

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Newton-iteráció, elmélet és alkalmazás

Galsa Tamás

Szakdolgozat, matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Sigray István



Budapest, 2023

NYILATKOZAT

Név: Galsa Tamás

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

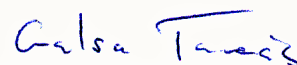
NEPTUN azonosító: G6Y6S8

Szakedolgozat címe:

Newton-iteráció, elmélet és alkalmazás

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. 06. 05.



a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Sigray István, témavezetőm segítségét, aki nélkül ez a szakdolgozat nem születhetett volna meg. Hálával tartozom egyrészt korábbi tanulmányaim során végzett munkájáért, melynek segítségével sikerült elsajátítanom a többváltozós és komplex analízis alapjait, és melynek köszönhetően meg is szerettem ezen területeket. Még nagyobb támogatást jelentett azonban az elmúlt egyéves tevékenysége, ugyanis iránymutatásával, kitűnő gondolataival és pozitív megjegyzéseivel lehetővé tette eme írás létrejöttét.

Sokat jelentett számomra családom segítése, melynek köszönhetően tanulmányaimra és szakdolgozatomra tudtam koncentrálni, ezáltal emelve az elmúlt évek, és különösen az elmúlt hónapok munkájának minőségét.

És hálás vagyok barátaimnak, szaktársaimnak, akik idejüket és energiájukat nem kímélve, számos eszmecsere által segítettek engem szakmai fejlődéshez.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Valós gyökök keresése	3
3. Newton-módszer	4
3.1. Az iteráció	4
3.2. Geometriai jelentés	5
3.3. Komplex gyökök	7
4. Komplex dinamika	9
4.1. Fogalmak	9
4.2. A Julia-halmaz	11
4.3. Két fontos tétel	16
5. Komplex Newton-iteráció	21
5.1. Vonzástartományok	23
5.2. A konvergencia sebessége	25
5.3. Másodfokú közelítés	27
6. Többváltozós Newton-módszer	32
6.1. Heurisztikák	32
6.2. Az új algoritmus és a Newton-módszer	35
6.3. Az n-dimenziós eset	37
7. Összefoglalás	38
8. Irodalomjegyzék	40

1. Bevezetés

Az alábbi szakdolgozat témája a Newton-Raphson-módszer, mely egy iterációs eljárás függvények zérushelykeresésére, nemlineáris egyenletek megoldására. Megvizsgáljuk a jól ismert Newton-iteráció működését, és kitérünk a módszer sikertelenségét okozó körülményekre. Ezen problémák közül kiemeljük a komplex gyökök megtalálásának kérdését, majd hogy a módszert ki tudjuk terjeszteni a komplex számsíkra, összefoglaljuk a komplex dinamika alapjait, előtérbe helyezve a fixpontok és azok fajtáinak fogalmát, illetve a normális függvénycsaládok segítségével definiált Julia- illetve Fatou-halmazokat, és azok tulajdonságait.

Ezt követően a megismert eszközök segítségével definiáljuk és megvizsgáljuk a komplex függvényeken értelmezett Newton-iterációt. A Koenigs- és Böttcher-tételek segítségével kimondunk és bebizonyítunk a konvergencia sebességéről szóló tételt (lokálisan a zérushely környezetében). Eközben a MATLAB programcsomag segítségével numerikusan vizsgáljuk a módszert.

A Taylor-sorfejtés segítségével definiálunk egy újabb gyökkereső metódust, és összevetjük azt a Newton-módszerrel, kiemelve az új algoritmus előnyeit és hátrányait. Ehhez annak elméleti megalapozásból sejthető tulajdonságait numerikus számításokkal támasztjuk alá.

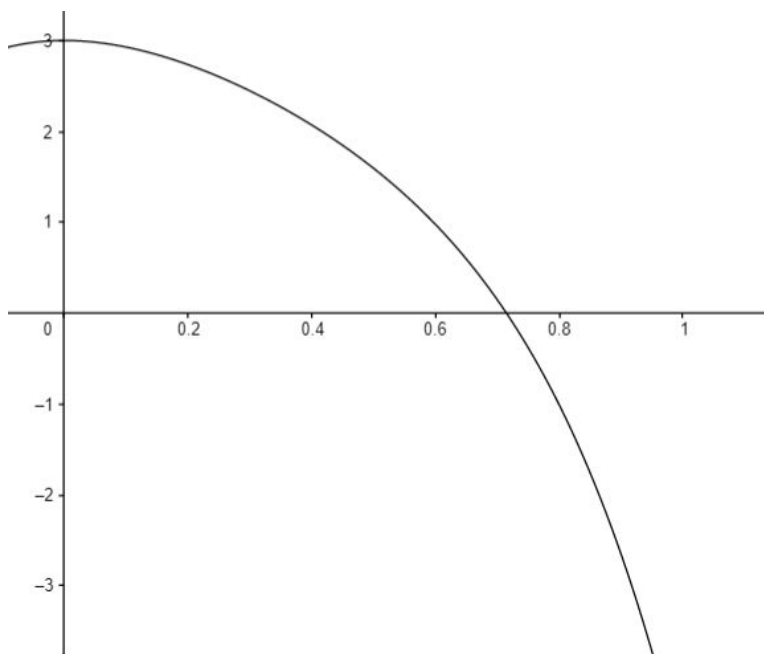
A dolgozat végén kitérünk a többváltozós Newton-módszer működésére, és leírjuk annak ismeretes problémáját, mely a szinguláris Jacobi-mátrixra vezethető vissza. Ennek elkerülésére új algoritmusok ötleteit vetjük fel, melyeket kétdimenzióban szintén a MATLAB programcsomag segítségével tesztelünk, vetjük össze az eredetivel, és igyekszünk sejtést megfogalmazni n -dimenziós esetben is.

2. Valós gyökök keresése

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és $f \in C[a, b]$, azaz f egy folytonos, valós értékű függvény az $[a, b]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $f(a) \cdot f(b) < 0$, azaz értékei eltérő előjelűek a két végpontban. Ekkor a Bolzano-tétel következtében tudjuk, hogy f -nek létezik zérushelye az $[a, b]$ intervallumon, ám ezt megtalálni korántsem triviális.

Példa

A gyökök megtalálása már a polinomfüggvények körében is nehézséget jelent. Példának okáért vegyük az $f(x) = -2x^6 - 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 3$ függvény megszorítását a $[0, 1]$ intervallumra (1. ábra). Jól látjuk, hogy $f(0) = 3$ és $f(1) = -5$, tehát mivel minden polinomfüggvény folytonos, f -nek létezik zérushelye a két végpont között, ám ennek pontos meghatározásához egy hatodfokú egyenletet kellene megoldanunk, mely általában algebrai úton nem áll módunkban.



1. ábra. Az f függvény

Ilyen esetekben a zérushelyet egy algebrai egyenlet megoldása helyett kereshetjük numerikusan iteratív módszerek segítségével, egy ilyen kiváló eszköz a Newton-módszer, avagy Newton-Raphson-módszer.

3. Newton-módszer

3.1. Az iteráció

A Newton-módszer egy jól ismer, sokat vizsgált eljárás [például: *Gáspár Csaba: Analízis, 2004*; *Hartung Ferenc: Bevezetés a numerikus analízisbe 2020*; *Hegedűs Csaba: Numerikus analízis*], mely arra a gondolatra épül, mely szerint ha egy zérushelyre van már egy közelítésünk, akkor egy egyszerű képlet segítségével jobb közelítéshez juthatunk. Ezt a lépést iteratívan végezve pedig bízhatunk sorozatunk a vizsgált függvény gyökéhez való konvergenciájában.

Legyen a függvényünk f , melynek zérushelye x^* , továbbá ismerjük ennek egy x_0 közelítését. Approximáljuk f -et az x_0 elsőfokú Taylor-polinomjával az x_0 pont körül:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Következésképpen ha x_0 valóban jó approximációja volt x^* -nak, akkor jó közelítéssel mondhatjuk, hogy:

$$f(x^*) \approx T_1(x^*)$$

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0)$$

$$x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Eme okból legyen tehát:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Majd egy általános lépésben:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Később látni fogjuk, hogy eme sorozat bizonyos feltételek mellett valóban x^* -hoz, tehát f gyökéhez konvergál.

Nem hagyhatjuk azonban figyelmen kívül, hogy $f'(x_n)$ -nel minden lépésben osztanunk kell, tehát az iteráció elakad, ha olyan ponthoz érkezőnk, melyben a derivált nulla [*A.G. Wiersma: The Complex Dynamics of Newton's Method, 2016*]. Ekkor másik

kezdőpontot kell választanunk, hogy a módszer zérushelyet találjon, illetve azt is megtehetjük, hogy a kritikus pont (melyben a derivált zérus) közelében választunk egy pontot, és onnan folytatjuk az iterációt [*Kerényi Péter: Gyökkeresés iterációval, 2011*].

3.2. Geometriai jelentés

Az imént definiált iteráció geometriai jelentéssel is bír, mely egyváltozós valós függvények esetében igen szemléletes [*Kerényi Péter: Gyökkeresés iterációval, 2011*]. Tegyük fel, hogy ismert az f függvény x^* zérushelyének egy x_0 közelítése. Húzzuk be f érintőegyenesét az $(x_0, f(x_0))$ pontban. Ennek az egyenesnek az egyenlete:

$$y = f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Azaz ezen egyenes éppen a Newton-iteráció által meghatározott x_1 -ben metszi az x tengelyt, hiszen a

$$0 = f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

egyenletből következik, hogy

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

azaz

$$x = x_1$$

Vagyis eme iterációs eljárás valójában nem más, minthogy a függvény grafikon adott x -koordinátához tartozó pontjába érintőt húzunk, melynek az x -tengellyel vett metszéspontja adja a következő x -koordinátát. Ezt a lépést ismétljük, megfigyelve, hogy ekkor a feljegyzett x -koordináták f egy zérushelyéhez konvergálnak.

Példa

Térjünk vissza a már korábban említett $f(x) = -2x^6 - 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 3$ függvényre. Pontosan nem tudtuk meghatározni gyökét, de tudjuk, hogy 0 és 1 között van. Végezzünk Newton-iterációt $x_0 = \frac{1}{2}$ kezdőponttal. Ekkor a képlet alkalmazásával azt kapjuk, hogy

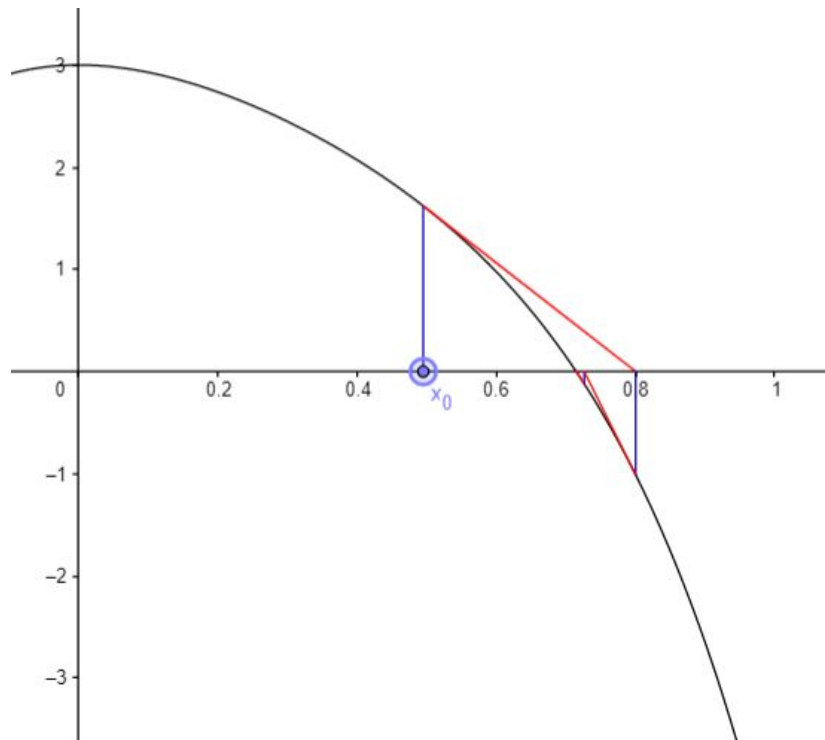
$$x_1 = 0,7965$$

$$x_2 = 0.7255$$

$$x_3 = 0.7151$$

$$x_4 = 0.7149$$

melyre már $|f(x_4)| < 10^{-6}$, azaz mindössze négy lépésből igen jó közelítéssel megkaptuk f zérushelyét. Az elvégzett lépéseket pedig geometriailag is ábrázolhatjuk Descarte-féle koordináta-rendszerben (2.ábra).



2. ábra. A Newton-módszer geometriai lefutásának ábrázolása *Geogebra* segítségével

Hogy matematikailag megalapozzuk a módszer hatékonyságát, kimondjuk és bebizonyítjuk a következő tételt.

Tétel

[*Michael Overton: Quadratic Convergence of Newton's Method*] Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, és $\exists x^* \in \mathbb{R}$, melyre $f(x^*) = 0$, de $f'(x^*) \neq 0$, melynek x_0 jó közelítése, és f'' korlátos x^* egy környezetében. Ekkor a Newton-módszer kvadratikusan konvergens, azaz $\exists c > 0$, melyre $|x_{n+1} - x^*| < c \cdot |x_n - x^*|^2$.

Bizonyítás

$$|x_{n+1} - x^*| = \left| x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* \right| = \left| \frac{f'(x_n) \cdot (x_n - x^*) - (f(x_n) - f(x^*))}{f'(x_n)} \right|$$

A Lagrange-féle középérték tétel szerint $\exists \xi_n$ x_n és x^* között, melyre:

$$|x_{n+1} - x^*| = \left| \frac{f'(x_n) \cdot (x_n - x^*) - f'(\xi_n) \cdot (x_n - x^*)}{f'(x_n)} \right|$$

Majd a Lagrange-féle középérték tétel újbóli alkalmazásával kapjuk, hogy $\exists \tau_n$ x_n és ξ_n között, melyre:

$$|x_{n+1} - x^*| = \left| \frac{f''(\tau_n) \cdot (x_n - \xi_n) \cdot (x_n - x^*)}{f'(x_n)} \right| \leq \left| \frac{f''(\tau_n)}{f'(x_n)} \right| \cdot |(x_n - x^*)|^2 \leq \frac{K}{M} \cdot |(x_n - x^*)|^2$$

Ahol x^* egy környezetében K az $|f''|$ egy felső korlátja, M pedig az $|f'|$ egy alsó korlátja (létezik ilyen pozitív M , hiszen $f'(x^*) \neq 0$, és f' folytonos).

□

3.3. Komplex gyökök

Vegyünk egy valós számokon értelmezett függvényt, mely holomorfan kiterjeszhető a komplex számok testére. Ennek természetesen létezhet imaginárius résszel rendelkező zérushelye is, kérdés, hogy ezt is megtalálhatjuk-e Newton-módszer segítségével. Eme felvetés már csak a korábban kiemelt valós együtthatójú polinomfüggvények körében is fontos, hiszen ezek is rendelkezhetnek komplex gyökökkel.

Valós kezdőpontból indítva természetesen nem járhatunk sikerrel, hiszen így az iteráció során minden lépésben valós számot kapunk. Ez nem konvergálhat az említett gyökhöz, ugyanis annak képzetes részének abszolút értéke alsóbecslés a sorozat bármely tagjától vett távolságára. Mi történik azonban, ha komplex értékű kezdőpontból indítunk Newton-iterációt? Tudjuk, hogy ha egy komplex függvény holomorf egy tartományon, akkor ott tetszőlegesen sokszor differenciálható, és adott pont körüli Taylor-sora előállítja a függvényt, a lehető legnagyobb sugarú körlapon. Következésképpen az approximáló módszer alap gondolata ekkor is helyénvaló, bár a kvadratikusság konvergencia valós esetbeli bizonyítását módosítani kell, a benne szereplő Lagrange középértéktétel miatt. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a Newton-módszer a komplex számsíkra kiterjeszve

is jól működő algoritmus, és feltérképezzük majd milyen problémák okozhatják mégis az eszköz sikertelenségét (ezek valós esetben is fennakadáshoz vezethetnek, ám ebben a fejezetben még nem emeltük ki őket). Ahhoz azonban, hogy jobban megértsük az iteráció viselkedését a síkon, a következő fejezetben összefoglaljuk a komplex dinamika alapjait, mellyekkel később a Newton-módszert jellemezni tudjuk majd [ebben nagy segítségünkre lesz: *John Milnor: Dynamics in one complex variable, 1990 c. könyve*].

4. Komplex dinamika

A komplex dinamika nem más, mint egy komplex számokon értelmezett dinamikai rendszer. Ez azt jelenti, hogy adott egy $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ függvény (ahol $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ a Riemann-gömb), azaz egy a végtelennel kibővített komplex számsíkot önmagába vivő leképezés. Legyen továbbá $f^2 = f \circ f$, valamint indukcióval definiálva $f^{on} = f \circ f^{o(n-1)} \forall n \in \mathbb{N}_+$. Azaz $f^{on} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ az f leképezés n -edik iteráltja. A továbbiakban az egyes pontok, valamint a teljes komplex számsík viselkedését vizsgáljuk miközben azon iteráljuk az f függvényt. (Tehát azt mondhatjuk, hogy ebben a rendszerben f alkalmazása felel meg az idő egy lépésének, vegyük észre, hogy ez valójában egy diszkrét idejű dinamikai rendszer, hiszen a leképezésünknek csak természetes számú iteráltjait értelmezzük.) A továbbiakban definiálunk néhány fogalmat, melyek segítségünkre lesznek a komplex dinamikai rendszerek leírásában.

4.1. Fogalmak

Definíció

Egy $z \in \hat{\mathbb{C}}$ pont pályája az f leképezés alatt $O(f, z) = \{v \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^{on} = v\}$, vagyis azon pontok halmaza melyekre előbb-utóbb eljut z az f iterálása közben.

Definíció

Egy pályát periodikus pályának, vagy ciklusnak nevezünk, amennyiben véges sok különböző pontból áll, azaz $\exists k \geq 1$, hogy $z_0, f(z_0), f^{o2}(z_0), \dots, f^{o(k-1)}(z_0)$ mind különböző pontok, de $f^{ok}(z_0) = z_0$. Ekkor azt mondjuk, hogy a ciklus k -periódus.

Egy z_0 pont fixpontja az iterációnak, ha $f(z_0) = z_0$. Meg kell jegyezzük, hogy egy fixpont pályája is periodikus, méghozzá 1-periódus.

Definíció

Adott egy periodikus pálya: $z_0, f(z_0), f^{o2}(z_0), \dots, f^{o(k-1)}(z_0)$. Ekkor a pálya multiplikátorának vagy sajátértékének nevezzük a $\lambda = (f^{ok})'(z_0) = f'(z_0) \cdot f'(z_1) \cdot \dots \cdot f'(z_{k-1})$ számot. Kivételt képeznek ezalól a végtelent tartalmazó ciklusok, ugyanis a végtelen

esetében nem az eredeti függvény ott felvett deriváltját kell tekintünk, hanem annak a reciprokallyal vett konjugáltjának deriváltját a nullában.

A ciklusokat három kategóriába soroljuk multiplikátoruk szerint, azt mondjuk, hogy a periodikus pálya vonzó, ha $|\lambda| < 1$, taszító, ha $|\lambda| > 1$ és indifferens, ha $|\lambda| = 1$. Továbbá szupervonzónak nevezzük azon periodikus pályákat, melyek multiplikátora $\lambda = 0$.

Továbbra se feledjük, hogy fixpont esetében is érvényes ez a trichotómia, melyre később nagyobb hangsúlyt fektetünk majd, azonban először lássunk egy a vonzó pályákhoz tartozó, igen fontos fogalmat.

Definíció

Egy k -periódus vonzó ciklus vonzástartományja a $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^{o(n \cdot k)}(z) = z_i\}$, ahol z_i a pálya egyik pontja. Tehát a vonzástartomány azon pontok halmaza, melyek f^{ok} iterálásával a ciklus egy pontjához konvergálnak.

A továbbiakban két csoportba fogjuk sorolni a komplex számsík összes pontját a dinamikai rendszerben való viselkedésük alapján. Egy adott pontot vizsgálva két eshetőséget tapasztalhatunk. Lehetséges, hogy a pont és egy kis környezete bizonyos távolságon belül marad a leképezés iterálása közben, ekkor úgy fogalmazhatunk, hogy a pont "szelíden" viselkedik. Azonban az is előfordulhat, hogy a rögzített pont egy hozzá tetszőlegesen közel lévő ponttól korlátlanul eltávolodhat a leképezés ismételtetése során, ekkor slendrián módon azt mondhatjuk, hogy a pont viselkedése dinamikailag "vad". Ezen kétféle pontok által meghatározott halmazokat fogjuk most definiálni, illetve jellemezni.

Definíció

Legyen F függvénycsalád, melyre $\forall f \in F : f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorf függvény. Ekkor azt mondjuk, hogy F normális függvénycsalád, ha minden benne futó sorozatnak létezik részsorozata, mely minden kompakt halmazon egyenletesen konvergens. Azaz F normális függvénycsalád, ha $\forall f_n \subset F$ sorozatnak $\exists f_{n_k}$ részsorozata és $\exists f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

holomorf függvény, melyekre $\forall K \subset \hat{\mathbb{C}}$ kompakt halmazra

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_{n_k}(x) - f(x)| = 0$$

Jegyezzük meg, hogy a végtelent tartalmazó kompakt halmazok esetében ismét reciprokokkal való konjugálásra van szükség.

4.2. A Julia-halmaz

Definíció

Legyen $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ nem konstans meromorf leképezés. Ekkor a következő dichotómiát állíthatjuk fel: ha $z \in \hat{\mathbb{C}}$ -nek létezik U környezete, melyre megszorítva az $\{f^{on} | n \geq 1\}$ (tehát az f iteráljaiból álló függvénycsaládot) normális családot kapunk, akkor z tartozzon a Fatou-halmazhoz (a továbbiakban $F(f)$). Amennyiben ilyen környezet nem létezik, z legyen a Julia-halmaz (a továbbiakban $J(f)$) eleme.

Világos, hogy a Fatou-, illetve a Julia-halmaz komplementerei egymásnak. Továbbá azt mondhatjuk, hogy a Fatou-halmazba kerültek az említett "szelíd" pontok, míg a Julia-halmaz tartalmazza a "vadul" viselkedő pontokat.

A továbbiakban mélyebbre ássuk magunkat a komplex dinamika területén: a következő állítások és tételek segítenek jellemezni a Fatou- és Julia-halmazokat (a szakirodalom az utóbbit helyezi előtérbe, így mi is ezt fogjuk tenni, ám ez elsősorban csak az állítások kimondásában nyilvánul meg, azok jelentése mindkét halmazra világos lesz).

Állítás

$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ nem konstans holomorf leképezés Julia-halmaza invariáns f -re, azaz $f(J(f)) = J(f)$.

Bizonyítás

[*Fellner Máté: Komplex Dinamika, 2017*] Legyen $N \subset \hat{\mathbb{C}}$ nyílt halmaz, melyen $\{f^{on}\}$ normális függvénycsalád. Mivel f folytonos függvény, ezért $f^{-1}(N)$ is nyílt. Ha adott

egy $\{f^{\circ n_k}\}$ sorozat, akkor az $\{f^{\circ(n_k-1)}\}$ sorozatnak a normalitás miatt létezik $\{f^{\circ(n_{k_j}-1)}\}$ részsorozata, mely $\forall K \subset N$ kompakt halmazon egyenletesen konvergens. Ekkor azonban $\{f^{\circ(n_{k_j})}\}$ egyenletesen konvergens az $f^{-1}(K)$ halmazon, ebből adódóan $\{f^{\circ n}\}$ normális $f^{-1}(N)$ -en. Beláttuk tehát, hogy:

$$F(f) \subseteq f^{-1}(F(f))$$

azaz

$$f(F(f)) \subseteq (F(f))$$

Igazoljuk a fordított irányú tartalmazást is! Legyen $N \subset \hat{\mathbb{C}}$ nyílt halmaz, melyen $\{f^{\circ n}\}$ normális függvénycsalád. A nyílt leképezés tételéből adódóan (nem konstans holomorf függvény nyílt halmazt nyílt halmazba képez) $f(N)$ is nyílt. Ha adott egy $\{f^{\circ n_k}\}$ sorozat, akkor az $\{f^{\circ(n_k+1)}\}$ sorozatnak a normalitás miatt létezik $\{f^{\circ(n_{k_j}+1)}\}$ részsorozata, mely $\forall K \subset N$ kompakt halmazon egyenletesen konvergens. Ekkor az $\{f^{\circ(n_{k_j})}\}$ részsorozat egyenletesen konvergens $f(K)$ -n, tehát $\{f^{\circ n}\}$ normális az $f(N)$ halmazon. Ezzel igazoltuk, hogy:

$$f(F(f)) \supseteq (F(f))$$

Tehát $f(F(f)) = (F(f))$, melyből a komplementaritás miatt egyből adódik, hogy:

$$f(J(f)) = J(f)$$

□

Érezhető, hogy az állítás egyfajta önhasonlóságot jelent a Julia-halmazra nézve.

Lemma

Legyen $k \geq 1$, ekkor $J(f^{\circ k}) = J(f)$.

Bizonyítás

[*Fellner Máté: Komplex Dinamika, 2017*] Legyen $N \subset \hat{\mathbb{C}}$ nyílt halmaz, melyen $\{f^{\circ n}\}$ normális függvénycsalád. Mivel $\{f^{\circ(k \cdot n)}\} \subset \{f^{\circ n}\}$, ezért minden $\{f^{\circ(k \cdot n)}\}$ beli sorozat

$\{f^{on}\}$ beli is, tehát definíció szerint létezik egyenletesen konvergens részsorozata $\forall K \subset N$ kompakt halmazon. Így $\{f^{o(k \cdot n)}\}$ is normális N -en, tehát:

$$F(f^{ok}) \supseteq F(f)$$

Lássuk be a fordított irányú tartalmazást is! Legyen $N \subset \hat{\mathbb{C}}$ nyílt halmaz, melyen $\{f^{o(k \cdot n)}\}$ normális függvénycsalád. Ekkor (felhasználva azt, hogy egy egyenletesen konvergens függvénysorozatra alkalmazva egy polinomfüggvényt szintén egyenletesen konvergens függvénysorozatot kapunk) $\{f^{o(k \cdot n + r)}\}$ is normális N -en, ahol $0 \leq r \leq k - 1$. Továbbá nyilvánvalóan minden $\{f^{on}\}$ beli sorozat végtelen sok elemet tartalmaz $\{f^{o(k \cdot n + r)}\}$ -ből valamely r -re. Utóbbinak van részsorozata, mely egyenletesen konvergens $\forall K \subset N$ kompakt halmazon, és ez részsorozata az $\{f^{on}\}$ beli sorozatnak is, tehát:

$$F(f^{ok}) \subseteq F(f)$$

Így beláttuk, hogy $F(f^{ok}) = F(f)$, melyből következik, hogy:

$$J(f^{ok}) = J(f)$$

□

A fejezetben hátralévő tételek és bizonyítások [John Milnor: *Dynamics in one complex variable, 1990*] könyvén alapulnak.

Tétel

Minden vonzó periódikus pálya a vonzástartományával együtt a Fatou-halmazban van, míg a vonzástartományok határa Julia-halmazbeli éppúgy, mint a taszító periódikus pályák.

Bizonyítás

Az iménti lemmát felhasználva a tételt elegendő ciklusok helyett fixpontokra belátni. Legyen először z_0 vonzó fixpont, melynek vonzástartománya Ω . Ekkor Taylor-sorfejtés segítségével kapjuk, hogy z_0 -nak létezik kis környezete, melyre az $\{f^{on}\}$ függvénycsaládot

megszorítva normális családot kapunk. Hiszen tetszőleges $\{f^{on}\}$ -ben futó sorozatnak van részsorozata, melyben az indexek monoton növekednek, ez pedig egyenletesen konvergál a $g(z) = z_0$ konstansfüggvényhez. Tehát:

$$z_0 \in F(f)$$

Legyen $K \subset \Omega$ kompakt halmaz. Tetszőleges $\{f^{on}\}$ beli sorozatból megint csak monoton növekvő indexű részsorozatot kiválaszta a vonzástartomány definíciójából kapjuk, hogy az egyenletesen konvergál K halmazon a $g(z) = z_0$ függvényhez, tehát $\{f^{on}\}$ normális függvénycsalád Ω -n, ezzel belláttuk, hogy:

$$\Omega \subset F(f)$$

Legyen $v \in \partial\Omega$, azaz egy pont z_0 vonzástartományának határán. Ekkor létezik v -hez tetszőlegesen közeli $w \in \Omega$, tehát v -nek nem létezhet olyan környezete, melyen $\{f^{on}\}$ normális, hiszen tetszőleges részsorozat csak olyan függvényhez konvergálhat, mely w -t z_0 -ba képzzi, v -t azonban nem. Ez a limes tehát nem lehet folytonos, azaz:

$$\partial\Omega \subset J(f)$$

A továbbiakban legyen z_0 taszító fixpont. Ekkor $(f^{on})'(z_0) \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$. Így z_0 egy kis környezetében f iteráltjainak egy sorozata nem konvergálhat egyenletesen, mert ez ellentmondana Weierstrass tételének, mely szerint ha egy függvénysorozat egyenletesen konvergál, akkor a deriváltfüggvények is egyenletesen konvergálnak. Tehát ekkor:

$$z_0 \in J(f)$$

□

Definíció

Legyen $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ racionális törtfüggvény, azaz $f = \frac{p}{q}$, ahol p és q polinomfüggvények, melyeknek nincs közös gyökük. Ekkor f foka: $\deg(f) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$.

Ez annál is inkább jelentős, hiszen minden $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorf függvény felírható racionális törtfüggvény alakban.

Állítás

Legyen f egy racionális törtfüggvény, és $\deg(f) \geq 2$. Ekkor $J(f) \neq \emptyset$, azaz létezik Julia-halmazbeli pont.

Bizonyítás

Indirekt tegyük fel, hogy $J(f) = \emptyset$. Ekkor létezik f^{o_n} -ben futó sorozat, mely egyenletesen konvergál egy $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorf függvényhez az egész $\hat{\mathbb{C}} - n$. Tudjuk azonban, hogy minden ilyen függvény felírható két polinomfüggvény hányadosaként, ezért $\deg(g)$ létezik. A függvénysorozat foka egy küszöbértéktől kezdve meg kell egyezzen g fokával, csak hogy $\deg(f^{o_n}) = (\deg(f))^n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$. Ez ellentmondás.

□

Állítás

Amennyiben a Julia-halmaznak létezik belső pontja, akkor a halmaz maga a Riemann-gömb.

Ezen állítás bizonyításától most eltekintünk, ám kimondanunk fontos volt, hiszen így elénk tárul a tény, hogy amennyiben a Fatou-halmaz nem üres, a Julia-halmaznak nem lehet belső pontja. Ezen implikáció későbbi felidézése segít majd nekünk jobb rálátást biztosítani a Newton-iteráció által meghatározott Julia-halmazokra.

A továbbiakban tekintsük az $f(z) = \lambda \cdot z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3 + \dots$ függvényt. Ennek λ multiplikátorú fixpontja van az origóban, melynek egy környezetében holomorf. Megmutatjuk, hogy amennyiben $|\lambda| \neq 1$, egy koordináta transzformációval f egyszerű alakra hozható. Ehhez két tételt fogunk bebizonyítani, először a Koenigs-tételt, arra az esetre, mikor a 0 nem kritikus pont, azaz nem szupervonzó fixpont van az origóban. Majd a Böttcher-tételt szupervonzó fixpont esetére.

4.3. Két fontos tétel

Koenigs-tétel

Tegyük fel, hogy a λ multiplikátorra igaz, hogy $|\lambda| \neq 0, 1$. Ekkor létezik $\Phi : B(0, \epsilon) \rightarrow B(0, \delta)$ az origóban holomorf leképezés, hogy $\Phi(0) = 0$ és $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(w) = \lambda \cdot w$. És ez a leképezés konstans szorzó erejéig egyértelmű.

Bizonyítás

Kezdjük az egyértelműséggel! Tegyük fel, hogy Φ és Ψ két ilyen függvény, azaz

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(w) = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}(w) = \lambda \cdot w$$

Feltehető, hogy $\Phi'(0) = \Psi'(0) = 1$, hiszen ha nem ilyen lenne, egy konstans szorzóval normálhatnánk, ami után továbbra is teljesülne a fenti feltétel. Legyen $g(z) = \lambda \cdot z$, ekkor teljesül, hogy

$$f(z) = \Psi^{-1} \circ g \circ \Psi(z)$$

Melyet behelyettesítve a fenti egyenletbe, kapjuk hogy:

$$\Phi \circ \Psi^{-1} \circ g \circ \Psi \circ \Phi^{-1}(w) = \lambda \cdot w$$

Vezessük be az $\alpha = \Phi \circ \Psi^{-1}$ jelölést, ekkor α holomorf $B(0, \epsilon)$ -on, valamint

$$\alpha(0) = \Phi \circ \Psi^{-1}(0) = \Phi(0) = 0$$

Továbbá

$$\alpha'(0) = (\Phi \circ \Psi^{-1})'(0) = \Phi'(\Psi^{-1}(0)) \cdot (\Psi^{-1})'(0) = \Phi'(0) \cdot \frac{1}{\Psi'(\Psi^{-1}(0))} = 1$$

Következésképpen α 0 körüli hatványsora:

$$\alpha(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cdot z^n$$

Ekkor az

$$\alpha \circ g \circ \alpha^{-1}(w) = \lambda \cdot w$$

egyenletbe w helyére $\alpha(z)$ -t helyettesítve:

$$\alpha \circ g(z) = \lambda \cdot \alpha(z)$$

$$\alpha(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot \alpha(z)$$

$$\lambda \cdot z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cdot \lambda^n \cdot z^n = \lambda \cdot z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cdot \lambda \cdot z^n$$

Tehát $\forall n \geq 2$ -re $b_n \cdot \lambda^n = b_n \cdot \lambda$. És Mivel $|\lambda| \neq 0, 1$, ezért $b_n = 0$ ($\forall n \geq 2$). Azaz $\Phi = \Psi$, vagyis minden alkalmas leképezés csak egy nem nulla konstans szorzóban térhet el egymástól.

Most térjünk rá a létezés igazolására! Legyen $0 \leq |\lambda| \leq 1$, ekkor válasszunk egy $c \leq 1$ számot, melyre $c^2 \leq |\lambda| \leq c$ teljesül. Legyen továbbá $r \geq 0$, hogy $\forall z_0 \in B(0, r)$ számra teljesüljön, hogy

$$|f(z)| \leq c \cdot |z|$$

Ekkor a $z_n = f^{\circ n}(z_0)$ jelölést használva kapjuk, hogy $|z_n| \leq r \cdot c^n$, azaz minden $B(0, r)$ -beli pont 0-hoz konvergál f iterálása közben. Mindazonáltal f 0 körüli hatványsorából tudjuk, hogy

$$\exists k \in \mathbf{R} \forall z \in B(0, r) : |f(z) - \lambda \cdot z| \leq k \cdot |z|^2$$

Melynek egyenes következménye (a korábbi becslés felhasználásával):

$$|z_{n+1} - \lambda \cdot z_n| \leq k \cdot r^2 \cdot c^{2n} \rightarrow 0$$

Vezessük be a $w_n = \frac{z_n}{\lambda^n}$ jelölést. Emígyen

$$|w_{n+1} - w_n| \leq \frac{k \cdot r^2}{|\lambda|} \cdot \left(\frac{c^2}{|\lambda|} \right)^n \rightarrow 0$$

Így a $z_0 \mapsto w_n(z_0)$ függvények egyenletesen konvergálnak $B(0, r)$ -en a $\Phi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\lambda^n}$ függvényhez. Igaz továbbá a következő

$$\Phi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{\lambda^{n+1}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda} \cdot \Phi(f(z_0))$$

Azaz

$$\lambda \cdot \Phi(z) = \Phi(f(z))$$

$$\lambda \cdot w = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(w)$$

Továbbá láthatjuk, hogy

$$\Phi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{on}(0)}{\lambda^n} = 0$$

$$\Phi'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{on}(0)}{\lambda^n} \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(f'(0))^n}{\lambda^n} = 1$$

Tehát Φ valóban alkalmas leképezés.

Amennyiben $|\lambda| \geq 1$, létezik f^{-1} lokális inverz a 0 egy környezetében, melynek az origó már vonzó fixpontja, hiszen multiplikatóra $\frac{1}{\lambda}$. Használjuk erre bizonyításunk eddigi részének tanulságát:

$$\Phi \circ f^{-1} \circ \Phi^{-1}(z) = \frac{1}{\lambda} \cdot z$$

melynek egyenes ágú következménye:

$$\lambda \cdot w = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(w)$$

Ezzel az állítást taszító fixpont esetében is igazoltuk, így bebizonyítottuk Koenigs tételét.

□

Böttcher-tétel

Legyen $\lambda = 0$, azaz $f = a_n \cdot z^n + a_{n+1} \cdot z^{n+1} + \dots$, ahol $n \geq 2$ és $a_n \neq 0$. Ekkor létezik $\Phi : B(0, \epsilon) \rightarrow B(0, \delta)$ az origóban holomorf lineáris leképezés, hogy $\Phi(0) = 0$ és $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(w) = w^n$. Továbbá ezen leképezés egy $(n - 1)$ -edik egységgyökkel való

szorzás erejéig egyértelmű.

Bizonyítás

Az előzőekhez hasonlóan ezen bizonyítás is megtalálható [John Milnor: *Dynamics in one complex variable, 1990*] című művében, emiatt és a Koenigs-tétel bizonyításához való hasonlósága miatt most csak vázlatosan írjuk le.

Először is egy reciprokvaló konjugálás segítségével elérhetjük, hogy a függvény a végtelen egy környezetében értelmezett, magában a végtelenben fixponttal rendelkező

$$f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1}$$

alakban felírható hozzárendelés. Egy lineáris konjugálás használata okán azt is feltehetjük, hogy a főegyüttható 1. Legyen f értelmezési tartománya $|z| > r$, ekkor definiáljunk egy új függvényt, mely f logaritmikus konjugáltja, azaz legyen

$$F(Z) = \log(f(e^Z))$$

melyet a $\operatorname{Real}(Z) > \log(r)$ félsíkon értelmezzünk. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $|F(Z) - nZ| < 1$, amennyiben $\operatorname{Real}(Z)$ elég nagy, továbbá egy ilyen félsíkot F önmagába képez. Ebből a becslésből már következik, hogy

$$F(Z + 2\pi i) = F(Z) + 2n\pi i$$

Vegyünk egy Z_0 pontot ebből a félsíkból és figyeljük az F függvény által meghatározott pályáját. Ekkor tudjuk, hogy

$$|Z_{k+1} - nZ_k| < 1$$

és a $W_k = \frac{Z_k}{n^k}$ helyettesítéssel élve kapjuk, hogy

$$|W_{k+1} - W_k| < \frac{1}{n^{k+1}} \rightarrow 0$$

Így a $Z_0 \mapsto W_k(Z_0)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, legyen határértékük Ψ .
Ekkor könnyű látni, hogy

$$\Psi(F(Z)) = n\Psi(Z)$$

és ezáltal

$$\Psi(Z + 2\pi i) = \Psi(Z) + 2\pi i$$

Ezek azért igen fontosak, mert így tudjuk, hogy a

$$\Phi(z) = e^{\Psi(\log(z))}$$

a végtelen környezetében jól definiált, és ott $\Phi(f(z)) = \Phi(z)^n$. Ezzel a létezést igazoltuk.
Az egyértelműség igazolásához vizsgáljuk meg a végtelen egy környezetében értelmezett $\eta(w) = c_1 w + c_0 + c_{-1} w^{-1} + \dots$ alakú függvényeket, melyekre $\eta(w^n) = \eta(w)^n$. Ezáltal

$$c_1 w^n + c_0 + c_{-1} w^{-n} + \dots = c_1^n w^n + n c_1^{n-1} c_0 w^{n-1} + \dots$$

És mivel $c_1 \neq 0$, ezért nyilvánvalóan $(n-1)$ -edik egységgyök, a többi együtthatóról pedig indukcióval megmutatható, hogy mind 0.

□

5. Komplex Newton-iteráció

Legyen $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ tartomány és $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorf függvény. Ekkor f komplex zérushelyeit kereshetjük az

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

approximáló lépés iterálásával, kellően jó kezdőpontból indítva. A továbbiakban legyen $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ a Newton-módszer által definiált függvény. Tegyük fel, hogy f -nek zérushelye a z^* , ez azt jelenti, hogy az akörüli hatványsora $f(z) = (z - z^*)^n \cdot h(z)$ alakú, ahol $n \geq 1$, valamint $h(z^*) \neq 0$ (továbbá h nyilván holomorf z^* -ban). Ekkor egy egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$N(z) = z - \frac{(z - z^*) \cdot h(z)}{n \cdot h(z) + (z - z^*) \cdot h'(z)}$$

Vagyis $N(z^*) = z^*$, azaz a Newton iterációnak fixpontja van z^* -ban. Szintén egyszerű, de hosszabb számolással kapjuk, hogy

$$N'(z) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot h^2(z) + 2n \cdot (z - z^*) \cdot h(z) \cdot h'(z) + (z - z^*)^2 \cdot h(z) \cdot h''(z)}{n^2 \cdot h^2(z) + 2n \cdot (z - z^*) \cdot h(z) \cdot h'(z) + (z - z^*)^2 \cdot (h'(z))^2}$$

Mely természetesen azt jelenti, hogy $N'(z^*) = \frac{n-1}{n}$. Eszerint a Newton iterációnak vonzó fixpontja van f gyökeiben, tehát valóban konvergens egy kis környezete az iteráció alatt. Sőt, amennyiben a zérushely nem kritikus pont, azaz $f'(z^*) \neq 0$, akkor a fixpont valójában szuperattraktív.

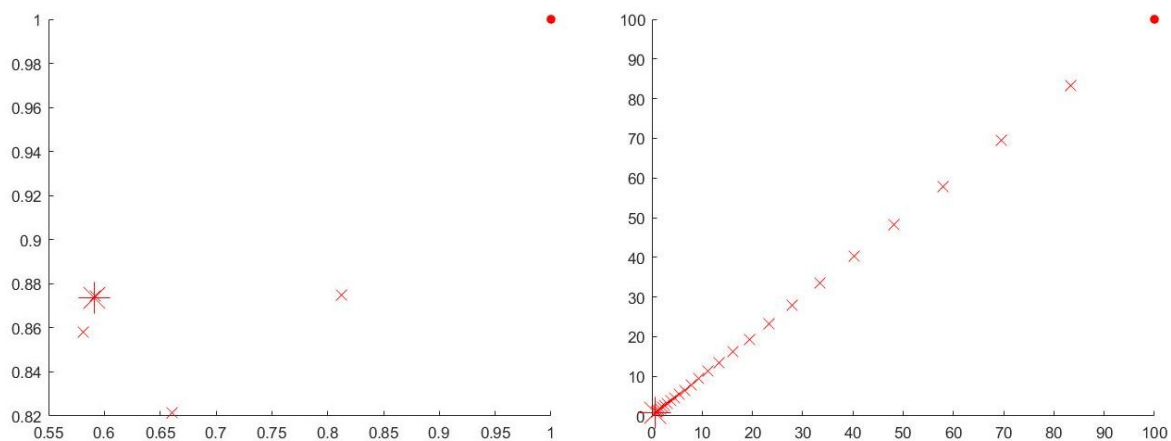
Példa

Térjünk vissza a már a dolgozat elején vizsgált $f(x) = -2x^6 - 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 3$ komplex gyökökkel is rendelkező polinomfüggvényhez. Már megjegyeztük, hogy a Newton-módszert valós kezdőértékből indítva csak valós gyököt találhatunk. Kezdjük most az iterációt az $1+i$ pontból. Ekkor (a részeredmények közlésétől eltekintve) már a hatodik lépésben eljutunk a $0,5911 + 0,8737i$ értékhez, melyhez hat tizedesjegy pontossággal valóban nullát rendel a függvény.

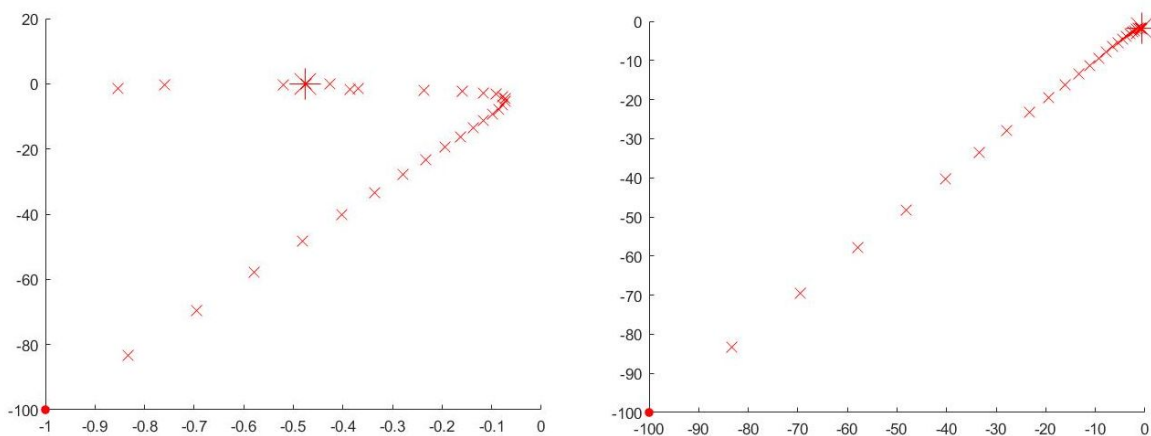
Érdekes kérdés, hogy mit nevezhetünk kellően jó közelítésnek a komplex számsíkon. Kiváltképpen mivel azt gondolhatnánk, hogy a $100 + 100i$ pont távol fekszik az említett

gyöktől, csak hogy innen indítva az iterációt, értékeink ismét a $0,5911 + 0,8737i$ -hez konvergálnak, 31 lépésből elérve azt (3. ábra).

Nyilvánvalóan a sík más pontjaiból más gyököket is megtalálhatunk Newton-módszer segítségével. Így például a $-1 - 100i$ pontból a $-0,4756$ -öt (mely rá is világít a nem megfelelő tényre, mely szerint valós kezdőértékkel ugyan nem találhatunk komplex gyököt, azonban a komplex számból indított iteráció vezethet valós zérushelyhez), valamint a $-100 - 100i$ pontból a $-0,7107 - 1,8601i$ gyököt (4. ábra). Mindkét esetben eljutottunk az iteráció fixpontjáig 31 lépésből. Ezzel meg is találtuk a kitüntetett függvény összes zérushelyét (a két valós gyök, a két komplex, továbbá azok konjugáltjai), mely jól mutatja, hogy a módszer igen hatékony, amennyiben megfelelő kezdőértékeket választunk.



3. ábra. Newton-iteráció f -en az $1 + i$ és $100 + 100i$ kezdőpontokból

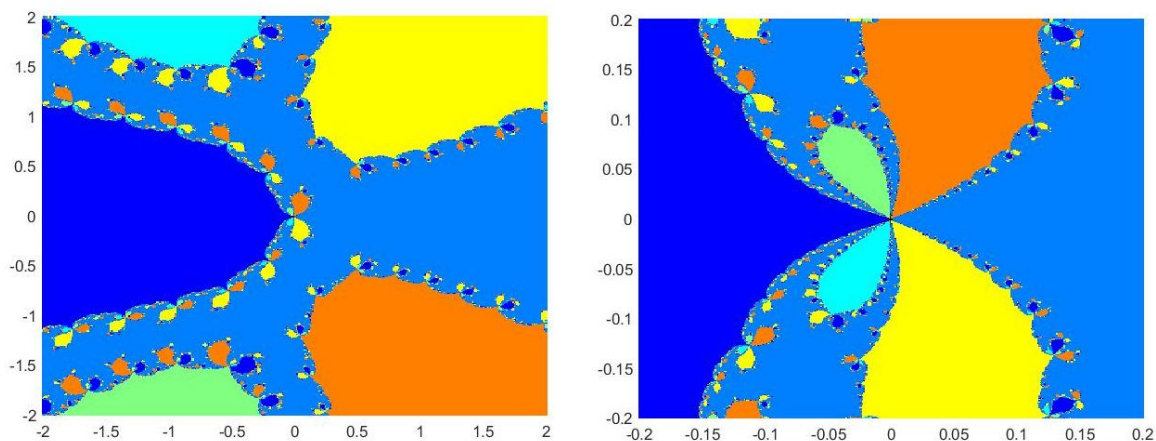


4. ábra. Newton-iteráció f -en az $-1 - 100i$ és $-100 - 100i$ kezdőpontokból

5.1. Vonzástartományok

A kérdés tehát nem más, mint hogy a komplex számsík melyik pontjából melyik gyökhöz vezet az iteráció, ha ugyan elvezet valamelyikhez. Azaz szeretnénk feltérképezni az egyes zérushelyek vonzástartományait. A MATLAB numerikus programcsomag (mellyel valójában az eddigi számításokat is végeztük) segítségével ezt megtehetjük.

Az általam készített program segítségével megadva egy polinomfüggvényt gyökjeivel együtt (melyeket megkereshetünk az általam impelentált Newton iterációval), egy véges téglalapot a komplex számsíkon, valamint a finomságát a téglalapon veendő rácscsatlantásnak futtathatjuk az említett Newton iterációt minden rácspontból. Továbbá meg kell adnunk egy felső korlátot az iterációs lépések számára, és egy értéket az elvárt pontosságra. Amennyiben adott pontból eljutunk az egyik gyök elvárt pontosságú környezetébe, a program a zérushelyhez tartozó színűre színezi a kezdőpontot (egyenletesen választunk gyökszámnyi színt a MATLAB színskálájáról). Amennyiben ez nem történik meg, feketére színezzük a pontot. Ezáltal ábrázoljuk a különböző vonzástartományok, illetve a Julia-halmaz pontjait. Illusztráljuk ezt a már szívünkhöz nőtt példán (5. ábra)!



5. ábra. f zérushelyeinek vonzástartományai

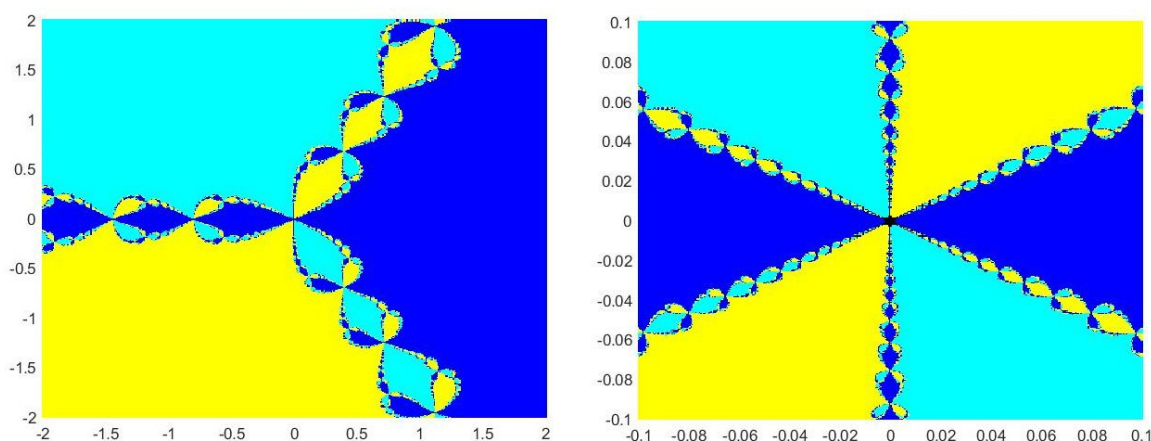
Az ábrán használt hat szín jelzi tehát a hat a vonzástartományt (értelemszerűen mindegyik ahhoz a fixponthoz tartozik, melyet tartalmaz). Már birtokában vagyunk a tudásnak, hogy a hat vonzástartomány pontjainak uniója alkotja a Fatou-halmazt, míg azok határai (a feketére színezett pontok halmaza) a Julia-halmaz. Tehát a Newton-

módszer sikeressége valóban függ a kezdőpont választásától, azonban majdnem minden pont a Fatou-halmazhoz tartozik, így véletlenszerűen választott kezdőértékből majdnem biztosan eljutunk egy zérushelyhez.

A második ábrán egy felnagyított szeletet láthatunk az első ábrából. Figyeljünk fel rá, hogy a vonzástartományok határain ismétlődő alakzatok jellemnek meg, mind kisebb és kisebb méretben újfent. Ez az az önhasonlóság, melyre korábban utaltunk, és ez az, ami miatt (a Mandelbrot-halmazhoz hasonlóan) a vonzástartományok határa, azaz a Julia-halmaz fraktálok formájában jelenik meg.

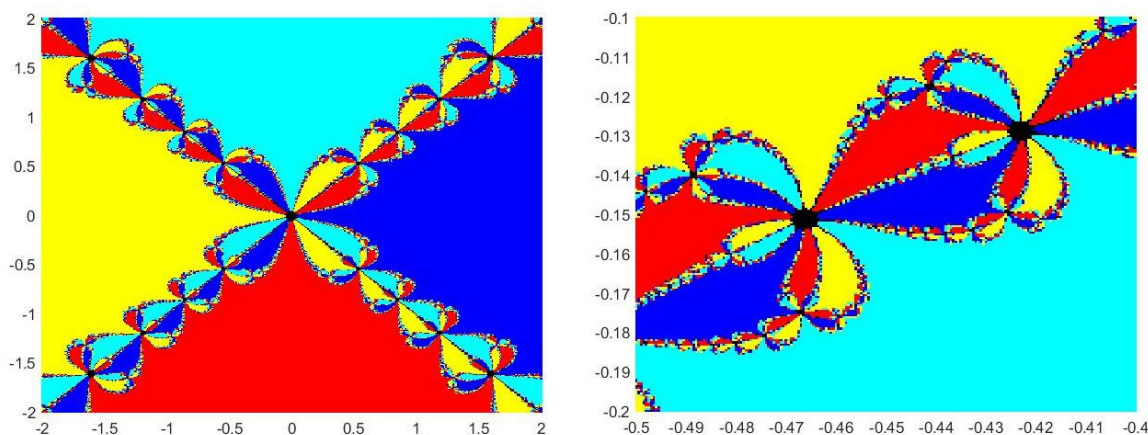
Világos, hogy amennyiben f -nek van két különböző gyöke, úgy a Newton iteráció rendelkezik legalább két vonzó fixponttal. Következésképpen a vonzástartományoknak kell, hogy legyen határa, így a Julia-halmaz nem üres. Vegyük észre, hogy erre a konklúzióra egy korábbi állítás is bizonyítékot ad. Hiszen ezesetben a Newton iterációs függvény egy lineáris törtfüggvény, melynek foka legalább kettő. Azt pedig már beláttuk, hogy ilyen függvényhez tartozó Julia-halmaz nem lehet üres. Végül szintén egy korábbi állításra hivatkozva jegyezzük meg azt is, hogy amennyiben az f függvénynek létezik a gyöke, azaz a Newton-iterációnak fixpontja, akkor Julia-halmaznak nem létezhet belső pontja, hiszen a Fatou-halmaz nem üres.

Lássunk még két további példát a vonzástartományok illusztrálására:



6. ábra. $x^3 - 1$ zérushelyeinek vonzástartományai

Az $x^3 - 1$ (6. ábra), és az $x^4 - 1$ (7. ábra) függvények vonzástartományait láthatjuk, azaz a harmadik, majd negyedik egységgyökökhöz vezető kezdőpontokat különítjük el. Ezen ábrákon is megfigyelhető az önhasonlóság, a fraktálszerű határok, és hogy majd-



7. ábra. $x^4 - 1$ zérushelyeinek vonzástartományai

nem minden pont Fatou-halmazbeli.

Ezen felül felfigyelhetünk még a forgásszimmetriára, pontosabban arra, hogy ha egy vonzástartományt elforgatunk előbbi esetben 120, utobbinál 90 fokkal, akkor a "következő" egységgyök vonzástartományát kapjuk. Ez általánosan is igaz n -edik egységgyökök, esetében, melyet most igazolunk is!

Legyen $f = x^n - 1$ és $\epsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \frac{2\pi}{n}$ az első n -edik egységgyök. Ekkor

$$N(\epsilon \cdot x) = \epsilon \cdot x - \frac{\epsilon^n \cdot x^n - 1}{n \cdot \epsilon^{n-1} \cdot x^{n-1}} = \epsilon \cdot \left(x - \frac{x^n - 1}{n \cdot x^{n-1}} \right) = \epsilon \cdot N(x)$$

Azaz ha egy pontból egy adott egységgyökhöz vezet az iteráció, akkor amennyiben elforgatjuk a pontot az origó körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel, onnan a "következő" egységgyökhöz vezet a Newton-módszer.

5.2. A konvergencia sebessége

Lépünk túl a konvergencia numerikus modellezésén, és vizsgáljuk a kérdést analitikusan. Egy adott zérushely kis környezetéből indított Newton-módszer konvergál a zérushelyhez, ezt hamarosan belátjuk. Ezzel együtt a konvergencia sebességére hamarosan kimondandó állításunkat is igazoljuk, mely függeni fog a zérushely, azaz az iteráció fixpontjának milyenségétől. Tudjuk, hogy minden gyök vonzó fixpontja az iterációnak, és hamarosan látjuk, hogy a konvergencia gyorsabb szupervonzó fixpont esetében. Sőt a sebesség annál nagyobb, minél nagyobb indexű az első nemnulla együttható N (mely

továbbra is a Newton-iterációs függvény) hatványsorában, azaz minél többször kell N -et deriválni, hogy kapjunk egy függvényt, mely a fixponthoz nem nullát rendel. Tételünket a Koenigs-, és Böttcher-tételekre építjük, egy koordináta-transzformációval konjuguálva a Newton-iterációs lépést nyerünk igazolást a konvergenciára és annak sebességére. Mondjuk is ki ezt a tételt!

Tétel

Legyen $f : B(z^*, \epsilon) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorf függvény, $f(z^*) = 0$, $z_0 \in B(0, \epsilon)$ a z^* egy közelítése. Legyen N az f által definitált Newton-iterációs függvény, és $N'(z^*) = N''(z^*) = \dots = N^{(k-1)}(z^*) = 0$, de $N^{(k)}(z^*) \neq 0$, ahol $k \geq 1$. Ekkor $N^{\circ n}(z_0) \rightarrow z^*$ és a konvergencia sebessége k -adrendű.

Bizonyítás

Először tekintsük a nem szuperattraktív fixpont esetét, azaz legyen $N'(z^*) = \lambda < 1$. Ekkor a Koenigs-tétel szerint $\exists \Phi : B(z^*, \epsilon) \rightarrow B(0, \delta)$ holomorf leképezés, hogy $\Phi \circ N \circ \Phi^{-1}(w) = \lambda \cdot w$, ahol $w \in B(0, \delta)$ és $\Phi(z^*) = 0$. Világos, hogy az iteráció felcserélhető a konjugálással, azaz:

$$\Phi \circ N^{\circ n} \circ \Phi^{-1}(w) = (\Phi \circ N \circ \Phi^{-1})^{\circ n}(w) = \lambda^n \cdot w$$

$$\Phi \circ N^{\circ n}(z) = \lambda^n \cdot \Phi(z)$$

$$N^{\circ n}(z) = \Phi^{-1}(\lambda^n \cdot \Phi(z)) \rightarrow \Phi^{-1}(0) = z^*$$

ahogy $n \rightarrow \infty$. Ekkor tehát a konvergencia lineáris.

Következhet tehát a szupervonzó eset, azaz legyen $k \geq 2$. Ekkor a Böttcher-tétel szerint $\exists \Phi : B(z^*, \epsilon) \rightarrow B(0, \delta)$ holomorf leképezés, hogy $\Phi \circ N \circ \Phi^{-1}(w) = w^k$, ahol $w \in B(0, \delta)$ és $\Phi(z^*) = 0$. Az előzőekhez hasonlóan:

$$\Phi \circ N^{\circ n} \circ \Phi^{-1}(w) = (\Phi \circ N \circ \Phi^{-1})^{\circ n}(w) = w^{k^n}$$

$$\Phi \circ N^{\circ n}(z) = \Phi^{k^n}(z)$$

$$N^{on}(z) = \Phi^{-1}(\Phi^{kn}(z)) \rightarrow \Phi^{-1}(0) = z^*$$

ahogy $n \rightarrow \infty$. Imígyen a konvergencia k -adrendű.

□

5.3. Másodfokú közelítés

Mint említettük a Newton-módszer ötlete a függvény - egy adott pont kis környezetében történő - lineáris közelítésen alapul. Hasonlóan az iteratív lépést végezhetnénk a másodfokú Taylor-polinom segítségével is, mely jobb közelítést ad az eredeti függvényre, amennyiben az adott pontban a függvény második deriváltja nem nulla.

$$T_2(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} \cdot (z - z_0)^2$$

Így az eredeti ötlet mására, amennyiben az f függvény z^* gyökének z_0 egy jó közelítése:

$$f(z^*) \approx T_2(z^*)$$

$$0 \approx f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z^* - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} \cdot (z^* - z_0)^2$$

Eszerint z^* -ot a következő másodfokú egyenlet megoldásaként kereshetjük:

$$\frac{f''(z_0)}{2} \cdot (z^*)^2 + (f'(z_0) - f''(z_0) \cdot z_0) \cdot z^* + \left(f(z_0) - f'(z_0) \cdot z_0 + \frac{f''(z_0)}{2} \cdot (z_0)^2 \right) = 0$$

mely több kérdést is felvet. Rögtön láthatjuk például, hogy eme egyenletnek két megoldása van, így nem jól definiált az iteráció. Mivel abból az alapfeltevésekből indultunk ki, hogy a kezdőértékünk (vagy legalább valamely lépés után kapott érték) jó közelítése a zérushelynek, ezért az egyenlet gyökei közül mindig azt fogjuk választani, mely közelebb van a legutóbbi közelítésünkhöz. Így definiáltunk egy új iteratív eljárást egy egyenlet megoldásának approximálására, azt azonban észre kell vegyünk, hogy a Newton iterációval ellentétben ezen módszer lépései kivezetnek a valós számtestből. Tehát mint olyan, nem beszélhetünk általánosságban valós esetről, a komplex számsíkon azonban jól végezhető a módszer.

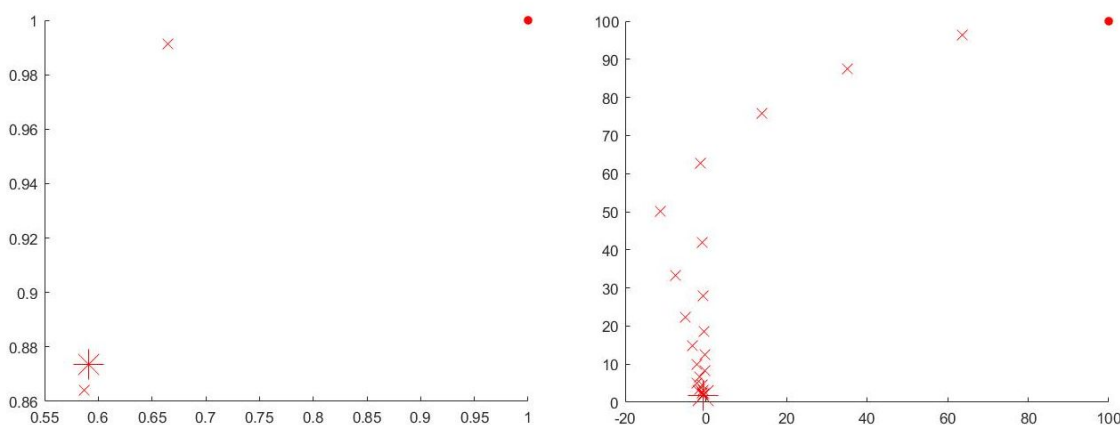
Legyen G az iteráció által definiált függvény, azaz

$$G(z) = \frac{z \cdot f''(z) - f'(z) \pm \sqrt{(f'(z))^2 - 2f''(z) \cdot f(z)}}{f''(z)}$$

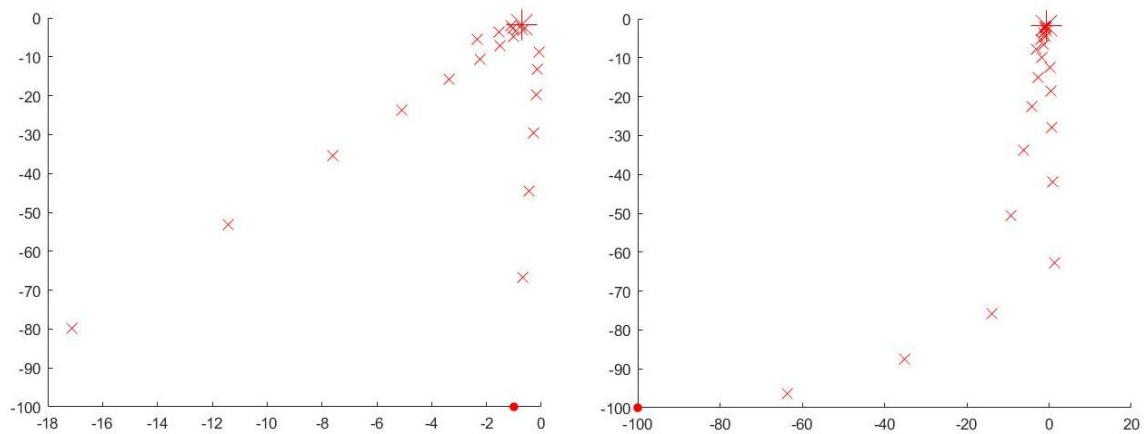
komplex számok közül az, mely közelebb van z -hez. Ekkor azt kapjuk, hogy $G(z^*) = z^*$, tehát az iterációnak fixpontja van f zérushelyein. (Ilyenkor G a megfelelő helyen az összeadás műveletet választja, ennél nyilván nem kaphatunk közelebbi értéket z^* -hoz). A legjelentősebb kérdés, hogy ezen eljárás hatékonysága hogyan viszonyul a Newton-módszer hatékonyságához, vizsgáljuk ezt a MATLAB programcsomag segítségével.

Példa

Legyen ismét $f(x) = -2x^6 - 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 3$. Vizsgáljuk meg, hogyan teljesít az új eljárás, a korábban látott kezdőpontokból. Az $1 + i$, $100 + 100i$, $-1 - 100i$ és $-100 - 100i$ értékekből indítva a módszert rendre az $0.5911 + 0.8737i$, $-0.7107 + 1.8601i$, $-0.7107 - 1.8601i$ és $-0.7107 - 1.8601i$ gyökökhöz konvergálunk (8. és 9. ábra), elérve azt hat tizedesjegy pontossággal első esetben 4, de a többi esetben is legfeljebb 24 lépésből. Tehát kevesebb iterációra van szükség, mint a Newton-módszer esetében, azonban egy lépés bizonyára több időt vesz igénybe, ezt hamarosan megvizsgáljuk.

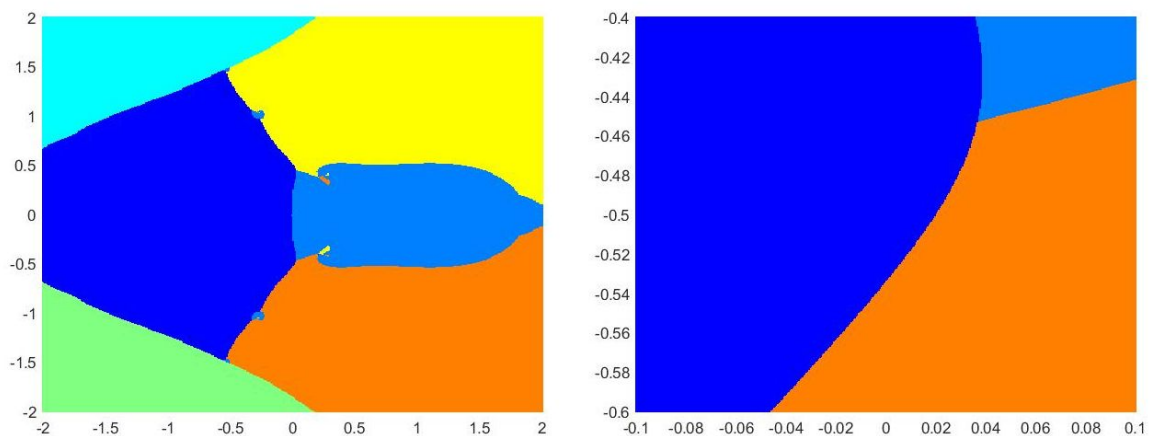


8. ábra. A másodfokú közelítés adta iteráció f -en az $1+i$ és a $100+100i$ kezdőpontokból indítva



9. ábra. A másodfokú közelítés adta iteráció f -en az $-1 - 100i$ és a $-100 - 100i$ kezdőpontokból indítva

Azt is egyből látjuk, hogy eme módszer eltérő vonzástartományokkal rendelkezik. Ábrázoljuk ezeket is (10. ábra)!



10. ábra. f zérushelyeinek vonzástartományai a másodfokú közelítés ihlette módszerrel

Jól látszik, hogy ezen dinamikai rendszer vonzástartományai, bár nem egybefüggőek, sokkal simább határokkal rendelkeznek, mint azt a Newton iteráció esetében tapasztaltuk. Nem beszélhetünk fraktálszerű Julia-halmazokról, azt azonban megállapíthatjuk, hogy itt is majdnem minden pont a Fatou-halmazhoz tartozik.

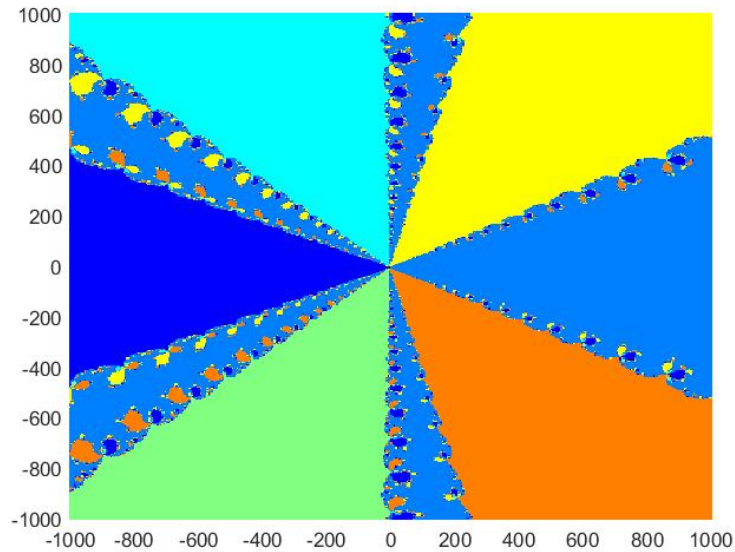
Most vizsgáljuk meg ezen zérushely-keresési eljárás sebességét a Newton iterációhoz viszonyítva! Ehhez 10000 darab harmadfokú, véletlen polinomra teszteljük a két módszert az origó környezetéből véletlenül választott kezdőponttal. (A polinom minden együtt-

hatóját két számmal adjuk meg, melyeket egyenletesen választunk a $(-1,1)$ intervallumból, ezek adják az együttható valós és képzetes részét, a kezdőértéket pedig egyenletesen választjuk az origó középpontú, tengelypárhuzamos, 2 oldalhosszúságú négyzetből.) A két módszerre feljegyezzük a 10000 próbálkozásból vett iterációk átlagos lépésszámát és összegezzük külön-külön a két módszerre fordított futásidőt a 10000-10000 iteráció alatt.

A teszt során azt tapasztaltuk, hogy a gyökkeresés, mind a 20000 esetben sikeres volt. Megtalálásához a Newton-módszernek átlagosan 59,89 lépésre volt szüksége, az újonnan definiált módszernek viszont mindössze 30,03-ra. Azonban a numerikus számítás szempontjából fontosabb adat, hogy a Newton iterációnak ehhez 0,837 másodpercre volt szüksége, míg az új módszer végzése összesen 1,953 másodpercet ölelt fel. A tapasztalat azt mutatja, hogy ezen eredmények függetlenek a vizsgált polinomfüggvény fokától (amennyiben az nagyobb mint kettő), ám ez már korántsem állítható a kezdőértékek megválasztásáról.

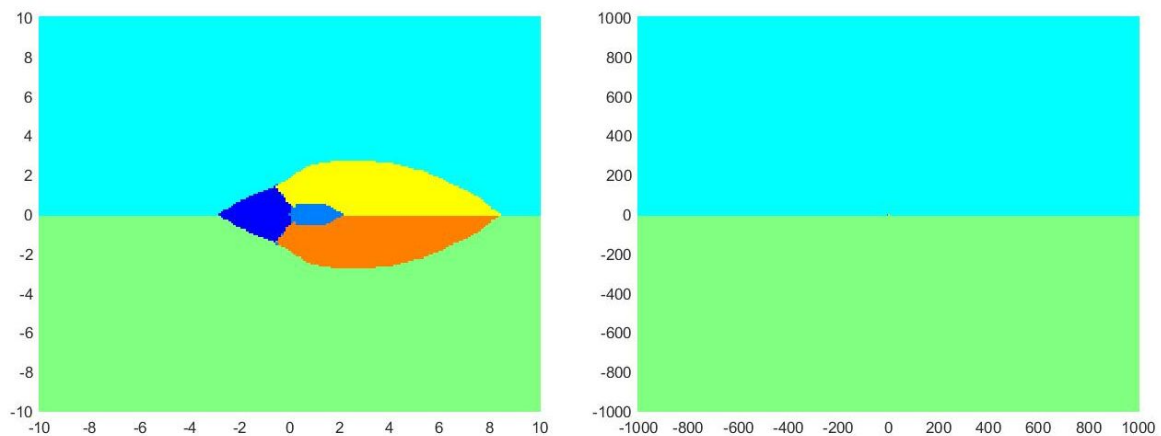
Amennyiben a kiindulóponot tartalmazó négyzetet nagyítjuk az origóból, a másodfokú közelítés adta módszer futásideje változatlan. Ezzel szemben a Newton iteráció egy 20 oldalhosszúságú négyzetből indulva 0,977, 200 oldalhosszúságúból 1,495, 2000 oldalhosszúságúból 1,981 és 20000 oldalhosszúságúból 2,420 másodperc alatt végzi el a 10000 gyökkeresést. Eme tény azzal magyarázható, hogy míg a Newton-módszer lépésszáma erősen nő, addig a másodfokú közelítésen alapuló iteráció mindegyik esetben megtalálja a zérushelyet hozzávetőlegesen 30 lépésből. Ez arra enged következtetni, hogy amennyiben jó kezdeti közelítéssel rendelkezünk, a jól ismert Newton-iterációt érdemes használnunk, de annak hiányában hasznosabb lehet az új módszer, mely nagy távolságból igen gyorsan zérushelyet talál.

Ezzel jól összeegyeztethető a vonzástartományok nagyobb távlatban való vizsgálatának eredménye. Amint az látható (11. ábra) a Newton-iteráció vonzástartományai "szétesnek" önhasonló tartományokra, ezzel kitöltve az egész síkot. Így amikor egy a gyököktől igazán távoli kezdőpontból végezzük az eljárást, a pontnak az iteráció közben először el kell jutnia a zérushelyet tartalmazó tartományba, hogy az a vonzó fixpont valóban "be tudja őt húzni" iterálás közben. Ekkor egy pont valóban sok tartományt bejárhat a függvény iterálása alatt, éppen így keletkeznek az önhasonló Fatou halmazok.



11. ábra. f zérushelyeinek vonzástartományai a Newton-módszer alatt

Ezzel ellentétben a másodfokú közelítés adta módszer vonzástartományait megfigyelve (12.ábra) azt tapasztaljuk, hogy a komplex számsík nem oszlik fel sok tartományra, így távoli kezdőpontból indulva is hasonló sebességgel indulhat meg a konvergencia. Érdekes megfigyelés, hogy távoli pontokból indítva a módszert, csak két zérushely található meg (ez a $-0,7107 \pm 1,8607i$). Ez azt jelenti, hogy lehetnek olyan gyökök, melyeket csak igen jó kezdő közelítés segítségével tudunk meghatározni, mely viszont az algoritmus hátránya (feltéve, hogy minden zérushelyre kíváncsiak vagyunk).



12. ábra. f zérushelyeinek vonzástartományai a másodfokú közelítés segítségével

6. Többváltozós Newton-módszer

A Newton-iteráció többváltozós függvények zérushelyeinek keresésére is alkalmas, amennyiben a képhalmaz elemei vektorok, melyek dimenziója megegyezik a változók számával [*Susan Jane Colley: Vector Calculus, 2012*]. Hamarosan látni fogjuk, hogy a módszer igen hasonló az egy változós formájához, azonban mégis felvet egy problémát, melyet eddig nem tapasztaltunk. Ennek heurisztikus feloldására teszünk kísérletet ebben a fejezetben, majd a MATLAB segítségével teszteljük új algoritmusainkat.

Legyen most $D \subset \hat{\mathbb{C}}^n$ tartomány és $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}^n$ holomorf függvény. Ekkor f gyökeit kereshetjük adott $z_0 \in D$ kezdőpontból indítva a

$$z_{n+1} = z_n - (f'(z_n))^{-1} \cdot f(z_n)$$

sorozat határértékeként, ahol $(f'(z_n))^{-1}$ az f függvény Jacobi-mátrixának inverze a z_n pontban.

Rögtön elénk tárult a probléma, ugyanis az iteráció során invertálnunk kell egy mátrixot, amit nem tudunk megtenni amennyiben az szinguláris. Így a módszer alkalmazása sikertelen lesz, amennyiben az iteráció során olyan pontba kerülünk, melyben f Jacobi-mátrixának determinánsa nulla, vagy nulla közeli (a numerikus számítások hibája miatt). Kérdés, hogy milyen módszerhez folyamodhatunk, amennyiben a Newton-iteráció nem járt sikerrel.

6.1. Heurisztikák

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért kétváltozós, $\hat{\mathbb{C}}^2$ -be képző függvényekkel foglalkozunk. Alapvető ötletünk, hogy ahelyett, hogy a fenti lépést iterálnánk, megpróbáljuk egy dimenziósra redukálni a lépéseket, ezzel elkerülve a mátrixinvertálás szükségességét. Így egyfajta parciális Newton-iterációt végzünk majd az f függvény koordináta-függvényeink.

Legyen $f(z, w) = \begin{pmatrix} p(z, w) \\ q(z, w) \end{pmatrix}$. Ekkor (z_n, w_n) pontban állva egy változót és egy koor-

dináta-függvényt választva, most z -t és p -t, tehetünk egy lépést: legyen

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n, w_n)}{\frac{\partial p(z_n, w_n)}{\partial z}}$$

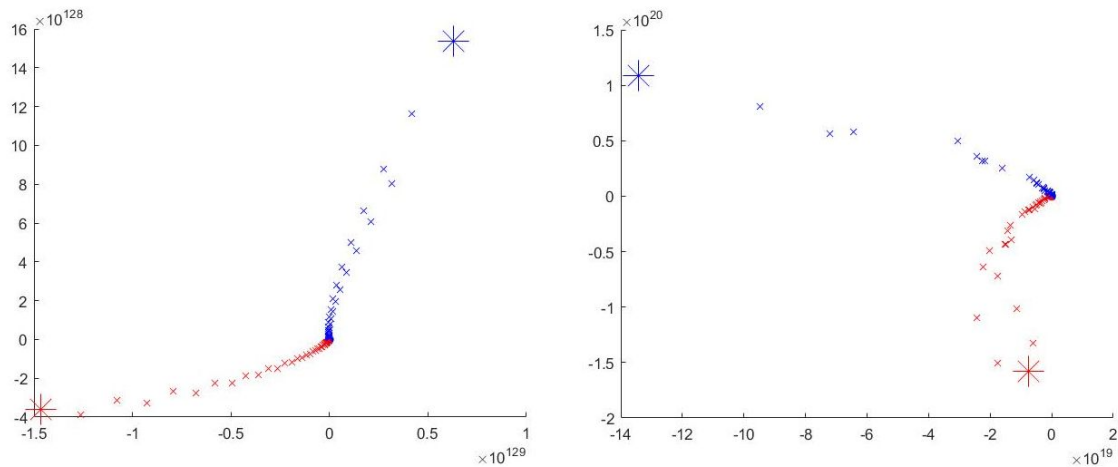
Ímígyen z síkjában közelítve p egy zérushelyéhez. 4 féle lépést tehetünk tehát, ezek ismétlésével szeretnénk f egy gyökéhez konvergálni, kérdés azonban, hogyan használjuk ezeket a lehetőségeket.

Az első módszer melyet megvizsgálunk, hogy felváltva lépünk p szerint z irányban, majd q szerint w irányban. A második módszer szerint mind a négy opciót használjuk, lépve p szerint mindkét változó irányában, majd q szerint mindkét síkban. Vizsgálunk még egy harmadik algoritmust is, mely minden lépésben egyenletesen véletlenül választ a 4 lehetőség közül. Teszteljük a MATLAB programcsomag segítségével a 3 iterációs módszert, majd amelyik hatékonyan működik összehasonlításra kerülhet a Newton-módszerrel, prezentálva olyan esetet, melyben az algoritmus zérushely keresése sikerrel zárul, ellentétben a Newton-iterációval.

Az új ötletek tesztelését a korábbi (másodfokú közelítésnél használt) módszerhez hasonlóan valósítjuk meg. Sajnos rögtön kiderül, hogy a második és a harmadik módszer nem működőképes algoritmus, hiszen 10000-10000 véletlenszerűen generált harmadfokú polinommon futtatva utóbbi mindössze 1457 alkalommal talált gyököt 1000 lépésből (és futásideje sem bíztat további elemzésre), míg előbbi egyszer sem.

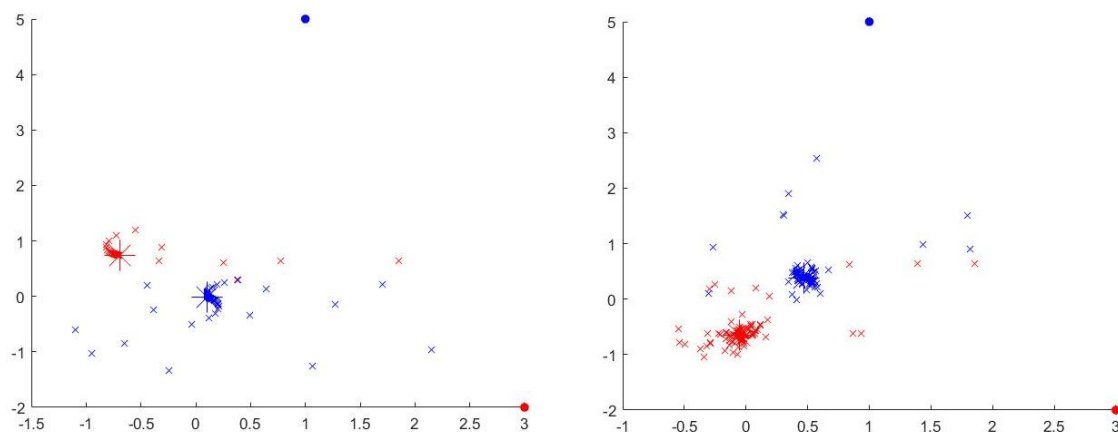
Tekintsük meg működésüket két példán. Vizsgáljuk először a $p(z, w) = 2z^2 - zw + 3iw^2 + 2iz - iw + 6$, $q(z, w) = iz^2 + 2izw + 3iw^2 + z - 4$ polinompárt és válasszuk $(2 - 3i, 4i)$ pontot kezdőponttul. Ekkor azt láthatjuk, hogy a kettes számú algoritmus által alkotott pontsorozat még csak nem is mutat konvergenciára utaló jeleket, divergensnek tűnik. A harmadik módszerről nehezebb állítást megfogalmazni, mivel hogy nem determinisztikus algoritmus, azonban a tapasztalat azt mutatja, hogy itt sem várhatjuk, hogy a pontsorozat határértékkel rendelkezzen (13. ábra).

Pillantsunk most arra a függvényre, melynek koordináta-függvényei a $p(z, w) = 2z^2 - 3zw + w^2 + 3z + iw + 6$, és $q(z, w) = 4iz^2 + 7izw + z + 2w - 3$, továbbá válasszuk kezdőértékül a $(3 - 2i, 1 + 5i)$ pontot. Ez az algoritmusok az előzőtől eltérő (de gyakran bekövetkező) kimenetelére ad példát, ugyanis ekkor a kettes számú alternatív módszer



13. ábra. A második és harmadik módszer futása az első példán (piros színnel a z változók sorozata, késsel a w változóké)

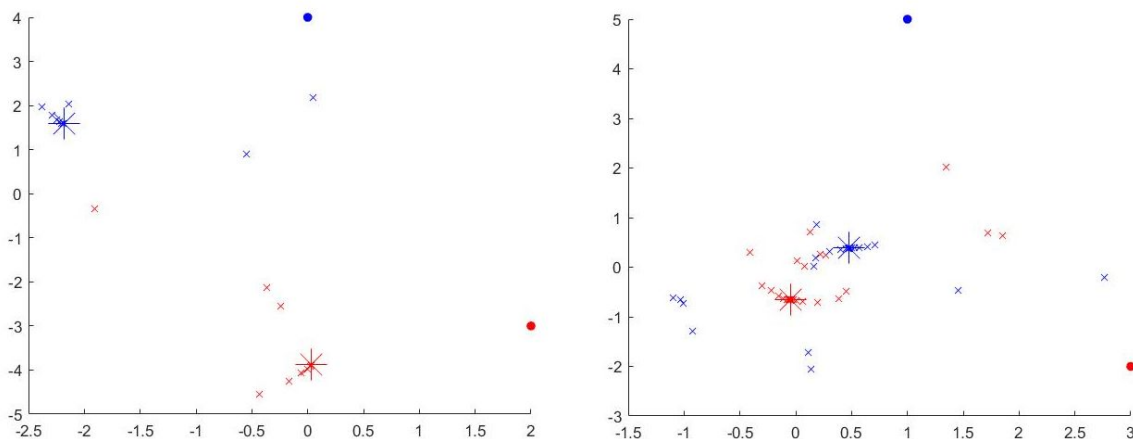
zérushelyhez tart, ám a konvergencia sebessége igen lassú, még 10000 lépésből sem éri el a gyök olyan környezet, melybeli pontot hat tizedesjegy pontossággal nullvektorba képez a függvény. A harmadik, azaz a randomizált iterációs módszer szintén gyökhöz konvergál, azonban jellemzően több ezer, vagy több tízezer lépésre van szüksége annak megtalálásához (a lépésszámok eloszlásával most nem foglalkozunk, ugyanis látni fogjuk, hogy az első algoritmus olyan hatékony, hogy eltörpül mellette ezen két módszer jelentősége). Az iterációkat ismét ábrázolhatjuk (14. ábra).



14. ábra. A második, majd a harmadik módszer futása a második példán (piros színnel a z változók sorozata, késsel a w változóké)

Ezen két heurisztikus iterációval szemben az első algoritmus (mely csak kétféle iterációs

lépést tartalmaz) igen hatékonyak bizonyul. Az említett két példán is zérushelyet talál a módszer, rendre 27, illetve 52 lépésből (15. ábra). Ezen eljárás (melyre a továbbiakban csak új módszerként, vagy új algoritmusként fogok hivatkozni) eredményei elég biztatóak ahhoz, hogy merészkedjünk összevetni a Newton-iterációval.



15. ábra. Az első módszer futásának ábrázolása a két példán (piros színnel a z változók sorozata, késsel a w változóké)

6.2. Az új algoritmus és a Newton-módszer

A zérushely kereső új módszer tehát mindkét esetben néhány-tíz lépésből megtalálta a függvény gyökét, azonban fontos tudnunk, hogy a Newton-iteráció ezt mindössze hét lépésből megteszi az említett példákon. A lépésszám általános esetben is hasonló képet fest, hiszen 10000 véletlen teszt alapján az új algoritmus átlagosan 40,72 iteráció segítségével ér célba, míg a Newton-módszer számára az adatok alapján várhatóan 7,42 lépés elégséges. (Előbbi esetén egy iteráció azt jelenti, hogy mindkét egydimenziós lépést elvégezzük, azaz valójában két közelítés történik. Azonban mivel egy lépés elvégzése jelentősen kevesebb időt vesz igénybe, mint a kétdimenziós közelítés esetében, ezért nem jelentősek a pontos értékek, csupán a nagyságrendi különbségre szeretném felhívni a figyelmet.) Továbbá a Newton-módszer a 10000 zérushelykeresést elvégezte alig több, mint 2,5 másodperc alatt, míg az új algoritmus majdnem 12 másodpercet vett ehhez igénybe, és előfordult pár eset, amikor nem is járt sikerrel. Kérdés, hogy akkor mi jelentőséggel bír eme ötlet.

A válasz természetesen a már említett mátrix invertálás problematikája, ugyanis a Newton-módszer sem jár mindig sikerrel. Tekintsünk egy $f(z, w) = \begin{pmatrix} a \cdot z^2 + b \cdot zw + c \\ d \cdot z^2 + e \cdot zw + f \end{pmatrix}$ függvényt, ahol $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. Ennek Jacobi mátrixa $J = \begin{pmatrix} 2a \cdot z + b \cdot w & b \cdot z \\ 2d \cdot z + e \cdot w & e \cdot z \end{pmatrix}$, azaz $\det(J) = (2ae - 2bd) \cdot z^2 + (be - be) \cdot zw = (2ae - 2bd) \cdot z^2$. Ebből adódóan a Newton-iteráció sikertelen a $z = 0$ síkból indítva (sőt numerikus számítása elakad, ha közel kerül hozzá). Ezzel ellentétben az új algoritmus hatékonyan megtalálja ilyen függvények gyökeit, például az $f(z, w) = \begin{pmatrix} z^2 + 2 \cdot zw + 6 + 2i \\ 4i \cdot z^2 + zw - i \end{pmatrix}$ függvény $(0, 1670 - 1, 7966i, 0, 4620 + 0, 1797i)$ zérushelyét megtalálja a $(0, 4 - 5i)$ pontból indulva mindössze nyolc lépésben.

Ennél komolyabb problémát jelent, hogy léteznek olyan függvények, melyeknek Jacobi mátrixa minden pontban szinguláris. Ezek zérushelyeinek keresésére a Newton-módszer teljességgel alkalmatlan, hiszen semmilyen kezdőpontból nem tud lépni. A fent említett függvénycsaládból ilyenek például az $f(z, w) = \begin{pmatrix} z^2 + zw + c \\ z^2 + zw + c \end{pmatrix}$ függvények, és nyilván bármely $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ leképezés melynek koordináta-függvényei megegyeznek (sőt az is elégséges, ha léteznek f_i és f_j koordináta-függvények, hogy $a \cdot f_i - f_j = b$, valamely a és b komplex számokra, ahol $i \neq j$). Azonban a fent említett f függvény kiválóan igazolja az új algoritmus alkalmazhatóságát egyes esetekben, hiszen ezen példákon mindössze egy iterációból (azaz két parciális lépésből) gyököt talál majdnem minden kezdőpontból. Ezt igazolandó, indítsuk ezt a módszert egy tetszőleges (z_0, w_0) pontból, ahol $w_0 \neq -2 \cdot z_0$. Ekkor az első iterációban kapjuk, hogy

$$z_1 = z_0 - \frac{z_0^2 + z_0 w_0 + c}{2z_0 + w_0}$$

$$w_1 = w_0 - \frac{z_1^2 + z_1 w_0 + c}{z_1} = w_0 - z_1 - w_0 - \frac{c}{z_1} = -z_1 - \frac{c}{z_1}$$

És íg rögtön kapjuk, hogy

$$f(z_1, w_1) = \begin{pmatrix} z_1^2 - z_1^2 - c + c \\ z_1^2 - z_1^2 - c + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vagyis tényleg máris zérushelybe kerültünk.

6.3. Az n -dimenziós eset

Láttuk, hogy az új algoritmusnak, már két változós függvények esetében is van létjogosultsága, azonban belegondolhatunk, hogyan tudnánk általánosítani \mathbb{C}^n -ből \mathbb{C}^n -be képző függvények zérushelyeinek approximációs meghatározására. A sejtés az, hogy tetszőleges $n \geq 2$ -re alkalmazható az a módszer, hogy a korábbiakhoz hasonlóan periodikusan teszünk lépéseket a k -adik koordináta-függvény szerint a k -adik változó síkjában. Az algoritmusötlet vizsgálata nem képezi tárgyát jelen szakdolgozatomnak, azonban ha alaposabb megtekintése azt mutatná, hogy eme módszer hatékonyan működik, a korábban látott problémán kívül egy másik szempontból is nagy jelentőséggel bírhat. Ez pedig nem más, minthogy amennyiben a derivált mátrix determinánsa nem nulla, akkor ugyan invertálható, de az invertálást el is kell végezni. És bár a Newton-iteráció feltehetően kevesebb lépésből megtalál egy gyököt, ám egy $n \times n$ -es mátrix invertálása $\mathcal{O}(n^3)$ időt vesz igénybe, melyet az új algoritmus megspórolna. Ez pedig azt jelenti, hogy igen nagy n -ekre futásideje versenybe szállhat a Newton-módszer futásidejével, sőt akár meg is előzheti azt.

7. Összefoglalás

Röviden tekintsük át, mit sikerült elérni ezen BSc szakdolgozat keretein belül. Feltüntettük az egyváltozós valós függvények zérushelyeinek megkeresésére használatos, Taylor-sor ihlette Newton-Raphson-módszert, megemlítve annak geometria mivoltát a függvénygrafikonon. Áttekintettük az iteratív algoritmus konvergenciájáról és annak sebességéről szóló közismert tételt, bizonyításával együtt, majd középpontba helyeztük a komplex gyökök megtalálásának problémáját.

Ezen kérdéskör feloldásához feltérképeztük a komplex dinamika alapjait, kimondva és bebizonyítva számos állítást és tételt. Ezután kiretjesztettük az eljárást a komplex számsíkra, majd a Newton-iterációs függvény dinamikáját megvizsgálva tapasztaltuk, hogy egy függvény zérushelyei, az iteráció vonzó fixpontjai, sőt nem kritikus pontok esetében a fixpont szupervonzó. A MATLAB programcsomag segítségével egy példán megtekintettük a módszer működését, majd kódot írtunk a vonzástartományok feltérképezésére a sík egy véges szeletén. Megfigyeltük, hogy elméleti tudásunkhoz jól igazodva, a vonzástartományok uniója, azaz a Fatou-halmaz látszólag kitölti a síkot, a Julia-halmaz pedig nem más, mint a vonzástartományok határain fellépő fraktálszerű alakzatok. Két példa alapján sejtést fogalmaztunk meg az $x^n - 1$ alakú függvényeken végzett Newton-iteráció adta vonzástartományok egymásba forgathatóságáról, melyet be is bizonyítottunk. Ahhoz, hogy a numerikus eredményeken túllépve komplex Newton-iteráció konvergenciáját matematikailag is igazoljuk, kimondtunk egy lokális, a zérushely környékén értelmezett tételt, mely szerint az iteráció k -adrendben konvergál, amennyiben a zérushelyen a Newton-iterációs függvénynek a k -adik az első deriváltja, mely nem tűnik el. Ezt az állítást a Koenigs- és Böttcher-tételek segítségével be is bizonyítottuk. Ezek után új ötletként az f függvényt megpróbáltuk a másodfokú Taylor-polinomjával közelíteni, így egy olyan iteratív módszerhez jutva, melynek minden lépésében egy másodfokú egyenletet kell megoldani. Ekkor mindig azt a megoldás választjuk, mely közelebb áll a legutóbbi értékhez, hiszen azt szeretnénk, hogy egy gyök kis környezetéből indulva megtaláljuk azt a gyököt. Megjegyeztük, hogy ezen iterációs módszernek is fixpontjai az f zérushelyei, majd a MATLAB segítségével numerikusan összehasonlítottuk az eljárást a Newton-módszerrel. Azt tapasztaltuk, hogy bár az új módszernek keve-

sebb iterációra van szüksége egy gyök megtalálásához, ez valójában több időt vesz igénybe, mint amennyire a Newton-Raphson-módszernek szüksége van, feltéve, hogy egy zérushely környezetéből kezdtük a keresést. Azonban, ha igen távoli pontokból próbálkozunk, az új módszer sokkalta hamarabb célba érünk, így amennyiben nem áll rendelkezésünkre jó kezdeti közelítés, az új eljárás hatékonyabbnak bizonyul a Newton-módszernél. Ezentúl azt is megfigyeltük, hogy a vonzástartományok eltérőek a két eljárás esetén, és a másodfokú közelítés ihlette eljárás esetében ezek sokkal kevesebb (látszólag véges sok, ellentétben a Newton-iterációval) tartományra osztják fel a síkot, és határaik simábbnak tűnnek.

A szakdolgozat végén kitértünk a többváltozós Newton-módszer működésére, és hogy orvosoljuk a Jacobi-mátrix szingularitása okozta problémát, három heurisztikus algoritmust álltunk elő, melyek mindegyike azonos ötleten alapult, az iteráció visszavezetése egyváltozós lépések sorozatára. Ezek közül két módszer sikertelennek bizonyult, melyet egyes esetekben a konvergencia túl lassú sebessége, máskor annak teljes hiánya okozott. Ezzel ellentétben a harmadik módszer, mely felváltva lép az első koordinátafüggvény szerint az első változó irányában, majd a második koordinátafüggvény szerint a második változó irányában, elfogadható sebességű konvergenciát mutatott numerikus tesztelése folyamán, így azt összevetettük a Newton-módszerrel. Eredményként azt kaptuk, hogy bár általános esetben lassabb a jól ismert eljárásnál, orvosolja azt a problémát melyet kívántunk, hiszen az, hogy a derivált mátrix determinánsa nulla a négydimenziós tér egy részhalmazán (vagy akár a teljes téren), nem jelenti, hogy a parciális deriváltak is nullával egyeznének meg, így sok esetben az újonnan definiált eljárás sikeres, míg a Newton-Raphson-módszer nem. Végül pedig szövegünket egy hipotézissel zártuk le, mely szerint ehhez hasonló módszer n -dimenzióban is működőképes lehet.

8. Irodalomjegyzék

1. *John Milnor: Dynamics in one complex variable című könyve (16-38. old.), 1990, Institute for Mathematical Sciences, SUNY, Stony Brook NY*
2. *A.G.Wiersma: The Complex Dynamics of Newton's Method, Bachelor project, University of Groningen, 2016*
3. *Fellner Máté: Komplex dinamika, BSc szakdolgozat, ELTE, 2017*
4. *Kerényi Péter: Gyökkeresés iterációval, BSc szakdolgozat, ELTE, 2011*
5. *Michael Overton: Quadratic Convergence of Newton's Method című jegyzete, Numerical Computing*
6. *Susan Jane Colley: Vector Calculus című könyve (176-181. old.), Oberlin College, 2012*
7. *Gáspár Csaba: Analízis, jegyzet (147-150. old.), Széchenyi István Egyetem, 2004*
8. *Hartung Ferenc: Bevezetés a numerikus analízisbe, jegyzet (143. old.), Pannon Egyetem, 2020*
9. *Hegedűs Csaba: Numerikus analízis, jegyzet (84-86. old.), ELTE*