

SZAKDOLGOZAT

Gyórfy Ágoston



2023

Ázsiai spread opciók árazása

Szakdolgozat

Írta: Györffy Ágoston

Matematika alapszak

Témavezető: Varga László

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2023

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Matematikai és pénzügyi háttér	2
2.1. Sztochasztikus folyamatok	2
2.2. Kockázatmentes árazás (Black-Scholes modell)	3
3. Egzotikus opciók	6
3.1. Spread opciók	7
3.1.1. Margrabe-formula	9
3.1.2. Árazás Kirk-approximációval	12
3.2. Ázsiai opciók	13
3.2.1. Átlagolási típusok	13
3.2.2. Árazás momentum-módszerrel	15
3.3. Ázsiai spread opciók	18
3.3.1. Árazás hibrid momentum-módszerrel	20
3.3.2. Hibabecslés	23
4. Monte Carlo módszerek	24
5. Szimulációs eredmények	27
5.1. Spread opciók	27
5.2. Ázsiai opciók	29
5.3. Ázsiai spread opciók	32
5.4. Konfidencia intervallumok	36
6. Összefoglalás	39
7. Függelék	42

1. Bevezetés

A szakdolgozatomban három egzotikus opció árazási módszereit fogom körüljárni, ezek a spread, az ázsiai és az ázsiai spread opciók. Ezeknek a származtatott termékeknek óriási piaca van, főleg az energia- és az áru piacokon elterjedtek. Ázsiai opciók esetén a kifizetés az alaptermék árfolyamának valamely jövőbeni, de előre egyeztetett időpontokban vett átlagától függ. Spread opciók esetén két alaptermékünk van, és ezeknek az árfolyamának egy jövőbeni időpontban vett különbsége határozza meg az opció kifizetését. Végül pedig az ázsiai spread opciók az előző kettőnek egy olyan kombinációja, ahol a kifizetésfüggvényben a két alaptermék árfolyamának az átlagának a különbsége szerepel. A Black-Scholes piaci modellben azt feltételezzük, hogy a jövőbeni árfolyamok lognormális eloszlásúak, és olyan származtatott terméket tudunk könnyen árazni (például a Black-Scholes formulával), amelyek kifizetésében egy lognormális eloszlású valószínűségi változó szerepel. Vegyük észre viszont, hogy mindhárom bemutatott egzotikus opció kifizetésében árfolyamok összege és/vagy különbsége szerepel, de tudjuk hogy lognormális eloszlások összege vagy különbsége általában nem lognormális. Emiatt általános esetben nem is ismerünk ezeknek az opcióknak az árára zárt képletet, így kifejezetten fontosak a minél pontosabb és minél kisebb számítási igényű közelítő módszerek. A szakirodalomban többféle megközelítése ismert a problémának, leggyakrabban momentum-módszer segítségével illesztik az ismeretlen eloszlást egy könnyebben kezelhető eloszláshoz. Ezen felül elterjedtek a numerikus integrálásra és a parciális differenciálegyenletekre épülő megoldások is. Végül pedig az egyszerű Monte Carlo szimulációt, illetve annak továbbfejlesztett verzióit is gyakran alkalmazzák közelítő opcióárazásra.

A bevezetés végén ismertetni fogom a dolgozatomban vázlatos felépítését. A 2. fejezetben röviden összefoglalom a felhasznált matematikai háttérrel, különös tekintettel a Black-Scholes piaci modell felépítésére. Ezután a 3. fejezetben bemutatom általánosan az egzotikus opciókat, majd kijelölöm azt a hármat, amivel mélyebben foglalkozni fogok. A 3.1. alfejezetben spread opciók árazásáról lesz szó, egy speciális esetben működő pontos, és egy általánosan működő, de csak közelítő megoldást adó árazási formulát fogok bemutatni. A 3.2. alfejezetben áttérek ázsiai opciókra, itt egy momentum-módszerre épülő árazási képletet fogok levezetni. A szakdolgozat legfontosabb része a 3.3. alfejezet, ahol ázsiai spread opciók árazására adok egy közelítő megoldást, ami nagyrészt a saját munkám eredménye. Ezután a 4. fejezetben különböző Monte Carlo módszereket ismertetek, először az egyszerű Monte Carlo szimulációt, majd ennek a hatékonyabb, antitetikus változókra épülő verzióját. Az 5. fejezetben az elméleti módszerekkel kapott árakat hasonlítom össze az antitetikus Monte Carlo szimuláció áraival, külön tekintve a spread, az ázsiai és az ázsiai spread opciókat. Végül a 6. fejezetben összefoglalom a szakdolgozatomban és kijelölök lehetséges továbbhaladási irányokat.

2. Matematikai és pénzügyi háttér

Ebben a fejezetben Shreve (2004), Hull (2006), illetve Baxter és Rennie (1996) könyvei alapján fogom röviden bemutatni a dolgozatomhoz szükséges tételeket és definíciókat.

2.1. Sztochasztikus folyamatok

Először a sztochasztikus folyamatokhoz kapcsolódó, a dolgozat során felhasznált definíciókat és tételeket fogom röviden ismertetni.

2.1. Definíció. *Wiener-folyamat alatt egy olyan $W : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sztochasztikus folyamatot értünk, amely kielégíti az alábbi három tulajdonságot:*

- (i) *W folytonos trajektóriájú és $W_0 = 0$*
- (ii) *Minden $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ véges indexhalmazra a $W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ változók függetlenek egymástól.*
- (iii) *Minden $t \geq s \geq 0$ esetén $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.*

2.2. Állítás. *Egy W Wiener-folyamatra könnyen ellenőrizhetően teljesülnek az alábbiak:*

- (i) $\mathbb{E}[W_t] = 0$
- (ii) $\text{Var}(W_t) = t$
- (iii) $\text{corr}(W_s, W_t) = \frac{\min\{s, t\}}{\sqrt{st}}$

2.3. Definíció. *Az X Itô-folyamat egy olyan folytonos folyamat ($X_t : t \geq 0$), melyre a folyamat t időpontban felvett értéke a következőképpen írható fel:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \mu_s ds$$

ahol σ és μ véletlen \mathcal{F} -előrelátható folyamatok, és $\int_0^t (\sigma_s^2 + |\mu_s|) ds$ minden t időpontban 1 valószínűséggel véges. A hozzá tartozó differenciálegyenlet az alábbi formában írható fel:

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$$

2.4. Tétel (Itô-lemma). *Ha X egy sztochasztikus folyamat, amely kielégíti a $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ egyenletet, és f egy determinisztikus, kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor $Y_t := f(X_t)$ szintén egy sztochasztikus folyamat, amely a következő alakban írható fel:*

$$dY_t = (\sigma_t f'(X_t)) dW_t + \left(\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 f''(X_t) \right) dt$$

2.5. Tétel (Girsanov tétel). *Ha W_t egy \mathbb{P} szerinti Brown-mozgás és γ_t egy olyan \mathcal{F} -előrelátható folyamat, amely eleget tesz az $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$ korlátossági feltételnek, akkor létezik olyan $\tilde{\mathbb{P}}$ mérték, hogy*

(i) $\tilde{\mathbb{P}}$ ekvivalens \mathbb{P} -vel,

(ii) $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right),$

(iii) $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ egy $\tilde{\mathbb{P}}$ szerinti Brown-mozgás.

Vagyis $\tilde{\mathbb{P}}$ mérték szerint W_t egy $-\gamma_t$ növekedési ütemű Brown-mozgás.

2.2. Kockázatmentes árazás (Black-Scholes modell)

A dolgozat során a Black-Scholes modell feltevéseit fogjuk használni, tehát nincsenek tranzakciós költségek, nincs osztalék, nincsenek arbitrázslehetőségek, illetve a kockázatos és a kockázatmentes termékből is vehetünk és eladhatunk tetszőleges mennyiséget, azaz shortolhatunk is. A kockázatmentes eszköz árának a folyamatát $(B(t))_{t \in [0, T]}$ -vel, a kockázatosét $(S(t))_{t \in [0, T]}$ -vel fogjuk jelölni. Itt T a vizsgált származtatott pénzügyi termék árazása során egy kitüntetett időpontot, a termék lejáratát jelöli. Továbbá tegyük fel, hogy a kockázatmentes kamatláb (r) és a volatilitás (σ) egy-egy időfüggetlen állandó. Ekkor a folyamatokat a Black-Scholes modell szerint az alábbi formában írhatjuk fel:

$$dB(t) = rB(t) dt$$

$$dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

Itt $W(t)$ egy Wiener-folyamat a $\tilde{\mathbb{P}}$ mérték szerint.

Először az $S(t)$ folyamatot akarjuk meghatározni. Az Itô-lemma szerint, ha veszünk egy mindkét változóban kétszer folytonosan differenciálható $G(S(t), t)$ függvényt, akkor arra az alábbi teljesül:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} rS + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dW(t)$$

Válasszuk a $G = \ln S(t)$ függvényt, ekkor az előző formulában szereplő deriváltak a következők lesznek:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Vagyis a formula átírható a következő alakra:

$$dG = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t)$$

Itt éppen azt kaptuk, hogy G egy olyan Brown-mozgás, amelynek a driftje $r - \frac{1}{2}\sigma^2$, a szórása pedig σ . Vagyis $\log S$ megváltozása 0 és t között $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ várható értékű és σ szórású normális eloszlású, tehát $S(t)$ a következő alakban is felírható:

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) &= \sigma W(t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \\ S(t) &= S(0) \exp \left\{ \sigma W(t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right\} \end{aligned}$$

amiből könnyen következik az is, hogy:

$$\begin{aligned} S(T) &= S(t) \exp \left\{ \sigma(W(T) - W(t)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) \right\} \\ &= S(t) \exp \left\{ -\sigma\sqrt{T-t}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) \right\} \end{aligned}$$

ahol Y az alábbi standard normális valószínűségi változó:

$$Y = -\frac{\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)}{\sqrt{T-t}}$$

Ezután vegyünk egy származtatott terméket, amelynek a lejáratkori kifizetése $V(T) = \max(S(T) - K, 0)$ alakú. Ha bevezetjük a $\tau = T - t$ jelölést, illetve $S(t)$ helyére x -et írunk, akkor az előzőek alapján a származtatott termék t időpontbeli ára a következő lesz:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \widetilde{\mathbb{E}} \left[e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+ \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+ e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned}$$

Az integrandus pontosan akkor pozitív, ha

$$x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K$$

pozitív, ami átrendezéssel a következő alakra hozható:

$$y < d_-(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right]$$

Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} x \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2\tau}{2} \right\} dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} e^{-r\tau} K e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{\tau})^2 \right\} dy - e^{-r\tau} K \Phi(d_-(\tau, x)) = \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x) + \sigma\sqrt{\tau}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz - e^{-r\tau} K \Phi(d_-(\tau, x)) = \\ &= x\Phi(d_+(\tau, x)) - e^{-r\tau} K \Phi(d_-(\tau, x)) \end{aligned}$$

Az előző egyenletben $d_+(\tau, x)$ az alábbi módon van definiálva:

$$d_+(\tau, x) = d_-(\tau, x) + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right]$$

Vezessünk be egy $BS(\tau, x, K, r, \sigma)$ függvényt, amely az öt paraméter függvényében megadja $V(T, x)$ várható értékét:

$$BS(\tau, x, K, r, \sigma) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+ \right]$$

Itt Y egy standard normális valószínűségi változó a $\tilde{\mathbb{P}}$ mérték szerint. A korábbi levezetés szerint pedig pont azt kaptuk, hogy:

$$BS(\tau, x, K, r, \sigma) = x\Phi(d_+(\tau, x)) - e^{-r\tau} K \Phi(d_-(\tau, x))$$

Ezzel megkaptuk a közismert Black-Scholes opcióárazási formulát.

3. Egzotikus opciók

Egzotikus opciók alatt olyan opciókat szokás érteni, amelyek a közönséges európai vagy amerikai opcióktól eltérnek. Ebben a részben röviden bemutatom a legnépszerűbb egzotikus opciók sajátosságait, majd kijelölöm azokat, amelyekkel a dolgozat során mélyebben fogok foglalkozni.

Bináris opciók

Egy bináris opciónak fix kifizetése van, amely attól függ, hogy az alaptermék árfolyamára egy adott feltétel teljesül-e. Bináris európai call opció esetén a lejáratkori kifizetés lehet például $c * \mathbb{1}_{(S_T - K > 0)}$.

Ázsiai opciók

Egy ázsiai opció kifizetése nem a lejáratkori ártól, hanem az opció időtartama alatti átlagártól függ. Például egy fixed strike ázsiai call opció esetén a kifizetés $(A_T - K)^+$, ahol A_T jelöli az átlagárat.

Lookback opciók

A lookback opcióknak is olyan kifizetése van, amely az alaptermék árának a pályájától is függ, általában az opció időtartama alatt elért minimális vagy maximális ár határozza meg a kifizetést. Egy lookback call opció lejáratkori kifizetése lehet például $(S_{max} - K)^+$.

Barrier opciók

A barrier (másképp limitáras) opciók kifizetése is függ az alaptermék árfolyamának a pályájától. Ezeknél az opcióknál az szerepel a kifizetésfüggvényben, hogy az árfolyam átlépett-e egy adott korlátot az opció élettartama alatt.

Spread opciók

Spread opciók kifizetésfüggvénye két alaptermék lejáratkori árfolyamának a különbségétől függ, például egy call spread opció lejáratkori kifizetése $(S_1 - S_2 - K)^+$.

Basket opciók

Basket opció alatt a spread opciók olyan irányú általánosítását értjük, ahol a két alaptermék különbsége helyett n alaptermék árfolyamának előjeles súlyozott összegétől függ a lejáratkori kifizetés.

Választható opciók

Választható opció esetén az opció tulajdonosa egy előre meghatározott időpontig eldöntheti, hogy az opciója vételi (call) vagy eladási (put) legyen.

Swaption

Végül pedig a swaption egy olyan opció, ami a vevőnek jogot ad arra, hogy egy későbbi időpontban megkössön egy swap ügyletet. A swapok leggyakrabban kamat-csere ügyletek, de előfordulnak több másik piaci szektorban is.

Ezek a pénzügyi termékek mind arra lettek kitalálva, hogy a piaci résztvevőknek nagyobb rugalmasságot adjanak a kereskedési/fedezési stratégiáik megvalósításához vagy elősegítsék a hatékonyabb kockázatkezelést. A kereskedésük általában OTC, vagyis tőzsdén kívüli piacokon zajlik. Ilyenkor általában csak a két fél tárgyal a szerződésekről, egy központosított szabályozási piac beavatkozása nélkül. Az ilyen típusú ügyletek esetén nagyobb a kockázata annak, hogy valamelyik fél nem tartja be a megállapodást, de cserébe alacsonyabbak a tranzakciós költségek.

Dolgozatomban a spread-, az ázsiai- és az ázsiai spread opciókat fogom bővebben taglalni, nagy hangsúlyt fektetve a lehetséges árazási módszerekre.

3.1. Spread opciók

Ebben a fejezetben először a spread opciókat fogom általánosan bemutatni, majd a releváns szakirodalom összefoglalása után két árazási módszert fogok részletesen ismertetni.

Spread opció alatt egy olyan pénzügyi terméket értünk, amelynek a kifizetésfüggvénye két alaptermék lejáratkori értékének különbségétől függ. Egy ilyen származtatott termék például olajfinomítók számára lehet hasznos, ugyanis a nyereségük legnagyobb részét a finomított és a nyers olaj árkülönbsége teszi ki, és egy spread opcióval tudják csökkenteni a kitétségüket az árkülönbség felé.

Jelöljük a két alaptermék lejáratkori árfolyamát $S_1(T)$ -vel és $S_2(T)$ -vel, a kötési árfolyam pedig legyen K . Ekkor egy call spread opció lejáratkori kifizetése a következő:

$$C = (S_1(T) - S_2(T) - K)^+$$

Míg put spread opció esetén:

$$P = (K - S_1(T) + S_2(T))^+$$

A Black-Scholes modell szerint fogunk árazni, ehhez tegyük fel, hogy a két termék árfolyama korrelált geometriai Brown-mozgást követ. Ekkor a folyamatokat az alábbi módon írhatjuk fel:

$$dS_1(t) = rS_1(t) dt + \sigma_1 S_1(t) \left(\sqrt{1 - \rho^2} dW_1(t) + \rho dW_2(t) \right)$$

$$dS_2(t) = rS_2(t) dt + \sigma_2 S_2(t) dW_2(t)$$

A képletben szereplő paraméterek és változók definíciója:

- T a lejáratig hátralévő idő években
- $S(t)$ az adott termék ára t időpontban ($S(0)$ a jelenlegi ár, $S(T)$ a lejáratkori)
- r az évesített kockázatmentes kamatláb
- σ_1 és σ_2 az évesített volatilitások
- $W_1(t)$ és $W_2(t)$ két független Wiener-folyamat
- ρ a két folyamat közötti korreláció
- $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye

Spread opciók árazására általában nincsen zárt formula, mivel ehhez a legtöbb piaci modellben egy olyan kettős integrált kellene kiszámítanunk, amit analitikusan nem tudunk megoldani. Többféle közelítő módszert ismerünk, ennek a területnek a releváns szakirodalmát fogom most bemutatni.

Margrabe (1978) megoldotta a problémát abban a speciális esetben, amikor a kötési árfolyam 0. Ekkor ismerünk pontos zárt képletet, hiszen a feladat visszavezethető egy egyszerű európai opció árazására, ezt a képletet Margrabe-formulának szokás nevezni. Ennek a módszernek egy általánosítása az úgynevezett Kirk-approximáció, amely nemnulla kötési árfolyam esetén ad egy közelítő megoldást (Kirk, 1995).

Joshi és Yang (2010) Euler-Hermite approximáció segítségével számolja a spread opció árazásához meghatározandó kettős integrált. A módszer előnye, hogy nem csak a Black-Scholes piaci modellben alkalmazható, hanem ennél általánosabb modellek esetén is. Van Belle et al. (2019) szintén numerikus integrálással, Gauss-kvadratúra segítségével ad közelítő árat spread opciókra.

Dempster és Hong (2002), illetve Levendis és Maré (2022) Fourier transzformáció segítségével gyorsította és pontosította tovább az ismert numerikus megoldási módszereket, az ő technikájuk sztochasztikus kamatlábak és volatilitás esetén is alkalmazható.

Végül pedig Zhou és Wang (2008) az alaptermékek lejáratkori árfolyamainak a különbségének az eloszlását illesztette momentum-módszer segítségével különböző könnyebben kezelhető eloszlásokhoz.

Dolgozatomban a Margrabe-formulát és a Kirk-approximációt fogom levezetni és jobban megvizsgálni, de előtte még bemutatok egy közismert állítást, amely rávilágít arra, hogy a továbbiakban miért lesz elegendő call opciók árát meghatározni és hogyan következik belőle könnyen a put opció ára is.

3.1. Állítás (Put-Call paritás spread opció esetén).

$$e^{-rT} \mathbb{E} [(K - S_1(T) + S_2(T))^+] = e^{-rT} \mathbb{E} [(S_1(T) - S_2(T) - K)^+] - S_1(0) + S_2(0) + Ke^{-rT}$$

3.1.1. Margrabe-formula

A Margrabe-formula olyan speciális spread opciók árazására alkalmazható, ahol a kötési árfolyam 0. Ezeket az opciókat csereopciónak is szokás nevezni. Először vizsgáljuk meg egy csereopció lejáratkori várható kifizetésének a jelenértékét:

$$C = e^{-rT} \mathbb{E} [(S_1(T) - S_2(T))^+]$$

Vegyük észre, hogy ez átírható az alábbi alakra:

$$C = e^{-rT} \mathbb{E} \left[S_2(T) \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1 \right)^+ \right]$$

Tudjuk, hogy az $S_1(T)$ és $S_2(T)$ árfolyamok lognormális eloszlásúak, illetve tudjuk azt is, hogy lognormális változók hányadosa is lognormális. Tehát bevezethetünk egy $X = S_1(T)/S_2(T)$ lognormális valószínűségi változót, amivel C már egészen hasonló egy egyszerű európai call opció lejáratkori várható kifizetésének a jelenértékéhez. Egyedül a várható értékben szereplő $S_2(T)$ -s szorzót kell eltüntetnünk, de az egy mértékcserevel könnyen megoldható. A következő levezetést Margrabe (1978), illetve Carmona és Durrleman (2003) cikkei alapján írtam:

Először az Itô-lemma alapján határozzuk meg dX -et:

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \frac{1}{S_2(t)} dS_1(t) - \frac{S_1(t)}{(S_2(t))^2} dS_2(t) + \frac{S_1(t)}{(S_2(t))^3} (dS_2(t))^2 - \frac{1}{(S_2(t))^2} dS_1(t) dS_2(t) = \\
&= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \left[r dt + \sigma_1 \left(\sqrt{1-\rho^2} dW_1(t) + \rho dW_2(t) \right) - r dt - \right. \\
&\quad \left. - \sigma_2 dW_2(t) + \sigma_2^2 dt - \sigma_1\sigma_2\rho dt \right] = \\
&= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \left[(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho) dt + \sigma_1\sqrt{1-\rho^2} dW_1(t) + (\sigma_1\rho - \sigma_2) dW_2(t) \right]
\end{aligned}$$

Ezután Girsanov tétele segítségével definiálhatunk egy új $\tilde{\mathbb{P}}$ mértéket:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}(t) &= \exp \left[\left(-\frac{\sigma_2^2}{2} \right) t + \sigma_2 dW_2(t) \right] \\
dW_2(t) &= d\tilde{W}_2(t) + \sigma_2 dt
\end{aligned}$$

Majd felírhatjuk benne X -et:

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \left[(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho) dt + \sigma_1\sqrt{1-\rho^2} dW_1(t) + (\sigma_1\rho - \sigma_2) \left(d\tilde{W}_2(t) + \sigma_2 dt \right) \right] = \\
&= X(t) \left[\sigma_1\sqrt{1-\rho^2} dW_1(t) + (\sigma_1\rho - \sigma_2) d\tilde{W}_2(t) \right]
\end{aligned}$$

Ezután írjuk fel X -et egy olyan Y folyamat függvényében, ami szintén Brown-mozgást követ. Ehhez Y -t definiáljuk a következőképpen:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho} \\
dY(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_1\sqrt{1-\rho^2} dW_1(t) + (\sigma_1\rho - \sigma_2) d\tilde{W}_2(t) \right]
\end{aligned}$$

Ezt összevetve az előző egyenlettel, majd átrendezve, azt kapjuk, hogy:

$$dX = X\bar{\sigma}dY$$

Ennek segítségével az opcióár várható értékének a jelenértéke már felírható az új mérték szerint:

$$\begin{aligned}
 C &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[S_2(T) \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1 \right)^+ \right] = \\
 &= e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}} \left[S_2(0) e^{rT} \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1 \right)^+ \right] = \\
 &= S_2(0) \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1 \right)^+ \right]
 \end{aligned}$$

Ez pedig árazható egy olyan Black-Scholes formula szerint, ahol a kötési ár 1, a volatilitás $\bar{\sigma}$ és a forward ár $\frac{S_1(0)}{S_2(0)}$. Végül r -et válasszuk meg úgy, hogy $e^{-rT} = S_2(0)$ teljesüljön. Ekkor a csereopciókra az alábbi árazási formulát kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho} \\
 d_1 &= \frac{1}{\bar{\sigma} \sqrt{T}} \left[\log \left(\frac{S_1(0)}{S_2(0)} \right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} T \right] \\
 d_2 &= \frac{1}{\bar{\sigma} \sqrt{T}} \left[\log \left(\frac{S_1(0)}{S_2(0)} \right) - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} T \right] = d_1 - \bar{\sigma} \sqrt{T} \\
 C &= S_2(0) \left[\frac{S_1(0)}{S_2(0)} \Phi(d_1) - \Phi(d_2) \right] \\
 &= S_1(0) \Phi(d_1) - S_2(0) \Phi(d_2)
 \end{aligned}$$

Ezzel pedig megkaptuk a call csereopciók árazására használatos Margrabe-formulát.

3.1.2. Árazás Kirk-approximációval

A Kirk-approximáció segítségével közelítő eredményt kaphatunk olyan spread opciók árára, amelyekre K jóval kisebb S_2 -nél, azaz $K \ll S_2$ fennáll. Kirk (1995) módszere azon alapszik, hogy kis kötési ár esetén $S_2 + K$ közelítőleg lognormális, így a Margrabe-formulával árazva csak kis hibát vétünk.

Legyen $S'(t) = S_2(t) + K$. Ha $S'(t)$ is lognormális eloszlású lenne, akkor a volatilitását az alábbi formula szerint kapnánk meg:

$$\sigma' = \sigma_2 \left(\frac{S_2(0)}{S'(0)} \right)$$

Természetesen egy lognormális változónak konstanssal vett eltolása nem lesz lognormális, de a Kirk-approximáció lényege, hogy a legtöbb paraméterválasztás esetén $S'(t)$ közelítőleg mégis lognormális. Erről lesz szó bővebben szimulációs eredményeknél, az 5. fejezetben is.

Ha a Margrabe-formulánál látott levezetésben $S_2(t)$ helyére $S'(t)$ -t és σ_2 helyére σ' -t írunk, akkor a képleteink az alábbi alakot fogják felvenni:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma'^2 - \sigma_1 \sigma' \rho} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \left(\sigma_2 \frac{S_2(0)}{S'(0)} \right)^2 - \sigma_1 \left(\sigma_2 \frac{S_2(0)}{S'(0)} \right) \rho} \\ d_1 &= \frac{1}{\bar{\sigma} \sqrt{T}} \left[\log \left(\frac{S_1(0)}{S'(0)} \right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} T \right] \\ d_2 &= \frac{1}{\bar{\sigma} \sqrt{T}} \left[\log \left(\frac{S_1(0)}{S'(0)} \right) - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} T \right] = d_1 - \bar{\sigma} \sqrt{T} \end{aligned}$$

Ezek segítségével egy call spread opció ára közelítőleg a következő lesz:

$$\begin{aligned} C &= S'(0) \left[\frac{S_1(0)}{S'(0)} \Phi(d_1) - \Phi(d_2) \right] = \\ &= S_1(0) \Phi(d_1) - S'(0) \Phi(d_2) = \\ &= S_1(0) \Phi(d_1) - (S_2(0) + K) \Phi(d_2) \end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk a Kirk-approximáció képletét.

3.2. Ázsiai opciók

Ebben a fejezetben először az ázsiai opciókat fogom általánosan bemutatni, kitérve a lehetséges átlagolási típusokra, majd a releváns szakirodalom áttekintése után egy momentum-módszeren alapuló árazást fogok bővebben ismertetni.

Ázsiai opció alatt egy olyan pénzügyi terméket értünk, amelynek a kifizetés-függvénye az alaptermék valamely időszakban számított átlagárától függ. Egy ilyen termék például egy olyan kereskedő számára lehet hasznos, aki egész évben fix áron szeretne egy terméket árusítani, de a termék beszerzési árának nagy a szórása. Ekkor egy ázsiai opció segítségével tudja csökkenteni a kitétséget a beszerzési ár ingadozása felé.

Jelöljük az alaptermék lejáratkori árfolyamát $S(T)$ -vel, a vizsgált időszak alatti átlagárát A_T -vel, a kötési árfolyam pedig legyen K . Az átlagárát többféleképpen is számolhatjuk, erre a következő részben fogunk bővebben kitérni. Ázsiai opciók esetén megkülönböztetjük ezen felül a fixed strike és a floating strike típusú opciókat. Ezek lejáratkori kifizetése az 1. táblázatban látható.

	Call	Put
Fixed strike	$(A_T - K)^+$	$(K - A_T)^+$
Floating strike	$(A_T - S(T))^+$	$(S(T) - A_T)^+$

1. táblázat. Ázsiai opciók lejáratkori kifizetése

A dolgozat során a fixed strike opciókra fogunk fókuszálni. Ezen felül pedig put opciókat ismét könnyen tudunk a put-call paritás szerint árazni, vagyis mindig elegendő lesz a megfelelő call opció árát meghatározni.

3.2.1. Átlagolási típusok

Ázsiai opciók esetén az átlagolás lehet számtani vagy mértani, és az alaptermék árát is vizsgálhatjuk diszkrét időpontokban vagy akár folytonosan is. A lehetséges átlagolási típusok definíciója a 2. táblázatban látható.

	Diszkrét	Folytonos
Számtani	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$	$\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$
Mértani	$(\prod_{i=1}^n S(t_i))^{\frac{1}{n}}$	$\exp \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \log(S(t)) dt \right\}$

2. táblázat. Lehetséges átlagolási típusok ázsiai opciók esetén

Árúpiacokon leggyakrabban diszkrét, számtani átlagolású ázsiai opciókkal találkozhatunk. Egy ilyen típusú call opció lejáratkori várható kifizetésének a jelenértéke:

$$C = e^{-rT} \mathbb{E} [(A_T - K)^+]$$

Ezt sem tudjuk a szokásos módon árazni a Black-Scholes formula szerint, ugyanis A_T lognormális változók átlaga, ami általában nem lognormális. Ennek a problémának a kiküszöbölésére a szakirodalomban többféle módszer ismert, ezeket fogom először röviden bemutatni.

Levy (1992) volt az első, aki az opció árának meghatározásához az átlagár első két momentumát illesztette egy lognormális eloszláshoz. A módszert azóta sokan finomították, például Zhou és Wang (2008), illetve Yu (2012) is különböző többparaméteres eloszlásokhoz illesztette az átlagár momentumait. Bae et al. (2011) Taylor-sorfejtés segítségével közelíti a Black-Scholes-nál bonyolultabb piaci modellekben az átlagár momentumait, majd ezt illeszti többféle eloszláshoz.

Másképp közelítette meg a problémát Eydeland és Wolyniec (2002), akik a Vorst módszert (Kemna és Vorst, 1990) fejlesztették tovább. A megoldásuk alapötlete, hogy mértani átlagolású ázsiai opciót tudunk pontosan árazni, feltéve ha az alapfolyamat geometriai Brown-mozgást követ, és erre az árra feltételesen, felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, jobb eredményeket kaphatunk számtani átlagolású ázsiai opciók árazásánál is. Vanmaele et al. (2006) szintén alsó és felső becslések segítségével próbált pontosabb becslést adni számtani átlagolású ázsiai opciók árára.

Dubois és Lelièvre (2005) parciális differenciálegyenletként fogja fel a feladatot, majd különböző diskretizációs módszereken keresztül jut el egy közelítő megoldáshoz.

Más megközelítést követ Choi (2018), aki először főkomponens-elemzéshez hasonló technikával csökkentette az árazási feladat dimenzióját, majd a kapott integrált kvadratúraformulák segítségével közelítette numerikusan.

Végül pedig Monte Carlo szimulációk segítségével is lehet diszkrét átlagolású, számtani ázsiai opciókat árazni, itt a relevánsabb kutatási területek a szimuláció varianciájának a minimalizálása, erre két ismertebb példa az antitetikus változók, illetve a kontrollváltozók alkalmazása (Roncoroni et al., 2015).

Dolgozatomnak ebben a fejezetében egy Levy (1992) cikkéhez hasonló momentum-módszeres árazást fogok részletesebben bemutatni, amely a Black-Scholes piaci modell feltevéseire épül. A momentum-módszer gyors számítási sebessége és a gyakorlatban előforduló paraméterkombinációk esetén relatíve kicsi hibája miatt a pénzügyi szektorban az egyik leggyakrabban alkalmazott technika ázsiai opciók árazására.

3.2.2. Árazás momentum-módszerrel

Legyen T a lejáratig hátralévő idő, és legyenek $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \leq T$ azok a diszkrét időpontok, amelyekben átlagoljuk az alaptermék árfolyamát. A módszer lényege az, hogy annak ellenére, hogy A_T általában nem lognormális, egészen jól közelíthető egy olyan lognormális eloszlással, amelynek az első két momentuma megegyezik A_T első két momentumával.

Először határozzuk meg A_T első momentumát:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_T] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S(t_i)] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[S(0) \exp \left\{ \sigma W(t_i) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_i \right\} \right] = \\ &= \frac{S(0)}{n} \sum_{i=1}^n \left(\exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_i \right\} \mathbb{E} [\exp \{ \sigma W(t_i) \}] \right) = \\ &= \frac{S(0)}{n} \sum_{i=1}^n \left(\exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_i \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 t_i \right\} \right) = \\ &= \frac{S(0)}{n} \sum_{i=1}^n \exp \{ r t_i \} \end{aligned}$$

A levezetés során azt használtuk, hogy ha X egy standard normális eloszlású valószínűségi változó és c egy valós konstans, akkor $\mathbb{E}[\exp\{cX\}]$ könnyen meghatározható:

$$\mathbb{E}(e^{cX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{cx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{2cx-x^2}{2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-c)^2+c^2}{2}} dx = e^{\frac{c^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-c)^2}{2}} dx = e^{\frac{c^2}{2}}$$

Ha itt c helyére $\sigma\sqrt{t_i}$ -t és X helyére $\frac{W(t_i)}{\sqrt{t_i}} \sim N(0,1)$ -et írunk, akkor éppen levezetésben szereplő átalakítást kapjuk.

Ezután pedig a másodikat:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_T^2] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[S(t_i)S(t_j)] = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}\left[S(0) \exp\left\{\sigma W(t_i) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i\right\} S(0) \exp\left\{\sigma W(t_j) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_j\right\}\right] = \\ &= \frac{S^2(0)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \left(\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_j\right\} \mathbb{E}[\exp\{\sigma W(t_i) + \sigma W(t_j)\}]\right) = \\ &= \frac{S^2(0)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \left(\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_j\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 t_i + \frac{1}{2}\sigma^2 t_j + \sigma^2 \min(t_i, t_j)\right\}\right) = \\ &= \frac{S^2(0)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \exp\{r(t_i + t_j) + \sigma^2 \min(t_i, t_j)\} \end{aligned}$$

A levezetés során most azt a tulajdonságát használtuk a Wiener-folyamatnak, hogy $\sigma(W(t_i) + W(t_j))$ normális eloszlású, 0 várható értékkel és

$$\sigma' = \sigma \sqrt{\sqrt{t_i}^2 + \sqrt{t_j}^2 + 2 \operatorname{corr}(W(t_i), W(t_j)) \sqrt{t_i} \sqrt{t_j}}$$

szórással. Szintén Wiener-folyamat tulajdonság, hogy $\operatorname{corr}(W(t_i), W(t_j)) = \frac{\min(t_i, t_j)}{\sqrt{t_i t_j}}$, ennek segítségével σ' a következő alakra hozható:

$$\sigma' = \sigma \sqrt{t_i + t_j + 2 \min(t_i, t_j)}$$

Tehát $\sigma(W(t_i) + W(t_j)) \sim N(0, \sigma')$, vagyis használhatjuk az első momentum kiszámításánál levezetett segédállításunkat, amely segítségével éppen a keresett alakot kapjuk.

Az elméleti momentumok mellett szükségünk lesz a lognormális eloszlás első két momentumára is. A (μ, η) paraméterű lognormális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$g(x) = \frac{1}{\eta\sqrt{2\pi x}} e^{-(\mu - \log x)^2 / (2\eta^2)} dx, \quad \text{ha } x > 0, \quad \text{különben } g(x) = 0,$$

ahol $\mu \in \mathbb{R}$ és $\eta > 0$.

Az első két momentuma pedig könnyen ellenőrizhetően a következő:

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \eta^2/2} \quad \text{és} \quad \mathbb{E}[X^2] = e^{2\mu + 2\eta^2}$$

Tehát egy olyan lognormális eloszlással akarjuk közelíteni az A_T árfolyamot, amelyre teljesül, hogy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_T] &= e^{\mu + \eta^2/2} \\ \mathbb{E}[A_T^2] &= e^{2\mu + 2\eta^2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert μ -re és η^2 -re megoldva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \log \mathbb{E}[A_T] - \frac{1}{2} \log \mathbb{E}[A_T^2] \\ \eta^2 &= \log \mathbb{E}[A_T^2] - 2 \log \mathbb{E}[A_T] \end{aligned}$$

Innentől kezdve pedig tudunk a szokásos Black-Scholes módszerrel árazni, mivel a közelítésünk eredményeként

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(L - K)^+]$$

alakú lett a kifizetésünk, ahol L egy lognormális valószínűségi változó.

Ennek segítségével egy call ázsiai opció ára éppen:

$$C = e^{-rT} \left(e^{\mu + \frac{\eta^2}{2}} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right),$$

ahol

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu + \eta^2}{\eta} \quad \text{és} \quad d_2 = d_1 - \eta.$$

Tehát tudunk a momentum-módszer segítségével közelítő zárt képletet adni ázsiai call opciók árára.

3.3. Ázsiai spread opciók

Ebben a fejezetben először az ázsiai spread opciókat fogom általánosan bemutatni, majd a releváns szakirodalom áttekintése után egy úgynevezett hibrid momentum-módszeren alapuló árazást fogok bővebben ismertetni. A fejezet végén megvizsgálom azt is, hogy a hibrid módszerben szereplő két becslés külön-külön hogyan járul hozzá a módszer hibájához.

Ázsiai spread opció alatt egy olyan spread opciót értünk, ahol a két alapterméknek a lejáratú ára helyett az átlagára szerepel a kifizetésfüggvényben. Itt megengedjük azt is, hogy a két átlagolási periódus teljesen eltérjen egymástól, sőt akár a 3.2.1. részben ismertetett átlagolási típusok is eltérhetnek a két alaptermék esetén. Ezeket az opciókat leginkább az áru piacokon alkalmazzák, egy hőerőmű éves nyeresége például egyszerre függ az olaj átlagos beszerzési árától és az áram átlagos eladási árától. Tehát egy ázsiai spread opció segítségével tudja csökkenteni a várható bevételének a szórását és ezáltal könnyebben tud hosszabb távra tervezni.

Legyen a két alaptermék S_1 és S_2 , az átlagárakat jelöljük A_1 -gyel és A_2 -vel, a kötési árfolyam pedig legyen K . Ekkor egy call spread opció lejáratkori kifizetése a következő:

$$C = (A_1 - A_2 - K)^+$$

Míg put spread opció esetén:

$$P = (K - A_1 + A_2)^+$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy az átlagolás diszkrét és számtani, de a két termék esetén az átlagolási időpontok eltérhetnek.

Az európai spread opciókhoz hasonlóan az alapfolyamatot itt is két termékre írjuk fel, amelyek árfolyama korrelált geometriai Brown-mozgást követ. Ezeket a folyamatokat az alábbi módon modellezhetjük:

$$dS_1(t) = rS_1(t) dt + \sigma_1 S_1(t) \left(\sqrt{1 - \rho^2} dW_1(t) + \rho dW_2(t) \right)$$

$$dS_2(t) = rS_2(t) dt + \sigma_2 S_2(t) dW_2(t)$$

Itt $W_1(t)$ és $W_2(t)$ független Wiener-folyamatok, r a kockázatmentes kamatláb, σ_1 és σ_2 rendre a volatilitások, ρ pedig $\left(\sqrt{1 - \rho^2} dW_1(t) + \rho dW_2(t) \right)$ és $dW_2(t)$ korrelációja. Ezen felül definiálnunk kell még A_1 -et és A_2 -t is. Legyenek $0 \leq t_{1,1} < t_{1,2} < \dots < t_{1,n-1} < t_{1,n} \leq T$ azok a diszkrét időpontok, amelyekben az első

alaptermék árfolyamát átlagoljuk, $0 \leq t_{2,1} < t_{2,2} < \dots < t_{2,m-1} < t_{2,m} \leq T$ pedig azok, amelyekben a másodikét. T most is a származtatott termék lejáratát jelöli. Ekkor:

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^n S(t_{1,i})}{n} \quad \text{és} \quad A_2 = \frac{\sum_{i=1}^m S(t_{2,i})}{m}.$$

Mivel általánosan sem spread, sem ázsiai opciók esetén nem ismerünk pontos, zárt árazó képletet, így nem igazán számíthatunk rá, hogy ázsiai spread opciók esetén ez másképp lenne. A problémát többféleképpen próbálták megközelíteni, a következőkben ennek a területnek a releváns szakirodalmát fogom bemutatni.

A spread opciók esetén a kifizetés két alaptermék lejáratkori árfolyamának különbségétől függ. Ennek egy általánosítása a basket opció, ahol a kifizetést n alaptermék lejáratkori árfolyamának valamilyen adott lineáris kombinációja határozza meg. Spread opciók árazása helyett így sok cikk inkább basket opciók árazásával foglalkozik.

Borovkova és Permana (2010) egy eltolásparaméteres lognormális eloszlással közelíti az átlagárak lineáris kombinációját. Zhou és Wang (2008) is momentum-módszert alkalmaz, egy eltolás- és ferdeségparaméteres lognormális eloszláshoz illeszti a kifizetés eloszlását. Deelstra et al. (2010) szintén momentum-módszer segítségével árazza az ázsiai basket opciókat, ehhez a cikk egy ötparaméteres, általánosított lognormális eloszlást használ. Ezen felül bemutatnak komonotonitáson alapuló, könnyen kiszámítható alsó és felső becsléseket is az árra.

Castellacci és Siclari (2003) egy Vorst-módszer (Kemna és Vorst, 1990) általánosításán keresztül kapható becslést mutat be, amiben a számtani közepeket megfelelő mértani közepekre cseréli. A kapott eredményeket összehasonlítják a háromparaméteres lognormális eloszlással való közelítéssel, de nem kapnak egyértelmű eredményt arra vonatkozóan, hogy melyik módszer a pontosabb.

Egy másik megközelítést mutat be Choi (2018), aki főkomponens-elemzéshez hasonló technikával csökkentette az árazási feladat dimenzióját, majd a kapott integrált kvadratúraformulák segítségével közelítette numerikusan.

A Deelstra et al. (2010) cikk által ihletett, de nagyrészt saját munka eredményeként kapott árazási módszert fogok bemutatni a 3.3.1. alfejezetben.

3.3.1. Árazás hibrid momentum-módszerrel

A módszer lényege, hogy A_1 -et és A_2 -t momentum-módszerrel közelítjük egy-egy lognormális változóhoz, ezzel egy spread opciót kapunk, amit utána a Kirk-approximáció segítségével tudunk árazni. Oda kell viszont figyelni arra, hogy A_1 és A_2 korrelációja nem egyezik meg S_1 és S_2 korrelációjával, így a spread opció árazása előtt meg kell határozzuk a helyes korrelációt, ezt a keresztmomentumok vizsgálatával fogjuk megkapni.

Először A_1 és A_2 első két momentumát akarjuk meghatározni, ezek a 3.2.2. fejezetben szereplő számítások alapján a következők lesznek:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_1] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_1(t_{1,i})] = \frac{S_1(0)}{n} \sum_{i=1}^n \exp\{rt_{1,i}\} \\ \mathbb{E}[A_1^2] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[S_1(t_{1,i})S_1(t_{1,j})] = \\ &= \frac{S_1^2(0)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \exp\{r(t_{1,i} + t_{1,j}) + \sigma_1^2 \min(t_{1,i}, t_{1,j})\} \\ \mathbb{E}[A_2] &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[S_2(t_{2,i})] = \frac{S_2(0)}{m} \sum_{i=1}^m \exp\{rt_{2,i}\} \\ \mathbb{E}[A_2^2] &= \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m \mathbb{E}[S_2(t_{2,i})S_2(t_{2,j})] = \\ &= \frac{S_2^2(0)}{m^2} \sum_{i,j=1}^m \exp\{r(t_{2,i} + t_{2,j}) + \sigma_2^2 \min(t_{2,i}, t_{2,j})\}\end{aligned}$$

Ezen felül szükségünk lesz még A_1 és A_2 keresztmomentumára is, a $\widetilde{W}(t) = \sqrt{1 - \rho^2}W_1(t) + \rho W_2(t)$ jelölés bevezetésével ez a következő lesz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_1 A_2] &= \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[S_1(t_{1,i})S_2(t_{2,j})] = \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbb{E} \left[S_1(0) \exp \left\{ \sigma_1 \widetilde{W}(t_{1,i}) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) t_{1,i} \right\} \right. \\ &\quad \left. S_2(0) \exp \left\{ \sigma_2 W_2(t_{2,j}) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) t_{2,j} \right\} \right] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S_1(0)S_2(0)}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) t_{1,i} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) t_{2,j} \right\} \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sigma_1 \widetilde{W}(t_{1,i}) + \sigma_2 W_2(t_{2,j}) \right\} \right] \right) = \\
&= \frac{S_1(0)S_2(0)}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) t_{1,i} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) t_{2,j} \right\} \right. \\
&\quad \left. \exp \left\{ \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_{1,i} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_{2,j} + \sigma_1 \sigma_2 \rho \min(t_{1,i}, t_{2,j}) \right\} \right) = \\
&= \frac{S_1(0)S_2(0)}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \exp \left\{ r(t_{1,i} + t_{2,j}) + \sigma_1 \sigma_2 \rho \min(t_{1,i}, t_{2,j}) \right\}
\end{aligned}$$

A levezetés során most azt a tulajdonságát használtuk a Wiener-folyamatnak, hogy $\sigma_1 \widetilde{W}(t_1) + \sigma_2 W_2(t_2)$ normális eloszlású, 0 várható értékkel és

$$\sigma' = \sqrt{(\sigma_1 \sqrt{t_1})^2 + (\sigma_2 \sqrt{t_2})^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho \min(t_1, t_2)}$$

szórással. Tehát $\sigma_1 \widetilde{W}(t_1) + W_2(t_2) \sim N(0, \sigma')$, vagyis használhatjuk a korábban levezetett segédállításunkat, amely segítségével éppen a keresett alakot kapjuk.

Egy μ és η paraméterű lognormális eloszlás első két momentuma továbbra is:

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \eta^2/2} \quad \text{és} \quad \mathbb{E}[X^2] = e^{2\mu + 2\eta^2}.$$

Legyen L_1 és L_2 két lognormális valószínűségi változó rendre (μ_1, η_1) és (μ_2, η_2) paraméterekkel, illetve $\bar{\rho}$ korrelációval. Ha ezek segítségével közelítjük A_1 -et és A_2 -t, akkor az alábbiak teljesülnek:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A_1] &= e^{\mu_1 + \eta_1^2/2} & \mathbb{E}[A_2] &= e^{\mu_2 + \eta_2^2/2} \\
\mathbb{E}[A_1^2] &= e^{2\mu_1 + 2\eta_1^2} & \mathbb{E}[A_2^2] &= e^{2\mu_2 + 2\eta_2^2}
\end{aligned}$$

Végül pedig az egyenletrendszereket μ -re és η^2 -re megoldva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 2 \log \mathbb{E}[A_1] - \frac{1}{2} \log \mathbb{E}[A_1^2] \\
\eta_1^2 &= \log \mathbb{E}[A_1^2] - 2 \log \mathbb{E}[A_1] \\
\mu_2 &= 2 \log \mathbb{E}[A_2] - \frac{1}{2} \log \mathbb{E}[A_2^2] \\
\eta_2^2 &= \log \mathbb{E}[A_2^2] - 2 \log \mathbb{E}[A_2]
\end{aligned}$$

Ezáltal a kifizetésünk

$$e^{-rT} \mathbb{E} [(L_1 - L_2 - K)^+]$$

alakú lett, ami egy európai spread kifizetésére hasonlít. Egyedül arra kell odafigyelnünk, hogy a korrelációt megfelelően határozzuk meg, ehhez a korábban kiszámolt keresztmomentumot fogjuk használni.

Tegyük fel, hogy $X \sim N(\mu_1, \eta_1)$ és $Y \sim N(\mu_2, \eta_2)$ normális eloszlások, melyek korrelációja $\bar{\rho}$. Ekkor e^X és e^Y lognormálisak, a keresztmomentumukat a következőképpen definiáljuk:

$$\text{crm}(e^X, e^Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[e^X e^Y] = \mathbb{E}[e^{X+Y}]$$

Korrelált normális eloszlások összege továbbra is normális lesz, feltéve ha együttesen is normálisak. Az összeg várható értéke és szórása így az alábbi lesz:

$$X \sim N(\mu_1, \eta_1), Y \sim N(\mu_2, \eta_2) \implies X + Y \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_1\eta_2\bar{\rho}}\right)$$

$\mathbb{E}[e^Z]$ -t pedig már korábban kiszámoltuk, ha Z normális eloszlású, az ottani eredmény alapján:

$$\text{crm}(e^X, e^Y) = \mathbb{E}[e^{X+Y}] = \exp\left\{\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}\eta_2^2 + \eta_1\eta_2\bar{\rho}\right\}$$

Ezzel megkaptuk L_1 és L_2 keresztmomentumát.

A modellünkben az egyetlen ismeretlen a $\bar{\rho}$, ennek meghatározásához tegyük egyenlővé az elméleti és a becsült keresztmomentumokat:

$$\mathbb{E}[L_1 L_2] = \mathbb{E}[A_1 A_2]$$

Vagyis az előzőek szerint:

$$\begin{aligned} & \exp\left\{\mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}\eta_2^2 + \eta_1\eta_2\bar{\rho}\right\} = \\ & = \frac{S_1(0)S_2(0)}{nm} \sum_{i,j=1}^n \exp\{r(t_{1,i} + t_{2,j}) + \sigma_1\sigma_2\rho \min(t_{1,i}, t_{2,j})\} \end{aligned}$$

Az előző egyenletből fejezzük ki $\bar{\rho}$ -t:

$$\bar{\rho} = \frac{\log \left(\frac{S_1(0)S_2(0)}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \exp \{r(t_{1,i} + t_{2,j}) + \sigma_1 \sigma_2 \rho \min(t_{1,i}, t_{2,j})\} \right) - \mu_1 - \mu_2 - \frac{1}{2}\eta_1^2 - \frac{1}{2}\eta_2^2}{\eta_1 \eta_2}$$

Ezzel megkaptuk L_1 és L_2 korrelációját, vagyis valóban vissza tudtuk vezetni az ázsiai spread opció árazásának a problémáját az európai spread opció árazására.

3.3.2. Hibabecslés

Az előző részben bemutatott hibrid momentum módszeres árazás során kétszer is becsültünk, először az átlagár lognormális becslésénél, majd a spread opció Kirk-approximációval történő árazásánál. Érdekes kérdés lehet, hogy a két hiba milyen arányban járul hozzá a teljes hibához. Írjuk fel formálisan a becsléseinket:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_1 - A_2 - K)^+ &= \mathbb{E}(L_1 - L_2 - K)^+ + \overbrace{\left(\mathbb{E}(A_1 - A_2 - K)^+ - \mathbb{E}(L_1 - L_2 - K)^+ \right)}^{\Delta_1} = \\ &= (L_2 + K) \mathbb{E} \left(\frac{L_1}{L_2 + K} - 1 \right)^+ + \Delta_1 = \\ &= c \cdot \mathbb{E} \left(\frac{L_1}{L_3} - 1 \right)^+ + \overbrace{\left((L_2 + K) \mathbb{E} \left(\frac{L_1}{L_2 + K} - 1 \right)^+ - c \cdot \mathbb{E} \left(\frac{L_1}{L_3} - 1 \right)^+ \right)}^{\Delta_2} + \Delta_1 = \\ &= c \cdot \mathbb{E}(L_4 - 1)^+ + \Delta_1 + \Delta_2 \end{aligned}$$

A képletekben L_1 és L_2 azok a lognormális eloszlások, amikkel a A_1 -et és A_2 -t becsüljük a momentum-módszeres approximáció során. L_3 az a lognormális eloszlás, amivel $L_2 + K$ -t közelítjük a Kirk-approximáció során, c pedig egy L_3 -tól függő konstans, amit a mértékcseré során kapunk. Végül $L_4 = L_1/L_3$, amiről tudjuk, hogy lognormális, hiszen két lognormális hányadosa.

Jól látható, hogy az első becslésünk azon múlik, hogy lognormális eloszlások összegét mennyire tudjuk jól közelíteni egy másik lognormális eloszlással. A második pedig azon, hogy egy kis konstanssal eltolt lognormális eloszlást mennyire tudunk jól közelíteni egy másik lognormális eloszlással. Ez alapján arra számítunk, hogy az első becslés pontatlanabb, mint a második és a szimulációk során ki is fog derülni, hogy általában Δ_1 jobban hozzá fog járulni a teljes hibához, mint Δ_2 .

4. Monte Carlo módszerek

Ebben a fejezetben röviden bemutatom, hogy hogyan lehet Monte Carlo szimuláció segítségével opciókat árazni. Ez azért lesz fontos a dolgozatomhoz, mert az elméleti módszerekkel készített közelítő árazások pontosságát az 5. fejezetben Monte Carlo szimuláció segítségével fogom meghatározni. Először tekintsük az általános módszert, Roncoroni et al. (2015) alapján.

Legyen $g(x)$ egy mérhető függvény és legyenek X_i -k független, azonos eloszlásból származó valószínűségi változók. Ekkor a nagy számok erős törvénye szerint, ha $\mathbb{E}[g(X_1)] < \infty$, akkor a $g(X_i)$ valószínűségi változók átlaga 1 valószínűséggel a közös várható értékükhöz tart:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(X_1))$$

Call opciók árazásához például válasszuk $g(x)$ -nek az $e^{-rT} (x - K)^+$ függvényt.

Az árfolyam egy pályáját könnyen szimulálhatjuk a Black-Scholes modellben, ázsiai opciók esetén a

$$dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

differenciálegyenlet, míg spread opciók esetén a

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= rS_1(t) dt + \sigma_1 S_1(t) \left(\sqrt{1 - \rho^2} dW_1(t) + \rho dW_2(t) \right) \\ dS_2(t) &= rS_2(t) dt + \sigma_2 S_2(t) dW_2(t) \end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszer diszkretizálásával.

Ezután minden pályához meg tudjuk határozni ázsiai opciók esetén A_T -t, spread opciók esetén $S_1(T) - S_2(T)$ -t vagy ázsiai spread opciók esetén $A_1 - A_2$ -t. Ha az i . ismétlésben kapott értéket $Y^{(i)}$ -vel jelöljük, akkor a call opció árára a következő becsléseket kapjuk:

$$\begin{aligned} p^{(i)} &= e^{-rT} (Y^{(i)} - K)^+ \\ p_{MC} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p^{(i)} \end{aligned}$$

A korábbiak szerint p_{MC} egy valószínűséggel tart a helyes árhoz, a varianciája és a

standard hibája pedig a következő lesz:

$$\sigma_{MC}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p^{(i)} - p_{MC})^2$$

$$se_{MC} = \sqrt{\frac{\sigma_{MC}^2}{n}}$$

A standard hiba segítségével tudunk konfidencia-intervallumot is készíteni a becslésünk köré. Az $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidencia-intervallum

$$p_{MC} \pm \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot se_{MC},$$

ahol Φ^{-1} a standard normális eloszlásfüggvényének az inverze.

Egyszerű Monte Carlo szimuláció esetén általában túl sok ismétlésre lenne szükség a kívánt pontosság eléréséhez. Ennek kiküszöbölésére szoktak varianciacsökkentő módszereket alkalmazni, amelyek segítségével kevesebb ismétléssel, rövidebb futásidő mellett is elérhető ugyanolyan pontosság. Egy gyakori megoldás az **antitetikus változók módszere**, ezt fogom röviden bemutatni, illetve a szimulációk során implementálni is.

A módszer alapötlete, hogy az $Y = g(X)$ valószínűségi változónak csökkenteni akarjuk a varianciáját. Ehhez vegyünk két azonos eloszlású valószínűségi változót úgy, hogy mindkettőnek a várható értéke $\mathbb{E}(Y)$, legyenek ezek Y_1 és Y_2 . Ekkor $\frac{Y_1 + Y_2}{2}$ torzítatlan becslése $\mathbb{E}(Y)$ -nak. A variancia pedig a következőképpen írható fel:

$$\text{Var} \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} \right) = \frac{\text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) + 2 \text{Cov}(Y_1, Y_2)}{4}$$

Az előző egyenlet szerint $\frac{Y_1 + Y_2}{2}$ varianciája kisebb lesz Y_1 és Y_2 közös varianciájánál, ha Y_1 és Y_2 között negatív a korreláció. Ezt úgy tudjuk elérni, ha az árfolyam pályájának a szimulálása után a használt Wiener-folyamat -1 -szeresét alapul véve is készítünk egy szimulációt. Ekkor az eredeti pálya alapján kapott árat p -vel, míg az antitetikus pálya alapján kapott árat \bar{p} -vel jelölve, a következő becslést kapjuk:

$$p_{AV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p^{(i)} + \bar{p}^{(i)}}{2}$$

A kapott ár továbbra is egy valószínűséggel tart a helyes árhoz, de a varianciája és

a standard hibája most már az alábbi lesz:

$$\sigma_{AV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{p^{(i)} + \bar{p}^{(i)}}{2} - p_{AV} \right)^2$$
$$se_{AV} = \sqrt{\frac{\sigma_{AV}^2}{n}}$$

Az $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidencia-intervallum ekkor

$$p_{AV} \pm \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot se_{AV} ,$$

ami azonos ismétlésszám esetén általában szűkebb, mint az egyszerű Monte Carlo szimuláció esetén kapott intervallum.

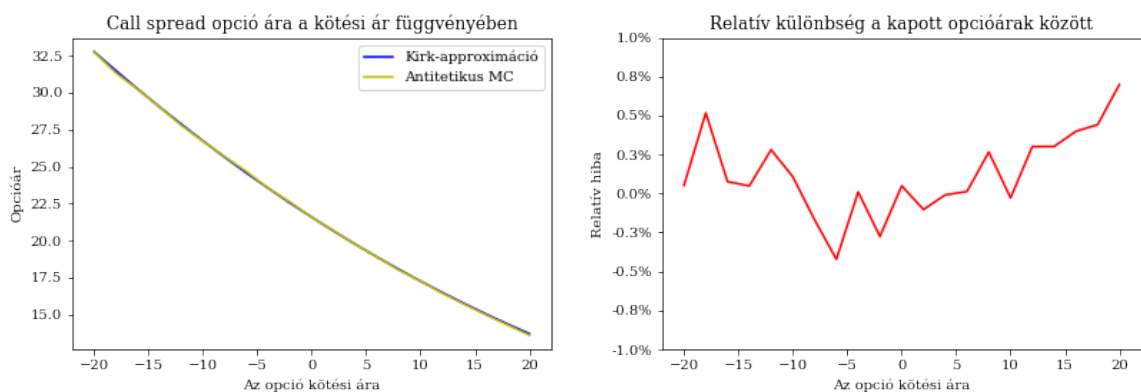
5. Szimulációs eredmények

Ebben a fejezetben a korábban bemutatott közelítő árazási módszerek pontosságát fogom vizsgálni. A módszereket Pythonban implementáltam, és a kapott eredményeket összehasonlítottam az antitetikus változókkal javított Monte Carlo szimuláció eredményeivel. Az általam írt Python függvények megtalálhatóak a 7. fejezetben található függelékben.

5.1. Spread opciók

Ebben az alfejezetben spread opciók Kirk-approximációval való árazásának a pontosságát fogjuk vizsgálni. Minden tesztünkben egy olyan call spread opciót fogunk tekinteni, ahol $S_1(0) = 100$, $S_2(0) = 100$, $r = 5\%$ és $T = 1$. A kötési árat (K), a volatilitásokat (σ_1, σ_2) és a korrelációt (ρ) viszont változtatni fogjuk, ezen keresztül vizsgáljuk az approximáció pontosságát a paramétereinek függvényében. Az antitetikus Monte Carlo szimulációt ebben a részben mindig 250.000 ismétléssel fogjuk végezni.

A Kirk-approximáció feltételei között szerepelt, hogy a kötési ár legyen relatíve kicsi a második alaptermék árfolyamához képest. Ennek vizsgálatához tekintsünk egy olyan call spread opciót, amelyre $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ és $\rho = 0,4$. K , vagyis a kötési ár mozogjon -20 és 20 között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak az 1a ábrán láthatóak. Ha feltesszük, hogy az antitetikus Monte Carlo adja a helyes eredményt, akkor kiszámíthatjuk a Kirk-approximáció relatív hibáját a vizsgált kötési árak esetén, ezt az 1b ábrán láthatjuk.



(a) Call spread opció ára a kötési ár függvényében

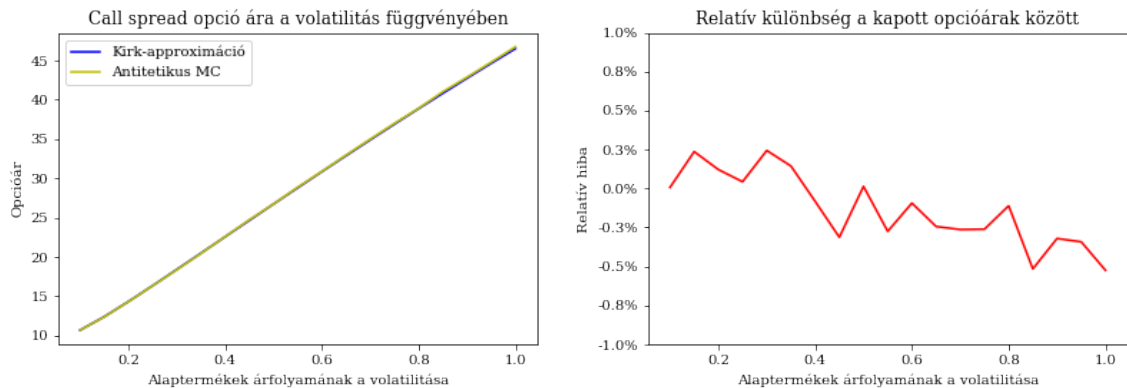
(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

1. ábra. Kirk-approximáció alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call spread opciók esetén, változó kötési árral.

Jól látható, hogy a vizsgált paraméterválasztás mellett az approximáció relatív

hibája 1% alatt van. Azt is észrevehetjük az 1b ábrán, hogy K abszolút értékének a növelésével romlik az árazóképletünk teljesítménye, ez megfelel az elméleti várakozásainknak, miszerint relatív kicsi K esetén pontosabb az approximáció.

Egy másik fontos kérdés, hogy a Kirk-approximáció hogyan teljesít különböző volatilitások esetén, ugyanis minél nagyobb a volatilitás, annál nehezebben jelezhető előre az alaptermék jövőbeni árfolyama és ezáltal annál értékesebb lesz maga az opció. Tehát arra számítunk, hogy minden más változatlansága mellett az opció ára monoton nő a volatilitás függvényében. Most tekintsünk egy olyan call spread opciót, amelyre $K = -10$ és $\rho = 0,4$. σ_1 és σ_2 , vagyis az alaptermékek árfolyamának a volatilitása, 0,1 és 1,0 között vegyen fel értékeket. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 2a ábrán, a Kirk-approximáció relatív hibája pedig a 2b ábrán látható.



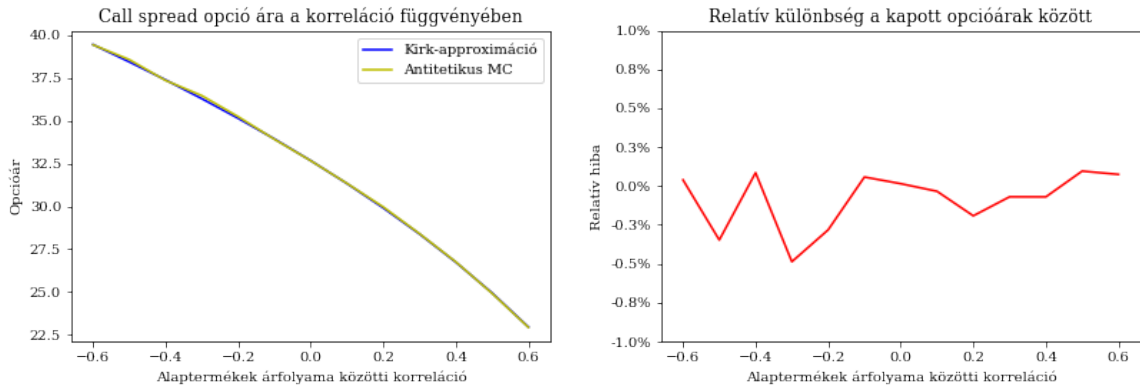
(a) Call spread opció ára a volatilitás függvényében

(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

2. ábra. Kirk-approximáció alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call spread opciók esetén, változó volatilitással.

Most is 1%-on belül van az approximáció relatív hibája, de észrevehetjük, hogy a volatilitás növekedésével enyhén romlik a Kirk-approximáció pontossága.

Végül vizsgáljuk meg, hogy a korreláció változtatása hogyan hat a call spread opció árára, illetve a Kirk-approximáció pontosságára. Minél nagyobb a korreláció a két alaptermék árfolyama között, annál könnyebben jelezhető előre az alaptermékek jövőbeni árfolyamának a különbsége, ezért arra számítunk, hogy minden más változatlansága mellett az opció ára monoton csökken a korreláció függvényében. Tekintsünk egy olyan call spread opciót, amelyre $K = -10$ és $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$. ρ , vagyis az alaptermékek árfolyamának a korrelációja mozogjon $-0,6$ és $0,6$ között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 3a ábrán, a Kirk-approximáció relatív hibája pedig a 3b ábrán látható.



(a) Call spread opció ára a korreláció függvényében

(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

3. ábra. Kirk-approximáció alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call spread opciók esetén, változó korrelációval.

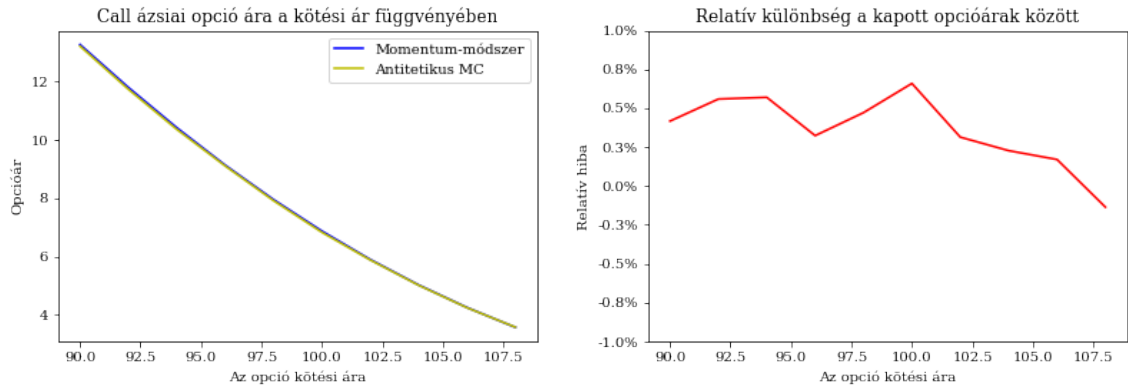
Most az approximáció relatív hibája 0,5% alatt van minden vizsgált korrelációra, és a 3b ábra alapján nem látszik kapcsolat az approximáció pontossága és a korreláció között.

Összességében elmondhatjuk, hogy a Kirk-approximáció által adott ár a vizsgált paraméterválasztások esetén kevesebb, mint 1%-ot téved az antitetikus Monte Carlo szimulációval kapott árhoz képest. Tehát a legtöbb esetben nyugodtan alkalmazhatjuk a Kirk-approximációt spread opciók árazására.

5.2. Ázsiai opciók

Ebben az alfejezetben ázsiai opciók momentum-módszeres árazásának a pontosságát fogjuk vizsgálni. Minden tesztünkben egy olyan ázsiai call opciót fogunk tekinteni, ahol $S(0) = 100$, $r = 5\%$ és $T = 1$. A kötési árat (K), a volatilitást (σ) és az átlagolási időpontok számát (n) viszont változtatni fogjuk, ezen keresztül vizsgáljuk az approximáció pontosságát a paramétereinek függvényében. Az antitetikus Monte Carlo szimulációt most is mindig 250.000 ismétléssel fogjuk végezni.

A spread opciókhoz hasonlóan kezdjük most is a kötési árral. Tekintsünk egy olyan ázsiai call opciót, ahol $\sigma = 0,25$ és $n = 100$. A kötési ár mozogjon 90 és 110 között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 4a ábrán, a momentum-módszer relatív hibája pedig a 4b ábrán látható.



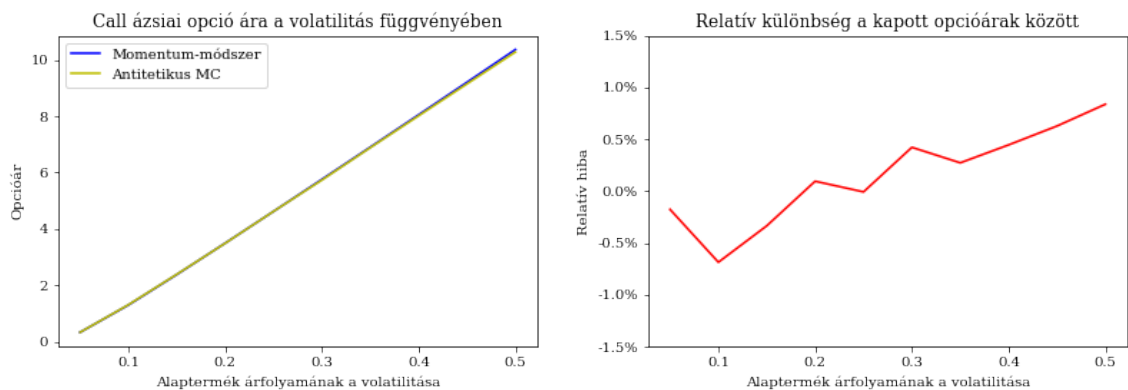
(a) Call ázsiai opció ára a kötési ár függvényében

(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

4. ábra. Momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai opciók esetén, változó kötési árral.

A momentum-módszeres approximáció relatív hibája 1%-on belül van, a 4b ábra alapján nem igazán állapítható meg kapcsolat a módszer pontossága és a kötési ár között.

Fontos kérdés, hogy a momentum-módszeres approximáció hogyan teljesít különböző volatilitások esetén, ugyanis minél nagyobb a volatilitás, annál nehezebben előrejelezhető az alaptermék jövőbeni árfolyama és ezáltal annál értékesebb lesz maga az opció. Tehát a spread opciókhoz hasonlóan most is arra számítunk, hogy minden más változatlansága mellett az opció ára monoton nő a volatilitás függvényében.



(a) Call ázsiai opció ára a volatilitás függvényében

(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

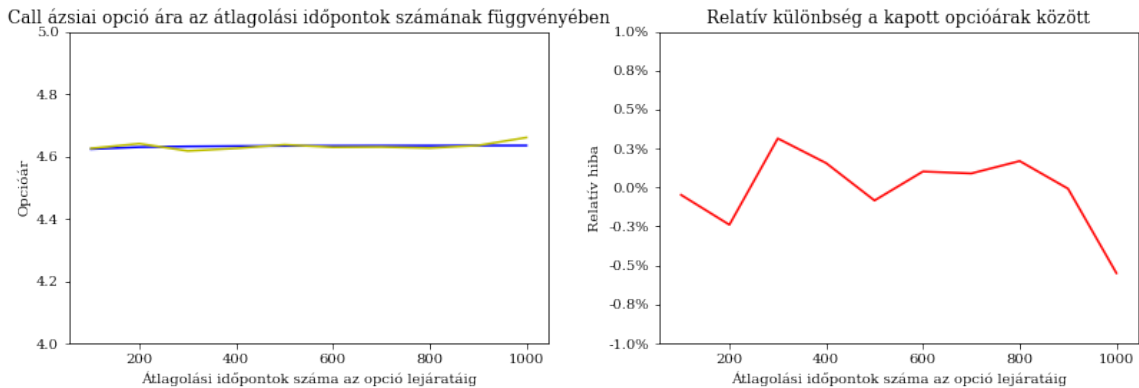
5. ábra. Momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai opciók esetén, változó volatilitással.

Tekintsünk egy olyan ázsiai call opciót, amelyre $K = 105$ és $n = 100$. σ , vagyis az alaptermék árfolyamának a volatilitása, 0, 1 és 0, 5 között vegyen fel értékeket.

Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak az 5a ábrán, a momentum-módszeres approximáció relatív hibája pedig az 5b ábrán látható.

A momentum-módszeres approximáció relatív hibája 1%-on belül van a vizsgált tartományon, de az 5b ábra alapján a Kirk-approximációhoz hasonlóan ennek a módszernek is romlik a pontossága a volatilitás növekedésével.

Végül vizsgáljuk meg, hogy az átlagolási időpontok számának a változása hogyan hat egy ázsiai call opció árára, illetve a momentum-módszeres árazás pontosságára. Az átlagolási időpontok számának a növelésével az opció ára tartani fog egy folytonos átlagolású ázsiai opció árához. A momentum-módszeres árazásnál mindig annyi lognormális összegét közelítjük egy másik lognormálissal, ahány átlagolási időpont van. Ezeknek a lognormálisoknak az összege viszont az átlagolási időpontok számának a növelésével a Centrális határeloszlás-tétel miatt egy normális eloszláshoz fog tartani. Tehát arra számítunk, hogy az átlagolási időpontok számának a növelésével a momentum-módszeres árazásunk pontossága romlani fog. Ennek ellenőrzéséhez tekintsünk egy olyan ázsiai call opciót, amelyre $K = 105$ és $\sigma = 0,25$. n mozogjon 100 és 1000 között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 6a ábrán, a momentum-módszeres approximáció relatív hibája pedig a 6b ábrán látható.



(a) Call ázsiai opció ára az átlagolási időpontok számának függvényében

(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

6. ábra. Momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai opciók esetén, az átlagolási napok számának változtatásával.

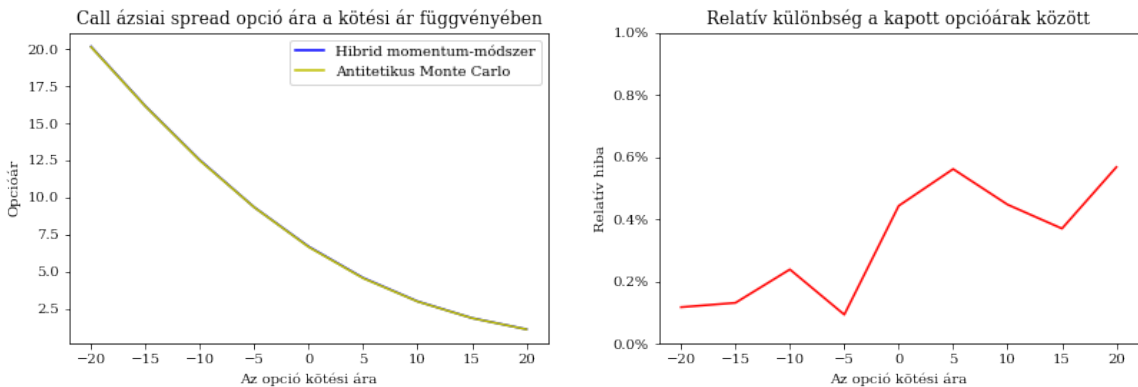
A relatív hiba most is 1% alatt van a vizsgált tartományon, de láthatjuk, hogy a sejtésünk beigazolódott és valóban romlik a módszer pontossága az átlagolási időpontok számának a növelésével.

Összességében elmondhatjuk, hogy a momentum-módszeres approximáció által adott ár a vizsgált paraméterválasztások esetén kevesebb, mint 1%-ot téved az antitetikus Monte Carlo szimulációval kapott árhoz képest. Tehát nyugodtan alkalmazhatjuk a momentum-módszeres közelítést ázsiai opciók árazására.

5.3. Ázsiai spread opciók

Ebben az alfejezetben ázsiai spread opciók hibrid momentum-módszeres árazásának a pontosságát fogom vizsgálni. Minden tesztünkben egy olyan call ázsiai spread opciót fogunk tekinteni, ahol $S_1(0) = 100$, $S_2(0) = 100$, $r = 5\%$ és $T = 1$. A kötési árat (K), a volatilitásokat (σ_1, σ_2), a korrelációt (ρ) és az átlagolási időpontok számát (n) viszont változtatni fogjuk, ezen keresztül vizsgáljuk az approximáció pontosságát a paramétereinek függvényében. Továbbá megengedjük azt is, hogy az átlagolási időpontok a két alaptermék esetén teljesen különbözőek legyenek, erre is fogunk tesztek végezni. Mivel ez a rész vizsgálja a dolgozat fő eredményének a pontosságát, ezért itt az antitetikus Monte Carlo szimulációt már 500.000 ismétléssel végezzük.

Kezdjük ismét a kötési árral. Tekintsünk egy olyan call ázsiai spread opciót, ahol $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$, $\rho = 0,3$ és $n = 100$. A kötési ár mozogjon -20 és 20 között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 7a ábrán, a hibrid momentum-módszer relatív hibája pedig a 7b ábrán látható.



(a) Call ázsiai spread opció ára a kötési ár függvényében

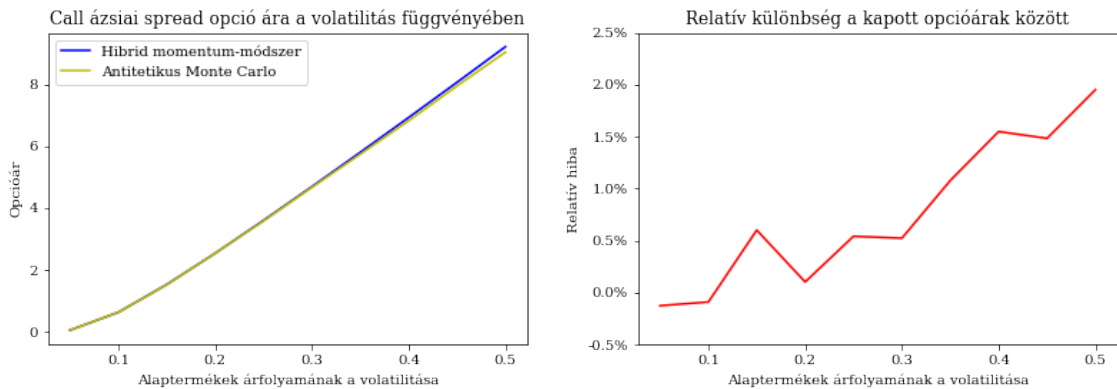
(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

7. ábra. Hibrid momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai spread opciók esetén, változó kötési árral.

Tehát ezzel a paraméterválasztással a hibrid momentum-módszeres approximáció relatív hibája 1%-on belül van, a 7b ábra alapján nem igazán állapítható meg kapcsolat a módszer pontossága és a kötési ár között. Érdekes viszont, hogy

az approximáció a származtatott terméket mindenhol felülárazza.

Vizsgáljuk meg a módszer hatékonyságát az alaptermékek árfolyamának volatilitása függvényében is. Tekintsünk egy olyan call ázsiai spread opciót, amelyre $K = 5$, $\rho = 0,4$ és $n = 100$. σ_1 és σ_2 mozogjon 0,1 és 0,5 között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 8a ábrán, a momentum-módszeres approximáció relatív hibája pedig a 8b ábrán látható.



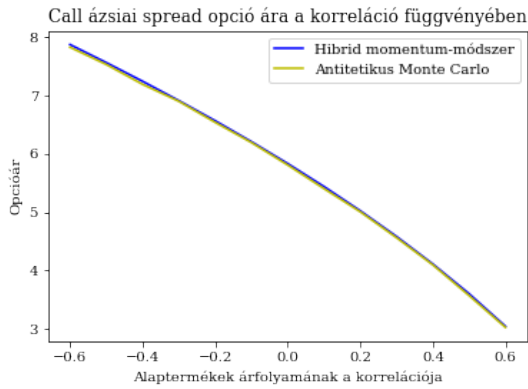
(a) Call ázsiai spread opció ára a volatilitás függvényében

(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

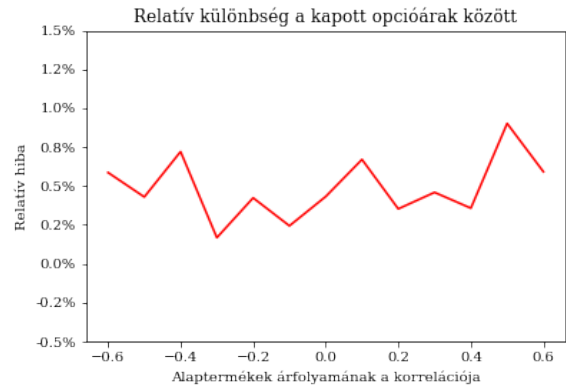
8. ábra. Hibrid momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai spread opciók esetén, változó volatilitással.

Tehát a hibrid momentum-módszeres approximáció pontossága fokozatosan romlik a volatilitás növekedésével, és erre is számítottunk. A módszer relatív hibája 2% alatti a jelenlegi paraméterválasztással, és a 8b ábra alapján észrevehetjük azt is, hogy a módszerünk itt is inkább felülárazza származtatott terméket, mint alul.

Ezután vizsgáljuk meg az alaptermékek árfolyamának a korrelációjának a hatását az árazási módszerünkre. Arra számítottunk, hogy a korreláció növekedésével az opció ára csökkenni fog, de a spread és az ázsiai árazáshoz hasonlóan a módszer pontosságára nem lesz hatással. Tekintsünk egy olyan call ázsiai spread opciót, amelyre $K = 5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$ és $n = 100$. ρ mozogjon $-0,6$ és $0,6$ között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 9a ábrán, a momentum-módszeres approximáció relatív hibája pedig a 9b ábrán látható.



(a) Call ázsiai spread opció ára a korreláció függvényében

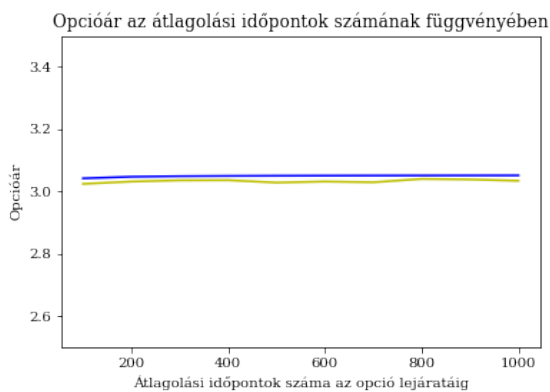


(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

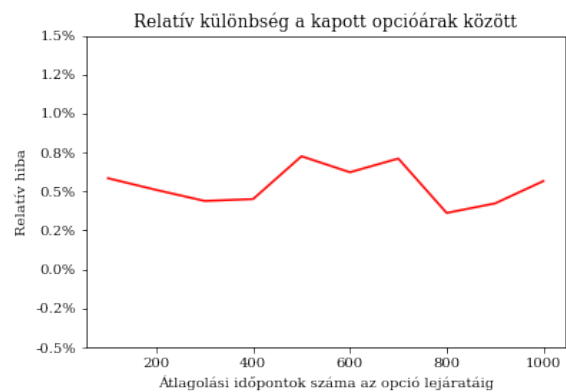
9. ábra. Hibrid momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai spread opciók esetén, változó korrelációval.

A jelenlegi paraméterválasztással az approximáció relatív hibája 1% alatt van minden vizsgált korrelációra, és ahogy arra számítottunk, a 9b ábra alapján nem látszik kapcsolat az approximáció pontossága és a korreláció között. Most is észrevehetjük viszont, hogy a módszerünk enyhén felülárazza a származtatott terméket.

Következőnek tekintsük az átlagolási időpontok számát. Az átlagolási időpontok számának a növelésével a spread opcióban folytonos átlagolású alaptermékek különbségét kell árazzuk.



(a) Call ázsiai spread opció ára az átlagolási időpontok számának függvényében



(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

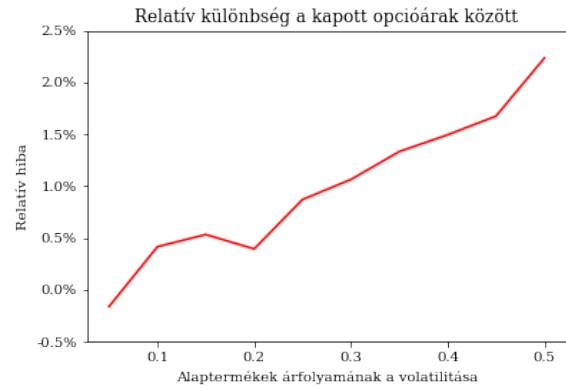
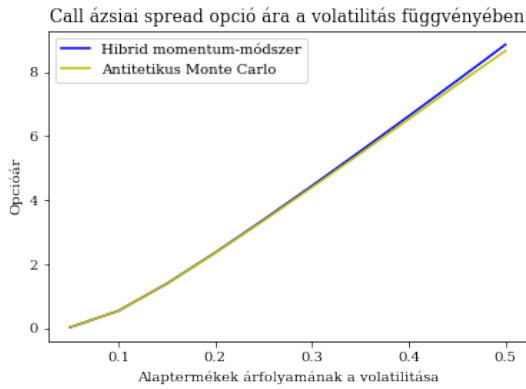
10. ábra. Hibrid momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai spread opciók esetén, az átlagolási napok számának változtatásával.

A momentum-módszeres árazásnál mindig annyi lognormális összegét közelítjük egy másik lognormálissal, ahány átlagolási időpont van. Ezeknek a lognormálisoknak

az összege viszont az átlagolási időpontok számának a növelésével a Centrális határeloszlás-tétel miatt egy normális eloszláshoz fog tartani. Tehát utána a Kirk-approximációnál lognormálisak különbsége helyett normálisak különbségét kell árazzuk, és emiatt valószínűleg romlani fog az approximációnk pontossága. Ennek ellenőrzéséhez tekintsünk egy olyan call ázsiai spread opciót, amelyre $K = 5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$ és $\rho = 0,4$. n mozogjon 100 és 1000 között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 10a ábrán, a momentum-módszeres approximáció relatív hibája pedig a 10b ábrán látható.

A relatív hiba most is 1% alatt van a vizsgált tartományon, de nem látunk egyértelmű kapcsolatot a módszer pontossága és az átlagolási időpontok száma között. Azt viszont most is észrevehetjük, hogy a hibrid momentum-módszer enyhén felülárazza a származtatott terméket.

Végül tekintsünk egy olyan esetet, ahol a két alapterméket teljesen eltérő napokon átlagoljuk, és vizsgáljuk meg, hogy ez ront-e a hibrid momentum-módszer pontosságán. Tegyük fel, hogy 250 kereskedési nap van egy évben és az egyik alapterméket minden hónap első kereskedési napján átlagoljuk, a másikat pedig minden második hétfőn. Ekkor a származtatott termék kifizetésében az első alaptermék árfolyamának 12 időpontban vett átlaga, míg a másodikonak 26 időpontban vett átlaga szerepel. Például elképzelhetünk egy olyan alumínium üzemet, amely havonta szerzi be a bauxitot egy beszállítótól, de az abból elkészített alumíniumot kéthetente el tudja adni egy másik nagyüzemi vevőnek. Az alumínium üzem egy alumínium-bauxit ázsiai spread opcióval tudja csökkenteni a kitétséget az árak különbségére, és éppen azok az átlagolási napok szerepelnének az opciós szerződésben, amik a példánkban is vannak. Most térjünk vissza a módszer pontosságának a vizsgálatához, a call ázsiai spread opciónk többi paramétere legyen $K = 5$ és $\rho = 0,4$. Ábrázolni most is a volatilitások függvényében fogunk, ugyanis az eddigi tapasztalataink szerint az van a legnagyobb hatással az approximáció pontosságára. σ_1 és σ_2 mozogjon 0,1 és 0,5 között. Ekkor a két módszerrel kapott opcióárak a 11a ábrán, a momentum-módszeres approximáció relatív hibája pedig a 11b ábrán látható.



(a) Call ázsiai spread opció ára különböző átlagolási napokkal, változó volatilitással

(b) Relatív különbség a kapott opcióárak között

11. ábra. Hibrid momentum-módszer alapú árazás összehasonlítása az antitetikus Monte Carlo szimulációval, call ázsiai spread opciók esetén, különböző átlagolási napok esetén, változó volatilitással.

Összehasonlítva a kapott eredményt a 8b ábrával azt látjuk, hogy nem tapasztalunk szignifikáns romlást a pontosságban azzal, hogy megengedtünk eltérő átlagolási időpontokat is. A relatív hiba a vizsgált tartományon továbbra is 2%-on belül van.

Összességében elmondhatjuk, hogy a hibrid momentum-módszeres approximáció által adott ár a vizsgált paraméterválasztások esetén kevesebb, mint 2%-ot téved az antitetikus Monte Carlo szimulációval kapott árhoz képest. Fontos megjegyezni, hogy a hibrid momentum-módszer két egymásutáni becslést alkalmaz, így nem számíthatunk akkora pontosságra, mint a sima spread vagy ázsiai opcióknál. Érdekeség továbbá, hogy a módszer szinte mindig felülárazza a származtatott terméket, így megfelelő kondicionálással valószínűleg tovább pontosítható.

5.4. Konfidencia intervallumok

Mivel igazából a Monte Carlo szimuláció sem egy pontos árat ad meg, hanem egy konfidencia intervallumot, ezért fontos megvizsgálnunk, hogy a tapasztalt 1 – 2%-os relatív hibákkal még benne vagyunk-e például a 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumban.

Vizsgáljuk külön-külön a három opciótípust:

Spread opció

Tekintsünk egy spread opciót a következő paraméterekkel: $S_1(0) = 100$, $S_2(0) = 100$, $K = -10$, $r = 5\%$, $\rho = 0,6$ és $T = 1$. Az antitetikus Monte Carlo szimulációt

végezzük 500.000 ismétléssel. Ezután határozzuk meg a Kirk-approximáció szerinti árat, illetve az antitetikus Monte Carlo módszer konfidencia intervallumának az alsó és felső határát néhány volatilitás értékre:

Volatilitás	MC alsó határ	MC felső határ	Kirk-ár
0,4	19,46	19,59	19,54
0,6	26,25	26,50	26,36
0,8	33,01	33,42	33,07

3. táblázat. Konfidencia intervallumok spread opció esetén

A 3. táblázatból könnyen kiolvashatjuk, hogy a Kirk-ár beleesik a 95%-os konfidencia intervallumba, így azt mondhatjuk, hogy nem hibázik szignifikánsan a módszer.

Ázsiai opció

Most tekintsünk egy ázsiai opciót a következő paraméterekkel: $S(0) = 100$, $K = 105$, $r = 5\%$, $n = 100$ és $T = 1$. Az antitetikus Monte Carlo szimulációt végezzük 500.000 ismétléssel. Ezután határozzuk meg a momentum-módszer szerinti árat, illetve az antitetikus Monte Carlo módszer konfidencia intervallumának az alsó és felső határát néhány volatilitás értékre:

Volatilitás	MC alsó határ	MC felső határ	MM-ár
0,1	1,296	1,314	1,302
0,3	5,698	5,767	5,759
0,5	10,214	10,349	10,361

4. táblázat. Konfidencia intervallumok ázsiai opció esetén

A 4. táblázatból könnyen kiolvashatjuk, hogy a momentum-módszeres approximációval kapott ár beleesik a 95%-os konfidencia intervallumba 0,1-es és 0,3-mas volatilitás esetén, míg 0,5-ös volatilitás esetén éppen kiesik belőle. Összességében így itt is azt mondhatjuk, hogy nem hibázik szignifikánsan a módszer.

Ázsiai spread opció

Végül tekintsünk egy ázsiai spread opciót a következő paraméterekkel: $S_1(0) = 100$, $S_2(0) = 100$, $K = -5$, $r = 5\%$, $\rho = 0,6$, $n = 100$ és $T = 1$. Az antitetikus Monte Carlo szimulációt végezzük 500.000 ismétléssel. Ezután határozzuk meg a Kirk-approximáció szerinti árat, illetve az antitetikus Monte Carlo módszer konfidencia intervallumának az alsó és felső határát néhány volatilitás értékre:

Volatilitás	MC alsó határ	MC felső határ	HMM-ár
0,1	5,223	5,233	5,230
0,3	8,714	8,769	8,764
0,5	12,648	12,752	12,798

5. táblázat. Konfidencia intervallumok ázsiai spread opció esetén

A 5. táblázatból kiolvashatjuk, hogy a momentum-módszeres approximációval kapott ár beleesik a 95%-os konfidencia intervallumba 0,1-es és 0,3-mas volatilitás esetén, de 0,5-ös volatilitás esetén már bőven kiesik belőle. Tehát a hibrid momentum-módszeres árazásról csak kisebb volatilitások esetén állíthatjuk, hogy nem szignifikáns a hibája.

Összességében elmondhatjuk, hogy mindhárom vizsgált opcióra tudunk adni egy olyan árazási módszert, aminek kis volatilitások esetén nem szignifikáns a hibája 95%-os megbízhatósági szinten.

Végül pedig emlékezzünk vissza a 3.3.2. részben szereplő hibabecslésünkre. Ott azt állítottuk, hogy a teljes hibának nagyobb része származik a momentum-módszeres árazás hibájából, mint a Kirk-approximáció hibájából. Természetesen a paraméterek nem tökéletesen hasonlíthatóak össze, de a 3. és a 4. táblázatot tekintve azt látjuk, hogy a Kirk-approximáció sokkal magasabb volatilitások esetén is benne van a konfidencia intervallumban, mint a momentum-módszer, vagyis azonos volatilitás esetén várhatóan pontosabb.

6. Összefoglalás

Dolgozatomban három egzotikus opciót mutattam be, kitérve a pontos árazásuk nehézségeire, és az ennek eredményeként létrejött közelítő árazási módszerekre. Mindhárom vizsgált opció árazásának bemutattam röviden a szakirodalmát, majd egy-egy approximációt részletesen is levezettem. Külön kiemelném az ázsiai spread opcióknál ismertetett hibrid momentum-módszeres árazást, az legjobb tudomásom szerint a saját munkám eredménye. A tesztek elvégzése előtt röviden bemutat-tam a Monte Carlo szimuláció elméleti hátterét, illetve a variancia csökkentés egy lehetséges módját. Ezután megvizsgáltam mindhárom approximáció pontosságát úgy, hogy az antitetikus Monte Carlo által adott árhoz viszonyítottam. A tesztek sikeresnek mondhatók, spread és ázsiai opciók esetén a közelítő módszereink 1%-nál kisebb relatív hibát vétettek a vizsgált paraméterválasztások esetén. Ázsiai spread opciók esetén természetesen nem számíthattunk ilyen jó eredményre, ugyanis a hibrid momentum-módszerben két becslést is végzünk egymás után. Ennek ellenére a vizsgált paraméterekkel 2%-on belüli relatív hibát ért el módszer, ami bizakodásra adhat okot.

A szakdolgozatomat egy rövid kitekintéssel szeretném lezárni, amelyben a ben-nem felmerülő, lehetséges továbblépési irányokat szeretném ismertetni. Egyrészt érdekes lehet annak a vizsgálata, hogy miért áraz mindig felül a hibrid momentum-módszer, hiszen ennek megértésével és megfelelő kondicionálással még pontosabb árakat kaphatnánk. Másrészt ez a módszer könnyen általánosítható lenne (ázsiai) basket opciókra is, egyszerűen közelíthetnénk a lineáris kombinációban pozitív előjel-lel szereplő termékeket egy lognormálissal és a negatív előjellel szereplőket egy másik lognormálissal. Ezzel visszavezetnénk a feladatot egy egyszerű spread opció árazására. Érdekes kérdés lehet, hogy erre az általánosabb esetre alkalmazva az approximációkat, mennyit romlik a módszer pontossága. Végül pedig kereshetnénk olyan többparaméteres eloszlásokat is, amihez szintén tudjuk momentum-módszerrel illeszteni a kifizetésfüggvényben szereplő eloszlásunkat, de ezzel csak kisebb hibát vétünk.

Hivatkozásjegyzék

- Steven E. Shreve. *Stochastic calculus for finance 2, Continuous-time models*. Springer, 2004. ISBN 0387401016 9780387401010.
- John C. Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Prentice Hall, 6. ed., pearson internat. ed edition, 2006. ISBN 978-0-13-197705-1.
- Martin Baxter és Andrew Rennie. *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press, 1996. 10.1017/CBO9780511806636.
- William Margrabe. The value of an option to exchange one asset for another. *The Journal of Finance*, 33(1):177–186, 1978. ISSN 00221082, 15406261.
- Ewan Kirk. Correlation in the energy markets. managing energy price risk. *Risk*, pages 71–78, 1995.
- Mark Joshi és Chao Yang. Fast and accurate pricing and hedging of long-dated cms spread options. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(06): 839–865, 2010.
- Jente Van Belle, Steven Vanduffel, és Jing Yao. Closed-form approximations for spread options in lévy markets. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 35(3):732–746, 2019.
- Michael A. H. Dempster és George Hong. Spread option valuation and the fast fourier transform. In *Mathematical Finance—Bachelier Congress 2000: Selected Papers from the First World Congress of the Bachelier Finance Society, Paris, June 29–July 1, 2000*, pages 203–220. Springer, 2002.
- Alexis Leventis és Eben Maré. Efficient pricing of spread options with stochastic rates and stochastic volatility. *Journal of Risk and Financial Management*, 15 (11):504, 2022.
- Jinke Zhou és Xiaolu Wang. Accurate closed-form approximation for pricing asian and basket options. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 24(4): 343–358, 2008.
- René Carmona és Valdo Durrleman. Pricing and hedging spread options. *SIAM Review*, 45(4):627–685, 2003. ISSN 00361445.
- Edmond Levy. Pricing european average rate currency options. *Journal of International Money and Finance*, 11(5):474–491, 1992. ISSN 0261-5606.
- Min-Teh Yu. On moment-matching approximations for asian options. *Available at SSRN 1957456*, 2012.

- Kwangil Bae, Jangkoo Kang, és Hwa-Sung Kim. Pricing basket and asian options under the jump-diffusion process. *Journal of Futures Markets*, 31(9):830–854, 2011.
- Alexander Eydeland és Krzysztof Wolyniec. *Energy and power risk management: New developments in modeling, pricing, and hedging*, volume 97. John Wiley & Sons, 2002.
- A.G.Z. Kemna és A.C.F. Vorst. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking & Finance*, 14(1):113–129, 1990. ISSN 0378-4266.
- Michèle Vanmaele, Griselda Deelstra, Jan Liinev, Jan Dhaene, és Marc J Goovaerts. Bounds for the price of discrete arithmetic asian options. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185(1):51–90, 2006.
- François Dubois és Tony Lelièvre. Efficient pricing of asian options by the pde approach. *Available at SSRN 707582*, 2005.
- Jaehyuk Choi. Sum of all black–scholes–merton models: An efficient pricing method for spread, basket, and asian options. *Journal of Futures Markets*, 38(6):627–644, 2018.
- Andrea Roncoroni, Gianluca Fusai, és Mark Cummins. *Handbook of multi-commodity markets and products: Structuring, trading and risk management*. John Wiley & Sons, 2015.
- Svetlana Borovkova és Ferry J. Permana. Asian basket options and implied correlations in energy markets. *preprint*, 2010.
- Griselda Deelstra, Alexandre Petkovic, és Michele Vanmaele. Pricing and hedging asian basket spread options. *Journal of computational and applied mathematics*, 233(11):2814–2830, 2010.
- Giuseppe Castellacci és Michael Siclari. Asian basket spreads and other exotic averaging options. *Energy Power Risk Management*, 2003.

7. Függelék

Európai spread opció árazása Kirk-approximációval

```
def european_spread_kirk(S1, S2, K, r, sigma1, sigma2, rho, T, option_type):
    """ S1, S2 = spot prices; K = strike price; r = risk-free rate; sigma1, sigma2
        = volatilities; rho = correlation; T = time to maturity (in years);
        option_type = 'call' or 'put' """

    T_sqrt = math.sqrt(T)
    K_kirk = S2 + np.exp(-r*T)*K
    sigma_kirk = math.sqrt(sigma1**2 + (sigma2*S2/K_kirk)**2 -
        2*rho*sigma1*sigma2*S2/K_kirk)
    d1 = (np.log(S1/K_kirk) + (1/2)*sigma_kirk**2*T_sqrt) / (sigma_kirk * T_sqrt)
    d2 = d1 - sigma_kirk * T_sqrt

    if option_type == 'call':
        price = (S1*norm.cdf(d1) - K_kirk*norm.cdf(d2))
    elif option_type == 'put':
        price = (K_kirk*norm.cdf(-d2) - S1*norm.cdf(-d1))
    else:
        raise ValueError("Option type must be either 'call' or 'put'.")

    return price
```

Európai spread opció árazása Monte-Carlo módszerrel

```
def european_spread_mc(S1, S2, K, r, sigma1, sigma2, rho, T, n, M, option_type,
    interval = 0):
    """ S1, S2 = spot prices; K = strike price; r = risk-free rate; sigma1,
        sigma2 = volatilities; rho = correlation; T = tenure; n = number of
        steps; M = Monte-Carlo repetitions; option_type = 'call' or 'put';
        interval = 0 (return price only) or 1 (also return confidence interval) """

    dt = T/n
    ranvec1 = np.random.normal(0, 1, (M, n))
    ranvec2 = np.random.normal(0, 1, (M, n))
    S1_path1 = S1*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
        0.5*sigma1**2)*dt + sigma1*np.sqrt(dt)*(ranvec1)), axis=1)), axis=1)
    S1_path2 = S1*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
        0.5*sigma1**2)*dt + sigma1*np.sqrt(dt)*(-ranvec1)), axis=1)), axis=1)
    S2_path1 = S2*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
        0.5*sigma1**2)*dt + sigma2*np.sqrt(dt)*(rho*(ranvec1) + np.sqrt(1 -
        rho**2)*(ranvec2))), axis=1)), axis=1)
    S2_path2 = S2*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
        0.5*sigma1**2)*dt + sigma2*np.sqrt(dt)*(rho*(-ranvec1) + np.sqrt(1 -
        rho**2)*(-ranvec2))), axis=1)), axis=1)

    U11 = S1_path1[:, -1]
    U12 = S1_path2[:, -1]
    U21 = S2_path1[:, -1]
    U22 = S2_path2[:, -1]

    C = 0.5*np.exp(-r*T)*(np.maximum(U11 - U21 - K, 0) + np.maximum(U12 - U22 - K,
    0))
    P = 0.5*np.exp(-r*T)*(np.maximum(K - U11 + U21, 0) + np.maximum(K - U12 + U22,
    0))

    price_c = np.mean(C)
    price_p = np.mean(P)
```

```

std_err_c = np.std(C)/np.sqrt(M)
std_err_p = np.std(P)/np.sqrt(M)

conf_int_c = [price_c - 1.96*std_err_c, price_c + 1.96*std_err_c]
conf_int_p = [price_p - 1.96*std_err_p, price_p + 1.96*std_err_p]

if option_type == 'call':
    price = price_c
    conf_int = conf_int_c
elif option_type == 'put':
    price = price_p
    conf_int = conf_int_p
else:
    raise ValueError("Option type must be either 'call' or 'put'.")

if interval == 1:
    return [price] + conf_int
else:
    return price

```

Ázsiai opció árazása momentum-módszerrel

```

def arithmetic_asian_mm(S0, K, r, sigma, T, n, option_type):
    """ S0 = spot price; K = strike price; r = risk-free rate; sigma =
        volatility; T = tenure; n = number of steps; option_type = 'call' or
        'put' """

    M1 = S0/(n+1)*sum([np.exp(r*i/n) for i in range(n+1)])
    M2 = S0**2/(n+1)**2*sum([np.exp(r*(i+j)/n + (sigma**2)*min(i, j)/n) for i in
        range(n+1) for j in range(n+1)])

    param1 = 2*np.log(M1) - np.log(M2)/2
    param2 = math.sqrt(np.log(M2) - 2*np.log(M1))

    d1 = (np.log(1/K) + param1 + param2**2)/param2
    d2 = d1 - param2

    if option_type == 'call':
        price = np.exp(-r*T)*(np.exp(param1 + (param2**2)/2)*norm.cdf(d1) -
            K*norm.cdf(d2))
    elif option_type == 'put':
        price = np.exp(-r*T)*(K*norm.cdf(-d2) - (np.exp(param1 +
            (param2**2)/2))*norm.cdf(-d1))
    else:
        raise ValueError("Option type must be either 'call' or 'put'.")

    return price

```

Ázsiai opció árazása Monte-Carlo szimulációval

```

def arithmetic_asian_mc(S0, K, r, sigma, T, n, ti, M, option_type, interval = 0):
    """ S0 = spot price; K = strike price; r = risk-free rate; sigma =
        volatility; T = tenure; n = number of steps; ti = averaging dates (n+1
        length {0, 1} list); M = Monte-Carlo repetitions; option_type = 'call' or
        'put'; interval = 0 (return price only) or 1 (also return confidence
        interval) """

    dt = T/n
    ranvec = np.random.normal(0, 1, (M, n))

```

```

S_path1 = S0*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
    0.5*sigma**2)*dt + sigma*np.sqrt(dt)*(ranvec)), axis=1)), axis=1)
S_path2 = S0*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
    0.5*sigma**2)*dt + sigma*np.sqrt(dt)*(-ranvec)), axis=1)), axis=1)
U1 = np.average(S_path1, axis=1, weights=ti)
U2 = np.average(S_path2, axis=1, weights=ti)

C = 0.5*np.exp(-r*T)*(np.maximum(U1 - K, 0) + np.maximum(U2 - K, 0))
P = 0.5*np.exp(-r*T)*(np.maximum(K - U1, 0) + np.maximum(K - U2, 0))

price_c = np.mean(C)
price_p = np.mean(P)

std_err_c = np.std(C)/np.sqrt(M)
std_err_p = np.std(P)/np.sqrt(M)

conf_int_c = [price_c - 1.96*std_err_c, price_c + 1.96*std_err_c]
conf_int_p = [price_p - 1.96*std_err_p, price_p + 1.96*std_err_p]

if option_type == 'call':
    price = price_c
    conf_int = conf_int_c
elif option_type == 'put':
    price = price_p
    conf_int = conf_int_p
else:
    raise ValueError("Option type must be either 'call' or 'put'.")

if interval == 1:
    return [price] + conf_int
else:
    return price

```

Ázsiai spread opció árazása fancy módszerrel

```

def spread_asian_dates_mm(S1, S2, K, r, sigma1, sigma2, rho, T, n, ti1, ti2):
    """ S1, S2 = spot prices; K = strike price; r = risk-free rate; sigma1,
        sigma2 = volatilities; rho = correlation; T = tenure; n = number of
        steps; ti1, ti2 = averaging dates (n+1 length {0, 1} lists) """

    avg_dates1 = [a*b for a, b in zip(ti1, range(n+1))]
    avg_dates2 = [a*b for a, b in zip(ti2, range(n+1))]
    l1 = sum(ti1)
    l2 = sum(ti2)

    M1_S1 = S1/(l1)*sum([np.exp(r*i/100) if i>0 else 0 for i in avg_dates1])
    M2_S1 = S1**2/(l1)**2*sum([np.exp(r*(i+j)/100 + (sigma1**2)*min(i, j)/100) if
        i*j>0 else 0 for i in avg_dates1 for j in avg_dates1])
    M1_S2 = S2/(l2)*sum([np.exp(r*i/100) if i>0 else 0 for i in avg_dates2])
    M2_S2 = S2**2/(l2)**2*sum([np.exp(r*(i+j)/100 + (sigma2**2)*min(i, j)/100) if
        i*j>0 else 0 for i in avg_dates2 for j in avg_dates2])

    param1_S1 = 2*np.log(M1_S1) - np.log(M2_S1)/2
    param2_S1 = math.sqrt(np.log(M2_S1) - 2*np.log(M1_S1))

    param1_S2 = 2*np.log(M1_S2) - np.log(M2_S2)/2
    param2_S2 = math.sqrt(np.log(M2_S2) - 2*np.log(M1_S2))

    crm_old = S1*S2/(l1*l2)*sum([np.exp(r*(i+j)/n + (sigma1*sigma2*rho)*min(i,
        j)/n) if i*j>0 else 0 for i in avg_dates1 for j in avg_dates2])

```

```

rho_approx = (np.log(crm_old) - (param1.S1 + param1.S2 + (1/2)*param2.S1**2 +
(1/2)*param2.S2**2))/(param2.S1*param2.S2)

S1_approx = np.exp(param1.S1 + (param2.S1**2)/2)
S2_approx = np.exp(param1.S2 + (param2.S2**2)/2)

price = european_spread_kirk(S1_approx*np.exp(-r*T), S2_approx*np.exp(-r*T),
K, r, param2.S1, param2.S2, rho_approx, 1, 'call')

return price

```

Ázsiai spread opció árazása Monte-Carlo módszerrel

```

def spread_asian_mc(S1_0, S2_0, K, r, sigma1, sigma2, rho, T, n, ti1, ti2, M,
option_type, interval = 0):
    """ S1_0, S2_0 = spot prices; K = strike price; r = risk-free rate; sigma1,
sigma2 = volatilities; rho = correlation; T = tenure; n = number of
steps; ti1, ti2 = averaging dates (n+1 length {0, 1} lists); M =
Monte-Carlo repetitions; option_type = 'call' or 'put'; interval = 0
(return price only) or 1 (also return confidence interval) """

    dt = T/n
    ranvec1 = np.random.normal(0, 1, (M, n))
    ranvec2 = np.random.normal(0, 1, (M, n))
    S1_path1 = S1_0*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
0.5*sigma1**2)*dt + sigma1*np.sqrt(dt)*(ranvec1)), axis=1)), axis=1)
    S1_path2 = S1_0*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
0.5*sigma1**2)*dt + sigma1*np.sqrt(dt)*(-ranvec1)), axis=1)), axis=1)
    S2_path1 = S2_0*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
0.5*sigma1**2)*dt + sigma2*np.sqrt(dt)*(rho*(ranvec1) + np.sqrt(1 -
rho**2)*(ranvec2))), axis=1)), axis=1)
    S2_path2 = S2_0*np.concatenate((np.ones((M, 1)), np.cumprod(np.exp((r -
0.5*sigma1**2)*dt + sigma2*np.sqrt(dt)*(rho*(-ranvec1) + np.sqrt(1 -
rho**2)*(-ranvec2))), axis=1)), axis=1)
    U11 = np.average(S1_path1, axis=1, weights=ti1)
    U12 = np.average(S1_path2, axis=1, weights=ti1)
    U21 = np.average(S2_path1, axis=1, weights=ti2)
    U22 = np.average(S2_path2, axis=1, weights=ti2)

    C = 0.5*np.exp(-r*T)*(np.maximum(U11 - U21 - K, 0) + np.maximum(U12 - U22 - K,
0))
    P = 0.5*np.exp(-r*T)*(np.maximum(K - U11 + U21, 0) + np.maximum(K - U12 + U22,
0))

    price_c = np.mean(C)
    price_p = np.mean(P)

    std_err_c = np.std(C)/np.sqrt(M)
    std_err_p = np.std(P)/np.sqrt(M)

    conf_int_c = [price_c - 1.96*std_err_c, price_c + 1.96*std_err_c]
    conf_int_p = [price_p - 1.96*std_err_p, price_p + 1.96*std_err_p]

    if option_type == 'call':
        price = price_c
        conf_int = conf_int_c
    elif option_type == 'put':
        price = price_p
        conf_int = conf_int_p
    else:
        raise ValueError("Option type must be either 'call' or 'put'.")

```



```
if interval == 1:  
    return [price] + conf.int  
else:  
    return price
```

NYILATKOZAT

Név: Gyórfy Ágoston

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

PGRVWP-azonosító: GKWP74

Szakedolgozat címe:

Ázsiai spread opciók árazása

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.01.


a hallgató aláírása