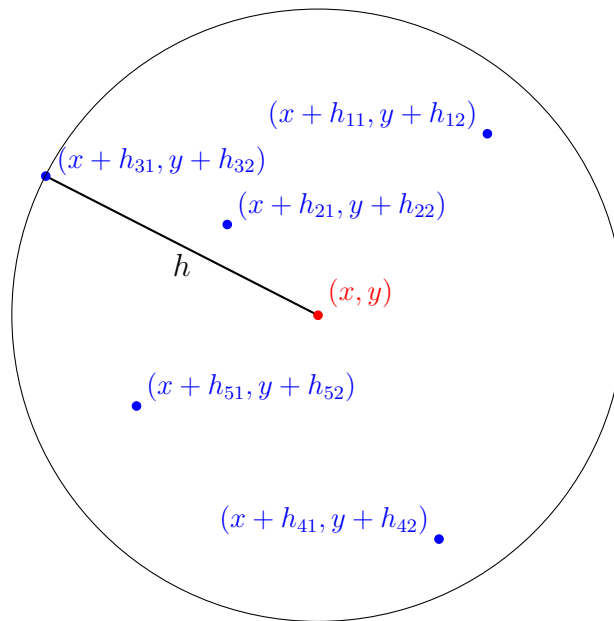
$$\forall (x + h_{ij}, y + h_{ij}) \in A_{kl} \quad \forall (x_p, y_q) \in A - A_{kl} - \{(x, y)\} :$$

$$\|(x, y) - (x + h_{ij}, y + h_{ij})\| \leq \|(x, y) - (x_p, y_q)\|.$$

Legyen ekkor

$$h = \max\{\|(x, y) - (x + h_{ij}, y + h_{ij})\| : i = 1, 2, 3, 4, 5, j = 1, 2\}. \quad (5.2)$$

Az alábbi ábra szemléltet egy ilyen  $A_{kl}$  ponthalmazt, és a  $h$  és  $h$  sugarú  $(x, y)$  körüli (példának választott) köröket.



Ezen pontok segítségével szeretnénk egy legalább elsőrendű közelítést adni az  $f$  kétváltozós függvény  $(x, y)$ -pontbeli Laplace-ára. Írjuk fel újból a megfelelő Taylor-sorokat a másodrendű tagig. A lényeges részek most is az  $(x_k, y_l)$ -től vett távolságok lesznek, ezért az alábbi rövidítést használjuk:

$$x_k = x, y_l = y$$

$$\binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} f(x, y)}{i!} = D_{ij}(x, y)$$

$$f(x + p, y + q) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i D_{ij}(x, y) p^j q^{i-j} + O(p^{n+1} + q^{n+1})$$

Ennek megfelelően:

$$f(x + h_{11}, y + h_{12}) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i D_{ij}(x, y) (h_{11})^j (h_{12})^{i-j} + O(h_{11}^3 + h_{12}^3),$$

$$f(x + h_{21}, y + h_{22}) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i D_{ij}(x, y) (h_{21})^j (h_{22})^{i-j} + O(h_{21}^3 + h_{22}^3),$$

$$f(x + h_{31}, y + h_{32}) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i D_{ij}(x, y) (h_{31})^j (h_{32})^{i-j} + O(h_{31}^3 + h_{32}^3),$$

$$f(x + h_{41}, y + h_{42}) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i D_{ij}(x, y) (h_{41})^j (h_{42})^{i-j} + O(h_{41}^3 + h_{42}^3),$$

$$f(x + h_{51}, y + h_{52}) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i D_{ij}(x, y) (h_{51})^j (h_{52})^{i-j} + O(h_{51}^3 + h_{52}^3).$$

Mindegyik egyenletet megszorozzuk egy megfelelő konstanssal, majd összeadjuk őket. A célunk olyan  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  együtthatók megválasztása, amelyekkel ezen összegben, vagyis az

$$F = c_1 f(x + h_{11}, y + h_{12}) + c_2 f(x + h_{21}, y + h_{22}) + c_3 f(x + h_{31}, y + h_{32}) + c_4 f(x + h_{41}, y + h_{42}) + c_5 f(x + h_{51}, y + h_{52}) \quad (5.3)$$

összegben a  $D_{10}(x_k, y_l)$ ,  $D_{01}(x_k, y_l)$  és  $D_{21}(x, y)$  együtthatói eltűnnek. Ezen felül még a  $D_{20}(x, y)$  és a  $D_{22}(x, y)$  együtthatói megegyeznek. Ezért próbálkozunk ebben az általános esetben 5 pont használatával. Így 4 egyenletet tudunk felírni az együtthatókra, és van esélyünk kiejteni minden, a második deriváltakon kívüli tagot az összegben.

Hiszen ekkor az (5.3) összeg csak a  $D_{00}(x, y) = f(x, y)$ -t és  $D_{20}(x, y) + D_{20}(x, y) = \Delta f(x, y)$ -et tartalmazza valamilyen konstans együtthatókkal. Ekkor már könnyen  $\Delta f(x, y)$ -ra tudnánk rendezni az (5.3) összegből kapott egyenletet a  $A_{kl}$  pontokbeli értékek felhasználásával. Ezen módon egy legalább elsőrendű közelítést próbálunk adni  $\Delta f(x, y)$ -ra.

Tehát a  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  értékeket úgy választjuk meg, hogy kielégítsék az alábbi 5 ismeretlenes homogén egyenletrendszer.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & h_{41} & h_{51} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} & h_{42} & h_{52} \\ h_{11}h_{12} & h_{21}h_{22} & h_{31}h_{32} & h_{41}h_{42} & h_{51}h_{52} \\ h_{11}^2 - h_{12}^2 & h_{21}^2 - h_{22}^2 & h_{31}^2 - h_{32}^2 & h_{41}^2 - h_{42}^2 & h_{51}^2 - h_{52}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$



A mátrix együtthatói megfelelnek azon feltételeknek, hogy az (5.3) összegben  $D_{10}(x_k, y_l)$ ,  $D_{01}(x_k, y_l)$  és  $D_{21}(x, y)$  együtthatóinak mindegyike 0 legyen és a  $D_{20}(x, y)$  és  $D_{22}(x, y)$  együtthatói megegyezzenek. Használjuk az alábbi jelöléseket,

$$H_2 = c_1 h_{11}^2 + c_1 h_{12}^2 + c_2 h_{21}^2 + c_2 h_{22}^2 + c_3 h_{31}^2 + c_3 h_{32}^2 + c_4 h_{41}^2 + c_4 h_{42}^2 + c_5 h_{51}^2 + c_5 h_{52}^2,$$

$$H_3 = c_1 h_{11}^3 + c_1 h_{12}^3 + c_2 h_{21}^3 + c_2 h_{22}^3 + c_3 h_{31}^3 + c_3 h_{32}^3 + c_4 h_{41}^3 + c_4 h_{42}^3 + c_5 h_{51}^3 + c_5 h_{52}^3.$$

Ezen jelöléseket felhasználva, és mivel a  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  értékek kielégítik a (5.4) egyenletrendszert, az  $F$ -el jelölt (5.3)-nál látott összeget teljesülni fog az alábbi egyenlet

$$F = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)f(x, y) + \frac{H_2}{4}\Delta f((x, y) + O(H_3)).$$

Ezt  $\Delta f(x, y)$ -ra rendezve a

$$\Delta f(x, y) = \frac{4F - 4(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)f(x, y)}{H_2} + O\left(\frac{H_3}{H_2}\right) \quad (5.5)$$

egyenletet kapjuk.

Ezen formában hiába tudnánk a háromszög-egyenlőtlenség segítségével  $h$  függvényében felülről becsülni  $H_3$  értékét, a nevezőt nem tudjuk alulról becsülni további feltevések nélkül. A módszer hibája ezért igencsak kérdéses, hiába tűnhet első ránézésre a közelítés elsőrendűnek. Ezen példából megfigyelhető, hogy több messzebbi felosztási pont hozzávétele nem feltétlenül segítene a dolgunkon, legalábbis a Taylor-módszerrel nem. Ha több pontbeli Taylor közelítésre íránk fel a lineáris kombinációjukra vonatkozó egyenletrendszert, akkor annak megoldásai elméletben kijelhetnének magasabb rendű tagokat is, viszont a kapott közelítés rendjére a megoldások bonyolultsága miatt továbbra sem tudnánk adni konkrét becslést.

Ezért a továbbiakban próbálkozzunk olyan esetekkel ahol a pontok nem teljesen véletlenszerűen helyezkednek el. Ilyen esetekben, mint például, amit a következő szekcióban tárgyalunk, már nagyobb sikerre lehet jutni.

## 5.2. Fő koordinátában eltérő rácspontok

Most térjünk vissza az  $(x_k, y_l)$  körüli négyzetes felosztású pontokhoz. A homogén felosztás esetén a leg-egyszerűbb eset az volt, amikor a középponttal az egyik koordinátában megegyező, négy oldalfelező pont segítségével adtunk másodrendű közelítést  $\Delta f(x_k, y_l)$ -re. Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor négy hasonlóan a középponttal egy koordinátában megegyező pont adott, viszont a másik koordinátában tetszőlegesen eltérhetnek a pontok egymástól. A rács tehát egymásra merőleges egyenesek metszéspontjaiból fog állni, viszont az egyes egyenesek közötti távolság nem feltétlenül lesz szabályos.

### 5.2.1. A rács elkészítése

Legyen a felosztandó halmaz a

$$\Omega = [0, u] \times [0, v] \in \mathbb{R}^2 \quad (5.6)$$

téglalap.

Továbbá legyen

$$\{z_0, z_1, \dots, z_{n+1}\}$$

az  $[0, u]$  intervallum  $n + 2$  pontból álló egy egyenletes felosztása, vagyis

$$a = z_{k+1} - z_k = \frac{u}{n+1} : k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

Hasonlóan legyen

$$\{w_0, w_1, \dots, w_{n+1}\}$$

az  $[0, v]$  intervallum  $n + 2$  pontból álló egy egyenletes felosztása, tehát

$$b = w_{k+1} - w_k = \frac{v}{n+1} : k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.8)$$

Itt tehát  $a$  és  $b$  a megfelelő lépésközök. Az egydimenziós esethez hasonlóan, mozgassuk el a perem kivételével ezen pontokat véletlenszerűen valamelyik irányba, egy felülről korlátolt méretű véletlen hibával.

Tehát az  $[0, u]$  intervallum egyenletlen felosztása az

$$x_k = z_k + \varepsilon_k : k = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

pontokból és az  $x_0 = 0$  és  $x_{n+1} = u$  peremből fog állni. Vagyis  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} = 0$ . A  $[0, v]$  intervallum egyenletlen felosztása pedig a

$$y_l = w_l + \delta_l : l = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

pontokból és az  $y_0 = 0$  és  $y_{n+1} = v$  peremből fog állni. Vagyis  $\delta_0 = \delta_{n+1} = 0$ .

Tehát a (5.7) és (5.8) által adott egyenletes felosztás sarokpontjait helyben hagyjuk, hiszen így továbbra is az  $\Omega$  téglalapot osztjuk fel. Az oldalakon lévő további peremértékeket feltételezzük hogy kiszámolhatók bármilyen így konstruált szabálytalan felosztás esetén.

Feltesszük hogy a rácspontok megtartják a sorrendbeli helyzetüket, amelyet az

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &< \frac{a}{2} : k = 1, 2, \dots, n, \\ |\delta_l| &< \frac{b}{2} : l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.11)$$

feltételek biztosítanak. Továbbá feltesszük hogy

$$a < 1, b < 1$$

hogy közelítést tudjunk adni a lépésszám rendjében. Megjegyezzük hogy a későbbiekben a  $|\varepsilon_k|$  és  $|\delta_l|$  méretét tovább korlátozhatjuk majd  $a$  és  $b$  rendjében, és így esetlegesen jobb közelítésre juthatunk.

Ezzel (5.9) és (5.10) szerint megkaptuk a megfelelő rácspontokat,

$$(x_k, y_l) : k, l = 0, 1, \dots, n + 1, \quad (5.12)$$

és a szabálytalan lépésközöket is (5.7), (5.8), (5.9) és (5.10) alapján

$$\begin{aligned} a_k &= x_k - x_{k-1} = z_k + \varepsilon_k - z_{k-1} - \varepsilon_{k-1} = a + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n + 1 \\ b_l &= y_l - y_{l-1} = w_l + \delta_l - w_{l-1} - \delta_{l-1} = b + \delta_l - \delta_{l-1} : l = 1, 2, \dots, n + 1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ezen  $a_k$  és  $b_l$  lépésközök az (5.11) feltétel miatt mind pozitívak.

### 5.2.2. A közelítés konstrukciója

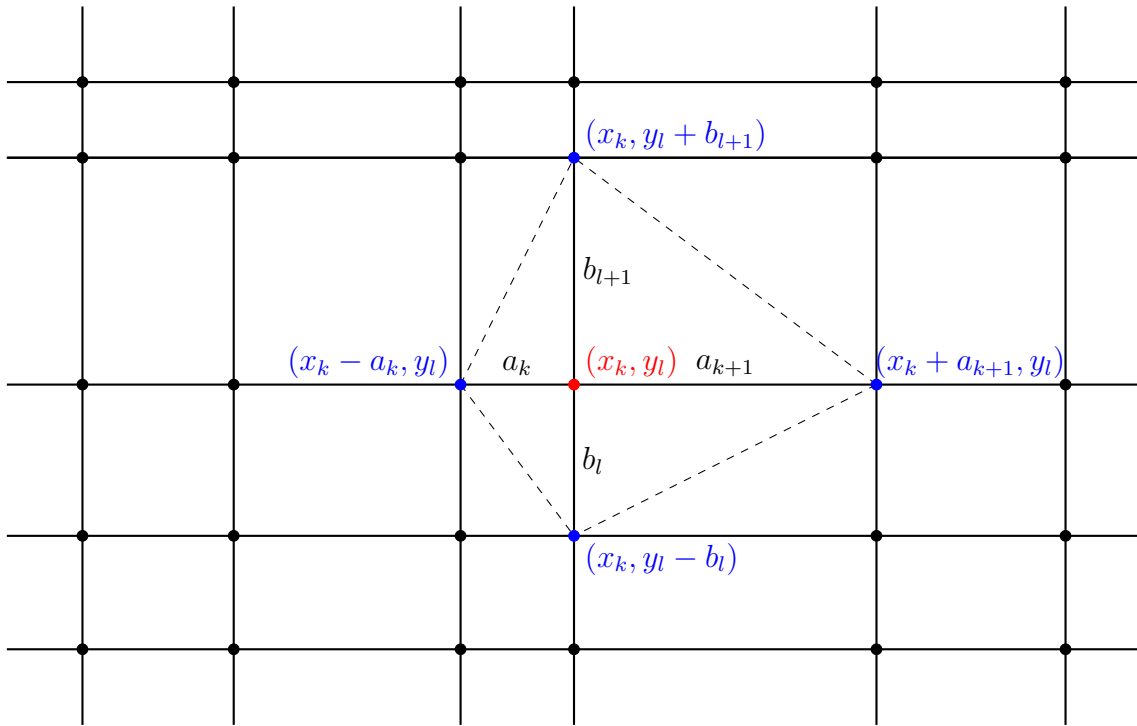
Az  $(x_k, y_l)$  általános rácspontbeli  $\Delta f(x_k, y_l)$  értéket az  $(x_k, y_l)$  ponttal egyik koordinátában megegyező, négy szomszédos ponttal szeretnénk közelíteni. Tehát a megadott pontok

$$(x_{k-1}, y_l), (x_{k+1}, y_l), (x_k, y_{l-1}), (x_k, y_{l+1}) \quad (5.14)$$

lesznek, amelyek (5.13) értelmében az

$$(x_k - a_k, y_l), (x_k + a_{k+1}, y_l), (x_k, y_l - b_l), (x_k, y_l + b_{l+1}) \quad (5.15)$$

pontokkal ekvivalensek. Ezek pontok az  $(x_k, y_l)$  körül egy olyan négyszög csúcsait alkotják, melynek átlói  $(x_k, y_l)$ -ben merőlegesen metszik egymást. Egy ilyen típusú pontokból álló rácsot az alábbi ábra szemléltet:



Hasonlóan a homogén esethez, az összes vegyes derivált együtthatója 0, hiszen minden pont egyik koordinátájában megegyezik az  $(x_k, y_l)$  középpontal, továbbá

$$f(x_k - a_k, y_l) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_x^i f(x_k, y_l)}{i!} (-a_k)^i + O(a_k^4),$$

$$f(x_k + a_{k+1}, y_l) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_x^i f(x_k, y_l)}{i!} (a_{k+1})^i + O(a_{k+1}^4),$$

$$f(x_k, y_l - b_l) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_y^i f(x_k, y_l)}{i!} (-b_l)^i + O(b_l^4),$$

$$f(x_k, y_l + b_{l+1}) = \sum_{i=0}^3 \binom{i}{0} \frac{\partial_y^i f(x_k, y_l)}{i!} (b_{l+1})^i + O(b_{l+1}^4),$$

lesznek a megfelelő Taylor-közelítések. Olyan  $c_1, c_2, c_3, c_4$  konstansokat szeretnénk találni, hogy

$$F = c_1 f(x_k - a_k, y_l) + c_2 f(x_k + a_{k+1}, y_l) + c_3 f(x_k, y_l - b_l) + c_4 f(x_k, y_l + b_{l+1}). \quad (5.16)$$

összegben az  $\partial_x f(x_k, y_l)$  és  $\partial_y f(x_k, y_l)$  együtthatói tűnjenek el, és  $\partial_x^2 f(x_k, y_l)$  és  $\partial_y^2 f(x_k, y_l)$  együtthatói egyezzenek meg. Ez algebrailag ekvivalens azzal, hogy a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  értékek kielégítik az alábbi 4 ismeretlenes homogén egyenletrendszerrel.

$$\begin{bmatrix} -a_k & a_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_l & b_{l+1} \\ a_k^2 & a_{k+1}^2 & -b_l^2 & -b_{l+1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Tehát ilyen  $c_1, c_2, c_3, c_4$  konstansokra van szükségünk.

Egyszerűen belátható akár szimbolikus programozással hogy a

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{k+1} b_l b_{l+1} (b_l + b_{l+1}), \\ c_2 &= a_k b_l b_{l+1} (b_l + b_{l+1}), \\ c_3 &= b_{l+1} a_k a_{k+1} (a_k + a_{k+1}), \\ c_4 &= b_l a_k a_{k+1} (a_k + a_{k+1}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

konstansok kielégítik ezt az egyenletrendszerrel. Tehát az egyenletrendszernek mindig van nemnulla megoldása, hiszen az (5.11) feltétel értelmében és a (5.13) definíciók szerint  $a_k, a_{k+1}, b_l, b_{l+1}$  pozitívak.

Tehát kihasználva azt, hogy a kapott  $c_1, c_2, c_3, c_4$  értékek kielégítik az (5.17) egyenletrendszerrel, az (5.16) lineáris kombinációba a  $c_1, c_2, c_3, c_4$ -eket és a pontbeli Taylor-közelítéseket behelyettesítve az

$$\begin{aligned} F &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) f(x_k, y_l) + \frac{c_1 a_k^2 + c_2 a_{k+1}^2}{2} \Delta f(x_k, y_l) + \frac{(-c_1 a_k^3 + c_2 a_{k+1}^3) \partial_x^3 f(x_k, y_l)}{6} + \\ &+ \frac{(-c_3 b_l^3 + c_4 b_{l+1}^3) \partial_y^3 f(x_k, y_l)}{6} + O(c_1 a_k^4 + c_2 a_{k+1}^4 + c_3 b_l^4 + c_4 b_{l+1}^4) \end{aligned} \quad (5.19)$$

egyenletet kapjuk. Rendezzük az (5.19) egyenletet a  $\Delta f(x_k, y_l)$ -re. A harmadrendű tagok együtthatói szépen egyszerűsödnek, ahogy a negyedrendű maradék is. Ekkor ugyanis fennállnak a

$$c_1 a_k^2 + c_2 a_{k+1}^2 = a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1}) (b_l + b_{l+1}),$$

$$-c_1 a_k^3 + c_2 a_{k+1}^3 = a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1}) (b_l + b_{l+1}) (a_{k+1} - a_k),$$

$$-c_3 b_l^3 + c_4 b_{l+1}^3 = a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1}) (b_l + b_{l+1}) (b_{l+1} - b_l),$$

$$c_1 a_k^4 + c_2 a_{k+1}^4 + c_3 b_l^4 + c_4 b_{l+1}^4 = a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1}) (b_l + b_{l+1}) (a_k^2 + a_{k+1}^2 + b_l^2 + b_{l+1}^2 - a_k a_{k+1} - b_l b_{l+1})$$

egyenlőségek. Innen a

$$\begin{aligned} \Delta f(x_k, y_l) &= \frac{2F - 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) f(x_k, y_l)}{a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1}) (b_l + b_{l+1})} - \frac{(a_{k+1} - a_k) \partial_x^3 f(x_k, y_l) + (b_{l+1} - b_l) \partial_y^3 f(x_k, y_l)}{3} + \\ &+ O(a_k^2 + a_{k+1}^2 + b_l^2 + b_{l+1}^2 - a_k a_{k+1} - b_l b_{l+1}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

közelítést nyerjük, ahol (5.16)-nak megfelelően

$$F = c_1 f(x_k - a_k, y_l) + c_2 f(x_k + a_{k+1}, y_l) + c_3 f(x_k, y_l - b_l) + c_4 f(x_k, y_l + b_{l+1}),$$

és  $c_1, c_2, c_3, c_4$  az (5.18) definícióban megadott konstansok.

Az (5.13) definíciókat és a (5.11) feltételt felhasználva

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= a + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k - (a + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) = \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-1} - 2\varepsilon_k = O(a) \\ b_{l+1} - b_l &= b + \delta_{l+1} - \delta_l - (b + \delta_l - \delta_{l-1}) = \delta_{l+1} + \delta_{l-1} - 2\delta_l = O(b) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Vagyis (5.20)-ben

$$\frac{(a_{k+1} - a_k)\partial_x^3 f(x_k, y_l) + (b_{l+1} - b_l)\partial_y^3 f(x_k, y_l)}{3} = O(a + b),$$

amellyel (5.20)-be behelyettesítve

$$\Delta f(x_k, y_l) = \frac{2F - 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)f(x_k, y_l)}{a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1})(b_l + b_{l+1})} + O(a + b), \quad (5.22)$$

elsőrendű közelítést kapjuk.

### 5.2.3. Hasonló távolságok esete

Ha feltesszük (5.11) mellett, hogy

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &= O(a^2) : k = 1, 2, \dots, n, \\ |\delta_l| &= O(b^2) : l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.23)$$

Akkor az (5.21) különbségek az alábbi módon alakulnak:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-1} - 2\varepsilon_k = O(a^2) \\ b_{l+1} - b_l &= \delta_{l+1} + \delta_{l-1} - 2\delta_l = O(b^2) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Mivel ezen esetben

$$O(a_k) = O(a), O(b_l) = O(b)$$

hasonlóan teljesülnek, (5.20)-ban

$$\frac{(a_{k+1} - a_k)\partial_x^3 f(x_k, y_l) + (b_{l+1} - b_l)\partial_y^3 f(x_k, y_l)}{3} = O(a^2 + b^2),$$

és

$$O(a_k^2 + a_{k+1}^2 + b_l^2 + b_{l+1}^2 - a_k a_{k+1} - b_l b_{l+1}) = O(a^2 + b^2)$$

lesz. Vagyis (5.20)-be visszahelyettesítve az

$$\Delta f(x_k, y_l) = \frac{2F - 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)f(x_k, y_l)}{a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1})(b_l + b_{l+1})} + O(a^2 + b^2) \quad (5.25)$$

másodrendű közelítést nyerjük. Itt  $F$  értékét az (5.16) definíció adja meg, ahol a (5.18) formulákkal adott konstansokat használjuk. Tehát ha el tudjuk érni, hogy a hiba a (5.23) feltételben  $a$  és  $b$  szerint megfelelően másodrendű legyen, akkor másodrendű közelítést tudunk adni.

### 5.2.4. Rombusz csúcsai

Meggondolható hogy ha teljesen elhanyagolnánk a hibát, vagyis feltennénk hogy

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &= 0 : k = 1, 2, \dots, n, \\ |\delta_l| &= 0 : l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.26)$$

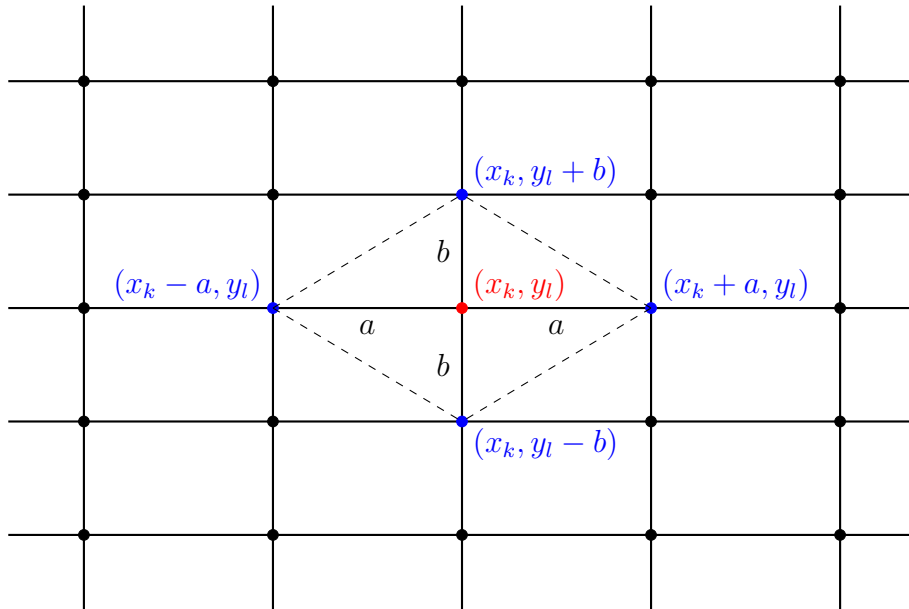
akkor milyen közelítést nyerünk.

Ekkor (5.20) felhasználásával rögtön adható egy másodrendű közelítés. Most igazából a (5.15) pontok egy rombusz csúcsai.

Hiszen ekkor a felosztás tengelyenként egyenletes, és a (5.9), (5.10), valamint az (5.13) képletek az alábbira redukálódnak:

$$\begin{aligned} x_k &= z_k, y_l = w_l : k, l = 1, 2, \dots, n, \\ a_k &= a + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} = a : k = 1, 2, \dots, n + 1. \\ b_l &= b + \delta_l - \delta_{l-1} = b : l = 1, 2, \dots, n + 1. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Az alábbi ábra szemléltet egy lehetséges  $a$  és  $b$  oldalú téglalapokból álló rácsot, ahol ezen eset előfordulhat.



Tehát az (5.27) szerint, a (5.18) megoldásokba behelyettesítve kapjuk hogy

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = 2ab^3, \\ c_3 &= c_4 = 2ba^3, \end{aligned}$$

és (5.27) szerint

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= 0, \\ b_{l+1} - b_l &= 0, \end{aligned}$$

vagyis az (5.20) formulába behelyettesítve a háromszoros parciális deriváltat tartalmazó tagok együtthatója 0 lesz. Ezen megállapítások felhasználásával (5.20)-ból pár egyszerűsítés után a

$$\Delta f(x_k, y_l) = \frac{F - (2a^2 + 2b^2)f(x_k, y_l)}{a^2b^2} + O(a^2 + b^2) \quad (5.28)$$

másodrendű közelítést nyerjük. Ekkor az (5.16)-szerinti  $F$  is egyszerűsödik, ezen esetben az alábbi csakis ezen közelítés formulájára vonatkozik:

$$F = b^2 f(x_k - a, y_l) + b^2 f(x_k + a, y_l) + a^2 f(x_k, y_l - b) + a^2 f(x_k, y_l + b).$$

### 5.2.5. Egyenletrendszer a közelítésre

Az (5.25) és (5.28) közelítéseket szeretnénk alkalmazni a

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad x, y \in \Omega \quad (5.29)$$

differenciálegyenlet numerikus megoldására, ahol  $\Omega = [0, m] \times [0, s] \in \mathbb{R}^2$ , a peremen az  $u$  függvény ismert, és a tárgyalat (5.12) nemegyenletes felosztás áll rendelkezésre. (Ahol a  $\Omega = [0, u] \times [0, v]$  jelölést lecseréljük a fent megadottra, hiszen  $u$  mostmár a keresett függvényt jelöli.) Az (5.29)-be  $\Delta u(x, y)$ -helyére behelyettesítve az adott pontokban az (5.25) közelítés által az  $u$  függvényre értelmezett formulát, az

$$\frac{2U(x_k, y_l) - 2(c_1(k, l) + c_2(k, l) + c_3(k, l) + c_4(k, l))u(x_k, y_l)}{a_k a_{k+1} b_l b_{l+1} (a_k + a_{k+1})(b_l + b_{l+1})} = f(x_k, y_l) : k, l = 1, 2, \dots, n \quad (5.30)$$

közelítő  $n^2$  változós egyenletrendszert kapjuk ahol  $u(x_k, y_l) : k, l = 1, 2, \dots, n$  lesznek a változók. (5.18) alapján, viszont itt már az  $l$  és  $k$ -től függő jelölést használunk

$$\begin{aligned} c_1(k, l) &= a_{k+1} b_l b_{l+1} (b_l + b_{l+1}), \\ c_2(k, l) &= a_k b_l b_{l+1} (b_l + b_{l+1}), \\ c_3(k, l) &= b_{l+1} a_k a_{k+1} (a_k + a_{k+1}), \\ c_4(k, l) &= b_l a_k a_{k+1} (a_k + a_{k+1}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

és (5.16) alapján az  $F$  jelölésű lineáris kombinációt most már az  $u$ -függvény pontjaira értelmezve, és  $U$ -val jelölve

$$U(x_k, y_l) = c_1(k, l)u(x_k - a_k, y_l) + c_2(k, l)u(x_k + a_{k+1}, y_l) + c_3(k, l)u(x_k, y_l - b_l) + c_4(k, l)u(x_k, y_l + b_{l+1}).$$

Viszont az egyenletrendszerben érdemes visszatérni a pontok ekvivalens (5.14) jelöléséhez az eddig használt (5.15) jelölés helyett, vagyis

$$U(x_k, y_l) = c_1(k, l)u(x_{k-1}, y_l) + c_2(k, l)u(x_{k+1}, y_l) + c_3(k, l)u(x_k, y_{l-1}) + c_4(k, l)u(x_k, y_{l+1}).$$

Ahogy láttuk a (5.22) közelítés levezetésénél, a megfelelő feltételek mellett az (5.23)-es feltétel nélkül elsőrendben lesz bizonyosan közelítő a Laplace-operátorra vonatkozólag, a (5.23) feltétel mellett viszont a (5.25) másodrendű közelítést kaptuk belőle. Ezért azt reméljük, hogy a megadott egyenletrendszer megoldása is ezen feltételek mellett lesz hasonlóan közel az (5.29) valódi megoldásához a rácspontokban.

Az (5.30) egyenletrendszert szeretnénk egyszerűbb formába hozni, ezért vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} c_1(k, l) + c_2(k, l) + c_3(k, l) + c_4(k, l) &= (a_{k+1} + a_k) b_l b_{l+1} (b_l + b_{l+1}) + (b_l + b_{l+1}) a_k a_{k+1} (a_k + a_{k+1}) = \\ &= (a_{k+1} + a_k) (b_l + b_{l+1}) (a_k a_{k+1} + b_l b_{l+1}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Innen a (5.30) bal oldalát szétbontva ha a kapott törtekben ahol csak lehet egyszerűsítünk, akkor a

$$\begin{aligned} \frac{2u(x_{k-1}, y_l)}{a_k (a_k + a_{k+1})} + \frac{2u(x_{k+1}, y_l)}{a_{k+1} (a_k + a_{k+1})} + \frac{2u(x_k, y_{l-1})}{b_l (b_l + b_{l+1})} + \frac{2u(x_k, y_{l+1})}{b_{l+1} (b_l + b_{l+1})} - \frac{2a_k a_{k+1} + 2b_l b_{l+1}}{a_k a_{k+1} b_l b_{l+1}} u(x_k, y_l) = \\ = f(x_k, y_l) : k, l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.33)$$

$n^2$  ismeretlenes egyenletrendszerre jutunk.

Az (5.28) közelítésből ehhez hasonló módon, viszont sokkal egyszerűbben, az

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{k-1}, y_l)}{a^2} + \frac{u(x_{k+1}, y_l)}{a^2} + \frac{u(x_k, y_{l-1})}{b^2} + \frac{u(x_k, y_{l+1})}{b^2} - \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 b^2} u(x_k, y_l) = \\ = f(x_k, y_l) : k, l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.34)$$

egyenletrendszert kapjuk. Viszont ez természetesen csak a (5.26) feltétel mellett értelmezendő.

### 5.2.6. Mátrix-vektor alak a közelítésre

Az (5.33) és (5.34) egyenletrendszerek struktúrája láthatóan megegyezik az egyenletes felosztás esetén korábban látott (3.11) egyenletrendszerével. Vagyis ahhoz, hogy

$$Q \cdot \underline{u} = \underline{f} - P \cdot \underline{up}.$$

alakba hozzuk az egyenletrendszereket, legyen az (3.12) konstrukciójához nagyon hasonlóan

$$\underline{u} = [u(x_1, y_1), \dots, u(x_N, y_1), u(x_1, y_2), \dots, u(x_N, y_2), \dots, u(x_1, y_N), \dots, u(x_N, y_N)]^T,$$

az  $n^2$ -dimenziós változóvektor,

$$\underline{f} = [f(x_1, y_1), \dots, f(x_N, y_1), f(x_1, y_2), \dots, f(x_N, y_2), \dots, f(x_1, y_N), \dots, f(x_N, y_N)]^T,$$

az  $f$  függvény értékeinek  $n^2$  dimenziós vektora.

A peremértékeket tartalmazó alábbi

$$\underline{up}_0 = [u(x_1, y_0), u(x_2, y_0), \dots, u(x_N, y_0)],$$

$$\{\underline{up}_i = [u(x_0, y_i), 0, \dots, 0, u(x_{N+1}, y_i)] : i = 1, 2, \dots, N\},$$

$$\underline{up}_{N+1} = [u(x_1, y_{N+1}), u(x_2, y_{N+1}), \dots, u(x_N, y_{N+1})]$$

vektorokból összeállított  $n(n+2)$  dimenziós vektor pedig a következő:

$$\underline{up} = [\underline{up}_0, \underline{up}_1, \dots, \underline{up}_N, \underline{up}_{N+1}]^T.$$

A  $Q$  mátrix struktúrája a 3.4 ábrának, a  $P$  mátrix struktúrája pedig a 3.6 ábrának lesz megfelelő. Vagyis ugyanolyan lesz a nemnulla elemek pozíciója, mint megfelelően a (3.11) egyenletrendszerre adott (3.12)-ben szereplő mátrixoknak. Viszont a  $Q$  és  $P$  mátrixok elemei a (5.33) egyenlet együtthatóinak lesznek megfelelőek az (5.25) közelítés esetében, és a (5.34) egyenletnek az együtthatói, a (5.28) közelítés esetében. Tehát  $Q$  esetén, ha bal alulról jobb felfelé tekintjük a megfelelő pozíciójú átlókat, akkor az első átlóban, ahol van olyan elem, ott  $u(x_k, y_{l-1})$  együtthatói szerepelnek, a második átlóban  $u(x_{k-1}, y_l)$  együtthatói, a harmadik átlóban (vagyis a főátlóban)  $u(x_k, y_l)$  együtthatói, a negyedik átlóban  $u(x_{k+1}, y_l)$ , és az ötödik átlóban  $u(x_k, y_{l+1})$  együtthatói szerepelnek. Természetesen az (5.33) egyenlet esetén a megfelelő együtthatók függenek a  $k$  és  $l$ -től, amelyek a  $\underline{u}$  változóvektor elemeinek megfelelően futnak, vagyis a  $(k, l)$  indexpáros a következő módon fut végig az  $n^2$  különböző lehetséges indexen:

$$[(1, 1), \dots, (n, 1), (1, 2), \dots, (n, 2), \dots, (1, n), \dots, (n, n)]. \quad (5.35)$$

Ennek megfelelően meg tudjuk mondani a megfelelő együtthatók átlóbeli pozícióit. Az alábbi indexű, (5.33)-ben szereplő együtthatók lesznek a mátrix átlóiban, az (5.35) szerinti sorrendben, az egyes pontok esetén:

- $u(x_k, y_l)$  együtthatója esetén a  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$  lesznek az indexek.
- $u(x_{k-1}, y_l)$  együtthatója esetén a  $k = 2, 3, \dots, n$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$  lesznek az indexek.
- $u(x_{k+1}, y_l)$  együtthatója esetén a  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$  lesznek az indexek. (5.36)
- $u(x_k, y_{l-1})$  együtthatója esetén a  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $l = 2, 3, \dots, n$  lesznek az indexek.
- $u(x_k, y_{l+1})$  együtthatója esetén pedig a  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $l = 1, 2, \dots, n-1$  lesznek az indexek.



A  $u(x_{k-1}, y_l)$  és  $u(x_{k+1}, y_l)$  pontok esetébe az átlóban lévő vektor  $n^2 - 1$  hosszú és a hiányzó indexek helyén az  $(1, 1)$  index kivételével 0 szerepel. Az  $u(x_k, y_{l-1})$  és  $u(x_k, y_{l+1})$ -hez tartozó átlóban beírt vektorok  $n^2 - n$  hosszúak és a hiányzó indexekhez nem szerepelnek tagok a mátrixban, ahogyan azt a 3.4-es ábrán megfigyelhetjük.

A  $P$  mátrix pont az itt kihagyott indexű együtthatókat fogja tartalmazni a nemnulla helyein, hiszen azon számok a peremértékek együtthatói a (5.33) egyenletrendszerben. A  $P$  mátrix bal felső részmátrixának diagonálisa az  $u(x_k, y_{l-1})$  együtthatóit tartalmazza a  $\{k = 1, 2, \dots, n, l = 1\}$  indexekkel, a jobb alsó részmátrix diagonálja a  $u(x_k, y_{l+1})$  együtthatóit tartalmazza a  $\{k = 1, 2, \dots, n, l = n\}$  indexekkel, a középső részmátrix részmátrixainak bal felső elemei a  $u(x_{k-1}, y_l)$  együtthatóit tartalmazza a  $\{k = 2, l = 1, 2, \dots, n\}$  indexekkel, ezen részmátrixok jobb alsó elemei pedig a  $u(x_{k+1}, y_l)$  együtthatóit tartalmazzák a  $\{k = n, l = 1, 2, \dots, n\}$  indexekkel. Észrevehetjük hogy minden esetben az adott együtthatók pont csak azon indextől függenek, amelyek rögzítve vannak, ez segíthet a módszer implementálásában.

Tehát az (5.33) egyenletrendszer ezen meglátásokat követve már könnyen

$$Q \cdot \underline{u} = \underline{f} - P \cdot \underline{up}.$$

alakra hozható. A (5.34) egyenletrendszer pedig ugyanilyen módon mátrix-vektor alakra hozható, de még az indexekkel sem kell bajlódni. Továbbá ahogyan azt láttuk a (5.33) módszer magába foglalja a (5.34) módszert ha a (5.33)-re alkalmazzuk a (5.26) feltételt és annak a (5.27) következményeit, és egyszerűsítünk. Vagyis tényleg elég csak az (5.33) módszert implementálni.

### 5.2.7. Teszt egy peremértékfeladatra

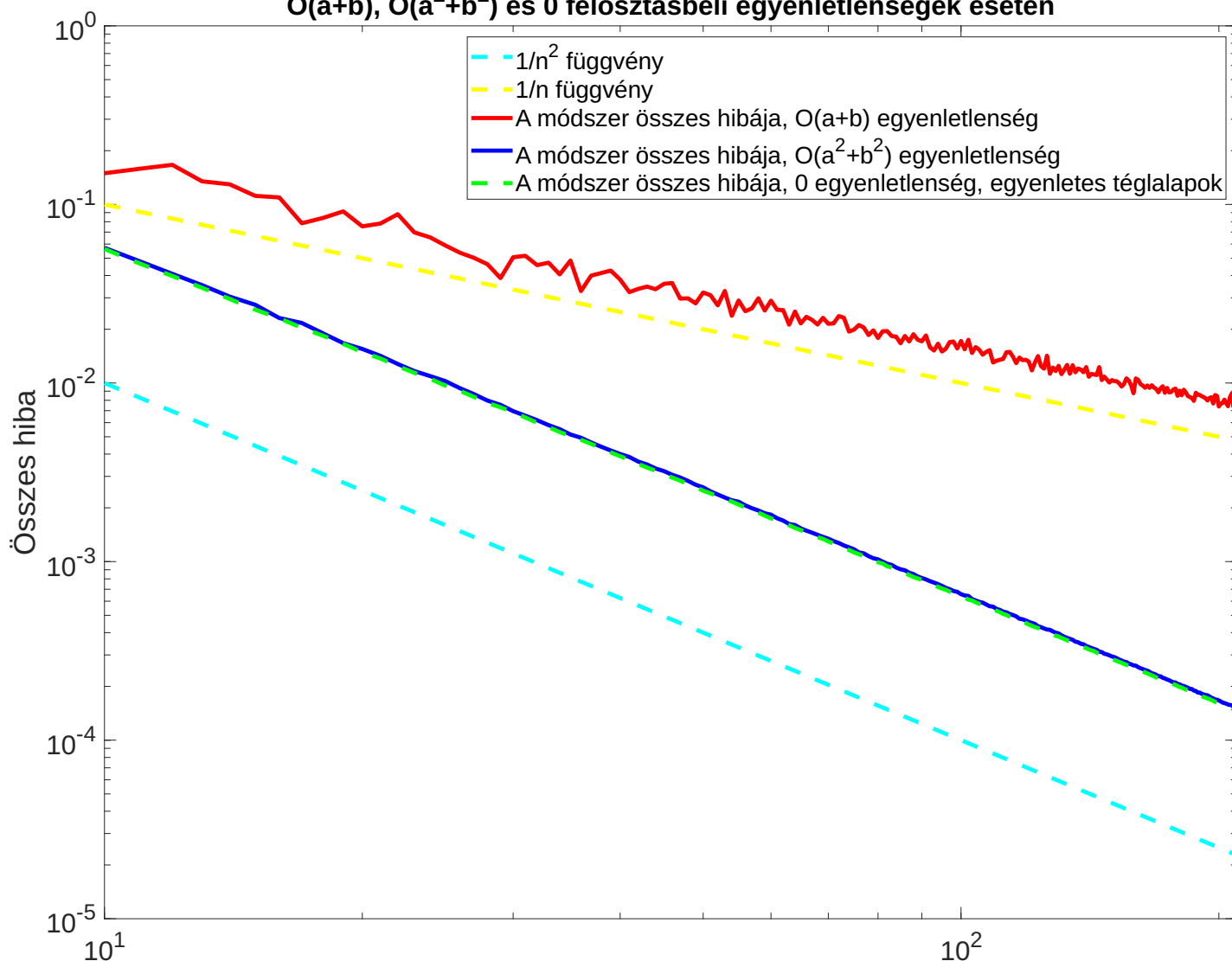
Az (5.25) általános másodrendű közelítést és annak a (5.28) speciális esetét tárgyaltuk a fentiekben, és részleteztük, hogy hogyan lehet ebből egyenlet rendszert készíteni a (5.25) peremértékfeladat numerikus közelítéséhez, és hogy azt hogyan lehet könnyen alkalmazható mátrix-vektor alakra hozni. Most teszteljük a módszer hatékonyságát a (3.13) formula kapcsán már szerepelt peremértékfeladat egy változatára:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -400(x^2 + y^2) \sin(20xy), \\ u(x, 0) = 0, u(x, 1) = \sin(20x), \\ u(0, y) = 0, u(1, y) = \sin(20y), \\ (x, y) \in [0, 0.7] \times [0, 1.2]. \end{cases} \quad (5.37)$$

Tehát a megoldási halmazt direkt egy téglalapnak választjuk meg, ahogy azt a (5.6)-rács definiálásánál is megengedtük.

A felosztás megkonstruálását már korábban tárgyaltuk az 5.2.1 szakaszban, az összes hibát pedig a 3.5 résznek megfelelően adjuk meg a (3.14)  $L_2$  normával definiált függvények segítségével, természetesen most a rács a 5.2.1 részbeli konstrukciónak megfelelően lehet szabálytalan, és az (3.14) szerinti  $\underline{u}_1(n)$  közelítő pontokat most a (5.25) közelítésből adódó (5.33) egyenletrendszer segítségével állítjuk elő a nem egyenletes felosztás pontjaiban. Az összes hiba számítását lehetne pontosabban is végezni, mivel ezen esetben már téglalap alakú tartománnyal dolgozunk. De a (3.14) számítás szerint ha a  $h$ -val, vagyis ezen esetben  $\frac{1}{n+1}$ -el, tehát felosztási szakaszok számának reciprokával szorzunk, az is megfelelően fogja mutatni a konvergencia rendjét.

Nemegyenletes felosztásra adott módszer összes hibája  
 $O(a+b)$ ,  $O(a^2+b^2)$  és 0 felosztásbeli egyenletlenségek esetén



5.11. ábra.  $y$ -tengely: A kétdimenziós (5.37) peremértékfeladat numerikus megoldásának diszkrét  $L_2$ -hibája az (5.25) közelítésből adódó (5.33) egyenletrendszert használva az (5.11), majd a (5.23) és végül a (5.26) feltételekkel a felosztás egyenletlenségére.  $x$ -tengely: a rács egy oldalán lévő felosztási pontok száma  $10 \leq n \leq 210$ . Mindkét tengelyen logaritmikus skálát használtunk. A rend ellenőrzéséhez szaggatott vonallal adtuk meg az  $n^{-1}$  és  $n^{-2}$  függvények grafikonját.

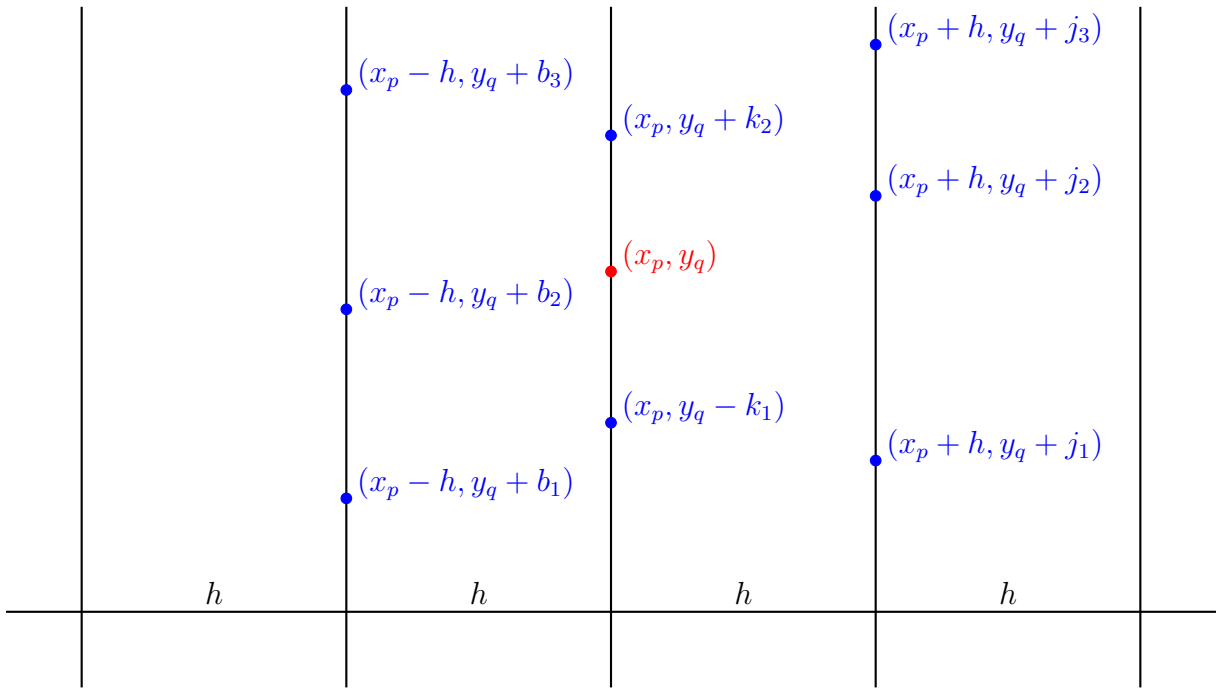
Jól látható, ahogyan azt (5.25) és (5.28) létrhozásakor megmutattuk, hogy az ezen közelítések segítségével adott módszerek összes hibája  $O(h^2)$  nagyságú, grafikonjuk az  $1/n^2$  függvénnyel párhuzamos a logaritmikus skálán, és látjuk hogy a (5.23) és a (5.26) feltételek között alig van különbség a módszer hatékonyságát illetően. Viszont az is észrevehető, hogy ha csak a (5.11) feltétel adott, akkor ahogyan azt (5.22) közelítés esetén láttuk, a módszer is  $O(h)$  összes hibát eredményez, sőt, erősen fluktuál a hiba.

### 5.3. Azonos távolságra lévő egyeneseken elhelyezkedő rácspontok

Most egy olyan esetet vizsgálunk, ahol az  $x$  koordináta szerint (természetesen megcserélhető a két koordináta szerepe) a rácspontok szomszédjuktól egyenletesen  $h$  távolságra elhelyezkedő párhuzamos egyeneseken találhatóak. Viszont  $y$  koordinátájuk szerint a pontok tetszőlegesen helyezkedhetnek el, de ahogy eddig is, csak akkor kapunk jó közelítést, ha az  $y$  koordináta szerint sem lesz a majd későbbiekben vizsgált 8 pont a közelítendő ponttól nagyobb vagy egyenlő mint 1 távolságra. Ennek megfelelően a vizsgált  $(x_p, y_q)$  általános rácspontokhoz képest a 8 felhasznált pont helyzete a következő lesz:

$$\begin{aligned} & (x_p - h, y_q + b_1), (x_p - h, y_q + b_2), (x_p - h, y_q + b_3), (x_p, y_q - k_1), \\ & (x_p, y_q + k_2), (x_p + h, y_q + j_1), (x_p + h, y_q + j_2), (x_p + h, y_q + j_3), \end{aligned} \quad (5.38)$$

amelyet az alábbi ábrán szemléltetünk egy lehetséges esetben.



Írjuk fel az egyes pontok Taylor közelítéseit a középpont szerint, a harmadrendű tagig. Hiszen egy legalább másodrendű közelítést szeretnénk adni.

$$D_{nm}(x_p, y_q) = \binom{n}{m} \frac{\partial_x^m \partial_y^{n-m} f(x_p, y_q)}{n!}$$

jelölést használva kapjuk, hogy

$$f(x_p - h, y_q + b_1) = \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^n D_{nm}(x_p, y_q) \cdot (-h)^m (b_1)^{n-m} + O(h^4 + b_1^4),$$

$$f(x_p - h, y_q + b_2) = \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^n D_{nm}(x_p, y_q) \cdot (-h)^m (b_2)^{n-m} + O(h^4 + b_2^4),$$

$$f(x_p - h, y_q + b_3) = \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^n D_{nm}(x_p, y_q) \cdot (-h)^m (b_3)^{n-m} + O(h^4 + b_3^4),$$

$$\begin{aligned}
f(x_p, y_q - k_1) &= \sum_{n=0}^3 D_{n0}(x_p, y_q) \cdot (-k_1)^n + O(k_1^4), \\
f(x_p, y_q + k_2) &= \sum_{n=0}^3 D_{n0}(x_p, y_q) \cdot (k_2)^n + O(k_2^4), \\
f(x_p + h, y_q + j_1) &= \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^n D_{nm}(x_p, y_q) \cdot (h)^m (j_1)^{n-m} + O(h^4 + j_1^4), \\
f(x_p + h, y_q + j_2) &= \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^n D_{nm}(x_p, y_q) \cdot (h)^m (j_2)^{n-m} + O(h^4 + j_2^4), \\
f(x_p + h, y_q + j_3) &= \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^n D_{nm}(x_p, y_q) \cdot (h)^m (j_3)^{n-m} + O(h^4 + j_3^4).
\end{aligned}$$

Az előzőekhez hasonlóan olyan  $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$  együtthatókat szeretnénk találni, amelyekkel az

$$\begin{aligned}
F &= c_1 f(x_p - h, y_q + b_1) + c_2 f(x_p - h, y_q + b_2) + c_3 f(x_p - h, y_q + b_3) + c_4 f(x_p, y_q - k_1) \\
&\quad c_5 f(x_p, y_q + k_2) + c_6 f(x_p + h, y_q + j_1) + c_7 f(x_p + h, y_q + j_2) + c_8 f(x_p + h, y_q + j_3)
\end{aligned}$$

összegben, ahol az egyes pontbeli függvényértékekbe behelyettesítjük azok megfelelő Taylor közelítését, csak a nulladrendű tag és az  $x$  és  $y$  szerinti kétszeres derivált tagok ( $D_{20}(x_p, y_q)$  és  $D_{02}(x_p, y_q)$ ) nem tűnnek el, továbbá a kétszeres derivált tagok együtthatója megegyezik. Így tudjuk majd a Laplace-operátort nulladrendű tagokkal kifejezni. Ehhez az alábbi egyenletrendszert kell kielégíteniük a  $c_i$  együtthatóknak.

$$\begin{bmatrix}
-h & -h & -h & 0 & 0 & h & h & h \\
b_1 & b_2 & b_3 & -k_1 & k_2 & j_1 & j_2 & j_3 \\
-hb_1 & -hb_2 & -hb_3 & 0 & 0 & hj_1 & hj_2 & hj_3 \\
h^2 - b_1^2 & h^2 - b_2^2 & h^2 - b_3^2 & -k_1^2 & -k_2^2 & h^2 - j_1^2 & h^2 - j_2^2 & h^2 - j_3^2 \\
h^2 b_1 & h^2 b_2 & h^2 b_3 & 0 & 0 & h^2 j_1 & h^2 j_2 & h^2 j_3 \\
-hb_1^2 & -hb_2^2 & -hb_3^2 & 0 & 0 & hj_1^2 & hj_2^2 & hj_3^2 \\
-h^3 & -h^3 & -h^3 & 0 & 0 & h^3 & h^3 & h^3 \\
b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & -k_1^3 & k_2^3 & j_1^3 & j_2^3 & j_3^3
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Itt jön jól az, hogy a pontok  $x$  szerinti felosztása egyenletes, hiszen a 7. és az 1. sorok függnek egymástól (a 7. az 1.  $h^2$ -szerese). Ezért ennek a 8 ismeretlenes homogén egyenletrendszernek létezik nem nulla megoldása. Szimbolikus számításból juthatunk egy megoldásra, amely a  $b_1, b_2, b_3, j_1, j_2, j_3, k_1, k_2$  értékektől függően lehet nulla vagy nem nulla. A nemnulla megoldás kereséséhez feltételezzük, hogy a vizsgált (5.38) pontok ténylegesen különbözőek, vagyis a  $b_1, b_2, b_3$  értékek páronként különböznek a  $j_1, j_2, j_3$  értékek páronként különböznek, és a  $k_1, k_2$  értékek különböznek és egyik sem nulla. Ezek a feltételek megjelennek a szimbolikus megoldásban is mind szorzó tagok. Ekkor kifejezhetjük az  $F$  összeget, feltéve, hogy a

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$$

számok megoldják a (5.39) egyenletrendszert és nem mind nullák. Legyen:

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8. \quad (5.40)$$

Ezen jelöléssel az  $F$  összeg a Taylor- közelítésekkel felírva tehát

$$F = C \cdot f(x_p, y_q) + \frac{C \cdot h^2}{2} \Delta f(x_p, y_q) + \\ + O((C - c_4 - c_5) \cdot h^4 + c_1 b_1^4 + c_2 b_2^4 + c_3 b_3^4 + c_4 k_1^4 + c_5 k_2^4 + c_6 j_1^4 + c_7 j_2^4 + c_8 j_3^4)$$

lesz, hiszen az (5.39) egyenletrendszert megoldó konstansokkal értelmezve az  $F$  lineáris kombinációt minden más tag együtthatója eltűnik.

Ezt  $\Delta f(x_p, y_q)$ -ra rendezve megkapjuk az alábbi közelítést

$$\Delta f(x_p, y_q) = \frac{2F - 2C \cdot f(x_p, y_q)}{C \cdot h^2} + \\ + O\left(\frac{(C - c_4 - c_5)h^4 + c_1 b_1^4 + c_2 b_2^4 + c_3 b_3^4 + c_4 k_1^4 + c_5 k_2^4 + c_6 j_1^4 + c_7 j_2^4 + c_8 j_3^4}{C \cdot h^2}\right). \quad (5.41)$$

Itt az

$$F = c_1 f(x_p - h, y_q + b_1) + c_2 f(x_p - h, y_q + b_2) + c_3 f(x_p - h, y_q + b_3) + c_4 f(x_p, y_q - k_1) \\ + c_5 f(x_p, y_q + k_2) + c_6 f(x_p + h, y_q + j_1) + c_7 f(x_p + h, y_q + j_2) + c_8 f(x_p + h, y_q + j_3).$$

jelölést használjuk.

A hibatag becslésekor a problémát az okozza, hogy a  $C$ , vagyis a (5.39) egyenletrendszert kielégítő konstansok összege olyan kicsi lehet, hogy a (5.41) ordó argumentumában szereplő tört értéke nem  $O(h^2)$  rendű lesz, hanem akár konstans rendű vagy még nagyobb, ezzel megnövelve a közelítés hibáját.

Ez elkerülhető az alábbi feltételek mellett.

Legyen

$$b_1 = -(h + \varepsilon_1), \quad b_2 = \varepsilon_2, \quad b_3 = h + \varepsilon_3, \\ k_1 = h + \varepsilon_4, \quad k_2 = h + \varepsilon_5, \\ j_1 = -(h + \varepsilon_6), \quad j_2 = \varepsilon_7, \quad j_3 = (h + \varepsilon_8), \quad (5.42)$$

ahol tegyük fel, hogy

$$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|, |\varepsilon_5|, |\varepsilon_6|, |\varepsilon_7|, |\varepsilon_8| = O(h^2). \quad (5.43)$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a (5.38) pontok az  $(x_p, y_q)$  középpont körüli szabályos  $h$  oldalhosszúságú négyzetes rács pontjaitól csak az  $y$  koordináta mentén, és csak legfeljebb  $O(h^2)$ -el térhetnek el valamelyik irányban.

Az (5.39) egyenletrendszer megoldásai ezen jelölésekkel a 6 részben található. Amelyeket számítógépes segítséggel állítottam elő a Sage szimbolikus programnyelvet használva.

Az (5.39) egyenletrendszer megoldásaira teljesülni fognak a következők:

$$|c_i| = O(h^{15}) : i = 1, 2, \dots, 8, \quad |C - c_4 - c_5| = O(h^{15}). \quad (5.44)$$

Ezt a következtetést a 6 részben lévő megoldások (6.1)-(6.9) formulái alapján vonjuk le. Hiszen az egyes tagok felülről becsléséhez elég a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazni. Az összes rövid szorzó tag belsőjében a (5.42) feltétel miatt  $h$  lesz domináns, ezért ezek felülről becsülhetők  $h$  konstansszorosával, természetesen amely tagok hatványi (négyzetei) szerepelnek ott  $h^2$  konstansszorosával. Illetve az első zárójel alatti hosszú összegben minden esetben a  $\varepsilon_i h^2$  alakú tagok lesznek dominánsak, ezért azon kifejezéseket

egyenként  $h^4$  konstanszorosával tudjuk felülről becsülni.

(5.42) és (5.43)-ból tovább következik, hogy

$$|b_1|, |b_2|, |b_3|, |k_1|, |k_2|, |j_1|, |j_2|, |j_3| = O(h). \quad (5.45)$$

Tehát az (5.41)-ben szereplő közelítés tovább becsülhető felülről.

$$\begin{aligned} & O\left(\frac{(C - c_4 - c_5)h^4 + c_1b_1^4 + c_2b_2^4 + c_3b_3^4 + c_4k_1^4 + c_5k_2^4 + c_6j_1^4 + c_7j_2^4 + c_8j_3^4}{C \cdot h^2}\right) = \\ & = O\left(\frac{O(h^4) \cdot O(h^{15})}{C \cdot h^2}\right) = O\left(\frac{O(h^{17})}{C}\right) = O\left(\frac{h^{17}}{C}\right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

A fő probléma továbbra is fennál, vagyis azt szeretnénk, hogy

$$|C| \geq O(h^{15})$$

legyen. Ennek igazolásához az (5.42) és (5.43) feltételeket felhasználva arra jutunk, hogy ez csak azon esetben lehetséges, amikor

$$|2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + 2\varepsilon_6 - \varepsilon_7 - 2\varepsilon_8| = O(h^2). \quad (5.47)$$

Hiszen ezen esetben a (6.10) kifejezés nehezen becsülhető első zárójel alatti részében az  $\varepsilon_i h^2$  alakú tagok összege lesz domináns, azon tagok amelyek többszörös szorzatot tartalmaznak a  $O(h^2)$  rendű  $\varepsilon_i$  alakú tagokból, azok összege a (5.43) és (5.47) feltétel miatt nem csökkenthetik szignifikánsan a zárójel alatti összeg értékét. És így alulról becsülhetjük ezen első szorzót  $h^4$  konstanszorosával. A többi tagot  $h$  vagy  $h^2$  konstanszorosával egyesével könnyen alul tudjuk becsülni a (5.43) feltétel miatt, hiszen a  $h$  lesz minden esetben domináns. Ezen becsléseket elvégezve valóban azt kapjuk, hogy

$$|C| \geq O(h^{15}),$$

vagyis a feltételek mellett

$$|C| \geq K \cdot h^{15} \quad (5.48)$$

lesz adott  $K$  konstansra.

Ezzel igazából egy elégséges feltételt adtunk arra, hogy az (5.39) egyenletrendszernek mikor lesz nemnulla megoldása, hiszen ezen esetben a megoldás koordinátáinak összege, vagyis  $C$  nem lehet nulla, tehát a megadott megoldás sem lehet nulla. Ehhez és az összes használt becslés teljesüléséhez fontos követelmény, hogy a  $h$  kellően kicsi legyen, természetesen kisebb mint 1, de a konstansszorzók elhanyagolása miatt elképzelhető, hogy csak nagyon kicsi  $h$ -ra, vagyis csak nagyon sűrű felosztásra fog működni a módszer. Tehát a (5.46) becslést folytatva

$$O\left(\frac{h^{17}}{C}\right) \leq O\left(\frac{h^{17}}{K \cdot h^{15}}\right) = O(h^2) \quad (5.49)$$

Vagyis az (5.41)-közelítésből az (5.42), (5.43) és (5.47) feltételek mellett a

$$\Delta f(x_p, y_q) = \frac{2F - 2C \cdot f(x_p, y_q)}{C \cdot h^2} + O(h^2). \quad (5.50)$$

másodrendű közelítést nyerjük a (6.1)-(6.9) formulák szerint a  $c_1, c_2, \dots, c_8$  együtthatókkal. Ahol továbbra is  $C = c_1 + c_2 + \dots + c_8$ , vagyis a (6.10) formula, és

$$\begin{aligned} F = & c_1 f(x_p - h, y_q + b_1) + c_2 f(x_p - h, y_q + b_2) + c_3 f(x_p - h, y_q + b_3) + c_4 f(x_p, y_q - k_1) \\ & c_5 f(x_p, y_q + k_2) + c_6 f(x_p + h, y_q + j_1) + c_7 f(x_p + h, y_q + j_2) + c_8 f(x_p + h, y_q + j_3). \end{aligned}$$

*Megjegyzések:*

A (5.50) közelítés nehezen alkalmazható, mivel nem világos, hogy a (5.47) feltételt hogyan lehetne globálisan elérni egy teljes rács pontjaira. Ezen kívül a magasrendű megoldásokkal való számolás megnövelheti a numerikus hibát, főleg amiatt, mert a becsléseknél feltételeztük a konstans szorzók elhanyagolhatóságát. Tehát elképzelhető, hogy csak nagyon sűrű felosztások esetén fog alacsony hibával működni a módszer, annak ellenére, hogy a hiba  $h$  függvényében négyzetesen csökken.

## 5.4. Közelítés függvénygrafikon alatti tartományon

### 5.4.1. Rács definiálása

Olyan speciálisabb esetét szeretnénk vizsgálni az előző, azonos távolságra lévő egyeneseken elhelyezkedő rácsponthoz tartozó esetének, ahol remélhetőleg nem lesz szükség mind a nyolc darab pontban Taylor-közelítésre, és mégis tudunk közelítést adni egy rácsponthoz tartozó függvényérték Laplace-ára. Így remélhetőleg az egyes konstansszorzókra vonatkozó egyenletrendszer kezelhetőbb lesz.

Most egy olyan speciálisabb esetet vizsgálunk ahol a rács, amely pontjaiban az  $f$  kétváltozós függvény Laplace-át szeretnénk közelíteni, egy egyváltozós függvény grafikonja alatti terület felosztási pontjaiból áll. Az egyszerűség kedvéért dolgozzunk a  $A = [0, 1] \times [0, 1]$  halmazon. Tehát az egydimenziós függvényünk legyen a

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad (5.51)$$

folytonos függvény, melynek a  $\{(x, y) \in A : y = g(x)\}$  függvénygrafikonja az

$$\{(x, y) \in A : x = 0\}, \{(x, y) \in A : x = 1\}, \{(x, y) \in A : y = 0\} \quad (5.52)$$

egyenletű szakaszokkal együtt határoljanak egy összefüggő  $\Omega \subset (0, 1) \times (0, 1)$  tartományt. Feltételezzük, hogy  $g$  egy ismert függvény, amelynek értékeit ki tudjuk számolni a  $[0, 1]$  intervallumban. A későbbiekben a  $g$  függvényre még további feltételeket fogunk tenni, amelyek alapján magasabb rendű módszerekre juthatunk.

A meghatározott  $(n + 2)^2$  darab pontból álló rács tehát  $\Omega$  belsejében és határán lévő pontokból fog állni. Például, egy peremérték feladat esetén az  $\Omega$  belsejében lévő  $n^2$  darab pont értékeire tudunk majd egyenletrendszert felírni, míg a megadott (5.52) szakaszok és a  $g$  függvény grafikonjának uniójából álló peremen, vagyis  $\Omega$  határán lesznek ismeretesek a peremértékek. A felosztás az alábbi módon fog kinézni.

Osszuk fel az  $\{(x, y) \in A : y = 0\}$  szakaszt  $n + 2$  egyenlő részre, ezek a felosztási pontok lesznek

$$\{(x_0, 0), (x_1, 0), \dots, (x_{n+1}, 0)\},$$

ahol  $x_0 = 0$  és  $x_{n+1} = 1$ . Majd konstruáljuk meg az

$$\{(x, y) \in A : x = x_0, 0 \leq y \leq g(x)\}, \dots, \{(x, y) \in A : x = x_{n+1}, 0 \leq y \leq g(x)\}, \quad (5.53)$$

$\Omega$ -ban haladó függőleges szakaszokat. Továbbiakban legyen

$$Sz_k = \{(x, y) \in A : x = x_k, 0 \leq y \leq g(x)\} \quad (5.54)$$

a  $k$ -adik ilyen szakasz. Osszuk fel ezen szakaszokat egyenként  $n + 2$  egyenlő részre. Vagyis minden  $k$ -ra az  $Sz_k$  szakszon az

$$\{(x_k, y_0), (x_k, y_1), \dots, (x_k, y_{n+1})\}$$

felosztást nyerjük.

Ennek megfelelően minden  $k$ -ra az  $Sz_k$  függőleges szakaszon lévő szomszédos felosztási pontok közötti lépésköz az  $x$  koordinátában értelemszerűen 0 lesz, az  $y$  koordinátában pedig

$$\frac{g(x_k)}{n+1}$$

lesz, vagyis

$$y_{m+1} - y_m = \frac{g(x_k)}{n+1} : m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.55)$$

amennyiben itt minden  $m$ -re  $y_m$  egy a (5.54)  $Sz_k$  szakaszon lévő felosztási pont  $y$  koordinátája. Ennek megfelelően legyen minden  $k$ -ra

$$y_m(k) = \frac{m \cdot g(x_k)}{n+1} : m = 0, 1, 2, \dots, n+1, \quad (5.56)$$

az (5.54)  $Sz_k$  szakaszon lévő pontok  $y$  koordinátái.

Mivel ezen  $Sz_k$  szakaszokat úgy konstruáltuk, hogy azok a

$$\{(x_0, 0), (x_1, 0), \dots, (x_{n+1}, 0)\}$$

egyenletes felosztás pontjaiból indulnak, a különböző szomszédos szakaszokon lévő pontok a  $x$  koordinátája mindenhol  $\frac{1}{n+1}$ -el fog eltérni egymástól. Tehát ha

$$h = \frac{1}{n+1},$$

akkor a felosztás pontjai (5.56) alapján az

$$\{(x_k, y_m(k)) = (h \cdot k, h \cdot m \cdot g(x_k)) = (hk, hmg(x_k)) : k, m = 0, 1, \dots, n+1\} \quad (5.57)$$

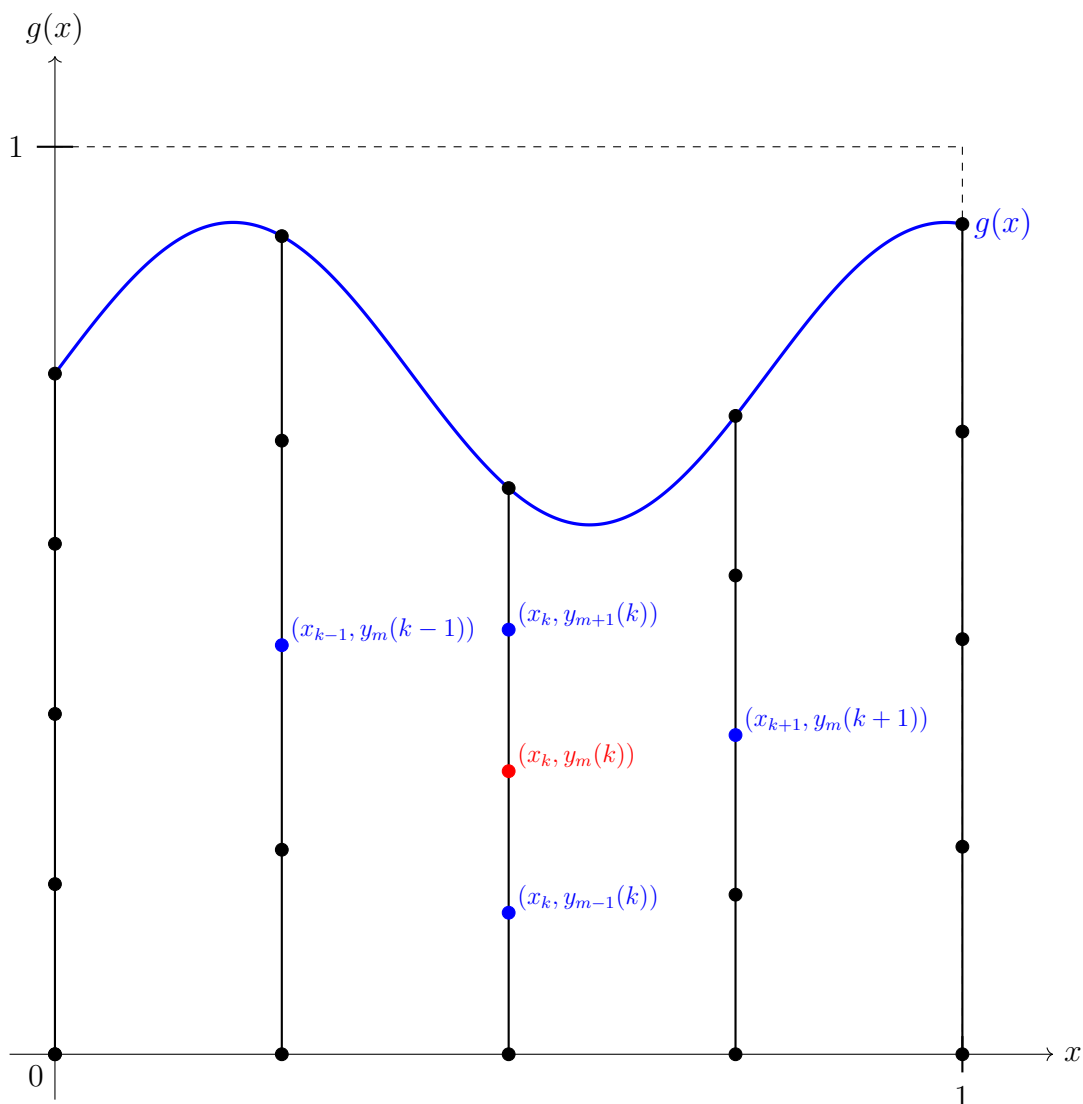
pontok lesznek.

Most tekintsünk egy ilyen általános, de nem a peremen lévő  $(x_k, y_m(k))$  pontot. A közelítés elkészítéséhez vegyük ezen pont négy "szomszédját", vagyis az alábbi pontokat:

$$\{(x_{k-1}, y_m(k-1)), (x_k, y_{m-1}(k)), (x_k, y_{m+1}(k)), (x_{k+1}, y_m(k+1))\}. \quad (5.58)$$

Az alábbi ábra szemlélteti ezt a konstrukciót  $n = 3$  esetén.





5.12. ábra. Példa egy lehetséges (5.51)  $g$  függvényre, melynek a grafikonja és az (5.52) szakaszok által határolt tartományt az (5.54) szakaszokkal meghatározott (5.57) felosztási pontokkal osztunk fel. Szemléltetjük egy lehetséges  $(x_k, y_m(k))$  pont helyzetét és a (5.58) körülötte elhelyezkedő pontokat,  $n = 3$  esetén.

#### 5.4.2. A közelítés konstrukciója

Az  $f$  kétdimenziós függvény (5.58) pontokbeli értékeire írjuk fel a megfelelő Taylor-sorokat a harmadrendű tagig az  $f(x_k, y_m(k))$ -középpontbeli értékhez képest. Az  $(x_k, y_m(k))$ -ponttal az (5.54)-szerinti  $Sz_k$  egyenesre eső  $(x_k, y_{m-1}(k))$  és  $(x_k, y_{m+1}(k))$  pontokra felírt sorok csak a második koordinátában vett parciális deriváltakat tartalmaznak, hiszen ezen pontok első koordinátája megegyezik az  $(x_k, y_m(k))$  középponttal. A (3.1) Taylor-tételbe való behelyettesítéshez szükségünk lesz az adott (5.58) pontok  $(x_k, y_m(k))$  ponthoz képest koordinátánként vett eltéréseire. Ahogy már tárgyaltuk a  $(x_k, y_{m-1}(k))$  és  $(x_k, y_{m+1}(k))$  pontok esetében az  $x$  koordinátában az eltérés 0. A többi eddig nem nevesített  $y$  koordinátánként vett eltéréseket

$b$ ,  $a_1$ , és  $a_2$ -vel fogjuk jelezni, tehát az (5.57) alapján:

$$\begin{aligned}
& (x_k, y_{m-1}(k)) : \\
& -b = y_{m-1}(k) - y_m(k) = h \cdot (m-1) \cdot g(x_k) - h \cdot m \cdot g(x_k) = -h \cdot g(x_k), \\
& (x_k, y_{m+1}(k)) : \\
& b = y_{m+1}(k) - y_m(k) = h \cdot (m+1) \cdot g(x_k) - h \cdot m \cdot g(x_k) = h \cdot g(x_k), \\
& (x_{k-1}, y_m(k-1)) : \\
& x_{k-1} - x_k = h \cdot (k-1) - h \cdot k = -h, \\
& a_1 = y_m(k-1) - y_m(k) = h \cdot m \cdot g(x_{k-1}) - h \cdot m \cdot g(x_k) = hm(g(x_{k-1}) - g(x_k)), \\
& (x_{k+1}, y_m(k+1)) : \\
& x_{k+1} - x_k = h \cdot (k+1) - h \cdot k = h, \\
& a_2 = y_m(k+1) - y_m(k) = h \cdot m \cdot g(x_{k+1}) - h \cdot m \cdot g(x_k) = hm(g(x_{k+1}) - g(x_k)).
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Ezeknek a felhasználásával a (3.1) Taylor-tételbe behelyettesítve már felírhatjuk a közelítéseket. Felteesszük, hogy a függvény, amelynek a Laplace-át keressük a  $(x_k, y_m(k))$  pontokban, teljesíti a megfelelő simasági feltételeket. Tehát az

$$D_{ij}(x_k, y_m(k)) = \binom{i}{j} \frac{\partial_x^j \partial_y^{i-j} f(x_k, y_m(k))}{i!}$$

jelölést használva kapjuk, hogy az (5.59) jelölésekkel  $b$ ,  $a_1$ , és  $a_2$ -re

$$\begin{aligned}
f(x_{k-1}, y_m(k-1)) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i D_{ij}(x_k, y_m(k)) \cdot (-h)^j (a_1)^{i-j} + O(h^3 + a_1^3), \\
f(x_{k+1}, y_m(k+1)) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i D_{ij}(x_k, y_m(k)) \cdot (h)^j (a_2)^{i-j} + O(h^3 + a_2^3), \\
f(x_k, y_{m-1}(k)) &= \sum_{i=0}^2 D_{i0}(x_k, y_m(k)) \cdot (-b)^i + O(b^3), \\
f(x_k, y_{m+1}(k)) &= \sum_{i=0}^2 D_{i0}(x_k, y_m(k)) \cdot (b)^i + O(b^3).
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Ezek lesznek a későbbiekben használt Taylor-közeliések a megfelelő pontokban. Olyan  $c_1, c_2, c_3, c_4$  együtthatókat szeretnénk találni, hogy az  $F$ -el jelölt

$$F = c_1 f(x_{k-1}, y_m(k-1)) + c_2 f(x_{k+1}, y_m(k+1)) + c_3 f(x_k, y_{m-1}(k)) + c_4 f(x_k, y_{m+1}(k)). \tag{5.61}$$

lineáris kombinációjában a Taylor-közeliéseknek, az  $\partial_x f(x_k, y_l)$  és  $\partial_y f(x_k, y_l)$  együtthatói tűnjenek el, és a  $\partial_x^2 f(x_k, y_l)$  és a  $\partial_y^2 f(x_k, y_l)$  együtthatói egyezzenek meg. Ez ekvivalens azzal, hogy a  $D_{10}(x_k, y_m(k))$  és  $D_{01}(x_k, y_m(k))$  együtthatói tűnjenek el és a  $D_{20}(x_k, y_m(k))$  és  $D_{02}(x_k, y_m(k))$  együtthatói egyezzenek meg. Ekkor elég sok tagtól meg tudunk szabadulni, ami közelebb vinne minket ahhoz, hogy az  $f(x_k, y_m(k))$  pontban vett Laplace-ára nézve másodrendben pontos közelítést kapjunk. Ez (5.60) és (5.61) szerint algebrailag ekvivalens azzal, hogy a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  együtthatók kielégítik az alábbi 4 ismeretlenes homogén egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} -h & h & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & -b & b \\ h^2 - a_1^2 & h^2 - a_2^2 & -b^2 & -b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.62}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezen egyenletrendszernek a

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = 2b^2, \\ c_3 &= 2h^2 + (a_1 + a_2)b - a_1^2 - a_2^2, \\ c_4 &= 2h^2 - (a_1 + a_2)b - a_1^2 - a_2^2, \end{aligned} \quad (5.63)$$

megoldásai lesznek. Mivel (5.59) szerint  $b = h \cdot g(x_k)$ , ha  $g(x_k) \neq 0$ , akkor biztosan nemnulla megoldást kapunk. Nem tettük expliciten föl az (5.51)  $g$  függvényéről, hogy  $g(x) > 0 : x \in [0, 1]$ , viszont ha bárhol  $g(x) = 0$  lenne, akkor a  $g$  és az (5.52) szakaszok nem határolnának egy összefüggő tartományt, ami viszont feltétel volt. Tehát szükségképpen következik, hogy a  $g$  függvényre

$$g(x) > 0 : x \in [0, 1].$$

Mivel (5.63)-ban megadott  $c_1, c_2, c_3, c_4$  együtthatók kielégítik (5.62)-et, ezért az (5.61) lineáris kombináció az (5.60) Taylor-közelítések szerint kibontva, az  $f(x_k, y_m(k)) = f$  jelöléssel és az  $f$  további parciális deriváltjaira vonatkozó hasonló rövidítéssel az

$$F = (2c_1 + c_3 + c_4)f + c_1 h^2 \Delta f + c_1 h (a_2 - a_1) \partial_x \partial_y f + O(c_1(h^3 + a_1^3 + a_2^3) + b^3(c_3 + c_4)) \quad (5.64)$$

közelítést nyerjük. Ugyanis az  $x$  szerinti harmadik parciális deriváltat tartalmazó tag

$$c_1 \frac{h^3 - h^3}{6} \partial_x^3 f = 0.$$

A jobb közelítés találása érdekében tegyük fel, hogy a  $g$  függvény teljesíti a Lipschitz-tulajdonságot, vagyis létezik egy olyan  $K$  konstans, amellyel

$$|g(x) - g(y)| \leq K \cdot |x - y| : x, y \in [0, 1]. \quad (5.65)$$

Ebből következik esetünkben, hogy

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq K \cdot |x_{k+1} - x_k| = K \cdot |(k+1)h - kh| = Kh = O(h) : k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.66)$$

Vagyis mivel

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) \leq |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = O(h) : k = 0, 1, \dots, n,$$

ezért

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = O(h) : k = 0, 1, \dots, n.$$

Tehát (5.59) szerint

$$\begin{aligned} a_1 &= hm(g(x_{k-1}) - g(x_k)) = m \cdot O(h^2), \\ a_2 &= hm(g(x_{k+1}) - g(x_k)) = m \cdot O(h^2). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Hasonlóan az (5.59) szerint

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &\leq hm|(g(x_{k+1}) - g(x_{k-1}))| \leq hm \cdot 2Kh = m \cdot O(h^2), \\ a_2 + a_1 &\leq hm(|(g(x_{k+1}) - g(x_k))| + |(g(x_{k-1}) - g(x_k))|) \leq hm \cdot 2Kh = m \cdot O(h^2). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Ezenfelül alapvető feltevésünk volt (5.51) szerint, hogy

$$|g(x)| \leq 1 : x \in [0, 1].$$

Ebből következően (5.59) szerint

$$b = h \cdot g(x_k) = O(h),$$

vagyis

$$c_1 = 2b^2 = O(h^2),$$

továbbá

$$c_4 - c_3 = 2(a_2 + a_1)b = m \cdot O(h^3).$$

Tehát az (5.64)-et egyszerűsítve a

$$F = (2c_1 + c_3 + c_4)f + c_1h^2\Delta f + c_1h(a_2 - a_1)\partial_x\partial_y f + O(h^5 + m^3h^8 + mh^6) \quad (5.69)$$

egyenletre jutunk. Ezt rendezzük most  $\Delta f$ -re, figyelembe véve, hogy a  $c_1$  mennyiség  $h^2$  rendű.

$$\Delta f = \frac{F - (2c_1 + c_3 + c_4)f}{c_1h^2} - O(hm) \cdot \partial_x\partial_y f + O(h + m^3h^4 + m). \quad (5.70)$$

Itt  $m$  az  $(x_k, y_m(k))$  pont  $y$  koordinátájának indexe, vagyis  $m$  azt jelzi, hogy hanyadik pont a  $k$ -edik függőleges egyenesen, amin rajta van. Vagyis  $m = 1, \dots, n$ -ig a belső rácspontok esetén (továbbra is  $h = \frac{1}{n+1}$ ). Tehát a közelítés kis  $m$ -ek esetén, vagyis a rács "alján" elsőrendű, viszont nagy  $m$ -ekre elromlik. Tehát a rács belsejében lévő pontokban már  $m = O(\frac{1}{h})$  -lesz, tehát ott már egészen pontosan felírva

$$\Delta f = \frac{F - (2c_1 + c_3 + c_4)f}{c_1h^2} - \frac{a_2 - a_1}{h}\partial_x\partial_y f + O(h)$$

lesz az egyenletünkből. Ez már tartalmazza a  $\partial_x\partial_y f$  szignifikáns konstansszorosát, tehát nem a Laplace operátor közelítése.

A módszert megpróbálhatnánk javítani úgy, hogy a (5.54) egyenesek mentén nem egyenletesen osztjuk fel a szakaszokat, hanem valamilyen függvény szerint. Például a (5.54) helyett lehetne

$$y_m(k) = \frac{S(m) \cdot g(x_k)}{n+1} : m = 0, 1, 2, \dots, n+1,$$

ahol  $S(0) = 0$ ,  $S(n) = n+1$ , de a köztes pontokban például a rács alsó pontjaiban, vagyis kis  $m$ -re nagyobbakat lépünk, cserébe nagyobb  $m$ -ekre csökkenthetjük a lépésközt és így talán a hibát is. Hiszen kis  $m$ -ekre elsőrendű a módszer. Ilyen  $S$  függvény lehetne például az

$$S(m) = \frac{\frac{3}{2}nm + m - \frac{m(m-1)}{2}}{n+1} : m = 0, 1, 2, \dots, n+1.$$

Vagy a (5.58) pontok helyett, a középpont melletti egyeneseken lévő  $(x_{k-1}, y_m(k-1))$  és  $(x_{k+1}, y_m(k+1))$  pontok helyett választhatnánk az  $(x_k, y_m(k))$ -hoz legközelebbi  $(x_{k-1}, y_p(k-1))$  és  $(x_{k+1}, y_q(k+1))$  pontokat. Tehát nem azokat választjuk, amelyek az egyenesen ugyanolyan sorszámúak, mint  $(x_k, y_m(k))$ , vagyis  $m$ -edik, hanem azokat, amik az  $(x_k, y_m(k))$ -hez legközelebb vannak.

A szakdolgozatban ezen esetekkel már nem foglalkozunk tovább, de érdekes folytatási lehetőségeket kínálhatnak.



## Hivatkozások

- [1] Stoyan Gisbert, Takó Galina (2012) *Numerikus Módszerek II*. Typotex, Budapest.
- [2] Randall J. LeVeque (2005) *Finite Difference Methods for Differential Equations*, Lecture notes, University of Washington.
- [3] D. Andrew S. Rees *An Introduction to Compact Finite Differences*, a presentation. Available at <https://people.bath.ac.uk/ensdasr/COMPACT/dasr.compact.pdf>
- [4] *Wikipedia* [https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_equation)
- [5] Izsák Ferenc *Modellalkotás és természettudományos alkalmazások*, oktatási segédanyag, 2023.