NYILATKOZAT

Név: Sándor Zsombor

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: HR4SUG

Szakdolgozat címe:
Blokkrendszerek, fedések létezési tételei és feltételei

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.06.

Sándor Zsombor

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Sándor Zsombor

Matematika BSc
Alalmazott matematikus szakirány

Blokkrendszerek, fedések létezési tételei és feltételei

Szakdolgozat

Témavezető:

Nagy Zoltán Lóránt
ELTE Számítógéptudományi tanszék

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Feladat: Képzeljük el, hogy egy 1 hetes táborban vagyunk 14 ismerősünkkel. A táborhelységet minden nap busszal hagyjuk el, méghozzá olyannal, melynek szokatlan kialakítása a következő: az ülések 5 sorban helyezkednek el, soronként 3 üléssel. Mivel így 15-en kiegyensúlyozott baráti társaságot alkotunk — azaz mindenki mindenkivel ugyanannyira van jóban —, a buszon olyan ülésrendet szeretnénk kialakítani a hét minden napjára, mellyel akármelyikünk pontosan egyszer ül egy sorban bárki mással (mutatva, hogy két ember nem preferálja jobban egymás társaságát másénál). Hogyan szervezzük meg a heti buszutainkat?

A kérdés szerint tehát ülésrendet keresünk 15 emberre és 7 napra, hogy bármely két ember mindössze 1 nap ül azonos sorban. Következik, hogy bármely két emberre pontosan egy (nap, sor) párt találunk az ülésrendben, hogy mindketten ekkor ülnek itt.

Most mi lenne, ha 15 fős társaság helyett v fős társaságban keresnénk választ ugyanerre a kérdésre? Vagy a buszunk nem 3 székes sorokból állna hanem k székesekből? Akár azt is megmondhatjuk, két ember ne pontosan egyszer, hanem λ-szor üljön egymás mellett. Ilyen kérdések mentén absztrahálva jutunk el a szakdolgozat központi témájához: a blokkrendszerekhez.

A blokkrendszerek olyan struktúrák, melyeknek van egy v méretű alaphalmaza, ezek a „pontok" (a példán az emberek). A blokkrendszer „blokkjai" ponthalmazok (a példán a busz sorai adott napon), melyek mérete egyenként k. Végül a struktúrát azzal a regularitási tulajdonsággal ruházzuk fel, hogy bármely t pontra pontosan λ olyan blokk van, mely a t pont mindegyikét tartalmazza (tehát pl. hogy bármely ketten csak egyszer ülünk közös sorban).

Megjegyzés: A motiváló példa azon tulajdonságát, hogy „napokra" lehet osztani a rendszert, látszólag nem tartalmazza ezen definíció. Valóban, ezt nem is követeljük meg általánosan.

A jelen dolgozat első fele ezen fogalommal, illetve a hozzá kapcsolódó korai eredményekkel foglalkozik. Az első fejezetben formálisan definiáljuk a blokkrendszereket, majd megnézünk néhány jellemzőt, melyek ezen definícióból egyszerűen következnek. Különösen jelentős lesz egy leszámlálásból adódó oszthatósági tulajdonság. Ezt követően elkezdjük fordított sorrendben végigjárni a motiváló feladat absztrakciójának lépéseit: egyre több paramétert rögzítünk, ezzel lehetővé téve erősebb tételek felírását. A 2-rendszerek vizsgálatával kezdünk; a második fejezet ezt tárgyalja.

Az első két fejezetben blokkrendszerekre csak kisebb példákat, létezésükre csak szükséges feltételeket mutatunk, azaz mindössze kizárni tudtunk létezést véges sok példán kívül. Értelmes-e tehát egyáltalán blokkrendszerekkel általánosan foglalkozni; előfordulhat, hogy csak ezek a kis példák léteznek? A harmadik fejezetben végre igazoljuk, hogy a törekvések nem hiábavalók ilyen tekintetben. Ugyanis a paraméterezések körének további szűkítésével eljutunk a véges geometriák és a Steiner-rendszerek fogalmához. Ezek segítségével már nem csak „vakon tapogatózunk” a lehetséges paraméterezések között, hanem végtelen sok egzakt konstrukciót mutathatunk majd.

Megjegyzés: A Steiner-rendszerek témaköre a motiváló feladat „otthona”, így arra még visszatérünk a 3.2 szakaszban.

A dolgozat második felében áttérünk egy alternatív szemléletmódra: a blokkrendszereket hipergráfok segítségével értelmezzük. Ez nem idegen megközelítés; a halmazrendszerek és hipergráfok fogalma igen közeli rokona egymásnak. A szemléletmódbeli váltással külön fejezetben foglalkozunk. Fontos szerepet kapnak a pakolás, felbontás és fedés fogalmak.

A negyedik fejezetben egy pillanatra eltávolodunk a blokkrendszerek tárgyalásától. Az Erdős-Hanani sejtésen keresztül bemutatjuk a hipergráfok fedési és pakolási prolémáinak megoldására szolgáló egyik legerősebb eszközt: a Rödl-nibble-t. Ez azon túl, hogy rendkívül hasznos és fontos tétel, előrevetíti a dolgozat során innentől meghatározó valószínűségi érvelési technikát.

Az utolsó fejezetben rátérünk egy aktuális eredmény tárgyalására. Bár a harmadik fejezetben végtelen sok példát mutattunk blokkrendszerekre, ezek igen specifikus paraméterekkel rendelkeznek, így ez az eredmény hagy némi hiányérzetet. Ugyanakkor Peter Keevash 2014-ben bizonyította a blokkrendszerek elméletének talán legfontosabb sejtését; ez a következőt mondja ki: vegyünk tetszőleges t, k, λ paramétereket. Ekkor ha v elég nagy, akkor az első fejezetben bemutatott oszthatósági feltétel elégséges megfelelő paraméterekkel rendelkező rendszer létezésére. Másképp fogalmazva, a szükséges oszthatósági feltétel véges sok v kivételével elégséges.

A dolgozatban elsődlegesen nem Keevash bizonyítását mutatjuk be, hanem a Stefan Glock, Daniella Kühn, Allan Lo és Deryk Osthus által alkalmazott módszereket. Az fejezet végén mindenesetre említés szintjén Keevash stratégiájára, majd Greg Kuperberg, Shachar Lovett és Ron Peled egy hasonló eredményére is kitérünk.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, hogy elvállalt, mint szakdolgozót, felvetette az időszerű témát, illetve hogy javaslataival, észrevételeivel végig támogatta a diplomamunka elkészülését.

1. fejezet

Blokkrendszerek

Ezen fejezet fő célja tehát, hogy bevezessük és felszínesen körüljárjuk a blokkrendszerek fogalmát. Ehhez először az illeszkedési struktúrát fogjuk általánosan definiálni, majd ezt kötjük meg különböző regularitási feltételekkel.

A témakör feldolgozásának alapjául elsődlegesen a *Szimmetrikus struktúrák* [21] jegyzet 1., 3. és 5. fejezete, illetve a *Designs, Graphs, Codes and their Links* [5] könyv 1. fejezete szolgált. A fejezet kisebb részben szintén merít a *Handbook of Combinatorial Designs* [7] és *A Course in Combinatorics* [17] könyvekből.

Megjegyzés: Terminológiában eltérünk a *Szimmetrikus struktúrák* jegyzettől. Amit mi blokkrendszernek fogunk nevezni, az ott a 2-rendszert jelenti, míg az itt blokkrendszernek nevezett struktúra ott kizárólag t-rendszerként szerepel.

1.1. Definíciók

Mint ahogy a bevezetésben illusztráltuk, első dolgunk a blokkrendszerek fogalmának bevezetése. Ebben nyújt segítséget az illeszkedési struktúrák definiálása általánosan.

1.1.1. Definíció: Legyenek $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ diszjunkt halmazok, és legyen $I \subset \mathbf{P} \times \mathbf{B}$. Ekkor a $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ hármast illeszkedési struktúrának nevezzük, továbbá

- $\mathbf{P}$ elemeit pontoknak hívjuk
- $\mathbf{B}$ elemeit blokkoknak hívjuk
- I a pontok és blokkok közötti illeszkedési reláció, elemei a zászlók

Az elnevezések geometriai motivációjúak. Ez nem véletlen, hiszen a geometriai terek az egyik legegyszerűbb, és talán legkorábbi példái illeszkedési struktúrának. Valóban, legyen **P** a geometriai tér pontjainak, **B** pedig egyeneseinek halmaza. Továbbá legyen I az $\in$ reláció, azaz egy p pont akkor illeszkedik az e egyenesre, ha $p \in e$. Ekkor $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \in)$ valóban illeszkedési struktúrát definiál.

Geometriai terekben megszokhattunk egy olyan alapvető tulajdonságot, hogy egy egyenest azonosíthatunk a rá illeszkedő pontok halmazával. Ugyanakkor az 1.1.1 definíció megengedi, hogy két blokk (azaz „egyenes") pontosan ugyanazon pontokra illeszkedjen. Ezt az „elfajult" esetet célszerű elkülöníteni.

1.1.2. Definíció: Egy illeszkedési struktúrát egyszerűnek hívunk, ha nincsenek benne ismétlődő blokkok.

Precízebben, ha $\nexists B_1, B_2 \in \mathbf{B}$, melyre

$$(p, B_1) \in I \iff (p, B_2) \in I$$

Így tehát amennyiben egyszerű illeszkedési struktúrával dolgozunk, a blokkokat azonosíthatjuk a rájuk illeszkedő pontok halmazával. Ilyen esetekben ezért sokszor következetesebb $p \in B$ jelölés használata (a $(p, B) \in I$ helyett), mint ahogy az a geometriai motivációban is megjelenik.

Most adott illeszkedési struktúrához vegyük fel a $\mathbf{P} - \mathbf{B}$ páros segédgráfot, melyben pB él pontosan akkor létezik, ha $(p, B) \in I$. Ekkor adott csúcs foka pontosan a rá illeszkedő objektumok száma lesz. Ez motiválja a következő elnevezéseket és jelöléseket.

1.1.3. Definíció:

- Adott $p \in \mathbf{P}$ pontra p foka: $\deg(p) = |\{B \in \mathbf{B} \mid (p, B) \in I\}|$
- Adott $B \in \mathbf{B}$ blokkra B foka: $\deg(B) = |\{p \in \mathbf{P} \mid (p, B) \in I\}|$

Alapvető illeszkedési állítások bizonyításában nagy szerepet fog játszani a „kétszeres leszámlálás" módszere, azaz hogy kétféle objektumokból alkotott párokat számolunk először az egyik, majd a másik típus elemein iterálva. A módszert a következő állítás jól illusztrálja.

1.1.4. Állítás. *Tetszőleges $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúrára*

$$\sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p) = \sum_{B \in \mathbf{B}} \deg(B)$$

Bizonyítás. Számoljuk össze a zászlókat először a pontok, majd a blokkok mentén. $\square$

Az illeszkedési struktúrákról ilyen általánosságban nehezen tudunk megfogalmazni állításokat. Célszerű tehát bevezetni néhány regularitási tulajdonságot. A fogalmazás egyszerűsége kedvéért azt mondjuk, hogy egy $H \subset \mathbf{P}$ ponthalmaz és B blokk illeszkedik egymásra, ha H minden pontja illeszkedik B-re. Továbbá ha egy H halmaz mérete ℓ, akkor ℓ-halmaznak, amennyiben $H \subseteq \mathbf{P}$, ℓ-ponthalmaznak hívjuk.

1.1.5. Definíció: A $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúrát t-(v, k, λ)-struktúrának nevezzük, ha $|\mathbf{P}| = v$, minden $B \in \mathbf{B}$ blokkra $\deg(B) = k$, és tetszőleges t-ponthalmazra pontosan λ blokk illeszkedik.

Megjegyzés: Ha a paraméterezés nem ismert vagy nem lényeges, sokszor csak t-struktúrát vagy blokkstruktúrát mondunk. Továbbá a szakdolgozat során végig feltesszük, hogy $2 \leq t < k < v$ egészek.

1.1.6. Példa: Legyen $t = 2$, $k = 3$, $v > 3$, $\mathbf{P}$ v-halmaz, és tekintsük a teljes gráfot $\mathbf{P}$-n (azaz $K_{\mathbf{P}} = K_v$-t). Legyen $\mathbf{B} := \binom{\mathbf{P}}{3}$, azaz a „háromszögek" halmaza. Végül válasszuk az illeszkedési relációt $\in$-nek, azaz egy háromszögre pontosan a csúcsai illeszkednek.

Most $t = 2$, és egy teljes gráf 2-csúcshalmazai megfeleltethetők az éleknek, így jelen esetben a t-ponthalmazokra vonatkozó illeszkedési tulajdonság ellenőrzése során azzal foglalkozunk, hogy K_v éleire hány háromszög illeszkedik. Számoljuk tehát ezt meg: adott él két csúcsot határoz meg, a háromszög harmadik csúcsát pedig tetszőlegesen választhatjuk a kimaradók közül; ez $v-2$ lehetőség. Következésképp ekkor egy 2-$(v, 3, (v-2))$-struktúrát kaptunk.

Általánosabban, legyen $2 \leq t < k < v \in \mathbb{N}$ tetszőleges, $|\mathbf{P}| = v$, és $\mathbf{B} := \binom{\mathbf{P}}{k}$. Végül legyen I ismét az $\in$ reláció. Ekkor bármely t-ponthalmazt a maradék $v - t$ pontból választva kiegészíthetünk k méretűvé, így $\left(\mathbf{P}, \binom{\mathbf{P}}{k}, \in\right)$ egy t-$\left(v, k, \binom{v-t}{k-t}\right)$-struktúra.

Az előbbi példát szokás triviális struktúrának is nevezni, ugyanis blokkhalmaza az alaphalmaz összes k-részhalmazából áll. Innentől kezdve célunk az lesz, hogy nemtriviális struktúrákat találjunk.

Most bevezetjük illeszkedési és szomszédsági mátrixok fogalmát. Ez későbbi bizonyítások során erős lineáris algebrai eszközök használatát teszi lehetővé.

1.1.7. Definíció: Az M mátrixot adott blokkstruktúra illeszkedési (incidencia) mátrixának nevezzük, ha M sorait a pontok, oszlopait a blokkok indexelik, továbbá adott $p \in \mathbf{P}, B \in \mathbf{B}$-re $m_{p,B} = 1$ pontosan akkor, ha p illeszkedik B-re, egyébként 0.

1.1.8. Definíció: Az A mátrixot adott blokkstruktúra szomszédsági (adjacencia) mátrixának nevezzük, ha A sorait és oszlopait a pontok indexelik, továbbá adott $p, q \in \mathbf{P}$-re $a_{p,q}$ pontosan a $\{p, q\}$-ra illeszkedő blokkok száma.

1.1.9. Állítás. $A = MM^T$.

Bizonyítás. Adott $p, q \in \mathbf{P}$-re $m_{p,B} = m_{q,B} = 1$ pontosan akkor, ha B illeszkedik p-re és q-ra (azaz $\{p, q\}$-ra) is. Így tehát az $M_{p,\cdot}$ és $M_{q,\cdot}$ sorok skaláris szorzata pontosan az ilyen blokkok száma. □

Az illeszkedési struktúrákhoz hasonlóan most is megkülönböztetjük az ismétlődő blokkokkal nem rendelkező esetet: ha egy t-(v, k, λ)-struktúra egyszerű, akkor t-(v, k, λ)-rendszernek nevezzük. A megkülönböztetés nem hiábavaló, ahogy ezt például a következő konstrukció is mutatja [5, 1.2 áll.].

1.1.10. Tétel. *Adott $t < k < v - t$ paraméterekre létezik λ, melyre van olyan t-(v, k, λ)-struktúra, hogy nem minden k-ponthalmaz alkot blokkot.*

Bizonyítás. Vegyünk fel egy D $\binom{v}{k} \times \binom{v}{t}$-es mátrixot, melynek sorait adott $\mathbf{P}$ k-részhalmazai, oszlopait t-részhalmazai indexelik ($|\mathbf{P}| = v$). Továbbá adott K k-halmazra és T t-halmazra legyen $d_{K,T} = 1$ pontosan akkor, ha $T \subset K$, egyébként 0.

A paraméterekre vonatkozó feltételezés miatt $\binom{v}{t} < \binom{v}{k}$, így D sorai lineárisan összefüggők kell, hogy legyenek. Mivel D elemei egészek, ez azt jelenti, hogy $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{Q}^{\binom{v}{k}}$ nem $\mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{v}D = \mathbf{0}$. Továbbá $\mathbf{v}$ tetszőleges skalárral szorozva is teljesíti ugyanezt a tulajdonságot, így feltehető, hogy $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^{\binom{v}{k}}$.

Legyen $(-\mu)$ $\mathbf{v}$ legkisebb értékű koordinátájának értéke. Ekkor $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mu\mathbf{1}$ egy nemnegatív egész vektor, melynek legalább egyik koordinátáján 0 áll. Emellett

$$\mathbf{w}D = (\mathbf{v} + \mu\mathbf{1})D \overset{\mathbf{v}D=0}{=\!=\!=} \mu\mathbf{1}D = \mu\binom{v-t}{k-t}\mathbf{1}$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy olyan illeszkedési struktúrát hozunk létre $\mathbf{P}$-n, melyben a blokkok $\mathbf{P}$ k-részhalmazai, és K k-halmaz $\mathbf{B}$-ben vett multiplicitását $\mathbf{w}_K$ mutatja, akkor

- lesz legalább egy k-halmaz, mely egyszer sem blokk ($\mathbf{w}$ 0 koordinátája miatt)
- bármely t-halmaz pontosan $\lambda = \mu\binom{v-t}{k-t}$ blokkra illeszkedik.

Ekkor tehát megkonstruáltuk a kívánt struktúrát. □

A tétel mutatja, hogy ha megengedünk ismétlődő blokkokat, akkor a nemtriviális t-(v, k, λ)-struktúrák létezési kérdései jelentősen leegyszerűsödnek. Mostantól ezért elsődlegesen a nemtriviális t-(v, k, λ)-rendszerek létezésének problémájával foglalkozunk.

Megjegyzés: t-(v, k, λ)-rendszerek esetén is alkalmazzuk a t-rendszer vagy blokkrendszer elnevezést a blokkstruktúrákhoz hasonlóan.

1.2. Alapvető tulajdonságok

A t-(v, k, λ)-struktúrák regularitási tulajdonságai igen erősek, így különféle összefüggések levezetésére adnak lehetőséget. A bizonyítások fő eszköze a korábban bemutatott kétszeres leszámlálás. Az egyszerűség kedvéért a blokkhalmaz számosságát b-vel jelöljük.

1.2.1. Tétel. *Adott t-(v, k, λ)-struktúrában a blokkok száma*

$$b = \frac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$$

Bizonyítás. Számoljuk meg a (T, B) párokat, ahol $B \in \mathbf{B}$, T t-ponthalmaz, és B illeszkedik T-re. Egyfelől tetszőleges T-re λ ilyen blokkot találunk, másfelől tetszőleges blokkhoz $\binom{k}{t}$ megfelelő T halmaz választható. Következik tehát, hogy $\lambda\binom{v}{t} = b\binom{k}{t}$. □

Megjegyzés: A tételre alternatív bizonyítást tudunk adni 1.1.4 segítségével. Ugyanis tekinthetjük azt az illeszkedési struktúrát is, melynek „pontjai" a t-ponthalmazok, blokkhalmaza változatlan, az illeszkedési reláció pedig a tartalmazás: $\left(\binom{\mathbf{P}}{t}, \mathbf{B}, \subseteq\right)$.

Ebben az illeszkedési struktúrában bármely T t-ponthalmazra $\deg(T) = \lambda$. Továbbá bármely B blokkra $\deg(B) = \binom{k}{t}$. Végül $\left|\binom{\mathbf{P}}{t}\right| = \binom{v}{t}$. Így a tétel valóban következik egyszerű átrendezéssel.

Ez az összefüggés általánosítható olyan tekintetben, ha azon blokkok számát keressük, amelyek illeszkednek egy rögzített csúcshalmazra. Innentől a $\{1, \ldots, n\}$ halmazra az $[n]$, a $\{0, \ldots, n\}$ halmazra az $[n]_0$ jelölést alkalmazzuk.

1.2.2. Tétel. *Legyen H tetszőleges i-ponthalmaz ($i \in [t]_0$). Ekkor a H-ra illeszkedő blokkok száma*

$$\lambda_i = \frac{\lambda\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}}$$

Megjegyzés: Tekintve, hogy λ_i definíció szerint egész, a tétel egy egyszerű következménye, hogy $\forall i \in [t]_0 : \binom{k-i}{t-i} \Big| \lambda\binom{v-i}{t-i}$
Erre a tulajdonságra később úgy fogunk hivatkozni, mint (szükséges) oszthatósági feltétel(ek).

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan illeszkedő (T, B) párokat számolunk. Azonban további megkötés, hogy az adott I i-halmazra $I \subset T$, továbbá B illeszkedik I-re. Így a kétszeres leszámlálás során minden alkalommal i-vel kevesebb pont közül választhatunk. □

1.2.3. Következmény. *Tetszőleges $p \in \mathbf{P}$ pontra a rá illeszkedő blokkok száma $\lambda_1 = \frac{\lambda\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}}$. Ezt az értéket innentől r-rel jelöljük (replikációs szám).* □

1.2.4. Következmény. *Adott* t*-*(v, k, λ)*-struktúra egy* i*-*(v, k, λ_i) *struktúra is minden* $0 \leq i \leq t$*-re.* □

A két következmény szerint tetszőleges t-(v, k, λ)-struktúra 1-(v, k, r)-struktúra is. Erre alkalmazva a 1.2.1-et, a következő összefüggéshez jutunk.

1.2.5. Állítás. t*-*(v, k, λ)*-struktúrára* $bk = vr$. □

Végül 1.2.4 segítségével az szomszédsági mátrix szerkezetét is meghatározhatjuk.

1.2.6. Állítás. $A = \lambda_2 J + (r - \lambda_2)I$*, ahol* I *a* $v \times v$*-s egység-,* J *a csupa* 1 *mátrix.*

Bizonyítás. A egy t-(v, k, λ)-struktúra illeszkedési mátrixa. Ugyanakkor ez egy 2-(v, k, λ_2)-struktúra is, ami pontosan azt mutatja, hogy bármely $p, q \in \mathbf{P}$, $p \neq q$-ra pontosan λ_2 blokk illeszkedik, azaz $a_{p,q} = \lambda_2$. Továbbá a főátlóban végig r kell, hogy álljon. □

2. fejezet

2-(v, k, λ)-rendszerek

A 20. század eleje során különös jelentőséget tulajdonítottak a 2-(v, k, λ)-rendszerek vizsgálatának. Ez az érdeklődés ekkor még nem a kombinatorikának tulajdonítható; elsődlegesen statisztikai kísérletek szervezésének eszközeként volt rájuk szükség. Tekintsük például a következő problémát.

Feladat: Néhány gabonafaj hozamát szeretnénk összehasonlítani. Mivel a hozamot különböző természeti hatások — mint pl. talajminőség, esőzések, átlagos napsütéses órák száma — erősen befolyásolhatják, lefoglalunk b telket különböző éghajlatokon, melyeken kísérletet szeretnénk folytatni. Feltesszük, hogy adott telken bármely gabonafajt azonos környezeti hatások érik.

Megtehetnénk, hogy minden éghajlaton minden fajból termeszünk, azonban ez hatalmas területeket kívánna, és ez által a kísérlet túl költségessé válna. Így megelégszünk azzal, ha bármely telken azonos valószínűséggel tudjuk összehasonlítani két tetszőleges faj hozamát. Hogyan ültessük el a gabonákat a különböző telkeken?

Látszik, hogy megoldásul szolgál, ha egy 2-rendszernek megfelelően választjuk meg a fajok és telkek beosztását. Ekkor a pontok a különböző gabonáknak, a blokkok a telkeknek, az illeszkedés pedig az adott telekre való ültetésnek felel meg. Nyilván a kísérlet eredményének pontossága függ a λ és k paraméterektől; a kimenetel statisztikai elemzésekor ezeket is számításba kell venni. (Intuitív, hogy minél több éghajlaton találunk meg egyszerre két fajt, annál pontosabban tudjuk összehasonlítani a viselkedésüket.)

A 2-rendszereket statisztikában szokás kiegyensúlyozott hiányos blokkrendszernek, azaz BIBD-nek (Balanced Incomplete Block Design) is nevezni. A feladat erre az elnevezésre is magyarázatot ad: a kiegyensúlyozottság az azonos valószínűséggel történő előfordulásra utal, a hiányosság pedig arra, hogy adott telekre nem ültetünk minden fajból.

Most tehát rátérünk a 2-(v,k,λ)-rendszerek vizsgálatára. Ezekre elterjedt jelölés (v,k,λ)-rendszer is; innentől a szakdolgozat során is ezt alkalmazzuk. A fejezet feldolgozásának alapját a *Szimmetrikus struktúrák* jegyzet 4. és 6. fejezete, illetve a *Combinatorial Mathematics* [20] könyv 8. fejezete képzi.

2.1. A Fisher-egyenlőtlenség

Természetesen a t-struktúrákra és rendszerekre adott tételek ugyanúgy érvényesek jelen esetben is. Például a 1.2.2 tételből (illetve annak megjegyzéséből) kiolvashatjuk a következőt:

2.1.1. Következmény. *Egy (v,k,λ) struktúra létezéséhez szükségesek a következő oszthatósági feltételek*

i) $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$

ii) $\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$

Most áttérünk egy a paraméterekre vett egyenlőtlenség bizonyítására; ez Fisher nevéhez köthető. A tétel azt az észrevételt formalizálja, hogy ha „valódi” blokkokkal rendelkező 2-rendszert akarunk készíteni (azaz blokkok nem a teljes csúcshalmazból állnak, vagyis $k \neq v$), akkor az illeszkedési tulajdonságok szimmetriája miatt nem tudunk nagyon kevés blokkot használni.

2.1.2. Tétel (Fisher). *Adott (v,k,λ)-rendszerre ha $k < v$, akkor $b \geq v$.*

A bizonyítás során a rendszer szomszédsági mátrixával dolgozunk. 1.2.6 alapján ez $\lambda_2 J + (r-\lambda_2)I$ alakú. Ugyanakkor jelen esetben $t = 2$, azaz $\lambda_2 \equiv \lambda$. Következésképp $A = \lambda J + (r-\lambda)I$. A determinánsát könnyen ki tudjuk számolni a következő lemma segítségével.

2.1.3. Lemma. *$n \times n$-es I, J mátrixokra* $\det(xI + yJ) = (x+yn)x^{n-1}$.

Bizonyítás. Az $D = xI + yJ$ mátrix szimmetrikus, így $\mathbb{R}^n$-nek létezik D sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa, azaz ekkor a keresett determináns a sajátértékek szorzata. Mivel $D\mathbf{1} = x+ny$, $\mathbf{1}$ sajátvektor $x+ny$ sajátértékkel.

A többi keresett sajátvektor az ortonormáltság miatt merőleges $\mathbf{1}$-re, következésképp eleget tesz $J\mathbf{v} = 0$-nak is. Ugyanakkor ebből $D\mathbf{v} = x\mathbf{v}$ adódik, ami azt jelenti, hogy x sajátérték $n-1$-szeres multiplicitással. Ezzel a lemmát beláttuk. □

A lemma segítségével már nekiállhatunk a Fisher-egyenlőtlenség bizonyításának. Elsődlegesen Bose érvelését követjük [4].

A Fisher-egyenlőtlenség bizonyítása. Tegyük fel, hogy $b < v$, és legyen M a blokkrendszer illeszkedési mátrixa. Legyen $\tilde{M}$ egy olyan $v \times v$ mátrix, hogy $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}\ \forall i \in [v], j \in [b]$, mindenhol máshol pedig $\tilde{m}_{ij} = 0$. Így M-et négyzetté bővítettük **0** oszlopok hozzáadásával úgy, hogy $\tilde{M}\tilde{M}^T = MM^T$. Ekkor tehát

$$(r - \lambda)I + \lambda J = A = MM^T = \tilde{M}\tilde{M}^T$$

Most számoljuk ki A determinánsát. A speciális alakjának köszönhetően

$$\det(A) \overset{2.1.3}{=\!=} (r - \lambda + v\lambda) \cdot (r - \lambda)^{v-1} \neq 0 \tag{2.1.4}$$

Másfelől, mivel $\tilde{M}$-nek van **0** oszlopa, $\det \tilde{M} = 0$, így a determinánsok szorzástételének következtében

$$\det(A) = \det(\tilde{M}\tilde{M}^T) = \det(\tilde{M}) \cdot \det(\tilde{M}^T) = 0 \quad \lightning$$ □

2.2. Négyzetes blokkrendszerek

A Fisher-egyenlőtlenséggel egyfajta alsó korlátot tudtunk adni a ponthalmaz méretére „valós” blokkokkal rendelkező 2-rendszerekben. Ugyanakkor többet is mondhatunk abban az esetben, amikor a paraméterezés eléri a korlátot.

2.2.1. Tétel. *Adott egy (v, k, λ)-rendszer, melyre $k < v$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

i) $b = v$

ii) $r = k$

iii) $\forall\ B_1, B_2 \in \mathbf{B}\,(B_1 \neq B_2) : |B_1 \cap B_2| = \lambda$

iv) $\forall\ B_1, B_2 \in \mathbf{B}\,(B_1 \neq B_2) : |B_1 \cap B_2| = C$ konst.

Bizonyítás. 1.2.5 következményeként adódik $(i) \Leftrightarrow (ii)$, és nyilván $(iii) \Rightarrow (iv)$. Továbbá $(i) \wedge (ii) \Rightarrow (iii)$. Ugyanis tekintsük a blokkrendszer M illeszkedési mátrixát; ez (i) miatt négyzetes. Emellett $JM = kJ \overset{(ii)}{=\!=} rJ = MJ$, és nyilván $MI = IM$, így M és A felcserélhető a szorzásra nézve.

2.1.4 alapján $\det A \neq 0$, és $A = MM^T$, ezért $\det M \neq 0$. Következésképp M^{-1} létezik, így

$$MA = AM = MM^TM \quad \xRightarrow{M^{-1}\cdot} \quad A = M^TM = M^T(M^T)^T$$

Ugyanakkor $M^T(M^T)^T$ a „blokkokra nézett szomszédsági mátrix”, azaz a (B, B') koordináta pontosan azt mutatja meg, hogy B és B' hány közös ponttal rendelkezik. Így tehát $B \neq B'$ esetén $|B \cap B'| = \lambda$.

Végül megmutatjuk, hogy $(iv) \Rightarrow (i)$. A Fisher-egyenlőtlenséget alkalmazva $b \geq v$ következik. Most tekintsük a $(\mathbf{B}, \mathbf{P}, I^T)$ illeszkedési struktúrát, ahol $I^T \subseteq \mathbf{B} \times \mathbf{P}$ az a halmaz, melyre $(p, B) \in I \Leftrightarrow (B, p) \in I^T$. Ekkor egy (b, r, C)-rendszert kapunk. 1.2.5 és $k < v$ alapján $r < b$, így ismét alkalmazhatjuk a Fisher-egyenlőtlenséget, azaz $b \leq v$. Következik, hogy $b = v$. □

Megjegyzés: A tételben megjelenő $M^T M$ adjacenciamátrixszal definiált 2-struktúrát szokás a 2-rendszer duális struktúrájának nevezni.

A tétel motiválja, hogy bevezessünk egy fogalmat azokra a 2-rendszerekre, melyekre a tulajdonságok fennállnak; ezeket hívjuk négyzetes blokkrendszereknek. Az „négyzetes" elnevezés arra utal, hogy a rendszer illeszkedési mátrixa $v = b$ miatt négyzetes.

A négyzetes blokkrendszerek egy egyszerű tulajdonsága kiolvasható a szomszédsági mátrix determinánsának számolásából. A Fisher-egyenlőtlenség bizonyítása során kiszámoltuk, hogy

$$\det(A) = (r - (v-1)\lambda) \cdot (r - \lambda)^{v-1} = rk(r - \lambda)^{v-1}$$

ahol az utolsó lépésben a $r(k-1) = \lambda(v-1)$ azonosságot alkalmazzuk (ez 1.2.2 következménye $i = 1$-re). $A = MM^T$, így $\det(A) = (\det(M))^2$. Továbbá mivel négyzetes blokkrendszert vizsgálunk, $r = k$. Következésképp

$$(\det(M))^2 = k^2(k - \lambda)^{v-1} \tag{2.2.2}$$

ami azt jelenti, hogy $(k - \lambda)^{v-1}$ szükségképp négyzetszám.

2.3. Bruck-Ryser-Chowla-tétel

Most újabb szükséges feltételt mutatunk be négyzetes blokkrendszerek létezéséhez. Eddigi vizsgálatunk során a paraméterekre vonatkozó tételek főleg kombinatorikai jellegűek, de mindenesetre kombinatorikai motivációjúak voltak. A következő összefüggés azonban teljesen más megközelítés következménye; a rendszer kombinatorikai szabályosságából egy azonosságot vezetünk le, amiből számelméleti eredmény olvasható ki.

Tétel (Bruck-Ryser-Chowla). *Amennyiben létezik négyzetes (v, k, λ)-rendszer, akkor*

a) *ha v páros, akkor $k - \lambda$ négyzetszám*

b) *ha v páratlan, a*

$$z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$$

diofantoszi egyenletnek létezik nemtriviális egész megoldása.

A bizonyítást Ryser és Chowla 1950-ben publikálta, Bruck és Ryser egy korábbi eredményére építve [6]. A szükséges kritérium megjelenésével kérdéssé vált, hogy a 2.1.1 feltételekkel kiegészülve ezek együttes teljesülése elégséges-e négyzetes (v, k, λ)-rendszerek létezésére. A válaszra közel 40 évet kellett várni; 1989-ben ugyanis Lam, Thiel és Swiercz számítógépes eszközökkel sikeresen bizonyította, hogy $(111, 11, 1)$-rendszer nem létezik [16]. A rendszer paraméterei azonban teljesítik az oszthatósági feltételeket, így ellenpéldaként szolgál az elégségességre.

Minthogy a tétel számelméleti jellegű, a bizonyításához először szükségünk lesz néhány számelméleti eredményre. Lagrange négynégyzetszám tételét bizonyítás nélkül fogjuk felhasználni.

Lemma (Lagrange). *Tetszőleges pozitív egész előáll 4 négyzetszám összegeként.* □

Most tekintsük következő kifejezéseket:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

A tétel bizonyítása során kihasználjuk, hogy $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ esetén a következő azonosság fennáll:

$$\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^4\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right) \tag{2.3.1}$$

Végül az írásmód egyszerűsítése céljából vezessük be az $n = k - \lambda$ jelölést. Ezen eszközök segítségével megkezdhetjük a tétel bizonyítását.

A Bruck-Ryser-Chowla-tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy létezik négyzetes (v, k, λ)-rendszer. Ekkor (a) közvetlen következménye 2.2.2-nek. Most tegyük fel, hogy v páratlan, és legyen M a rendszer illeszkedési mátrixa. Vezessünk be az $x_1, \ldots, x_v$ változókat, és ezek $\mathbf{v} = (x_1, \cdots, x_v)$ vektorát. Továbbá definiáljuk a következő lineáris kifejezéseket:

$$L_i := \sum_{j=1}^{v} m_{ij} x_j \qquad \forall i \in [v]$$

Ismét kihasználjuk, hogy $MM^T = nI + \lambda J$. Manipuláljuk ezt az azonosságot a következő módon:

$$\begin{aligned} MM^T &= nI + \lambda J \\ \mathbf{v}MM^T\mathbf{v}^T &= n\mathbf{v}I\mathbf{v}^T + \lambda\mathbf{v}J\mathbf{v}^T \\ L_1^2 + \cdots + L_v^2 &= n\left(x_1^2 + \cdots + x_v^2\right) + \lambda(x_1 + \cdots + x_v)^2 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Először feltesszük, hogy $v \equiv 1 \pmod 4$. A négynégyzetszám-tétel alapján vehetünk olyan $b_1, \cdots, b_4$ számokat, melyekre $n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$. Most definiáljunk y_i-ket x_j-k lineáris függvényeként, a következő módon:

$$(y_{4i-3}, y_{4i-2}, y_{4i-1}, y_{4i})^T := B(x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}, x_{4i})^T \tag{2.3.3}$$

Ezen definíció szerint 2.3.1 alkalmazható 2.3.2 jobb oldalára, minden $1 \leq i < \frac{v}{4}$-re. A $w = x_1 + \cdots + x_v$ jelölés bevezetésével a

$$L_1^2 + \cdots + L_v^2 = y_1^2 + \cdots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + \lambda w^2 \tag{2.3.4}$$

egyenlőséget kapjuk. Itt mindkét oldal $x_1, \cdots, x_v$ függvénye. Azonban mivel B invertálható, mindkét oldal tekinthető $y_1, \cdots, y_{v-1}, x_v$ függvényének.

Megjegyzés: Ezen a ponton fontos meggondolni, hogy a felírt kifejezés nem egy egyenlet, hanem egy azonosság. Következésképp tetszőleges értékeket adhatunk $y_1, \cdots y_{v-1}$ változóknak; 2.3.4 bármilyen behelyettesítés esetén teljesül.

Most próbáljuk meg redukálni 2.3.4-et. A cél, hogy olyan értéket válasszunk az y_1 változónak, hogy L_1^2 és y_1^2 kiejtsék egymást. Mivel L_1 lineáris y_1-ben, ez megtehetjük úgy, hogy az $L_1 = y_1$ egyenlőséget y_1-re rendezzük, majd az így adódó behelyettesítést elvégezzük. Előfordulhat, hogy ezt az átrendezést nem tudjuk elvégezni, mivel y_1 együtthatója L_1-ben 1. Ilyen esetben rendezzük $L_1 = -y_1$-et, és ennek segítségével helyettesítsünk be. Mindkét esetben $L_1^2 = y_1^2$ adódik, így a behelyettesítés után

$$L_2^2 + \cdots + L_v^2 = y_2^2 + \cdots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + \lambda w^2$$

következik. Itt $L_2, \cdots, L_v$ és w már csak $y_2, \cdots, y_{v-1}$ és x_v lineáris kombinációja.

Ezt a lépést iterálva a $(v-1)$-ig a következő egyenlőséghez jutunk:

$$L_v^2 = nx_v^2 + \lambda w^2$$

Ekkor L_v és w már csak x_v „lineáris kombinációja”, azaz számszorosa. Ugyanakkor redukció során minden lépésben csak a négy alapműveletet használjuk, és kezdetben minden együttható egész. Következésképp L_v és w az x_v racionális számszorosa. Legyen az együtthatók közös nevezője C. Ekkor az egyenlőséget C^2-tel felszorozva kapjuk, hogy

$$(CL_v)^2 = n(Cx_v)^2 + \lambda(Cw)^2$$

Így tehát bármilyen egész x_v helyettesítésre egész megoldást találunk a tételben szereplő egyenletre.

Most térjünk rá a $v \equiv 3 \pmod 4$ esetre. Vegyünk fel egy újabb változót: x_{v+1}. Adjunk hozzá 2.3.2 mindkét oldalához nx_{v+1}-et. Ekkor 2.3.1-et alkalmazva $1 \leq i \leq \frac{v+1}{4}$-re most az

$$L_1^2 + \cdots + L_v^2 + nx_{v+1} = y_1^2 + \cdots + y_{v+1}^2 + \lambda w^2 \tag{2.3.5}$$

egyenlőséghez jutunk. Ezen hasonló redukciós lépéseket végezve a következőt kapjuk:

$$nx_{v+1}^2 = y_{v+1}^2 + \lambda w^2$$

Ekkor hasonló érveléssel x_{v+1} és w az y_{v+1} racionális számszorosai. Így ismételten az együtthatók közös nevezőjének négyzetével való felszorzás után megkapjuk a diofantoszi egyenlet egy egész megoldását tetszőleges egész y_{v+1}-re való behelyettesítésével. $\square$

3. fejezet

Konstrukciók

A szakdolgozat során eddig csak blokkrendszerek létezésének szükséges feltételeiről volt szó. Most megmutatunk néhány konstrukciót is. A blokkrendszerek vizsgálata valójában ezen példákból eredezik, így a fogalmak tárgyalásának sorrendje történelmi szempontból fordított. Ugyanakkor a fogalmak korábbi bevezetésével könnyen ráismerünk majd, hogy ezek a kérdések valóban speciális paraméterezésű blokkrendszerek létezésével foglalkoznak.

3.1. Véges projektív geometriák

A projektív geometriák története a $15-16$. századra nyúlik vissza. Ekkor merült fel ugyanis a kor matematikusaiban, hogy euklideszi geometriában dolgozva nem lehet megmagyarázni a perspektivikus ábrázolásokon tapasztalt jelenséget, azaz hogy a valóságban párhuzamos egyenesek egy festményen a „végtelenben találkozni látszanak”. A projektív geometriák koncepciója így abból a rendkívül egyszerű ötletből indul ki, hogy dolgozzunk úgy az euklideszi geometriában, hogy nincs párhuzamosság.

A 17. században Desargues munkásságával megkezdődött a projektív geometriák szisztematikus vizsgálata. A véges projektív geometriák tárgyalásáig azonban egészen a 19. század végéig kellett várni; ezek axiomatikus megalapozása Gino Fano olasz matematikus érdeme. Az elnevezésben a végesség azt mutatja, hogy szemben a hagyományos geometriai intuícióval, jelenleg a „térnek”, amiben dolgozunk, csak véges sok pontja van.

Most tehát álljunk neki a véges projektív síkok axiomatikus tárgyalásának.

3.1.1. Definíció: Legyen egy $(\Pi, \Lambda, \in)$ illeszkedési struktúra, ahol Π nemüres halmaz (elemei a pontok), és $\Lambda \subseteq 2^{\Pi}$ (elemei az egyenesek). Tekintsük a következő axiómákat:

Ax.1: Tetszőleges $p, q \in \Pi$, $p \neq q$ pontokra $\exists! e \in \Lambda$ egyenes, hogy $p, q \in e$.

Ax.2: Tetszőleges $e, f \in \Lambda$, $e \neq f$ egyenesekre $\exists! p \in \Pi$, hogy $p \in e, f$

Ax.3: Π-nek van 4 különböző pontja úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen.

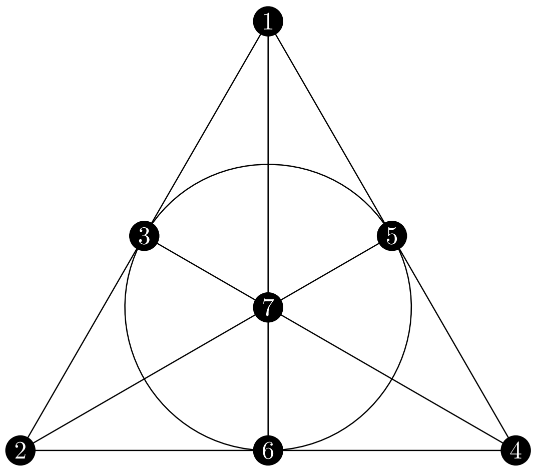
Ax.4: $\exists e \in \Lambda$, melyre $|e| = q + 1$ valamilyen $q \in \mathbb{N}$-re.

Ekkor az illeszkedési struktúrát véges projektív síknak nevezzük.

Megjegyzés: Az első két axióma a pontoktól és egyenesektől elvárt illeszkedési tulajdonságokat írja le. **Ax.3** azért felelős, hogy az elfajult eseteket kizárja, pl. hogy minden pont egy egyenesen van, egy kivételével. Végül később látni fogjuk, hogy **Ax.4** biztosítja, hogy a struktúrában csak véges sok pont (és egyenes) van.

Könnyen tudunk példát mutatni ilyen illeszkedési struktúrára: legyen $\Pi = [7]$, és

$$\Lambda = \Big\{ \{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\} \Big\}$$



Ekkor $(\Pi, \Lambda, \in)$ teljesíti az összes axiómát $q = 2$-vel. Fano tiszteletére szokás ezt a struktúrát Fano-síknak is nevezni.

Az előbbi példán egy fontos észrevétel, hogy $(\Pi, \Lambda, \in)$ egy $(7, 3, 1)$-rendszert alkot. Ez nem véletlen, ahogy azt a következő tétel mutatja.

3.1.2. Tétel. *Adott véges projektív síkra teljesülnek az alábbiak:*

$i)$ $|\Pi| = q^2 + q + 1$

$ii)$ $|\Lambda| = q^2 + q + 1$

$iii)$ *tetszőleges* $p \in \Pi$*-re* $\deg(p) = q + 1$

$iv)$ *tetszőleges* $e \in \Lambda$*-ra* $|e| = q + 1$

Bizonyítás. A bizonyításhoz azt az észrevételt fogjuk használni, hogy adott e egyenes és $P \notin e$ pont esetén $\deg(p) = |E|$. Ugyanis ekkor minden $Q \in e$ esetén a PQ egyenesek

- léteznek **Ax.1** következtében
- különböznek egymástól, mivel ha $Q \neq Q'$ esetén $(PQ) = (PQ')$ volna, akkor ez az egyenes felírható (QQ')-ként is. Viszont $(QQ') = e$, azaz ekkor $P \in e$ ↯.
- megadják az összes P-re illeszkedő egyenest, mivel ha találnánk egy f egyenest, amit nem kapunk így meg, akkor $Q = f \cap e$ segítségével $(QP) = f$, azaz mégis megkapjuk így f-et.

Most válasszunk **Ax.4** alapján egy e egyenest. Továbbá vegyünk négy általános helyzetű $A, \cdots D$ pontot; ezt megtehetjük **Ax.3** alapján. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy e-re A és B nem illeszkedik.

Ekkor az észrevétel alapján $\deg(A) = \deg(B) = q + 1$. Továbbá $B \notin (AC), (AD), (CD)$ és $A \notin (BC), (BD)$, így ezen egyenesek mérete mind $q+1$. $C \notin (BD)$ és $D \notin (BC)$, ezért $\deg(C) = \deg(D) = q + 1$. Végül $C \notin (AB)$, így ennek mérete is $q + 1$.

Most vegyünk tetszőleges P pontot. Ez az (AB), (AC) és (BC) egyenesek közül az egyikre biztosan nem illeszkedik, így $\deg(P) = q + 1$, amivel beláttuk (iii)-at. Hasonlóan járhatunk el (iv) esetén is: vegyünk egy tetszőleges e egyenest; ekkor ez az A, B, C pontok egyikére biztosan nem illeszkedik, azaz $|e| = q+1$.

Végül (i)-hez vegyük észre, tetszőleges P pontot kiválasztva arra pontosan $q + 1$ egyenes illeszkedik, és ezek közül bármelyen pontosan q pontot találunk P kivételével. Ezzel a számolással nem hagytunk ki egy pontot sem (**Ax.1** miatt), így a pontok száma összesen $q(q + 1) + 1$. Analóg módon működik (ii) bizonyítása. □

Megjegyzés: A tétel motiválja, hogy **Ax.4**-ben az egyenes méretét $q + 1$-nek választottuk. q-t szokás a projektív sík rendjének nevezni.

3.1.3. Következmény. *Tetszőleges projektív sík egy négyzetes* $\left(q^2 + q + 1, q + 1, 1\right)$*-rendszer.* □

3.1.4. Állítás. *Ennek megfordítása is igaz.*

Bizonyítás. Ellenőrizzük az axiómák teljesülését.

Ax.1: A blokkrendszer $t = 2$ és $\lambda = 1$ paraméterei ezt biztosítják.

Ax.2: 2.2.1 (iii) alapján a blokkok metszéspontjainak száma $\lambda = 1$.

Ax.3: Ha nem lenne, akkor a rendszernek legfeljebb $q+1+2(q-1)+1$ pontja lehetne (3 független pont és egyeneseik), és $q > 1$ esetén ez kisebb $q^2 + q + 1$-nél, ami ellentmondás (és $q > 1$ feltehető).

Ax.4: Tetszőleges blokk választható ilyen egyenesnek. □

Láttuk tehát, hogy ha veszünk egy véges projektív síkot, akkor az természetes úton jellemezhető rendje segítségével. Azonban adódik a kérdés, hogy milyen rendekre lehet egyáltalán projektív síkot mutatni. Ezt részben meg tudjuk válaszolni.

3.1.5. Tétel. *Legyen $q = p^n$, ahol p prím és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor létezik q-adrendű projektív sík.*

Bizonyítás. A $q = p^n$ miatt $\mathrm{GF}(q)$ létezik. Most legyen Π $\mathrm{GF}(q)^3$ egydimenziós altereinek halmaza. Továbbá legyen Λ a kétdimenziós alterek halmaza úgy, hogy adott kétdimenziós alteret azonosítunk az általa tartalmazott egy dimenziós alterek halmazával.

Két különböző kétdimenziós altér metszete egy egydimenziós, és két különböző egydimenziós altér egy kétdimenziósat feszít, így **Ax.1** és **Ax.2** teljesül. **Ax.3**-hoz használhatjuk a

$$(1,0,0) \qquad (1,0,0) \qquad (0,0,1) \qquad (1,1,1)$$

vektorok által meghatározott egydimenziós altereket.

Végül **Ax.4** bizonyításához vegyük észre, hogy $|\Pi| = \frac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1$. Ez egy véges érték, amiből következik, hogy tetszőleges egyenes választható **Ax.4**-hez. Válasszunk tehát egy egyenest; ennek méretéből meghatározhatjuk a geometria C rendjét. Ekkor a pontok száma 3.1.2 alapján $C^2 + C + 1$, így

$$C^2 + C + 1 = q^2 + q + 1 \quad \Rightarrow \quad q = C$$

□

Megjegyzés: Az így konstruált projektív síkot $\mathrm{PG}(2, q)$-val jelöljük.

Ezzel tehát beláttuk, hogy léteznek prímhatvány rendű projektív síkok. Ugyanakkor nyitott kérdés, hogy adott prímhatványra $\mathrm{PG}(2, q)$-e az egyetlen sík, illetve hogy egyéb rendekre létezik-e egyáltalán konstrukció; egyértelmű válasz 10-ig ismert [18]. A további keresésben segítségül szolgálhat a Bruck-Ryser-Chowla tétel projektív síkokra szűkített változata. Segítségével például könnyen kizárható 6 rendű projektív sík létezése.

3.1.6. Tétel (Bruck, Ryser). *Tegyük fel, hogy létezik q rendű projektív sík, ahol $q \equiv 1, 2 \pmod 4$. Ekkor a $q = x^2 + y^2$ diofantoszi egyenletnek van egész megoldása.* □

Megjegyzés: A tétel nem egyszerűen megszorítás a projektív síkok esetére; ezen alak belátásához egyéb számelméleti észrevételek is szükségesek.

A szakasz során eddig véges projektív síkokkal foglalkoztunk. Ugyanakkor a témakör lezárása előtt fontos megemlíteni, hogy a véges geometriák világa nem szűkül ezek tanulmányozására. Két dimenzióban maradva, hasonlóan definiálhatók a véges affin síkok. Ezek $\left(q^2, q, 1\right)$ rendszerekre szolgálnak például. Belátható továbbá, hogy amennyiben egy q-rendű projektív síkból eltávolítunk egy egyenest a pontjaival együtt, akkor q-rendű affin síkot kapunk.

Ahogy „geometria” elnevezés és a $\mathrm{PG}(2, q)$ jelölés sugallja, nem csak síkokat vizsgálhatunk, hanem magasabb dimenziós projektív tereket is. Ezek ugyanúgy definiálhatók geometriai motivációból kiindulva, axiomatikus úton. A 3.1.5 tétel bizonyításával analóg módon építhetünk d-dimenziós projektív teret $\mathrm{GF}(q)$ segítségével: a geometria k-dimenziós alterei ekkor is a $\mathrm{GF}(q)^{d+1}$ vektortér $(k+1)$-dimenziós altereiként kaphatók meg; az így kapott teret $\mathrm{PG}(d, q)$-val jelöljük.

Megjegyzés: Ha meghatározzuk az alterek számát és méretét, akkor látszik, hogy $\mathrm{PG}(d, q)$ példaként szolgál $(v, q+1, 1)$-rendszerre, ahol $v = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$. A projektív terek létezésének kérdése azonban egyszerűbbnek bizonyul a síkokénál, ugyanis bizonyítható, hogy $d \geq 3$ esetén adott projektív tér izomorf $\mathrm{PG}(d, q)$-val valamely q prímhatványra. Így tehát magasabb dimenziókra pontosan az ezen konstrukció által adott terek léteznek.

3.2. Steiner-rendszerek

A Steiner-rendszerek problémaköre egészen 1844-ig nyúlik vissza. Wesley Woolhouse — a „Lady’s and Gentleman’s Diary” című folyóirat szerkesztője — ekkor írta ki ugyanis a következő problémát lapjában:

1. Feladat: Determine the number of combinations that can be made out of n symbols, p symbols in each; with this limitation, that no combination of q symbols, which may appear in any one of them shall be repeated in any other.

A kérdés zavaros megfogalmazásából kiindulva nem meglepő, hogy mindössze 2 válasz érkezett: az egyik félreértette a feladatot, a másik meg egy specifikus esetet oldott meg. Így 1846-ban Woolhouse újra kitűzte a kérdést, immár rögzített p, q paraméterekkel.

2. Feladat: How many triads can be made out of n symbols, so that no pair of symbols shall be comprised more than once amongst them.

Ezt a problémát végül Kirkman oldotta meg, aki 1850-ben új kérdést tűzött ki a folyóiratban. A „Kirkman-féle iskoláslány-probléma” néven elhíresült feladat sokszor a témakör megalapozó feladataként van kiemelve.

3. Feladat: Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily so that no two shall walk twice abreast.

Megjegyzés: A feladat ismerős lehet; a bevezetés motiváló példája ennek egy átirata.

Most bevezetjük a modern terminológiát. Steiner-rendszereknek nevezzük a t-$(v, k, 1)$-rendszereket. Ezekre megszokott a $S(t, k, v)$ jelölés használata is. Amennyiben csak azt követeljük meg, hogy bármely t-ponthalmazra legfeljebb egy k-halmaz illeszkedjen, akkor részleges Steiner-rendszerről beszélünk, és $S_p(t, k, v)$-el jelöljük.

Látszik, hogy ezekkel a fogalmakkal dolgozva a 1. és 2. kérdések arra vonatkoznak, hogy mekkora a blokkok maximális száma $S_p(q, p, n)$, illetve $S_p(2, 3, n)$ rendszerekben. A 3. feladat már $S(2, 3, 15)$ konstrukciót keres.

Megjegyzés: Valójában — ahogy azt már a bevezetés során is említettük — (3) ennél erősebb követelményeket támaszt. Ugyanis a feladat megköveteli, hogy a hármasokat szét lehessen osztani 7 napra, azaz egy bizonyos „párhuzamossági" tulajdonság is teljesül. Hasonlót tapasztalhatunk az véges affin geometriáknál is. Általánosan az ilyen típusú blokkrendszereket feloldhatónak nevezzük; ezekkel részletesebben nem foglalkozunk.

A Steiner-rendszerek történelmében különösen nagy szerepet játszanak az $S(2, 3, v)$-ek, azaz az úgynevezett Steiner-hármasrendszerek. Látszik például, hogy két feladat is ilyenekre fogalmaz meg kérdést. Most mi is nekiállunk ezen rendszerek vizsgálatának.

3.2.1. Megjegyzés: Az $S(2, 3, v)$-ekre is alkalmazhatunk a 1.1.6 példában demonstrálthoz hasonló látásmódot: a Steiner-rendszerre gondolhatunk úgy, mint a K_v teljes gráf diszjunkt háromszögekre való felbontása. Többször emiatt a pontpárokra élekként, a blokkokra háromszögekként referálunk.

Steiner-hármasrendszerek létezésére a 2.1.1 következményből kiolvashatunk szükséges feltételeket.

3.2.2. Következmény. *Ha* $S(2, 3, v)$ *létezik, akkor*

$i)$ $v - 1 \equiv 0 \pmod 2$

$ii)$ $v(v-1) \equiv 0 \pmod 6$

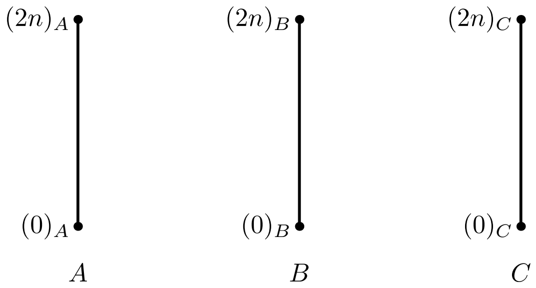
A két követelmény együttes teljesülése azt jelenti, hogy $v \equiv 1, 3 \pmod 6$. Kirkman a 2. feladat megoldása során megmutatta, hogy ez nem csak szükséges, hanem meglepő módon elégséges feltétel is ilyen rendszerek létezésére.

3.2.3. Tétel (Kirkman). *Pontosan akkor létezik* $S(2, 3, v)$*, ha* $v \equiv 1, 3 \pmod 6$

Bizonyítás. Az elégségességet Skolem két konstrukciójával fogjuk megmutatni.

Először vizsgáljuk az egyszerűbb, $v = 6n + 3$ esetet. Bontsuk a ponthalmazt 3 egyenlő méretű részre, és jelöljük a három rész pontjait $(i)_A$, $(i)_B$, $(i)_C$ módon, ahol $i \in [2n]_0$. Az egyszerűség kedvéért $(\mathrm{mod}\ (2n+1))$-ben számolunk. Továbbá legyen $A + 1 = B$, $B + 1 = C$ és $C + 1 = A$, ugyanis többször alkalmazzuk majd a halmazindikátoron az $X + 1$ jelölést a rövidség miatt (ilyenkor mindig

$X \in \{A, B, C\}$-t értünk). Végül a P, Q, R csúcsokkal rendelkező háromszöget $P - Q - R$ módon írjuk.

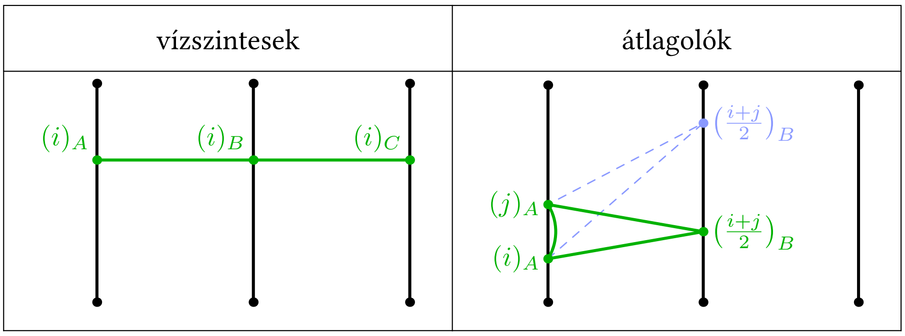


Két háromszögtípust különböztetünk meg. Azt egyik a „vízszintesek”: minden i-re vegyük fel az

$$(i)_A - (i)_B - (i)_C$$

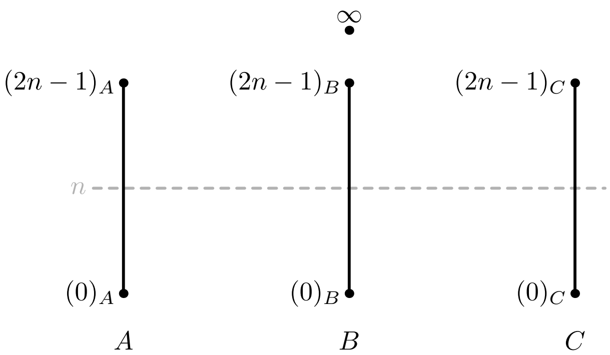
háromszöget. A másik típus az „átlagolók”: ez minden $i \neq j$-re a következőt háromszöget jelenti

$$(i)_X - (j)_X - \left(\frac{i+j}{2}\right)_{X+1}$$



Megjegyzés: Az ábrán a zöld színnel jelöltük azokat a háromszögeket, melyeket várnánk kinézetre a leírás alapján. Azonban a $\pmod{2n}$ aritmetika miatt előfordulhat, hogy a megfelelő háromszög valójában a kékkel jelölt módon néz ki. A $v = 6n + 1$ esetben is megjelenhet alternatív kinézetele bizonyos típusú háromszögeknek; ott is hasonlóan jelöljük ezt.

Ezzel befejeztük a konstrukciót a $6n + 3$ esetre. Most térjünk rá a $v = 6n + 1$ esetre. A jelölésrendszert megtartjuk, viszont csak $2n$ méretű partíciókat készítünk, és $\pmod{2n}$-ben számolunk. Ekkor ez még csak $6n$ pontot jelent, így felveszünk egy ∞ jelölésű pontot is.



Itt négy fajta háromszöget alkalmazunk:

- „alsó vízszintesek”: minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$-re

$$(i)_A - (i)_B - (i)_C$$

- „∞-esek”: minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$-re

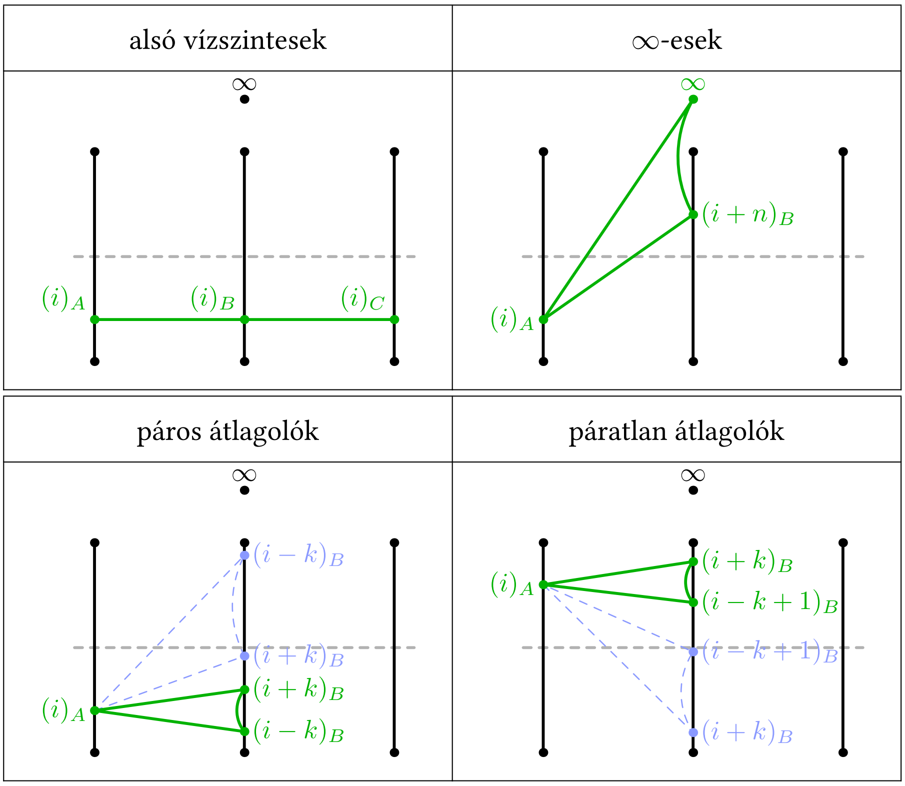
$$(i)_X - (n+i)_{X+1} - \infty$$

- „páros átlagolók”: minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$-re

$$(i)_X - (i+k)_{X+1} - (i-k)_{X+1}$$

- „páratlan átlagolók”: minden $i \in \{n+1, \dots, 2n-1\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$-re

$$(i)_X - (i+k)_{X+1} - (i-k+1)_{X+1}$$



Annak ellenőrzése, hogy ezen két konstrukció háromszögei valóban minden csúcspárt valóban pontosan egyszer fednek, nem bonyolult, de hosszadalmas, így ettől eltekintünk. □

Végül megemlítjük, hogy az előző szakaszban bemutatott projektív terek is szolgáltathatnak példát Steiner-rendszerre. Ugyanis a $q = 2$ esetben $\mathrm{PG}(d, 2)$ pontosan olyan illeszkedési tulajdonsággal rendelkezik, hogy egyeneseinek mérete $q + 1 = 3$, és bármely két pontjára pontosan egy egyenes illeszkedik. Ekkor tehát a Steiner-rendszer háromszögei a projektív tér egyenesei.

Blokkrendszerek hipergráfokon

Most megkezdjük a blokkrendszerek konstrukciójának egy általánosabb megközelítését. Korábban több példát is úgy illusztráltunk a $t = 2, k = 3$ esetre, hogy vettünk egy teljes gráfot, a **P** halmazt ennek csúcsai, a blokkokat pedig a háromszögei adták. A következőkben ezt a szemléletmódot fogjuk általánosítani.

Hipergráfokra térünk át, azaz olyan gráfokra, melyeken egy adott élet nem feltétlen két csúcs határoz meg. Úgy definiáljuk tehát a hiperéleket, mint a csúcshalmaz tetszőleges részhalmaza. Ekkor értelmes beszélni a hiperél méretéről: ez a csúcshalmazának számossága. Innentől általában a gráf kifejezés alatt hipergráfot, él alatt hiperélet értünk. Emellett a gráfot azonosítjuk az élhalmazával, azaz az $e \in G$ kifejezés azt jelenti, hogy e az G egy éle, illetve $|G|$ a gráf éleinek száma. (A gráf csúcshalmazára a megszokott $V(G)$ jelölést használjuk.)

Megjegyzés: A definíció alapján például egy gráf csúcsait is értelmezhetjük 1 méretű hiperéleknek.

Először vezessünk be néhány fogalmat. Egy hiperélet t-élnek nevezünk, ha mérete t. Továbbá egy hipergráfra azt mondjuk, hogy t-gráf, ha minden hiperéle t-él. Jelölje $K_v^{(t)}$ az v csúcson vett teljes t-gráfot.

Legyen H hipergráf, $U \subseteq V(H)$ csúcshalmaz. Ekkor $H[U]$ a hipergráf U-ra vett megszorítása, vagyis a kizárólag U-ban futó hiperélek megtartásával kapott gráf. Emellett $H(U)$ az U szomszédsága H-ban, azaz az a $V(H) \backslash U$ csúcshalmazon vett hipergráf, melynek élhalmaza $\{e \backslash U : e \in H, U \subseteq e\}$ (tehát az U-t tartalmazó élek „U-ról lelógó” részei).

Egy H hipergráf u csúcsának fokán az u-t tartalmazó hiperélek számát értjük, és $\deg_H(u)$-val jelöljük. Amennyiben egyértelmű, mely hipergráfon dolgozunk, az indexből a H-t elhagyjuk. Értelmezzük a közös szomszédsági fokot is: ez $u \neq w$ csúcsok esetén u és w közös hiperéleinek száma; $\deg_H(u, w)$-vel jelöljük. A H csúcsain megjelenő maximális fokra a megszokott $\Delta(H)$ jelölést használjuk, míg a csúcspárjain megjelenő maximális közös szomszédsági fokra a $\Delta_2(H)$-t írunk.

Hipergráfokon is beszélhetünk a párosításokról és élfedésekről. A következő terminológiát használjuk: az e él lefog (vagy lefed) egy u csúcsot ha $u \in e$. Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy u lefogja e-t. Továbbá e és f élek függetlenek, ha nincs közös csúcsuk, azaz $e \cap f = \emptyset$. Így tehát a közönséges gráfokon megszokott módon párosításnak a független élhalmazokat (azaz melyekben bármely két él független), élfedéseknek a lefogó élhalmazokat (azaz melyekben bármely pontra találunk azt lefogó élt) nevezzük.

Rokon fogalmak a pakolások és fedések. Ismét definiáljuk a lefogás relációt: az $S \subseteq G$ részgráf lefogja (vagy lefedi) az $e \in G$ élet, ha $e \in S$. Továbbá azt mondjuk, hogy $S, T \subseteq G$ élfüggetlen, ha nem tartalmaznak azonos élet, azaz $S \cap T = \emptyset$.

Most vegyünk egy S_0 gráfot. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{P}$ egy S_0-pakolás G-n, ha $\mathcal{P}$ elemei S_0-lal izomorf élfüggetlen részgráfok G-ből. Továbbá $\mathcal{C}$ egy S_0-fedés G-n, ha $\mathcal{C}$ elemei S_0-lal izomorf G-beli részgráfok, továbbá bármely $e \in G$ élre találunk $\mathcal{C}$-ben e-t lefogó részgráfot.

Tekintsünk egy $\mathcal{M}$ élhalmazt. A közönséges gráfok esetéhez hasonlóan azt mondjuk, hogy $\mathcal{M}$ egy teljes párosítás, ha egyszerre párosítás és élfedés. Hasonlóan amennyiben $\mathcal{D}$ egyszerre S_0-pakolás és S_0-fedés G-n, $\mathcal{D}$-t G S_0-felbontásának nevezzük. A teljes párosítások és felbontások „tökéletesítik" az előbbi fogalompárokat olyan tekintetben, hogy ekkor párosításból és pakolásból nagyobbat, a élfedésből és fedésből kisebbet biztosan nem találunk.

Megjegyzés: Az előbbi fogalmakat lefogások számának segítségével is definiálhattuk volna. Ugyanis bármely $\substack{\text{csúcsra}\\\text{élre}}$ az őt fogó $\substack{\text{élek}\\\text{részgráfok}}$ száma $\substack{\text{párosítás}\\\text{pakolás}}$ esetén ≤ 1, $\substack{\text{telj. p.}\\\text{felbontás}}$ esetén $= 1$, és $\substack{\text{élfedés}\\\text{fedés}}$ esetén ≥ 1.

Megjegyzés: Az $\{x : \exists A \in \mathcal{A}, \text{hogy } x \in A\}$ halmazra többször használjuk a halmazelméletben megszokott $\cup\mathcal{A}$ jelölést. Így ha $\mathcal{A}$ $\substack{\text{élek}\\\text{részgráfok}}$ egy halmaza, akkor $\cup\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ elemei által fedett $\substack{\text{csúcsok}\\\text{élek}}$ halmaza.

Ezekkel a fogalmakkal már könnyen általánosíthatjuk 3.2.1 látásmódját tetszőleges t, k-ra: egy $S(t, k, v)$ ekvivalens a $K_v^{(t)}$ gráf egy $K_k^{(t)}$-felbontásával, hiszen ez pontosan azt fejezi ki, hogy bármely t csúcsra pontosan egy k-halmaz illeszkedik. Hasonlóan egy t-(v, k, λ)-rendszer ekvivalens a $K_v^{(t)}$ gráf λ diszjunkt $K_k^{(t)}$-felbontásának halmazával.

Megjegyzés: Továbbá $S_p(t, k, v)$ is felírható, mint egy $K_k^{(t)}$-pakolás $K_v^{(t)}$-n.

Most definiáljuk a blokkrendszerek paraméterezésének, illetve az oszthatósági feltételeknek hipergráfokra vett megfelelőjét. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ a G t-gráf egy (k, t, λ)-dizájnja, ha $\mathcal{K}$ az G $K_k^{(t)}$-val izomorf részgráfjainak egy halmaza úgy, hogy bármely $e \in G$ élre e pontosan λ sok $K \in \mathcal{K}$ részgráfban szerepel. Ekkor természetesen a $K_v^{(t)}$ gráf egy (k, t, λ)-dizájnja azonosítható egy t-(v, k, λ)-rendszerrel.

Az oszthatóság a következőképp általánosítható: egy H t-gráf (k,t,λ)-osztható, ha minden $S \subset V(H)$, $|S| \in \left[t-1\right]_0$ halmazra $\binom{k-|S|}{t-|S|}\Big|\lambda\,|H(S)|$. A $\lambda = 1$ esetre $(k,t,1)$-osztható helyett $K_k^{(t)}$-oszthatót is mondunk.

Végül az elkövetkezendő tételek kimondásának egyszerűsítésére bevezetünk két jelölést. $a = b \pm c$ alatt azt értjük, hogy a olyan, hogy

$$b - c \;\leq\; a \;\leq\; b + c$$

Továbbá amikor azt írjuk,

„Legyen $a \ll b$, ekkor X teljesül."

az alatt azt értjük, hogy

„Minden b-re létezik olyan $a_0 > 0$, hogy $a < a_0$ esetén X teljesül"

Példaként szolgáljon a folytonosság definíciójának ilyen módon való átirata:

f folytonos, ha $|x - y| \ll \varepsilon$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

A kifejezést több paraméterre is alkalmazhatjuk, így $a, b \ll c, d$ alatt azt értjük, hogy $\forall c, d$ esetén létezik megfelelő a_0, b_0 korlát. Továbbá amikor azt írjuk, hogy $\frac{1}{a} \ll b$, akkor feltesszük, hogy a egész, és úgy értelmezzük, hogy „b-hez $\exists a_0$, hogy $a > a_0$ esetén a következő teljesül".

A következő fejezetek során nem dolgozunk negatív paraméterekkel, így akkor is feltesszük, hogy a definíciókban és tételekben szereplő paraméterek nemnegatívak, amikor ezt expliciten nem írjuk ki. Emellett továbbra is feltesszük, hogy $2 \leq t < k < v$.

4. fejezet

A Rödl-nibble

A Steiner-rendszerek tárgyalása során a $t = 2, k = 3$ paraméterezésre vonatkozó kérdést ugyan Kirkman megoldotta, de az 1. feladatra ő sem adott választ. Most visszatérünk ehhez a feladathoz. Pontos választ mi sem adunk, ellenben egy aszimptotikus eredményt megmutatunk.

Ez előző fejezet alapján a feladatot átfogalmazhatjuk úgy, hogy „mekkora a legnagyobb $K_k^{(t)}$-pakolás $K_v^{(t)}$-n". Innen adódik egy hasonló jellegű kérdés: mi az ezen vett legkisebb $K_k^{(t)}$-fedés mérete? Az előbbi értéket jelölje $m(v, k, t)$, az utóbbit $M(v, k, t)$. Ekkor nyilván

$$m(v, k, t) \leq \binom{v}{t} \Big/ \binom{k}{t} \leq M(v, k, t)$$

mivel a középső érték a $K_k^{(t)}$-felbontás mérete lenne. Intuíciónk azt súgja, hogy minél nagyobb teljes gráfra keressük ezeket az értékeket, annál közelebb kerülünk az „optimumhoz", azaz a felbontás méretéhez. Hiszen ha v jóval meghaladja k-t, akkor szinte már mohó módon készíthetünk pakolást, illetve fedést; a csúcsok mennyisége miatt úgyis lesz hova tovább haladni. Erdős és Hanani 1963-as sejtése [8] ezt az intuíciót formalizálja.

Sejtés (Erdős-Hanani). *Rögzített* $2 \leq t < k$*-ra*

$$\lim_{v\to\infty} \frac{m(v, k, t)}{\binom{v}{t}/\binom{k}{t}} = \lim_{v\to\infty} \frac{M(v, k, t)}{\binom{v}{t}/\binom{k}{t}} = 1$$

Fontos észrevenni, hogy a pakolási és fedési aszimptotikus viselkedések ekvivalensek. Ugyanis legyen $t, k \in \mathbb{N}$ rögzített, és vegyünk tetszőleges $\alpha > 0$ értéket. Tegyük fel, hogy $\exists v_m$, hogy $v > v_m$ esetén $m(v, k, t) > \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}(1 - \alpha)$. Rögzítsünk egy ilyen v-t, és legyen $\mathscr{P}$ az $m(v, k, t)$-hez tartozó (egyik) pakolás.

Ekkor mivel $\left|K_k^{(t)}\right| = \binom{k}{t}$, következik, hogy $|\cup\mathcal{P}| > \binom{v}{t}(1-\alpha)$. Most válasszunk minden kimaradó e élhez tetszőleges $K_k^{(t)}$-t, melyre az tartalmazza e-t; legyen ezek halmaza $\mathcal{P}'$. Ekkor $\left|\mathcal{P}'\right| < \binom{v}{t}\alpha$. továbbá $\mathcal{P} \,\dot\cup\, \mathcal{P}'$ fedés lesz, melynek mérete

$$\left|\mathcal{P} \,\dot\cup\, \mathcal{P}'\right| < \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} + \binom{v}{t}\alpha = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \left(1 + \binom{k}{t}\alpha\right)$$

Hasonló számolást hajthatunk fordított irányban. Tegyük fel, hogy $M(v,k,t) < \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}(1+\alpha)$, és legyen $\mathcal{C}$ az ennek megfelelő (egyik) fedés. Ekkor a fogott élek száma multiplicitással $|\mathcal{C}|\binom{k}{t} < \binom{v}{t}(1+\alpha)$.

Most minden élre írjuk rá a $\mathcal{C}$-ben vett multiplicitásánál 1-el kisebb számot; ekkor következik, hogy az élekre írt számok összege $< \alpha\binom{v}{t}$. Vegyünk minden élre annyi őt tartalmazó $\mathcal{C}$-beli $K_k^{(t)}$-t, amennyit ráírtunk (ezek nem feltétlen lehetnek különbözők); legyen ezek halmaza $\mathcal{C}'$. Ekkor $\mathcal{C}'$-t eltávolítva biztosan megszűntetünk minden 1-nél magasabb multiplicitást (esetleg néhány eddig fedett él fedetlenné is válhat), azaz $\mathcal{C}\backslash\mathcal{C}'$ egy pakolás. Továbbá nyilván $\left|\mathcal{C}'\right| < \alpha\binom{v}{t}$, így

$$\left|\mathcal{C}\backslash\mathcal{C}'\right| > \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} - \binom{v}{t}\alpha = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \left(1 - \binom{k}{t}\alpha\right)$$

4.1. Pippenger tétele

Az Erdős-Hanani-sejtést végül Rödl bizonyította 1985-ben [19]. Állítását elsődlegesen fedésekre írta fel. Azóta a tétel a kombinatorika erős eszközévé nőtte ki magát, és számos általánosítása született különböző rokonítható feladatokra. Most a Pippenger-féle verziót közöljük. A felírás és bizonyítás alapjául a *Matchings and covers in hypergraphs* [9] cikk és a *The Probabilistic Method* [1] könyv szolgál.

Először foglalkozzunk egy látszólag más kérdéssel. Vegyünk egy G t-gráfot v csúcson; ezen akarunk egy közel optimális élfedést keresni. Mivel nem pontosságra törekszünk, kényelmes lenne, ha valami „mohó” módszerrel tudnánk ilyet találni. Ennek megfelelően nem szeretnénk nagyon bonyolult strukturális kereséseket végezni a gráfon. Adódik tehát a kérdés, hogy tudunk-e könnyen ellenőrizhető, „lokális” feltételeket adni G-re, melyek garantálják egy ilyen „majdnem teljes párosítás” létezését.

Tétel (Pippenger). *Legyen* $\frac{1}{v}, \frac{1}{d}, \gamma \ll \frac{1}{K}, \frac{1}{t}, \alpha < 1$ *és* G *olyan, hogy* $v = |V(G)|$, *továbbá*

$i)$ $\Delta(G) < Kd$

$ii)$ $\deg(x) = (1 \pm \gamma)d$ *minden* $x \in V(G)$*-re legfeljebb* γv *kivételével*

$iii)$ $\Delta_2(G) < \gamma d$

Ekkor G*-nek létezik legfeljebb* $\frac{v}{t}(1+\alpha)$ *méretű élfedése.*

Megjegyzés: A tétel állítása úgy is felírható, hogy a feltételeket teljesítő gráfra a minimális élfedés mérete $\frac{v}{t}(1+o(1))$.

Mint látjuk, a válasz igen. A feltételek közül (ii) azt követeli meg G-re, hogy nagyjából d-reguláris. (i) mutatja, hogy bár a csúcsok foka lehet nagy, mégis korlátolt. Végül (iii) miatt a csúcspárokra közösen illeszkedő élek száma alacsony.

Ezen feltételek forrása először nem nyilvánvaló. Ugyanakkor amennyiben találkoztunk már véletlen gráfokkal, azonnal látszik, hogy ezek valamiféle „pszeudorandomsági" kritériumokat szabnak meg G-re, ami arra utal, hogy a bizonyítás során valószínűségi érvelést használunk. Valóban, ez a következő lemma mozgatórugója.

Lemma (nibble). *Legyen* $\delta, \frac{1}{v}, \frac{1}{D} \ll \frac{1}{t}, \frac{1}{K}, \delta', \varepsilon < 1$, *és* H *olyan, hogy* $|V(H)| = v$, *továbbá*

$(H1)$ $\Delta(H) < KD$

$(H2)$ $\deg_H(x) = (1 \pm \delta)D$ *minden* $x \in V(G)$*-re legfeljebb* δv *kivételével*

$(H3)$ $\Delta_2(H) < \delta D$

Ekkor H*-nak létezik olyan* $\mathcal{C}$ *élfedése, melyre*

$(\mathcal{C}1)$ $|\mathcal{C}| = (1 \pm \delta')\frac{\varepsilon v}{t}$

$(\mathcal{C}2)$ $|V'| = (1 \pm \delta')ve^{-\varepsilon}$

$(\mathcal{C}3)$ *legfeljebb* $\delta' |V'|$ *kivételével* $\forall x \in V'$*-re* $\deg_{H'}(x) = (1 \pm \delta')De^{-\varepsilon(t-1)}$

ahol $V' = V(H) - \cup\mathcal{C}$ *és* $H' = H[V']$

A lemma körülbelül azt mondja ki, hogy amennyiben a $(H1) - (H3)$ feltételek teljesülnek, akkor lefoghatjuk a csúcsok egy kis halmazát nem túl sok éllel úgy, hogy ezen élhalmaz eltávolítása után $(H1) - (H3)$ ugyanúgy teljesül a maradék gráfra.

A teljes bizonyítás rendkívül technikás, így ettől eltekintünk, ellenben nagy vonalakban vázoljuk az ötletet. Válasszunk éleket egymástól függetlenül $\frac{\varepsilon}{D}$ valószínűséggel; legyen az így kapott élhalmaz $\mathcal{C}$. $(H2)$ alapján kétszeres leszámlálással következik, hogy $vD \approx t\,|G|$, azaz $|\mathcal{C}| \approx \frac{vD}{t} \cdot \frac{\varepsilon}{D} = \frac{\varepsilon v}{t}$, ezzel biztosítva $(\mathcal{C}1)$-et.

Belátható, hogy $\mathcal{C}$ élei ekkor bár metszhetik egymást, $\mathcal{C}$ közel optimális élfedése saját csúcshalmazának, mivel a többször lefogott csúcsok aránya ε^2 nagyságrendű. ε kicsi, egy $O(\varepsilon^2)$ nagyságrendű tagot figyelmen kívül hagyhatunk, továbbá $1 - \varepsilon \approx e^{-\varepsilon}$. Következik tehát a $(\mathcal{C}2)$-ben adott méret.

Most szemléltetés céljából tegyük fel, hogy nem csak $\mathcal{C}$ éleit választjuk egymástól függetlenül, hanem $\cup\mathcal{C}$ csúcshalmazra is tekinthetünk úgy, mint egymástól függetlenül választott pontok halmaza. Ekkor az előző eredmény alapján a kiválasztás valószínűsége $\approx \varepsilon$ kell legyen. Vegyünk egy $x \in V(H')$ csúcsot. Hány x-re illeszkedő él marad meg így $\mathcal{C}$ „kidobása” után? Ahhoz, hogy egy élet kidobjunk, bele kell metszenie $\bigcup\mathcal{C}$-be. Az él bemetsző csúcsa $(t-1)$ féle lehet (mivel x-et biztosan nem dobtuk ki), és a kiválasztott csúcs kidobásának esélye ε a feltételezés alapján, azaz bármely ilyen élet $\approx \varepsilon(t-1)$ valószínűséggel dobtuk ki. H-ban $\approx D$ él illeszkedett x-re, következésképp ebből H'-ben marad $\approx D(1-\varepsilon(t-1)) \approx De^{\varepsilon(t-1)}$.

Megjegyzés: Nyilván a vázolt gondolatmenetben rengeteg a feltételezés, főleg $(\mathcal{C}3)$ igazolása során. Emellett első ránézésre nem is látszik, hogy $(H3)$-at hol használjuk ki. Ugyanakkor ez pontosan abban segít, hogy a „szemléltető feltételezés” formalizálhatóvá váljon.

A lemma segítségével már nekiállhatunk a tétel bizonyításának

A Pippenger-tétel bizonyítása. Legyen $t \geq 2$ egész, $K \geq 1$, $\alpha > 0$ tetszőleges. Most válasszunk $\varepsilon > 0$-t úgy, hogy

$$\frac{\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon}} + t\varepsilon < 1 + \alpha$$

Ekkor vehetünk δ-t úgy, hogy

$$(1+2\delta)\left(\frac{\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon}} + t\varepsilon\right) < 1 + \alpha \tag{$*_1$}$$

Legyen $\ell \in \mathbb{N}$ olyan, melyre

$$e^{-\varepsilon\ell} < \varepsilon \tag{$*_2$}$$

és rögzítsük a $\delta := \delta_\ell \gg \delta_{\ell-1} \gg \cdots \gg \delta_0$ értékeket, ahol a teljesüléshez szükséges „$\gg$” relációt egyrészt a nibble-lemma definiálja, másrészt megkötjük, hogy

$$\prod_{j=i}^{\ell}(1+\delta_j) < 1 + 2\delta \qquad \forall i \in [t]_0 \tag{$*_3$}$$

Ez megvalósítható, hiszen a δ_i értéket δ_{i+1} ismeretében definiáljuk, azaz ekkor már adott $\delta_{i+1}, \cdots, \delta_\ell$, melyekre

$$\prod_{j=i+1}^{\ell}(1+\delta_j) < 1 + 2\delta$$

Így tehát δ_i is megválasztható úgy, hogy $(*_3)$ továbbra is fennálljon, emellett „$\gg$” is érvényben maradjon. A bizonyítás során az egyenlőtlenség teljesülését az $i = 1$ esetre fogjuk kihasználni.

Most legyen $K_0 := K$, $v := v_0$ és vezessük be a következő jelöléseket:

$$K_i := K_{i-1}e^{\varepsilon(t-1)} \qquad v_i := v_{i-1}e^{-\varepsilon}(1 \pm \delta_i) \qquad D_i := D_{i-1}e^{-\varepsilon(t-1)}$$

Megjegyzés: Itt v_i nem egy specifikus érték; $x = v_i$ így azt jelöli, hogy x a v_i definíciójában meghatározott tartományba esik. Ez bizonyos szempontból megzavaró, viszont a halmazméretek egyszerű felírására ad lehetőséget.

A jelölés rekurzivitásának egyszerű következménye, hogy $\forall i \in \left[\ell\right]$-re

$$v_i \;=\; v_0 e^{-\varepsilon i} \cdot \prod_{j=1}^{i}(1 \pm \delta_j) \;\leq\; ve^{-\varepsilon i} \cdot \prod_{j=1}^{\ell}(1+\delta_j) \;\overset{(*_3)}{<}\; ve^{-\varepsilon i}(1+2\delta) \qquad (*_4)$$

Ellenőrizhető, hogy a lemma ekkor alkalmazható $\delta' \leftsquigarrow \delta_{i+1}$, $\delta \leftsquigarrow \delta_i$, $K \leftsquigarrow K_i$, $n \leftsquigarrow n_i$, $D \leftsquigarrow D_i$ paraméterezéssel (t és ε változatlan). Kapunk tehát $\mathcal{C}_i$ és V_i sorozatokat, hogy $\forall i \in \left[\ell - 1\right]_0$-re

$$|\mathcal{C}_i| \;=\; (1 \pm \delta_{i+1})\frac{\varepsilon v_i}{t} \;=\; \frac{\varepsilon v_{i+1}}{t} \;\overset{(*_4)}{<}\; \frac{\varepsilon v e^{-\varepsilon i}}{t}(1+2\delta)$$

Az eljárás végső lépése után a visszamaradó részgráf csúcshalmazának mérete továbbá

$$|V_\ell| \;=\; v_\ell \;\overset{(*_4)}{<}\; ve^{-\varepsilon\ell}(1+2\delta) \;\overset{(*_2)}{<}\; v\varepsilon(1+2\delta)$$

Most vegyük V_ℓ egy triviális élfedését, azaz mohó módon válogassunk V_ℓ csúcsaira egy-egy élet, ami fogja azt. Legyen ezen élek halmaza $\mathcal{C}_\ell$; ekkor nyilván $|\mathcal{C}_\ell| \leq |V_\ell|$. Végül tekintsük a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \dots \cup \mathcal{C}_\ell$ halmazt. Ez a $\mathcal{C}_i$ halmazok konstrukciója miatt élfedés, továbbá

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}| \;&\leq\; v\varepsilon(1+2\delta) \;+\; \sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{\varepsilon v e^{-\varepsilon i}}{t}(1+2\delta) \\
&\leq\; \frac{v}{t}(1+2\delta)\varepsilon t \;+\; \frac{v}{t}(1+2\delta)\varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\varepsilon i} \\
&=\; \frac{v}{t}(1+2\delta)\left(\varepsilon t + \varepsilon \cdot \frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}\right) \\
&\overset{(*_1)}{<}\; \frac{v}{t}(1+\alpha)
\end{aligned}$$

Következésképp $\gamma := \delta_0$, $d := D_0$ és v megfelelő választás a teljesüléshez. □

Megjegyzés: A lemma ismételt alkalmazhatóságának ellenőrzése nem bonyolult, hiszen mindent ilyen motivációval írtunk fel. Ugyanakkor időigényes, ezért nem tértünk ki rá. Mindenesetre megemlítjük, hogy K-t azért definiáljuk így, hogy a $K_i D_i$ szorzat konstans maradjon. (Illetve $K_0 := K$.)

Így tehát a Pippenger-tételben adott α-hoz található megfelelő γ, hogy a lemmát véges sokszor alkalmazva a korlátokon belül maradunk. Az egyes lépésekben kapott $\mathcal{C}_i$ halmazokat, illetve a végső alkalmazás után kapott V' csúcshalmaz mohó fedését összeuniózva megfelelő élfedést kapunk G-re.

4.2. Az Erdős-Hanani-sejtés bizonyítása

Az előző szakaszban láttuk, hogy a Pippenger-tétel ad egy eszközt élfedés keresésére t-gráfokban. Ugyanakkor a korábban vázolt feladat nem élfedést keres, hanem $K_k^{(t)}$-fedést t-gráfban. Most megmutatjuk, hogy a Pippenger-tétel valójában erre a problémára is megfelelő eszköznek bizonyul, ugyanis az visszavezethető az élfedési feladatra.

Legyen G egy t-gráf, és $V := V(G)$. Ehhez olyan segédgráfot szeretnénk konstruálni, ahol a csúcsok G éleinek, az élek pedig a $K_k^{(t)}$-val izomorf részgráfoknak felelnek meg. Vegyük fel tehát a H gráfot a következő módon:

$$V(H) = E(G) \qquad E(H) = \left\{ \binom{Q}{t} : Q \subset V(G), |Q| = k, \tbinom{Q}{t} \subseteq G \right\} \tag{4.2.1}$$

Mivel $K_k^{(t)}$ éleinek száma $\binom{k}{t}$, H egy $\binom{k}{t}$-gráf. A konstrukcióval egy G-n vett élfedési (vagy párosítási) probléma ekvivalens H-n egy fedési (vagy pakolási) feladattal. Ennek segítségével a Pippenger-tétel egy alternatív, fedésekre vonatkozó alakját fogalmazhatjuk meg.

Az analóg tételkimondás érdekében bevezetünk néhány jelölést.

4.2.2. Definíció: Jelölje $e, f \in G$ (t-)élek esetén $\deg^{(k)}(e)$ azt, hogy e hány G-beli $K_k^{(t)}$ részgráfban van benne. Hasonlóan $\deg^{(k)}(e, f)$ azt mutatja, hogy e-re és f-re hány $K_k^{(t)}$ van, melyben mindkettő szerepel. Végül

$$\Delta^{(k)}(G) := \max_{e \in G} \left(\deg^{(k)}(e) \right) \qquad \Delta_2^{(k)}(G) := \max_{e \neq f \in G} \left(\deg^{(k)}(e, f) \right)$$

Ezzel a Pippenger-tétel alábbi alakjához jutunk.

4.2.3. Tétel. *Legyen $\frac{1}{v}, \frac{1}{d}, \gamma \ll \frac{1}{K}, \frac{1}{k}, \frac{1}{t}, \alpha < 1$ és G olyan t-gráf, hogy $v = |V(G)|$, továbbá*

$i)$ $\Delta^{(k)}(G) < Kd$

$ii)$ $\deg^{(k)}(e) = (1 \pm \gamma)d$ *minden $e \in G$-re legfeljebb $\gamma\binom{v}{t}$ kivételével*

$iii)$ $\Delta_2^{(k)}(G) < \gamma d$

Ekkor G-nek létezik legfeljebb $\frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}(1 + \alpha)$ méretű $K_k^{(t)}$-fedése.

Nincs más hátra, mint mint belátni, hogy $G = K_v^{(t)}$ esetén ezt a tételt alkalmazhatjuk. Először is vegyük észre, hogy bármely e élre $\deg^{(k)}(e) = \binom{v-t}{k-t} =: d$. Ugyanis az él t csúcsa tetszőleges $k - t$ csúccsal kiegészülve megfelelő $K_k^{(t)}$ részgráfot határoz meg.

Most vegyünk e és f éleket, és legyen $c := |e \cap f|$. Ekkor $|e \cup f| = 2t - c$. Az előbbihez hasonló logikával az e-re és f-re közösen illeszkedő élek száma így ($c \leq t - 1$-et kihasználva)

$$\deg^k(e, f) = \binom{v - (2t - c)}{k - (2t - c)} \leq \binom{v - t - 1}{k - t - 1} = \binom{v - t}{k - t} \cdot \frac{k - t}{v - t} = \frac{k - t}{v - t} d$$

Így adott k, t esetén tetszőleges α-ra választható olyan v_0, hogy megfelelő d, γ-val $v > v_0$-ra $(i), (ii)$ és (iii) is teljesüljön. Ezzel beláttuk az Erdős-Hanani-sejtést.

5. fejezet

Blokkrendszerek létezése (majdnem) minden paraméterre

Befejezésként rátérünk a blokkrendszerek elméletének egy friss eredményére. A 3.2.3 tétellel megmutattuk, hogy az 1.2.2. tétel a $\lambda = 1$, $t = 2$, $k = 3$ esetben nem csak szükséges, hanem elégséges feltételeket is ad t-(v, k, λ)-rendszer létezésére.

Hosszú ideig nyitott kérdés volt, hogy ez általános esetben is igaz-e. Az nyilvánvaló, hogy a Steiner-hármasrendszerek létezésénél látott ekvivalenciához hasonló minden v-re nem várható. Ezt mutatja több korábbi példa is: láttuk, hogy $\mathrm{PG}(2, 6)$ és $\mathrm{PG}(2, 10)$ nem konstruálható meg. Megemlítjük még, hogy hosszú keresés után számítógépes eszközökkel sikerült kizárni $(22, 8, 4)$-rendszer létezését is [3].

Az általánosított probléma megoldása során az egyik legnagyobb előrelépés Wilson 1975-ös tétele volt [23]. Ez kimondja, hogy adott k, λ értékekre a 2.1.1-ben támasztott feltételek elégségesek (v, k, λ)-rendszer létezésére véges sok v kivételével, avagy másképp fogalmazva: a szükséges oszthatósági feltételek aszimptotikusan elégségesek.

Sokáig az sem volt nyilvánvaló, hogy milyen nagyobb t paraméterekre léteznek nemtriviális, azaz nem az 1.1.6 példának megfelelő rendszerek, illetve, hogy vannak-e egyáltalán ilyen nagyobb t-k. Ezt a kérdést Teirlinck oldotta meg 1987-ben, amikor is belátta, hogy minden t-re létezik nemtriviális t-(v, k, λ)-rendszer [22]. Ugyanakkor a tetszőleges paraméterezésre vett létezési kérdés irányában Terilinck módszerei látszólag zsákutcába vezetnek. Bizonyítása ugyanis igen specifikus és hatalmas v, k, λ értékekre alapszik, ezért egy Wilson-féle tétel kimondása reménytelen feladatnak bizonyul innen építkezve.

Teirlinck konstrukciója után sokáig nem született áttörő eredmény kérdés megfejtése irányában. Éppen ezért meglepő fejlemény, hogy Peter Keevash 2014-ben nemcsak hogy előrelépést tett a megoldás felé, hanem az aszimptotikus létezési problémát le is zárta minden paraméterezésre. Így hosszú idő után már tételként fogalmazhatjuk meg a következőt.

5.0.1. Tétel (Blokkrendszerek létezése)

Legyen $2 \leq t < k$ és $\lambda \in \mathbb{N}$. Ekkor $\exists v_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $v > v_0$-ra az oszthatósági feltételek teljesülése esetén létezik t-(v, k, λ)-rendszer.

A következőkben tehát ezen tétel Glock, Kühn, Lo és Osthus által tárgyalt bizonyítási módszerét körvonalazzuk [10]. Emellett nagy vonalakban kitérünk Keevash módszerére [14], végül ismertetjük Kuperberg, Lovett és Peled [15] eredményét.

Megjegyzés: A témakör feldolgozása során felhasználtuk Keevash „The existence of Designs” című előadását [11], és az ez alapján készült „Counting designs” [12], továbbá a „Hypergraph machings and designs” [13] című cikkeket is.

5.1. Absorption

Ezen szakasz fő célja, hogy bemutassuk [10] és [14] központi ötletét: a felszívó struktúra bevezetését.

Tekintsük a következő feladatot: találni akarunk adott G gráfon egy $K_k^{(t)}$-felbontást. Úgy szeretnénk ilyet keresni, hogy készítünk „mohó” módon egy közel optimális pakolást, majd ezt megpróbáljuk „kijavítani”, hogy felbontás legyen.

Tegyük fel, hogy adott egy módszer, aminek segítségével ilyen pakolást tudunk készíteni, azaz hogy $\mathcal{P}$ $o(|G|)$ sok él kivételével fedi G-t (vagyis $\frac{|\cup\mathcal{P}|}{|G|} \longrightarrow 1$, ha G élszáma tart a végtelenhez). Legyen $R := G - \cup\mathcal{P}$, azaz a fedetlen élek halmaza. Erre úgy gondolunk, mint a pakolás „maradéka”.

Problémát jelenthet a kijavítás során, hogy R méretét ugyan ismerjük ($|R| = o(|G|)$), a maradék szerkezetéről nem feltétlen tudunk sokat, így annak felbontását sem tudjuk megoldani. Ezt a következő módon orvosoljuk: vegyünk fel egy $A \subseteq G$ „felszívó halmazt”, majd G helyett alkalmazzuk $G - A$-ra a pakolási módszert.

Egy $A \subseteq G$ halmazt felszívó halmaznak nevezünk, ha

$$\begin{matrix} R \subseteq G \\ |R| = o(|G|) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad A \cup R\text{-nek létezik } K_k^{(t)}\text{-felbontása}$$

Valóban, ha A-t sikerül így választanunk, akkor segítségével bármilyen maradékot fel tudunk bontani. Legyen egy adott maradék ilyen felbontása $\mathscr{D}$. Ennek segítségével $\mathscr{P}$ kipótolható, azaz $\mathscr{P} \cup \mathscr{D}$ megadja G egy $K_k^{(t)}$-felbontását.

5.2. Komplexumok

Most rátérünk a bizonyítás eszköztárának felépítésére. Először bővítsük ki a hipergráfokra alkalmazott jelölésrendszert. Tegyük fel, hogy H és H' t-gráfok, továbbá legyen, $V := V(H)$, és $U, S \subseteq V$ csúcshalmazok, hogy $|S| \leq t$. Ekkor a következő jelöléseket értelmezzük:

$S \uplus L$: $L \subseteq H(S)$ esetén $S \uplus L = \{S \cup e : e \in L\}$, azaz H azon éleinek halmaza, melyekből L élei „készültek".

$H - H'$: Ez alatt azt a t-gráfot értjük, melynek élhalmaza $H \backslash H'$.

A bizonyítás induktív jellegű a t paraméterben, ez motiválja a következő fogalmak bevezetését.

5.2.1. Definíció: Adott $e \in H$ élre azt mondjuk, hogy i-szintű, ha $|e| = i$. Emellett $e \subseteq f, |e| = i, |f| = j$ esetén azt mondjuk, hogy e az f i-szintű leszármazottja, f pedig az e j-szintű őse ($i < j$). Ha $e' \neq e \subseteq f, |e'| = i$, akkor e'-t e f-ben vett i-szintű testvérének nevezzük.

A továbbiakban a „szintű" szót a rövidség érdekében sokszor elhagyjuk, és ha egyértelmű, a méretet is. Így tehát azt mondjuk, hogy e_0 e leszármazottja, ha $|e_0|$-leszármazottja. Hasonlóan járunk el az „ős" és „testvér" fogalmak esetén.

5.2.2. Definíció: A G hipergráfot komplexumnak nevezzük, ha bármely élére tartalmazza annak összes leszármazottját is.

Megjegyzés: 0-szintű él nyilván csak az $\emptyset$ lehet. Ez adott komplexumban minden esetben meg is jelenik, amennyiben annak van éle. Ellenkező esetben a komplexumot üresnek nevezzük.

A komplexumok egyszerű manipulációjának érdekében most ismét kiterjesztjük a jelölésrendszert. Legyen G komplexum, H t-gráf, F tetszőleges hipergráf.

$G^{(i)}$: G i-edik szintje, azaz az i-szintű éleiből álló i-gráf ($i \in \mathbb{N}_0$).

$G[H]$: Azon $e \in G$ élek halmaza, melyek összes t-szintű leszármazottja H-beli, vagy $|e| < t$. Ez a két tulajdonság egyben is megfogalmazható: $\binom{e}{t} \subseteq H$.

$G-H$: $G\big[G^{(t)} - H\big]$.

$F^{\leq}$: Az a hipergráf, mely F éleinek összes leszármazottját tartalmazza. Ez definíció szerint komplexum; elnevezése az F által generált komplexum.

K_v: Az v csúcsú teljes komplexum, azaz $\left(K_v^{(v)}\right)^{\leq}$

Vizsgáljuk meg a jelölések néhány egyszerű tulajdonságát. Fontos, hogy $G(S), G[U]\,, G[H]$ és $F^{\leq}$ mind komplexumot adnak eredményül, továbbá $G(S)$ pontosan akkor üres komplexum, ha S nem éle G-nek. Az is látszik, hogy $G[H]$ valóban megszorítás H-ra olyan tekintetben, hogy $(G[H])^{(t)} \subseteq H$. Végül megemlítjük, hogy $K_v^{(i)} = (K_v)^{(i)}$, így ez a jelölés konzisztens marad.

Megjegyzés: A vázlat során tárgyalt lépések alapján expliciten nem látszik, de a bizonyítás fontos eleme, hogy komplexumok metszete is komplexum (ahol két komplexum metszete alatt az élhalmazaik metszetét értjük).

5.3. A tétel kimondása

Az előző szakaszban felépítettük a gráfelméleti eszköztárát. Most definiálni fogjuk a komplexumok szükséges tulajdonságait a tétel kimondásához, majd kimondjuk azt. A Pippenger-tételhez hasonlóan ezen bizonyítás is valószínűségi eszközökkel dolgozik, így egy komplexum megfelelőségét ismét pszeudovéletlenségi feltételekkel fogjuk megadni.

5.3.1. Definíció: Legyen G v-csúcsú komplexum, $t < k \in \mathbb{N}_0$, és $0 \leq \varepsilon, d, \xi \leq 1$. Azt mondjuk, hogy G

$i)$ (ε, d, k, t)-reguláris, ha $\forall e \in G^{(t)}$ élre $\left|G^{(k)}(e)\right| = (d \pm \varepsilon)v^{k-t}$

$ii)$ $(\xi, k+t, t)$-sűrű, ha $\forall e \in G^{(t)}$ élre $\left|G^{(k+t)}(e)\right| \geq \xi v^k$

$iii)$ (ξ, k, t)-bővíthető, ha $G^{(t)} = \emptyset$, vagy $\forall e \in \binom{V(G)}{t}$ halmazra van legalább ξv^{k-t} sok $Q \subseteq V(G)\backslash e$ $(k-t)$-halmaz, hogy $\binom{Q \cup e}{t} \subseteq G^{(t)}$.

Itt (i) azt mondja ki, hogy a t-élek körülbelül regulárisak a k-ősök számára nézve. (ii) a t-élek $(k+t)$-őseinek számát korlátolja alulról. Végül (iii) azt mondja ki, hogy adott e (nem feltétlen G-beli) t-élre ha e-t hozzávennénk G-hez, akkor szintén hozzávehetnénk néhány k-élet úgy, hogy ezek hozzávételét nem gátolja a t. szint (azaz a ezen k-élek összes t-leszármazottja már a komplexum éle, legfeljebb e kivételével).

Míg az (i) tulajdonság elég szemléletes, (ii) és (iii) igen technikai jellegű. Jelentős szerepet játszanak azonban bizonyos módszerek alkalmazhatóságának biztosításában; ezekre majd a bizonyítás vázolása során térünk ki. Mindenesetre ez motiválja a következő fogalom bevezetését.

5.3.2. Definíció: G egy teljes (ε, ξ, k, t)-komplexum, ha létezik megfelelő ε, k, t, ξ és $d \geq \xi$, melyekre G (ε, d, k, t)-reguláris, $(\xi, k+t, t)$-sűrű és (ξ, k, t)-bővíthető. Továbbá G egy (ε, ξ, k, t)-komplexum, ha létezik olyan Y k-gráf, melyre $V(Y) = V(G)$, emellett $G[Y]$ egy teljes (ε, ξ, k, t)-komplexum.

A komplexumok Y gráffal való definiálása jelentős rugalmasságot biztosít a teljes komplexumokhoz viszonyítva; ezt a bizonyítás II. alszakaszában ki is használunk. Ellenben bár a struktúra rugalmas, nem elég „stabil". Ezt a problémát a szuperkomplexumok bevezetése orvosolja.

5.3.3. Definíció: Ha G komplexumra létezik ε, k, t, ξ, hogy $\forall i \in [t]_0$ és $\forall F \subseteq G^{(i)}$-re

$$1 \leq |F| \leq 2^i \quad \Longrightarrow \quad G_F := \bigcap_{f \in F} G(f) \text{ egy } (\varepsilon, \xi, k-i, t-i)\text{-komplexum}$$

akkor G-t (ε, ξ, k, t)-szuperkomplexumnak hívjuk

Belátható, hogy a szuperkomplexumok rendelkeznek a komplexumok rugalmasságával, emellett megfelelően stabilak olyan tekintetben, hogy adott szintjük kis részének eltávolítása nem módosítja túlzottan a paraméterezésüket.

Megjegyzés: Korábban megemlítettük, hogy komplexumok metszete is komplexum. Ez nyilván szuperkomplexumokra is fennáll, de ennél több is elmondható: szuperkomplexumok metszete szuperkomplexum.

Ezzel definiáltuk a tétel kimondásához használatos struktúrát. Most nézzük meg, mi az oszthatósági feltételek és a felbontás komplexumokra vett analógiája.

5.3.4. Definíció: Egy G komplexumra azt mondjuk, hogy $K_k^{(t)}$-osztható, ha a t-edik szintje az, azaz $G^{(t)}$ is $K_k^{(t)}$-osztható.

5.3.5. Definíció: Adott G komplexum esetén azt mondjuk, hogy a $\mathcal{P} \subseteq G$ részkomplexum egy $K_k^{(t)}$-pakolás G-ben, ha

- létezik $Y \subseteq G^{(k)}$, melyre $\mathcal{P} = Y^{\leq}$
- minden $e, e' \in \mathcal{P}^{(k)}$-ra $|e \cap e'| < t$

$\mathcal{P}$ egy $K_k^{(t)}$-felbontása G-nek, ha $\mathcal{P}^{(t)} = G^{(t)}$

Nem nehéz látni, hogy ez a definíció valóban a t-gráfokon vett a vett $K_k^{(t)}$-pakolás kiterjesztése. Ugyanis a $G^{(t)}$ gráfon egy k-él t-leszármazottjai pontosan egy $K_k^{(t)}$-gráfot alkotnak. Továbbá a második követelmény miatt bármely $e, e' \in \mathcal{P}$ k-élekre azoknak nincs közös t-leszármazottja, ami pontosan azt jelenti, hogy az Y elemeiből vett $K_k^{(t)}$ „leszármazott-halmazok" diszjunktak.

Most már készen állunk arra, hogy kimondjuk a bizonyítandó tételt

5.3.6. Tétel. *Minden $t \in \mathbb{N}$-re fennáll a következő:*

$(*)_t$ *Tegyük fel, hogy $2 \leq t < k$, és legyen $\frac{1}{v} \ll \varepsilon \ll \xi, \frac{1}{k} < 1$. Ekkor ha G egy $K_k^{(t)}$-osztható (ε, ξ, k, t)-szuperkomplexum, akkor G-nek van $K_k^{(t)}$-felbontása.*

A tétel segítségével tehát biztosíthatjuk egy $(k, t, 1)$-dizájn létezését $(k, t, 1)$-oszthatóság esetén. Azonban ebből még korántsem következik 5.0.1. ehhez ugyanis (k, t, λ)-dizájnra lenne szükségük. Továbbá (k, t, λ)-oszthatóságból nem következik a $(k, t, 1)$-oszthatóság, így a 5.3.6-t közvetlen nem is tudjuk alkalmazni 5.0.1 bizonyítása során. Ezen problémákat viszont könnyen kiküszöbölhetjük, a következő tételhez jutva.

5.3.7. Tétel. *Legyen $\frac{1}{v} \ll \varepsilon, \xi, \frac{1}{k}, \frac{1}{\lambda}$ és $t \in \left[k-1\right]$ olyan, hogy $2(2\sqrt{e})^t \varepsilon \leq \xi$. Továbbá legyen G egy (ε, ξ, k, t)-szuperkomplexum, melyre $|V(G)| = v$. Ekkor ha $G^{(t)}$ (k, t, λ)-osztható, akkor létezik (k, t, λ)-dizájnja.*

Eddig formálisan nem igazoltuk, egyszerűen csak elfogadtuk, hogy a vázolt gondolatoknak van értelme a blokkrendszerek szempontjából. Azonban K_v egy (k, t, λ)-dizájnja pontosan t-(v, k, λ)-rendszert definiál. Elegendő tehát belátni, hogy K_v egy megfelelő szuperkomplexum. Szerencsére az alábbi állítás könnyen ellenőrizhető.

5.3.8. Állítás. *Legyen $\frac{1}{v} \ll \frac{1}{k} < \frac{1}{t}$. Ekkor K_n egy $\left(0, \frac{0{,}99}{k!}, k, t\right)$-szuperkomplexum.*

Megjegyzés: Várható, hogy a teljes komplexum megfelelő szuperkomplexumot ad. Ugyanis elég belegondolni, hogy K_v pontosan az a $\left[v\right]$ csúcshalmazon generált véletlen gráf, ahol az élek megjelenésének valószínűsége $p = 1$. Így ha elfogadjuk, hogy a fejezet elején felírt követelmények valóban pszeudovéletlenséget definiálnak, akkor egy valódi „véletlen” gráfnak teljesítenie kell azokat.

5.4. A bizonyítás vázlata

A bizonyítás kiinduló ötletét — ugyan rendkívül felszínesen, de — már vázoltuk az 5.1 szakaszban. Adott tehát egy $G^{(t)}$ t-gráf; ezen szeretnénk találni egy olyan A részgráfot, hogy a $G^{(t)} - A$ gráfon egy megfelelően nagy $\mathcal{P}$ $K_k^{(t)}$-pakolást készítve $G^{(t)} - \cup\mathcal{P}$-nek létezik $K_k^{(t)}$-felbontása.

Ez azt jelenti, hogy két problémát akarunk megoldani:

$i)$ megfelelő A felszívó halmaz konstrukciója

$ii)$ olyan pakolási módszer készítése, mely megfelelő tulajdonságokkal rendelkező maradékot hagy

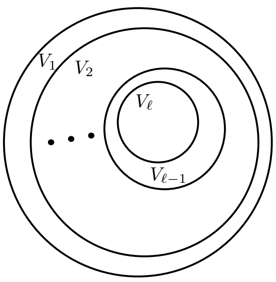
Tekintve, hogy pakolási eljárás R maradéka függ A-tól, A választása pedig függ R-től, a két gondolatmenet külön való kezelése, illetve fejlődésük útjának elválasztása nehéz. Mindenesetre a „megoldások” közlése mellett megpróbáljuk azok gondolatait megfelelően motiválni. Ez sokszor ismét a $t = 2, k = 3$ paraméterezés segítségével fog történni, ugyanis gráfok háromszögfelbontása könnyen átlátható példákra, illetve (véletlen) konstrukciókra ad lehetőséget.

Megjegyzés: Pontosan a szétválasztás nehézsége miatt nem definiáltuk még, hogy „megfelelő tulajdonságok” alatt mit értünk. Ugyanis csak a probléma részletesebb tárgyalása után, néhány bekezdéssel később tudunk követelményeket támasztani a maradék felé.

Kezdetben említsünk meg néhány ötletet, melyek a bizonyítás vázát adják. Először foglalkozzunk a felszívó halmaz konstrukciójával. A pakolási eljárás R maradékáról egyelőre feltesszük, hogy korlátos méretű. Ennélfogva A-t megpróbálhatjuk elkészíteni a következő módon: legyen $\mathcal{R}$ a korlátnak megfelelő részgráfok, azaz a lehetséges maradékok halmaza. Keressünk minden $R \in \mathcal{R}$-re diszjunkt A_R részgráfokat úgy, hogy A_R és $A_R \cup R$ is felbontható. Ekkor könnyen látható, hogy az $A = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} A_R$ választással megfelelő felszívó részgráfot kapunk.

Mint kiderül, tudunk készíteni olyan pakolási módszert, ami olyan maradékot hagy, hogy az rendelkezik az elvárt — bár még ki nem mondott — tulajdonságokkal, melyek segítségével ez a gondolatmenet kivitelezhető. Az A_R, majd az A halmaz konstrukcióját az IV. alszakaszban vázoljuk.

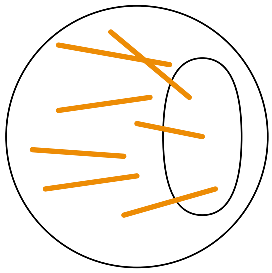
De mit is takarnak pontosan a ezek megfelelő tulajdonságok? A feladat leírása alapján arra gondolhatnánk, hogy a Rödl-nibble alkalmazása megfelelő, hiszen pontosan ilyen jellegű probléma megoldására vezettük be. Ugyanakkor ez bár korlátos méretű, de strukturálatlan — akár egész $V(G)$-t igénybe vevő — maradékot hagy maga után, így túl sok és sokféle A_R halmazt kéne készíteni.



Ennél szofisztikáltabb módszerre van tehát szükség, ahol nem csak a maradék mérete, hanem annak szerkezete is bizonyos korlátok közé van szorítva. Tekintsünk vissza a Pippenger-tétel bizonyítására. Itt a V_i csúcshalmazok „emeletekre” osztják a gráfot úgy, hogy egy emeletet felfelé lépve a csúcshalmaz μ-szeresére szűkül, azaz $|V_{i+1}| \approx \mu\,|V_i|$ (a nibble-lemmában $\mu = e^{-\varepsilon}$-t alkalmazunk).

Hasonló lépéseket fogunk végezni a jelenlegi probléma megoldása során is. Ugyanakkor azt is megköveteljük, hogy ne csak a következő emelet mérete legyen adott, hanem maga az emelet is. Látni fogjuk, hogy egy ilyen módszerrel valóban képesek leszünk megfelelő maradékot biztosítani. A megoldásra szolgáló struktúrát az I. alszakaszban mutatjuk be részletesebben.

Kiemelt figyelmet tulajdonítunk az emeletek lefedésének módszereire. Nevezzük az $i+1$. ***emelet peremének*** azon élek halmazát, melyek vagy teljesen $V_i \backslash V_{i+1}$-ben, vagy V_i és V_{i+1} között futnak (azaz a V_i-beli, de nem V_{i+1}-beli éleket). A bizonyítás legfontosabb kérdése, hogy hogyan tudjuk az emeletek peremét lefedni úgy, hogy a visszamaradó részgráf megfelelő paraméterekkel rendelkező (szuper)komplexum maradjon



Most is egyfajta felszívó stratégiát fogunk végrehajtani. Kiderül, hogy ebben a részfeladatban a Rödl-nibble (egy változata) már alkalmas eszköznek bizonyul. A perem nagy részének lefedését tehát ennek segítségével kivitelezzük. Ezt a lépést a III. alszakaszban tárgyaljuk. Nagyobb kihívásnak bizonyul a nibble maradékának lefedése; a megoldáshoz meg is fogjuk engedni, hogy az emelethez tartozó pakolás kis mértékben a következő emeletről is használjon éleket. A szükséges lemma a tétel bizonyításának legbonyolultabb része; a II. alszakaszban foglalkozunk vele.

Megjegyzés: Intuitív, hogy a peremek felbontásának feladatát szükséges ilyen — vagy legalábbis egyfajta — módon relaxálni. Ugyanis ellenkező esetben az eredeti feladattal megegyező jellegű és bonyolultságú problémát kapnánk részfeladatként.

I. Örvények létezése

Ahogy azt vázoltuk, az alszakasz célja egy lépcsőzetes struktúra bevezetése, mely biztosítja a II és III alszakaszok módszereinek alkalmazhatóságát minden emeleten. Legyen tehát G egy komplexum, melynek keressük egy $K_k^{(t)}$-felbontását. Precízebben a következőket akarjuk struktúrától megkívánni:

1. Definiál egy szűkülő csúcshalmaz-sorozatot, az ú.n. „emeleteket" (innentől ezeket jelöljük U_i-vel). A 0. emelet természetesen az egész komplexum, azaz $U_0 = V(G)$.
2. G bármely emeletre való megszorítása is komplexum, melynek paraméterezése „nem tér el túlzottan" az eredetitől. Ez szükséges, hogy minden emeleten újra végrehajthassuk a lépéseket, továbbá hogy elegendő emeletet tudjunk biztosítani.
3. Az emeletek peremén alkalmazni tudjuk III és II módszereit azok lefedésére.
4. A szűkülés mértéke adott, tehát $|U_i| \approx \mu\,|U_{i-1}|$. Továbbá a legfelső emelet (U_ℓ) korlátos méretű.

Hogyan álljuk neki egy ilyen struktúra elkészítésének, vagy legalábbis létezése belátásának? Egy megközelítés, hogy „konstruktív módon", adott emeletből a következőt próbáljuk meg legyártani. Tekintsük először hagyományos gráfok háromszögfelbontásának esetét. A motiváció kedvéért most csak az új szint méretével és regularitásával foglalkozunk.

Legyen G egy komplexum, $U := V(G)$, és tegyük fel, hogy adott háromszögek (azaz 3-élek) egy Y halmaza (és valamilyen d) úgy, hogy bármely $e \in G^{(2)}$ (hagyományos) él nagyjából $d\,|U|$ háromszögben szerepel (jelölés: $\deg_Y^{(3)}(e) \approx d\,|U|$). Most vegyünk egy $U' \subseteq U$ halmazt véletlenszerűen úgy, hogy bármely csúcsot μ valószínűséggel választjuk be. Ekkor várhatóan $|U'| \approx \mu\,|U|$.

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik az élek Y-ban vett háromszög-regularitása megszorítva a gráfot U'-re. Legyen $e \in G[U']$ tetszőleges. Tudjuk, hogy $\deg_Y^{(3)}(e) \approx d\,|U|$. Mikor van egy e-re illeszkedő Y-beli háromszög $Y[U']$-ben? e-t $G[U']$-ból választottuk, azaz $e \subseteq U'$, így a háromszög két csúcsa már biztosan U'-ben van. Következésképp a háromszög pontosan akkor van $Y[U']$-ban, ha a háromszög harmadik csúcsa is U'-beli. Ennek a valószínűsége U' véletlen választása miatt μ. Mivel ezt minden háromszög esetén elmondhatjuk, következik, hogy az e-re illeszkedő $Y[U']$-beli háromszögek száma várható értékben $\deg^3_{Y[U']} \approx \mu \cdot d\,|U| \approx d\,|U'|$.

Mint kiderül, ez a gondolatmenet megfelelő irányvonalat jelöl ki az általános t, k esethez is. Sőt, U' véletlen választása helyett elegendő feltennünk, hogy U' „úgy viselkedik, mint ha véletlen lenne". Ehhez bevezetjük csúcshalmazok véletlenségének fogalmát: azt mondjuk, hogy egy U' véletlen G-ben, ha

- $|U'| \approx \mu\,|V(G)|$
- vehető k-élek egy Y halmaza a következő tulajdonsággal: osztályozzuk Y éleit az U'-vel vett metszetméretük alapján. Ekkor az osztályok számossága körülbelül a véletlennek megfelelő, azaz binomiális eloszlást követ.

Ez utóbbi tulajdonság a korábbi Y háromszöghalmaz általánosítása. Ugyanis ha általános t, k-ra nézzünk a korábbi gondolatmenetet, akkor nem olyan egyszerű az Y-beli élek osztályozása, hogy egy él vagy $G[U']$-ben van, vagy nem. Ha vesszük tetszőleges $e \in G[U']^{(t)}$ élnek egy Y-beli k-ősét (legyen ez Q), akkor ennek U'-ből vett „kilógása" — azaz a $Q \cap (U \backslash U')$ halmaz mérete — bármilyen $i \in \left[k-t\right]_0$ szám lehet ($t = 2$, $k = 3$ esetén ez a halmaz $\{0, 1\}$, ezért redukálódik két esetre az érvelés).

Ismét tegyük fel, hogy $U' \subseteq V(G)$ véletlen (csúcsonként μ kiválasztási valószínűséggel), és nézzük meg, hogy adott $e \in G[U']^{(t)}$ élre mit mondhatunk az i-kilógású Y-beli k-őseinek számáról. Adott Q őst vizsgálva a kilógás mérete binomiális eloszlású $k - t$ és $(1 - \mu)$ paraméterekkel. Következik, hogy ekkor e i-kilógású Y-beli k-őseinek száma megközelítőleg

$$\binom{k-t}{i}(1-\mu)^{k-t-i}\mu^i \cdot |Y(e)|$$

Ennek a teljesülését tesszük fel tehát a véletlenség definíciójában.

Megjegyzés: A definícióban olyan technikai feltételek is szükségesek, melyek garantálják, hogy $G[U']$ szuperkomplexum is lesz megfelelő paraméterekkel; ezeket nem részletezzük.

A véletlenség fogalmának bevezetésével már nekiállhatunk a megfelelő lépcsőzetes struktúra definiálásának az $1-4$. pontok alapján.

Definíció: Adott G komplexum esetén $\left(U_i, i \in \left[\ell\right]_0\right)$ egy (μ, k, t, m)-örvény G-ben, ha

$(V1)$ $V(G) = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots \supseteq U_\ell$

$(V2)$ $|U_i| = \lfloor \mu\, |U_{i-1}| \rfloor \quad \forall i \in \left[\ell\right]$

$(V3)$ $|U_\ell| = m$

$(V4)$ $\forall i \in \left[\ell\right]$-re az U_i véletlen $G[U_{i-1}]$-ben (megfelelő paraméterekkel)

$(V5)$ $\forall i \in \left[\ell - 1\right]$-re az $U_i \backslash U_{+1}$ véletlen $G[U_{i-1}]$-ben (megfelelő paraméterekkel)

Valóban, a $(V1)-(V5)$ tulajdonságok megfelelően formalizálják az $1-4$. követelményeket. Sőt, a $(V2)$ és $(V3)$ követelmények erősebbek is olyan tekintetben, hogy pontos méreteket kívánnak meg. $(V4)$ és $(V5)$ az elkövetkezendő módszerek alkalmazhatóságáért felel; garantálják, hogy mindvégig szuperkomplexumokban dolgozunk.

Valószínűségi módszerekkel — mint ahogy az a motiváló gondolatmenetből sejthető — bizonyítható, hogy ilyen struktúra szuperkomplexumban létezik.

Megjegyzés: Pontosabban a következőt mutatjuk meg: legyen p annak a valószínűsége, hogy a véletlen választással kapott csúcshalmaz örvény. Ekkor $p \longrightarrow 1$, ha $v \longrightarrow \infty$.

Emeletek lefedése – A terv

Az előző alszakaszban ismertettük a bizonyítás vázát adó szerkezetet. A következő kettőben azt fogjuk megmutatni, hogy az örvény emeletei egyenként lefedhetők (a U_ℓ kivételével). Vizsgáljuk az i. emeletet ($i \neq \ell$). Az egyszerűség kedvéért legyen $U := U_i$, $U' := U_{i+1}$, az emelet részgráfja pedig $\tilde{G}$.

Mint ahogy korábban említettük, az emelet lefedése során a felszívó stratégia egy bizonyos változatát hajtjuk végre. Az ötlet tehát a következő:

1) Eltávolítunk egy alkalmas $H \subseteq \tilde{G}^{(t)}$ részgráfot.
2) Készítünk egy megfelelően nagy pakolást az emelet fennmaradó részén ($\tilde{G} - H$). A megmaradó fedetlen részgráf R.
3) Felbontjuk $H \cup R$ peremre eső részét, esetleg a következő emelet néhány élének segítségével.

Az ötlet emeletről emeletre való iterálásával látszik, hogy az örvény lefedésének problémája megoldható lenne. Innen származik a módszer elnevezése is: iterative absorption.

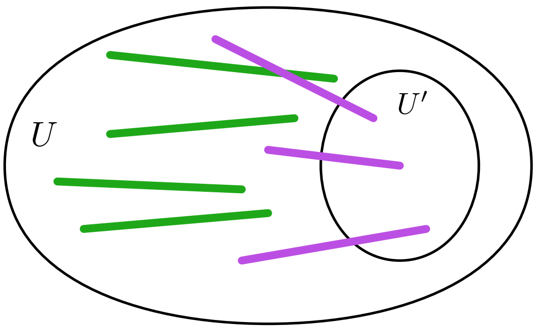
Tekintve, hogy (2)-re már van egy eszközünk, először (1)-gyel és (3)-mal foglalkozunk; ezek minthogy szervesen összefüggnek, közösen tárgyaljuk őket II-ben. Ezután a Rödl-nibble kapcsán felmerülő problémára térünk rá III-ban.

Megjegyzés: Az első bekezdésben szándékosan nem úgy definiáltuk $\tilde{G}$-t, mint $G[U]$. Ennek két oka volt. Először is a bizonyítás során ezen a ponton már nem G-n dolgozunk, hanem $G - A$-n. Ugyanakkor $\tilde{G}$ nem írható fel $(G - A)[U]$-ként sem (3) előző emeleten vett alkalmazása miatt. Igazolható viszont, hogy (3) „átnyúlásai" csak kis számban (és megfelelően szétoszlatva) történnek, így továbbra is megfelelő paraméterezésű szuperkomplexumon fogunk dolgozni.

II. Lefedési lemma

Ezen lemma bizonyítása [10] legtechnikásabb része. Megpróbáljuk tehát vázlatosan, azonban az ötletet megfelelő mélységig átadva közölni azt. Először ismét a háromszögfelbontás esetét vizsgáljuk, majd ebből általánosítunk tetszőleges t, k paraméterekre.

Az emelet peremén kétféle él található: vannak $U \setminus U'$-ben futó élek, továbbá $U \setminus U'$ és U' között futók. Nevezzük az előbbieket ***gyűrűéleknek***, utóbbiakat ***keresztéleknek***. Minthogy elsődlegesen a peremet szeretnénk lefedni, legyen H olyan, hogy $\tilde{G}[U'] \subseteq H$, ezzel kizárva, hogy a pakolási eljárás U'-ben futó éleket használjon. Vegyük fel H-ba keresztélek egy alkalmas halmazát is későbbi használat céljából.



Megjegyzés: Az ábrán a gyűrűélek a zöld, a keresztélek a lila típusú élek. Az ábra nem mutatja jól az arányokat, hiszen μ jóval közelebb áll 1-hez.

Most tegyük fel, hogy már találtunk egy megfelelő méretű pakolást $\tilde{G} - H$-n, melynek maradéka R (ekkor R a peremen van). A fedési stratégiánk R-re a következő: először kezeljük a gyűrűéleket H segítségével. Ezután foglalkozunk az összes fedetlen keresztél lefedésével. $\tilde{G}$-t innentől „frissítjük" a jelölés egyszerűsége kedvéért, azaz mindig pontosan a fedetlen élek szerepelnek benne (tehát már a „megfelelő méretű pakolás" sem szerepel benne).

Megjegyzés: A H halmazt a gyűrűélek lefedésére tartjuk fenn. Így a második lépésben már a H-ban szereplő keresztéleket is le akarjuk fedni.

Az első lépést mohó módon végezzük: sorban veszünk $ab \in R$ gyűrűéleket, és keresünk hozzájuk $c \in U$ csúcsot, hogy abc háromszög $\tilde{G}$-beli, majd felvesszük azt a pakolásba. Ezt végezzük addig, ameddig nem fedtünk le minden gyűrűélet háromszöggel. Ha H-t jól választottuk, az eljárás sosem akad meg.

Most térjünk rá a második lépésre. Vegyünk egy ab keresztélet ($a \in U \backslash U', b \in U'$); ezt csak úgy tudjuk lefedni, hogy találunk egy $c \in U'$ csúcsot úgy, melyre abc háromszög (és minden éle fedetlen); ekkor bc él U'-ben fut. Ugyanakkor az összes a-végű keresztélet ilyen módon tudjuk csak fedni, és a fedések során használt bc-típusú éleknek függetlennek kell lennie. Vegyük észre, hogy ezen élek egy teljes párosítást kell, hogy meghatározzanak a $\tilde{G}$-beli szomszédságán. Így ahelyett, hogy a keresztéleket egyenként fognánk le, vegyük inkább sorra azok U-ba eső csúcsait. Adott a csúcsra keressünk egy teljes párosítást annak $\tilde{G}(a)$ szomszédságán, majd az összes ilyen élet a-val kiegészítve helyezzük a pakolásba.

Hasonló gondolatmenettel operál az általános t, k eset. A gyűrűélek ekkor ugyanúgy a teljesen a peremen (azaz $\tilde{G} - \tilde{G}[U']^{(t)}$-ben) futó t-élek. A keresztélek definíciója is analóg a motiváló esettel, ugyanakkor több kategóriára bontjuk őket az alapján, hogy milyen arányban oszlanak meg az él csúcsai U és $U \backslash U'$ között: egy e élet i típusúnak nevezünk, ha $|e \cap U| = i$.

Először ismét R gyűrűéleinek — azaz a 0 típusú élek — lefedésével kezdjük. Ehhez megint szükséges, hogy k-élek egy olyan halmaza szerepeljen H-ban, mely segítségével bármilyen (korlátos méretű) maradék esetén képesek legyünk a gyűrűéleket kiterjeszteni $K_k^{(t)}$-kká.

Most rátérünk a keresztélek fedésére. Ezt típus szerint növekvő sorrendben kivitelezzük. Legyen $i \in [t-1]$, és tegyük fel, hogy minden $i' \in [i-1]_0$-re már az összes i' típusú élet lefogtuk. A motiváló gondolatmenet a következő módon általánosodik: tekintsünk egy S $(t-i)$-élet. Ekkor $\tilde{G}[U']$ fedetlen részén készítve egy $K_{k-(t-i)}^{(i)}$-felbontást (legyen ez $\mathcal{D}_S$), $S \uplus \mathcal{D}_S$ egy pakolást ad $\tilde{G}$-ben, mely lefogja az összes S-t tartalmazó i típusú keresztélet. (Itt S a példában a csúcsnak (1-él), $\mathcal{D}_S$ a szomszédságon vett teljes párosításnak felel meg.)

Megjegyzés: Az i paraméter szerinti növekvés indokolt a módszer szempontjából. Ugyanis ekkor a választott S-ek mérete monoton csökken, következésképp tudjuk, hogy $\tilde{G}(S)$ mindig U'-beli.

Az indoklás során elsőre gyanúsnak tűnhet, hogy a $K_{k-(t-i)}^{(i)}$-felbontás feladatával nem foglalkozunk mélyebben, miközben pontosan egy felbontási probléma bizonyításán dolgozunk. Azonban ezt a feladatot valójában már meg tudjuk oldani, ugyanis a bizonyítás induktív voltából adódóan $(*)_i$-t már beláttuk minden $i < t$-re.

Megjegyzés: A megvalósítás során gondot jelent, hogy a különböző $S \uplus \mathcal{D}_S$ halmazok túlságosan eltorzíthatják egy később vizsgálandó S'-re $\tilde{G}(S')$-t; előfordulhat, hogy ez a szuperkomplexum már nem fog megfelelő paraméterekkel rendelkezni. A probléma kiküszöbölhető, ha először az i méretű S-ek csak egy alkalmas részhalmazát kezeljük a fent vázolt módon, majd ezek után foglalkozunk a többivel.

A szakasz eredményét nagy vonalakban a következőképp tudjuk megfogalmazni:

Lefedési lemma. *Alkalmas szuperkomplexumhoz létezik H részgráf, hogy az eljárás alkalmazható. Továbbá az eljárás után visszamaradó részgráf is megfelelő paraméterezésű szuperkomplexum, immár $G[U']$-ben.*

III. Fokozott nibble

Az alszakaszban rátérünk az emelet nagy részét lefedő pakolás problémájára. Erre már adott egy eszközünk: a Rödl-nibble. Azonban ezt jelenlegi formájában alkalmazva a G paraméterezése túlságosan gyorsan gyengülne, így nem tudnánk megfelelően sokszor iterálni a módszereket az örvény végállapotának, azaz $|U_\ell| = m$ eléréséhez.

A definícióból következik, hogy amennyiben G egy (ε, ξ, k, t)-szuperkomplexum, akkor tetszőleges $\varepsilon' \geq \varepsilon$, $\xi' \leq \xi$ esetén $(\varepsilon', \xi', k, t)$-szuperkomplexum is. Azonban a komplexumok sűrűségi tulajdonságának következtében „fokozhatjuk” is a regularitást ξ csökkentésével.

Lemma (komplexumok regularitásának fokozása)

$\frac{1}{v} \ll \varepsilon, \xi, \frac{1}{k}$ és $t \in [k-1]$. Tegyük fel, hogy $2(2\sqrt{e})^t \varepsilon \leq \xi$, és legyen $\xi' = 0.9\left(\frac{1}{4}\right)^{\binom{k+t}{k}} \xi$. Ekkor ha G egy v csúcsú (ε, ξ, k, t)-komplexum, akkor $(v^{-1/3}, \xi', k, t)$-komplexum is. Továbbá ha G (ε, ξ, k, t)-szuperkomplexum, akkor $(2v^{-1/3}, \xi', k, t)$-szuperkomplexum is.

A lemma bizonyítása során kihasználjuk a komplexum rugalmas definícióját olyan tekintetben, hogy megváltoztatjuk a mögötte álló teljes komplexumot meghatározó Y élhalmazt. Először tegyük fel, hogy G egy teljes komplexum. A kiinduló ötlet, hogy keresünk egy tört-$K_k^{(t)}$-felbontást, azaz egy olyan $\psi : G^{(k)} \to [0, 1]$ függvényt, mellyel minden e t-élre

$$\sum_{e \subseteq Q \in G^{(k)}} \psi(Q) = 1$$

Ezután ha ψ-t úgy értelmezzük, mint a k-élek kiválasztási valószínűségét, meg tudunk határozni egy $Y \subseteq G^{(k)}$ élhalmazt, melyre teljesül, hogy $G[Y]$ egy teljes $(v^{-1/3}, \xi', k, t)$-komplexum. Ebben az érvelésben használjuk ki a teljes komplexumok sűrűségi tulajdonságát.

Megjegyzés: A törtfelbontás készítésének feladatával nem foglalkozunk; ez [10] írásakor már megoldott probléma volt. Továbbá fontos megemlíteni, hogy a bizonyítás valójában nem törtfelbontásokkal, hanem ún. kiegyensúlyozott törtfedésekkel dolgozik. Ez annyival többet enged meg, hogy a $\sum \psi(Q)$ összeg értéke nem feltétlen 1, hanem valamilyen c konstans. Ugyanakkor nyilván $\psi' = c\psi$ biztosítja ekkor is a kívánt függvényt.

Most ha G-ről csak azt tesszük fel, hogy komplexum, akkor definíció szerint találunk olyan Y k-szintű részgráfot, melyre $G[Y]$ teljes komplexum. Az előbbi érvelés alapján ekkor megadhatunk egy megfelelő $Y' \subseteq Y$ részgráfot, hogy G definíciójában az Y-t Y'-re cserélve pontosan a lemma állítását kapjuk.

A gondolatmenet átültethető szuperkomplexumokra is, ugyanis az ezek definíciójában megjelenő G_F komplexumokra alkalmazható a lemma. Ekkor $(2v^{-1/3}, \xi', k, t)$-szuperkomplexumot kapunk (ha v elegendően nagy); a tétel bizonyítása során valójában ezt a verziót használjuk.

Most ha veszünk egy G komplexumot, alkalmazzuk rá a fokozási lemmát, majd a Pippenger-tételt, a következő eszközt kapjuk.

Fokozott nibble. *Legyen* $\frac{1}{v} \ll \gamma, \varepsilon \ll \xi, \frac{1}{k}$ *és* $t \in \left[k-1\right]$. *Tegyük fel, hogy* G *egy* v *csúcsú* (ε, ξ, k, t)-*szuperkomplexum. Ekkor létezik* G*-ben olyan* $\mathcal{P}$ $K_k^{(t)}$*-pakolás, melyre* $\Delta(G^{(t)} - \mathcal{P}^{(t)}) \leq \gamma v$.

Megjegyzés: A Pippenger-tétel általunk bemutatott alakja nem maximális fokot, hanem méretet korlátol, így ez a lemma nem kapható meg belőle közvetlen. Az itt szükséges verzióhoz a tétel N. Alon és R. Yuster által tárgyalt általánosítására [2] kell alkalmaznunk a 4.2 szakasz gondolatmenetét.

Az emeletek lefedése – A végrehajtás

Ezennel kijelenthetjük, hogy a peremek lefedésének problémáját megoldottuk. Valóban, vizsgáljuk a i. emeletet. Ekkor $\tilde{G}$ egy szuperkomplexum a lefedési lemma $(i-1)$. emeletre vett alkalmazása miatt (illetve i = 0 esetén $\tilde{G} = G$, így nyilván ekkor is szuperkomplexum). A lefedési lemma alapján tehát kapunk egy $\tilde{H} \subseteq \tilde{G}^{(t)}$ gráfot.

Most alkalmazzuk fokozott nibble-t $\tilde{G} - \tilde{H}$-re, ezzel konstruálva egy $\mathcal{P}_i$ pakolást és egy $\tilde{R}$ maradékot. Ez megfelel a lefedési lemma követelményeinek, így vehető egy olyan $\mathcal{P}'_i$ pakolás, hogy $\tilde{G}^{(t)} - {\mathcal{P}_i}^{(t)} - {\mathcal{P}'_i}^{(t)}$ összes éle már teljes egészében U_{i+1}-ben fut. Így továbbléphetünk a következő emeletre.

Sorban hajtsuk végre ezt az eljárást az emeletekre. Végeredményül kapunk egy

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}_0 \uplus \mathcal{P}'_0 \uplus \cdots \uplus \mathcal{P}_{\ell-1} \uplus \mathcal{P}'_{\ell-1}$$

pakolást, továbbá egy olyan G_ℓ szuperkomplexumot, rendelkezik azon szükséges tulajdonságokkal, melyek lehetővé teszik a következő alszakasz módszerének megvalósítását.

IV. Kizárólagos felszívók

Mint ahogy az elején megemlítettük, G_ℓ lefedése azon alapszik, hogy A-t már kezdetben úgy választjuk ki, hogy legyen egy speciális A_{G_ℓ} részgráf, amivel együtt felbontható. Most tehát azzal foglalkozunk, hogy ilyen A-t hogy választhatunk.

Definíció: Legyen adott G, $t < k$ esetén azt mondjuk, hogy az $R \subseteq G^{(t)}$ gráfnak A_R egy (kizárólagos) $K_k^{(t)}$-felszívója, ha A_R diszjunkt R-től, továbbá A_R-nek és $R \cup A_R$-nek is létezik $K_k^{(t)}$-felbontása.

Innentől a rövidség és a t, k rögzítettségéből adódó egyértelműség miatt csak azt mondjuk, hogy A_R R egy felszívója.

Először foglalkozzunk a kizárólagos felszívók konstrukciójával. Adott R lefedésére a következő a stratégiánk: keresünk egy könnyen felbontható részgráfot, amivé „át tudjuk alakítani” R-t, ezzel a feladatot triviálissá téve. Az átalakítás lépéséhez a következő fogalom lesz segítségünkre.

Definíció: Legyen $H, H' \subseteq G^{(t)}$. Azt mondjuk, hogy $T \subseteq G^{(t)}$ egy (H, H')-transzformer, ha $G[H \cup T]$-nek és $G[T \cup H']$-nek is van $K_k^{(t)}$-felbontása. A T részgráfot ekkor $T_{H,H'}$-vel jelöljük.

A definícióból látszik, hogy $T_{H,H'}$ valóban képes „átalakítani” részgráfokat a felbontás problémájára nézve. Ugyanis ha le szeretnénk fedni H-t, akkor tőle diszjunkt H' esetén $H \cup T_{H,H'} \cup H'$ segítségével a problémát átvezethetjük H' lefedésére ($H \cup T_{H,H'}$ felbonthatósága alapján).

Nyilván H szerepét egy R maradék fogja játszani. Adódik a kérdés, hogy adott H-ra mi a megfelelő H'. Jó megoldásnak bizonyul ú.n. kanonikus részgráfok keresése. Ezeket S_r-rel jelöljük, „kanonikusságuk” pedig két okból adódik:

- triviálisan felbonthatók
- ha $|R| = r$, akkor létezik T_{R,S_r}

A szuperkomplexumok bővíthetőségi tulajdonságának (és a tétel induktivitásának) köszönhetően megmutatható, hogy kanonikus részgráfok és a megfelelő transzformerek is léteznek. Ekkor tehát jó A_R kizárólagos felszívót kapunk a következő alakban:

$$A_R := T_{R,S_{|R|}} \cup S_{|R|}$$

Megjegyzés: $T_{R,S_{|R|}}$, és így A_R sem egyértelműen meghatározott; több megfelelő A_R halmaz található.

Most konstruáljuk meg A-t. Naiv hozzáállással vehetnénk a

$$A := \{A_R : R \text{ potenciális maradék}\}$$

halmazt. Ugyanakkor korántsem biztos, hogy ez megfelelő, mivel a különböző A_R halmazok összemetszhetnek, ezzel elrontva a teljes halmazra nézett felbonthatóságot. Célravezetőbb egy iteratív gondolatmenet: vegyük sorra a lehetséges R maradékokat, majd adott R-re A_R találása után vegyük ki azt G-ből, ezzel garantálva, hogy semelyik két A_R nem metsz össze.

Megjegyzés: Az eddigi eljárások komplexumokra is működnének, ezen konstrukció miatt szükséges viszont hogy szuperkomplexumban dolgozzunk. Az A_R halmazok folyamatos eltávolítása miatt ugyanis nagy szerepet játszik a definíciónál megemlített „stabilitás".

A bizonyítás lezárása

Bemutattuk tehát a felbontáshoz szükséges összes eszközt. Nincs más hátra, mint alkalmazni őket a fejezet elején tárgyalt sorrendben.

Adott egy G szuperkomplexum. Ekkor ehhez I. alapján találunk egy örvényt, utána pedig IV. módszereinek segítségével konstruálhatunk egy A felszívó halmazt. $G - A$ is megfelelő paraméterezésű szuperkomplexum, így sorban lefedhetjük az örvény peremeit a fokozott nibble és a lefedési lemma ismételt alkalmazásával.

Az iteráció végeztével kapunk egy $R \subseteq (G - A)[U_\ell]$ maradékot, illetve egy $\mathcal{P}$ pakolást, mely már minden R-en kívüli t-élet fog. Befejezésként A konstrukciójánál fogva $A \cup R$-nek van felbontása; legyen ez $\mathcal{D}$. Ekkor $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ felbontása G-nek, ezzel bizonyítva a 5.3.6 tételt.

Megjegyzés: Fontos megjegyezni, hogy a vázlat során rengeteg részletre nem tértünk ki. Ezek közül az egyik legfontosabb, hogy a bizonyítás során ahol szükséges, hogy a komplexum, amin dolgozunk, az $K_k^{(t)}$-osztható. Illetve a lemmák bizonyítása során azt is meg kell mutatni, hogy a oszthatósági feltételek nem sérülnek (ez legtöbbször a valószínűségi alapú technikai lemmák része).

5.3.7 bizonyítása

A 5.3 szakaszban megemlítettük, hogy a 5.3.6 tételből még nem következik 5.0.1 egyenes ágon; ilyen célból volt szükséges 5.3.7 kimondása. Most tehát ennek bizonyítására térünk ki. Szerencsére némi ügyeskedéssel ez egyszerűen következik majd 5.3.6-ből.

A bizonyítás menete a következő:

1. Particionáljuk megfelelően a t. szintet G_1 és G_2 t-gráfokra
2. Helyezzük át G_2 egy L^* részét G_1-be, hogy ezzel G_2 $K_k^{(t)}$-oszthatóvá váljon. Legyen $G_1' := G_1 \cup L^*$ és $G_2' = G_2 - L^*$.
3. Vegyük G_1'-nek diszjunkt $L_1, \dots, L_\lambda$ részeit úgy, hogy bármelyet eltávolítva G_1'-ből $K_k^{(t)}$-osztható részgráfot kapunk. Jelöljük ezeket a következőképp: $R_i := G_1' - L_i$.
4. Belátható, hogy az L_i részgráfokat G_2'-höz véve ismét $K_k^{(t)}$-osztható gráfot kapunk. Legyen tehát $G_2'' := G_2' \cup L_1 \cup \dots \cup L_\lambda$.
5. Keressünk 5.3.6 segítségével $(\lambda$-$1)$ darab k. szinten diszjunkt $K_k^{(t)}$-felbontást $G[G_2']$-höz; legyenek ezek $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{\lambda-1}$. Továbbá legyen $G[G_2'']$ egy felbontása $\mathcal{D}^*$. Végül vegyünk fel minden R_i-hez egy $\mathcal{D}_i'$ felbontást.
6. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy a következő gráf megfelelő (k, t, λ)-dizájnt ad G-re:

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_{\lambda-1} \cup \mathcal{D}^* \cup \mathcal{D}_1' \cup \dots \cup \mathcal{D}_\lambda'$$

A bizonyítás központjában egy olyan lemma áll, ami G szuperkomplexum esetén garantálja egy olyan $L \subseteq G^{(t)}$ korlátolt maximális fokú halmaz – pontosabban melyre $\Delta(L) \ll |V(G)|$ fennáll – létezését mely eltávolításával $G^{(t)}$ már $K_k^{(t)}$-osztható lesz. Sőt, a lemma ennél többet biztosít: olyan esetben is létezik ilyen L, ha egy $H \subseteq G^{(t)}$ halmaz eltávolítását megtiltjuk (melyre szintén $\Delta(H) \ll |V(G)|$ fennáll). Ezen lemma segítségével tehát tudunk megfelelő L halmazokat választani a 2. és 3. lépésben

Megjegyzés: A 3. lépésben a diszjunktságot az előző lemma H tiltóhalmazával garantáljuk; minden L választása után hozzáadjuk azt ehhez. Az 5. lépésben az A_R-ek választásánál látott érveléshez hasonlót használunk.

5.5. Kapcsolódó eredmények

Egy alternatív bizonyítás

Mint ahogy azt a fejezet elején megemlítettük, nem [10] volt az első sikeres bizonyítás 5.0.1-re. Ez az eredmény [14]-nak tulajdonítható. Keevash bizonyítása, bár ugyanúgy a felszívó módszerből indul ki, más szellemiségű.

Láttuk, hogy [10] stratégiája kombinatorikai véletlenségen alapszik; ilyen okból szükséges az iterativitás (és a fokozás), hogy az ebből adódó hibahatárt a folyamat közben tudjuk csökkenteni. Ezzel szemben [14] nem egy véletlenített kombinatorikai, hanem egy véletlenített algebrai struktúrát vesz kiindulásként; beágyazza a csúcshalmazt egy testbe, majd ez alapján választ A felszívó halmazt.

Az algebrai struktúrák igen szabályosak, ezért természetes eszközként adódnak felszívó halmaz készítésére. Wilson 2-rendszerekre vett bizonyítása is hasonló — bár jóval egyszerűbb — eszközt alkalmaz. Keevash megfogalmazása szerint egy algebrai módon konstruált halmaz „rendkívül gazdag lokális módosítási lehetőségek terén”, ez teszi alkalmassá a technikát felszívó struktúra generálására.

Egy alternatív tétel

Fontos megemlíteni, hogy 2013-ban Kuperberg, Lovett és Peled szintén bizonyított egy 5.0.1-hez látszólag nagyon hasonló eredményt. Belátták ugyanis, hogy minden $2 \leq t < k < v$ esetén létezik t-(v, k, λ)-rendszer valamilyen λ-ra [15].

A bizonyítás ugyanakkor — [22]-hez hasonlóan — nagyon specifikus λ-t határoz meg, emiatt paraméterezések csak egy szűk családjára mondja ki a létezést. Következésképp a tétel valójában nem tekinthető hasonló jellegűnek [14] és [10] eredményeihez; mondhatni inkább „kiegészíti” ezeket.

5.6. Kitekintések

Ezzel blokkrendszerek létezésének kérdése lezárult. Ugyanakkor témakör — mint ahogy az a matematikában megszokott — még korántsem merült ki. Az 5.0.1 tételben például v_0 létezését ugyan tudjuk, viszont adódik a kérdés, hogy ennek méretét meg tudjuk-e becsülni, vagy esetleg pontosan meghatározni azt.

Hasonlóan érdekes — bár a szakdolgozat során nem tárgyalt — kérdés, hogy hány darab különböző t-(v, k, λ)-rendszer létezik adott paraméterekre. Ezen kérdéskör vizsgálatában hasznosnak bizonyult [15] megközelítése. Az aszimptotikus (vagy esetleg pontos) formula problémája azonban továbbra is nyitott.

Ugyanígy feltehetők ezek a kérdések speciális paraméterezések esetén is. Továbbá a hipergráfos általánosításnak köszönhetően tetszőleges F-pakolás problémája is vizsgálható ilyen szempontok szerint.

Irodalom

[1] N. Alon és J. H. Spencer. *The Probabilistic Method.* 3rd ed. Wiley, 2008. ISBN: 978-0-470-17020-5.

[2] N. Alon és R. Yuster. „On a Hypergraph Matching Problem”. *Graphs and Combinatorics* 21.4 (2005. dec.), 377–384. old. ISSN: 1435-5914. DOI: 10.1007/s00373-005-0628-x.

[3] R. Bilous, C. W. H. Lam, L. Thiel, P. C. Li, G. H. J. van Rees, S. P. Radziszowski, W. H. Holzmann és H. Kharaghani. „There is no 2-(22,8,4) block design”. *Journal of Combinatorial Designs* 15.3 (2007), 262–267. old. DOI: https://doi.org/10.1002/jcd.20132.

[4] R. C. Bose. „A Note on Fisher’s Inequality for Balanced Incomplete Block Designs”. *The Annals of Mathematical Statistics* 20.4 (1949), 619–620. old. DOI: 10.1214/aoms/1177729958.

[5] P. J. Cameron és J. H. van Lint. *Designs, Graphs, Codes and their Links.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1991. DOI: 10.1017/CBO9780511623714.

[6] S. Chowla és H. J. Ryser. „Combinatorial Problems”. *Canadian Journal of Mathematics* 2 (1950), 93–99. old. DOI: 10.4153/CJM-1950-009-8.

[7] C. J. Colbourn és J. H. Dinitz. *Handbook of Combinatorial Designs.* CRC, 2006. ISBN: 9780429138485. DOI: https://doi.org/10.1201/9781420010541.

[8] P. Erdős és H. Hanani. „On a limit theorem in combinatorical analysis”. *Publ. Math Debrecen* 10 (1963), 10–13. old. DOI: 10.5486/PMD.1963.10.1-4.02.

[9] Z. Füredi. „Matchings and covers in hypergraphs”. *Graphs and Combinatorics* 4.1 (1988. dec.), 115–206. old. ISSN: 1435-5914. DOI: 10.1007/BF01864160.

[10] S. Glock, D. Kühn, A. Lo és D. Osthus. „The Existence of Designs via Iterative Absorption: Hypergraph F-designs for Arbitrary F”. *Memoirs of the American Mathematical Society* 284.1406 (2023). DOI: https://doi.org/10.1090/memo/1406.

[11] P. Keevash. *„The Existence of Designs” előadás, Israel Institute for Advanced Studies.* 2015. URL: https://www.youtube.com/watch?v=tN6oGXqS2Bs.

[12] P. Keevash. „Counting designs”. (2015). arXiv: 1504.02909 [math.CO].

[13] P. Keevash. „Hypergraph matchings and designs”. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2018)*, 3113–3135. old. DOI: 10.1142/9789813272880_0174.

[14] P. Keevash. „The existence of designs”. (2019). arXiv: 1401.3665 [math.CO].

[15] G. Kuperberg, S. Lovett és R. Peled. „Probabilistic existence of regular combinatorial structures”. *Geometric and Functional Analysis* 27.4 (2017. júl.), 919–972. old. ISSN: 1420-8970. DOI: 10.1007/s00039-017-0416-9.

[16] C. W. H. Lam, L. Thiel és S. Swiercz. „The Non-Existence of Finite Projective Planes of Order 10”. *Canadian Journal of Mathematics* 41.6 (1989), 1117–1123. old. DOI: 10.4153/CJM-1989-049-4.

[17] J. H. van Lint és R. M. Wilson. *A Course in Combinatorics.* Cambridge University Press, 2001. ISBN: 9780511987045. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511987045.

[18] E. Moorhouse. *Projective Planes of Small order.* URL: https://ericmoorhouse.org/pub/planes/.

[19] V. Rödl. „On a Packing and Covering Problem”. *European Journal of Combinatorics* 6.1 (1985), 69–78. old. ISSN: 0195-6698. DOI: 10.1016/S0195-6698(85)80023-8.

[20] H. Ryser. *Combinatorial Mathematics.* The Carus Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1963. ISBN: 9781614440147. DOI: https://doi.org/10.5948/UPO9781614440147.

[21] T. Szőnyi. *Szimmetrikus struktúrák.* Typotex Kiadó, 2014. ISBN: 978-963-279-258-3. URL: https://edu.interkonyv.hu/konyvek/szonyi-tamas-szimmterikus-strukturak/.

[22] L. Teirlinck. „Non-trivial t-designs without repeated blocks exist for all t”. *Discrete Mathematics* 65.3 (1987), 301–311. old. ISSN: 0012-365X. DOI: 10.1016/0012-365X(87)90061-6.

[23] R. M. Wilson. „An existence theory for pairwise balanced designs, III: Proof of the existence conjectures”. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 18.1 (1975), 71–79. old. ISSN: 0097-3165. DOI: 10.1016/0097-3165(75)90067-9.