A Színes Carathéodory-Tétel

Nagy Szabolcs

Témavezető:
Király Tamás

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Operációkutatási Kar

NYILATKOZAT

Név: Nagy Szabolcs Ákos

ELTE Természettudományi Kar, szak: Alkalmazott Matematikus

NEPTUN azonosító: LQV1AA

Szakdolgozat címe:
A Színes Carathéodory-Tétel

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. 06. 04.

Nagy Sza

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A tétel egy dióhéjban

A dolgozat témája a Színes Carathéodory-Tétel, amely, mint az a találó nevéből is sejthető, a Caratheodory-tétel egy általánosítása.

Röviden összefoglalva az eredeti tétel azt mondja ki, hogy ha egy d-dimenziós ponthalmaz konvex burka tartalmaz egy pontot, akkor ezt a pontot megkaphatjuk a halmaz legfeljebb $d+1$ pontjának konvex kombinációjaként is.

A tétel színes verziójában nem csak egy, hanem több, „különböző színű" ponthalmazról van szó. A színes tétel azt mondja ki, hogy ha elég sok külöböző színű halmazunk van, amely mind tartalmazza az origót a konvex burkában, akkor mutatható olyan, csupa különböző színű pontokból álló ponthalmaz, amely szintén tartalmazza az origót a konvex burkában. Megjegyzendő, hogy ha a különböző színű ponthalmazok mind ugyanazokat a pontokat tartalmazzák, akkor ez ugyanazt jelenti, mint a színtelen változat.

A tételt Bárány Imre magyar matematikus bizonyította be 1981-ben. Bárány Imrének szakterülete a diszkrét geometria, és ez csak egyike azon sok eredménynek, amit neki köszönhetünk ebben a témakörben. A tételt sok más, hasonló jellegű probléma megoldásában alkalmazták, illeteve próbálták alkalmazni azóta, és már ennek a tételnek is léteznek általánosabb verziói.

Habár a színes ponthalmaz létezése egyértelműen bizonyítva van, a mai napig nem világos, hogy létezik-e polinomiális időben futó algoritmus, ami meg is találná azt. Az input bizonyos „szépségi" tulajdonságait feltéve, illetve „elég közeli" megoldás keresésekor tudunk egész atékony algoritmust mutatni, illetve bizonyos speciális esetekben is ismertek jó módszerek, de az általános feladatot még mindig nem tudjuk jól megoldani.

A dolgoztat céljai: Ebben a dolgozatban főként ismertető jellegel vázoljuk a Színes Carathéodory-Tétel témakörét. Precízen be fogjuk vezetni a releváns tételeket, és bemutatjuk ezeknek egy-egy egyszerűbb bizonyítását.

Vázolunk néhány alapvető feladaton vett alkalmazást, illetve néhány elvontabb, más tételek bizonyítására való alkalmazását a címbeli tételek.

Bemutatunk néhány ismert, „egész jól működő" algoritmust, a tételbeli ponthalmaz megtalálására, ezek hátrányait, illetve futásidejüket.

Végül vázolunk néhány feladatot, amelyek ha nem is közvetlenül, de szorosan kötődnek a főtételhez, így érdemes megemlíteni őket.

1.2. Alapdefiníciók, jelölések:

A feladatot $\mathbb{R}^d$-ben, vagyis a d dimenziós valós elemű vektorok terén fogjuk nézni. Ez vektortér $\mathbb{R}$ felett, vagyis $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ és $a \in \mathbb{R}$ esetén $x + y \in \mathbb{R}^d$ és $ax \in \mathbb{R}^d$ is teljesül. A tér nullelemét, a csupa 0-vektort 0^d-vel jelöljük.

A továbbiakban a bevett módon p_i-vel jelöljük egy $p \in \mathbb{R}^d$ vektor i-edik koordinátáját. Amikor több pontról beszélünk, és indexeléssel különböztetünk pontok közt, felső indexet használunk: $p^1, p^2, ...p^n$.

Indexeléskor segítségül használjuk az $[n] := \{1, 2, ..., n\}$ jelölést. Ez nem összekeverendő az $[a, b]$ jelöléssel, az a-tól b-ig tartó zárt intervalluméval.

A dolgozatban helyenként előkerül majd a „távolság" fogalma, ilyenkor mindig az euklideszi távolságról beszéünk, vagyis $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2}$.

Amikor pedig merőlegességről beszélünk, azt a klasszikus skalárszorzat szerint nézzük, vagyis $x \perp y$, ha $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i = 0$.

Definíció (Affin kombináció): Az $x^1, x^2, ...x^k \in \mathbb{R}^d$ pontoknak az $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in [k]$ skalárok mellett $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ egy **affin kombinációja**, ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

Definíció (Konvex kombináció): Az $x^1, x^2, ...x^k \in \mathbb{R}^d$ pontoknak az $\lambda_i \in \mathbb{R}_0^+, i \in [k]$ skalárok mellett $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ egy **konvex kombinációja**, ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. (Olyan, mint az affin, de minden skalár nemnegatív kell, hogy legyen.)

Definíció (Konvex burok): Egy $H \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmaz **konvex burka** pontosan azon pontokból áll, amelyek előállnak H-beli pontok konvex kombinációjaként. Jelölés: $\mathrm{conv}(H)$. Ekkor a konvexség definiálható ennek segítségével. Egy halmazt **konvexnek** nevezünk, ha konvex burka saját maga.

Definíció (Pozitív burok): Egy $H \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmaz **pozitív burka** pontosan azon pontokból áll, amelyek előállnak H-beli pontok pozitív kombinációjaként. Jelölés: $\mathrm{pos}(H)$

Definíció (Lineáris kiterjesztés): Egy $H \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmaz **lineáris kiterjesztése** pontosan azon pontokból áll, amelyek előállnak H-beli pontok lineáris kombinációjaként. Jelölés: $\mathrm{lin}(H)$

2. Alapételek és bizonyításaik

2.1. A Carathéodory-Tétel

A híres tétel nemcsak hogy alapkövéül szolgál Bárány színes tételének, de a bizonyítás során fel is használjuk (ezért csalóka azt mondani, hogy a színes tételből következik a sima), ezért fontos, hogy már az elején tisztázzuk, hogy mi is ez.

1.1. Tétel (Carathéodory-Tétel) Legyen $H \subset \mathbb{R}^d$, és $a \in \mathrm{conv}(H)$.
Ekkor létezik olyan $A \subseteq H$, amire $|A| \leq d+1$ és $a \in \mathrm{conv}(A)$.

Bizonyítás (vázlat): Legyen $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = a$ az a pont konvex kombinációja $x^1, x^2, ...x^k \in H$ pontokból, ami létezik, hisz $a \in \mathrm{conv}(H)$.

Ha $k \leq d+1$, akkor kész vagyunk.
Ha $k > d+1$, akkor az x^i pontok „eléggé lineárisan összefüggőek" ahhoz, hogy megadhatóak legyenenek olyan λ'_i-k, amelyekre $\sum_{i=1}^{k} \lambda'_i x^i$ szintén a egy konvex kombinációja, és $\lambda'_j = 0$ valamilyen j-re. Ekkor az ehhez tartozó x^j pont kihagyható a konvex kombinációból, így egyel kevesebb tagú konvex kombinációját kapjuk a-nak. Ezt minden $k > d+1$-ra megtehetjük, így addig ismételhetjük a fenti lépést, míg $k = n+1$ nem teljesül, és kész vagyunk. □

Megjegyzések: A feladatbeli pontok eltolásával, és új bázis választásával a tétel tetszőleges affin altéren is alkalmazható.

A λ'_i-k kiszámítása nem triviális, de a tétel közismertségét tekintve itt nem fogjuk taglalni a részleteket. Az érdeklődőknek egy precíz leírás található például [4]-ben.

2.2. A Színes Carathéodory-Tétel

Az eredeti feladatot a következő módon szeretnénk általánosítani: most is meg van adva egy ponthalmaz, amelyből $d+1$ darab pontot akarunk kiragadni, hogy a választott pontok konvex burka tartalmazza az origót. Az előző feladattal ellentétben azonban az is meg van adva, hogy bizonyos pontok kiválasztásával kizárunk más pontokat, és azokat már nem választhatjuk meg.

Gondolhatunk erre úgy, mintha a pontok ki lennének színezve d+1 (és nem kevesebb) színnel, és minden egyszínű ponthalmazból, mostantól **„színosztályból"** egy-egy pontot kell kiválasztanunk. Innen is származik a tétel neve: „Színes Carathéodory-Tétel".

Megjegyzendő, hogy egy-egy pont több színosztályban is benne lehet, azaz bármelyik színének lehet a képviselője.

Ezt a gondolatot folytatva a Tétel azt mondja ki, hogy ha minden színosztály konvex burka tartalmazza az origót, akkor meg tudjuk választani a pontokat úgy, hogy azok is tartalmazzák azt a konvex burkukban.

Mi Bárány bizonyításának egy egyszerűsített változatát [2] mutatjuk be. Bárány eredeti bizonyítása [1] annyiban különbözik az alábbitól, hogy $d+1$ színosztály helyett d-t vizsgál, és konvex burok helyett pozitív burkot. A Caratheodory-Tétel egy hasonló „redukcióját" használva ezt is be lehet bizonyítani, s a $d+1$-es konvex esetet ebből ki lehet következtetni. A pozitív burkos verzió bizonyítása éppen úgy folyik, mint a konvex burkosé, így külön nem mutatjuk be.

1.2. Tétel Legyenek $H_1, H_2, ..., H_d \subset R^d$ színosztályok, amelyekre $0^d \in \cap_{i=1}^d \mathrm{pos}(H_i)$.

Ekkor létezik olyan $T = \{x^1, x^2, ..., x^d\}$, amelyekre $x^i \in H_i$ minden $i \in [d]$-re, és $0^d \in \mathrm{pos}(T)$.

1.3. Tétel (Színes Carathéodory-Tétel) Legyenek $H_1, H_2, ..., H_{d+1} \subset R^d$ színosztályok, melyekre $0^d \in \cap_{i=1}^{d+1} \mathrm{conv}(H_i)$.

Ekkor létezik olyan $T = \{x^1, x^2, ..., x^{d+1}\}$, amelyekre $x^i \in H_i$ minden $i \in [d+1]$-re, és $0^d \in \mathrm{conv}(T)$.

Bizonyítás: Az 1.1 Tétel szerint minden H_i-nek létezik X_i részhalmaza, amelyek mind-mind legfeljebb $d+1$ eleműek, és tartalmazzák 0^d-t konvex burkaikban. Mostantól ezekkel a halmazokkal foglalkozunk.

A továbbiakban az egyszerűbb jelölések érdekében nevezzünk **„színes választásnak”** minden olyan ponthalmazt, amelynek mindegyik eleme külön színosztályból származik. Egy $d+1$ elemű színes választás elemeit mindig a színosztályoknak megfelelően indexelünk, vagyis egy $T = \{x^1, ..., x^{d+1}\}$ színes válaszásban legyen $x^i \in X_i$ minden $i \in [d+1]$-re.

Legyen $T = \{x^1, ..x^{d+1}\}$ egy olyan színes választás, ami minimalizálja $\mathrm{conv}(T)$ távolságát 0^d-től, azaz amelyre $\epsilon = \min(\|v\| : v \in \mathrm{conv}(T))$ a lehető legkisebb. Mivel az X_i halmazok végesek, csak véges sok színes választás létezik, így biztosan van olyan, ami ezt minimalizálja. Ha $0^d \in \mathrm{conv}(T)$ akkor kész vagyunk, T jó színes választás.

Tegyük fel, hogy $\epsilon > 0$, vagyis 0^d nincs benne T konvex burkában. Legyen $v \in \mathrm{conv}(T)$ az a pont, amire $\|v\| = \epsilon$. Legyen továbbá $B = B(0^d, \epsilon)$ az ϵ sugarú, origó középpontú d-dimenziós gömb, H pedig az a hipersík, amely elválasztja B-t $\mathrm{conv}(T)$-től, vagyis a v-n átmenő, v normálvektorú hipersík. (Ekkor H éppen B érintősíkja a v pontban).

Vegyük észre, hogy v-nek a $\mathrm{conv}(T)$ politóp egyik $d-1$-dimenzós oldalán kell elhelyezkednie, hisz ha ez nem teljesülne, akkor a belsejében kellene lennie, vagyis létezne $\delta > 0$, amire $B(v, \delta) \subset \mathrm{conv}(T)$, ezen belül pedig triviálisan létezik olyan w pont, amire $\|w\| < \|v\|$, ami ellentmond annak, ahogyan v-t választottuk.

Ekkor a $T \cap H$ halmaz a $d-1$-dimenziós $H \subset R^d$ affin altéren helyezkedik el, és tartalmazza v-t konvex burkában, vagyis az 1.1. Tétel szerint létezik legfeljebb d darab $T \cap H \subseteq T$-beli pont, amelyeknek konvex kombinációjaként megadható v, vagyis van legalább egy T-beli pont, amely nem kell ahhoz, hogy $v \in \mathrm{conv}(T)$ teljesüljön. Szimmetria miatt feltehető, hogy ez a pont x^1.

Mivel $0^d \in \mathrm{conv}(X_1)$, az X_1 halmaznak kell hogy legyen a H-nak a 0^d-felőli oldalán is eleme, hisz ha nem lenne, akkor a konvex burok is a H túloldalán maradna, így nem tartalmazatná 0^d-t. Legyen w egy ilyen pont.

Vizsgáljuk meg a $T' = \{w, x^2, ..., x^{d+1}\}$ színes választást. Mivel x^1 nem játszott szerepet v konvex kombinációjában, $v \in T'$ továbbra is teljesül. Továbbá, mivel v rajta van B felszínén, és w a B-nek a v ponton vett érintősíkjának a középpont felőli oldalán van, a vw-szakasznak muszáj, hogy legyen B-n belüli pontja.

Ekkor a T' színes kombinációnak van olyan $z \in vw = \mathrm{conv}(\{w, v\}) \subseteq \mathrm{conv}(\{w, x^2, ..., x^{d+1}\}) = \mathrm{conv}(T')$ pontja, amely B-n belül van, vagyis T' távolsága 0^d-től kisebb ϵ-nál, ami ellentmondás, hisz T-t minimális távolságúnak választottuk 0^d-től.

Vagyis $\epsilon > 0$ nem teljesülhet, tehát $\epsilon = 0$, tehát $0^d \in \mathrm{conv}(T)$ valamilyen T színes választásra, és kész vagyunk. □

Megjegyzés: Azt, hogy 0^d a színosztályok közös pontja, mindössze esztétikai okokból tesszük fel. Ha tetszőleges $a \in R^d$ az a pont, amelyet körbe akarunk fogni színes választással, akkor a feladat minden pontját $(-a)$-val eltolva a fenti feladatot kapjuk, ennek egy létező megoldását (a)-val eltolva az eredeti feladatra is jó megoldást kapunk.

Látható, hogy $H_1 = H_2 = \ldots = H_{d+1} = H$ esetén a tétel ugyanazt írja le, mint az 1.1. Tétel, így ez valóban egy általánosítása a Carathéodory-Tételnek.

Példák, Ellenpéldák: Néhány egyszerű példa arra, hogy a tétel feltételeinek teljesülésekor tudunk találni jó színes választást, viszont ellenkező esetben rendszerint nem.

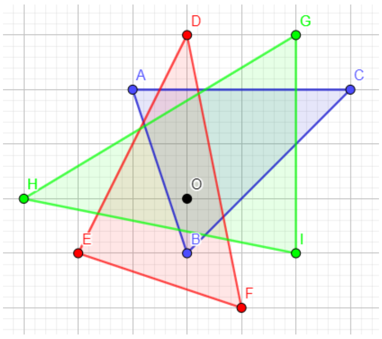
1. Példa: Három Háromszög A tétel egyik legkézenfekvőbb alkalmazása a következő feladatban nyilvánul meg:

Ha van három különböző háromszögünk, és egy pont, amelyet mind tartalmaznak, akkor tudunk-e úgy választani egy-egy csúcsot a háromszögeken, hogy az ezekre rakott háromszög is tartalmazza a közös pontot?

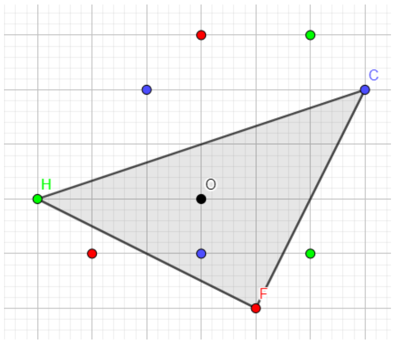
Itt $\mathbb{R}^2$-ben dolgozunk, és 3 darab 3-elemű halmazunk van: a háromszögek csúcsai képeznek egy-egy színosztályt. Az pedig, hogy a közös csúcs minden háromszögben benne van, épp azt jelenti, hogy a csúcsok konvex burkában van benne.

Ekkor az 1.3. Tétel minden feltétele teljesül, vagyis kell, hogy legyen egy olyan színes választás, amely tartalmazza kérdéses pontot konvex burkában, vagyis a keresett háromszög létezik.

Az 1-es ábrán láthatunk egy ilyen esetet: az (a) rész mutatja a három háromszöget, (b) pedig egy jó színes választást, (merthogy több helyes lehetőség is van).



(a) Három háromszög, O közös ponttal



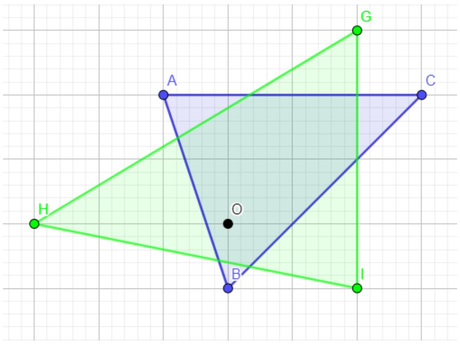
(b) A színes, O-t tartalmazó háromszög

1. ábra. Első példa: 3 háromszög

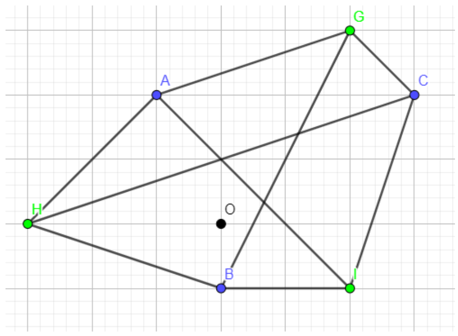
2. Példa: Két Háromszög Vegyük az előző példát, de ezúttal csak a kék- és zöld háromszögekkel. Itt az 1.3. Tétel feltételei már nem teljesülnek, hisz nincsen $d + 1 = 3$ darab színosztályunk. Van-e mégis jó színes választás?

Itt egy kételemű színes választás konvex burka éppen két különböző színű csúcs közötti szakaszt jelent. Ezek közül általános helyzetű pontok esetén többnyire 0% eséllyel megy át bármelyik is a tér egy konkrét pontján, beleértve a közös O pontot. A 2-es ábrán látható, hogy a mi példánkban is minden színes választás konvex burka elkerüli O-t, vagyis nincs jó színes választás.

Ezen a példán látszódik, hogy a $d+1$ „jó becslés” a szükséges színosztályok számára, vagyis általános feladatban nincsen megfelelő d elemű színes választás.



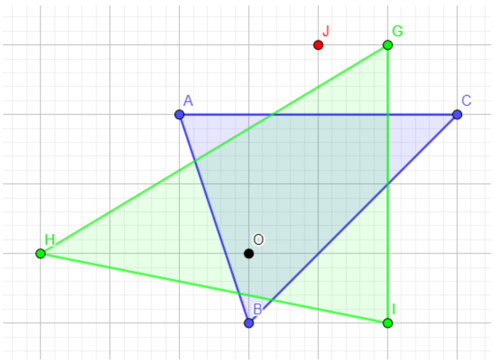
(a) Két háromszög, O közös ponttal



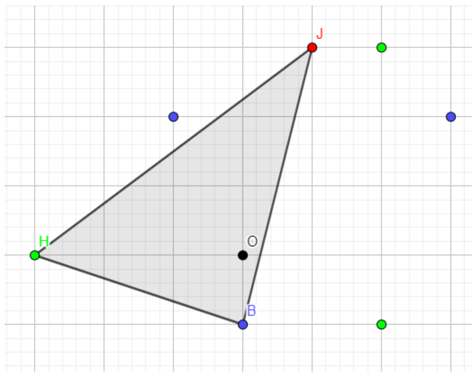
(b) Az összes lehetséges színes választás

2. ábra. Második példa: 2 háromszög

3. Példa: Két Háromszög és egy Pont Vegyük az előző példa esetét, de a két háromszögön kívül vegyünk fel még egy pontot, képezzen ez a pont egy egyelemű, harmadik színosztályt. Ennek a pontnak a konvex burka saját maga, ez nem tartalmazza az O-t, vagyis az 1.3. Tétel feltételei nem teljesülnek. Ennek ellenére létezik színes választás, amely tartalmazza az O-t. Ez az eset a 3-as ábrán van szemléltetve.



(a) Két háromszög O közös ponttal, és egy kóbor pont



(b) Egy jó színes választás

3. ábra. Harmadik példa: 2 háromszög és 1 pont

Ezen a példán látszik, hogy habár az 1.3. Tétel feltételei elégségesek jó színes választás létezésére, nem szükségesek hozzá.

2.3. Egy általánosítás

2.3.1. Egy erősebb tétel

Ha sok, a 3-as példához hasolnó esetet nézünk meg, érdekes mintát fedezhetünk fel: ha d darab színosztályt veszünk, amelyek konvex burkainak van közös pontja, és még egy, tetszőleges pontot veszünk $d+1$-edik színosztálynak, akkor mindig úgy alakul, hogy található színes választás, mely tartalmazza az első d színosztály közös pontját.

Eme észrevétel alapján megfogalmazható a következő feltételezés, amelyről Bárány be is látta, hogy igaz:

1.4. Tétel Legyenek $H_1, ..H_d \subset \mathbb{R}^d$ színosztályok, amire $0^d \in \cap_{i=1}^d \mathrm{conv}(H_i)$, és $p \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges pont.

Ekkor létezik olyan $T = \{x^1, ..., x^d, p\}$ színes választás, amire $x^i \in H_i$ minden $i \in [d]$-re, és $0^d \in \text{conv}(T)$.

A fenti tételnek van önálló bizonyítása, ami meg is található [1]-ban, de ezt megspórolhatjuk, mivel a tétel következik egy másik, az 1.3. Tételnek az előzőnél egy fokkal kevésbé intuitív általánosításából [9].

1.5. Tétel Legyenek $H_1, ..H_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ színosztályok, amelyekre $0^d \in \text{conv}(H_i \cup H_j)$ minden $i \neq j$ esetén.

Ekkor létezik olyan $T = \{x^1, x^2, ..., x^{d+1}\}$, amelyekre $x^i \in H_i$ minden $i \in [d+1]$-re, és $0^d \in \text{conv}(T)$.

Látható, hogy az 1.4. Tétel feltételei egy speciális esetét képezik az 1.5. Tétel feltételeinek, így ha az utóbbit belátjuk belátjuk a korábbit is.

A tétel bizonyításának eleje hasonlít az 1.3. Tétel bizonyítására, meghatározzuk az X_i halmazokat, T-t, ϵ-t, $\epsilon > 0$ esetén B-t, H-t és v-t, majd legyen x^{d+1} az a T-beli pont, amely nem kell v konvex kombnációjához.

Ezen a ponton azonban már nem tehetjük fel, hogy van X_{d+1}-nek H origó felőli oldalán eleme, hisz a feltételek ezt nem követelik meg.

Itt esetszétválasztást végezhetünk. Ha X_{d+1}-nek van ilyen eleme, akkor ugyanúgy folytajuk, mint az 1.3. Tételnél. Ha nincsen, akkor topológiai eszközökkel tudunk T-nél jobb színes választást mutatni, ezzel ellentmondást kapva. Ehhez előbb be kell vezetnünk néhány topológiai fogalmat, hogy értelmes legyen, amit csinálunk. [5]

2.3.2. Néhány szükséges topológiai fogalom

Definíció (Topológikus tér) Egy $X \neq \emptyset$ halmaznak T egy topológiája, ha T minden eleme X egy részhalmaza, $\emptyset \in T$, és T zárt a véges metszetre, és az akár végtelen unióra. Ekkor a (X, T) párt **topológikus térnek** nevezzük.

Ha nincs megadva konkrét topológia, akkor T-nek valamilyen „szokásos” topológiát tekintünk, ez a mi esetünkben X összes nyílt részhalmaza lesz.

$Y \subset X$ esetén X topológiájának minden elmét Y-ba metszve egy jó topológiáját kapjuk Y-nak, az így kapott topológikus teret X alterének nevezzük.

Definíció (Folytonosság) Adott T, S topológikus terek esetén egy $f : T \to S$ függvényt folytonosnak nevezünk, ha minden S-beli nyílt halmaz ősképe nyílt T-ben, vagyis ha minden $s \subset S$ nyílt halmazra $t = \{x \in T : f(x) \in s\}$ is nyílt.

Megjegyzés: „Szép” topológikus tereken lényegében ez is ugyanazt jelenti, mint a hagyományos folytonosság, vagyis a „közeli pontok képeinek közel maradását”, de miután a távolság fogalmát nehezebb általános topológikus téren bevezetni, mint a nyíltságot, ez a definíció praktikusabb ebben a témakörben.

Definíció (Homeomorfia) Azt mondjuk, hogy az A és B topológikus terek **homeomorfak**, hogyha van köztük futó homeomorfia, vagyis olyan $f : A \to B$ függvény, amely bijektív, folytonos, és f^{-1} is folytonos.

Szemléletesen: egy gyurmából gyúrt, A alakú szobrot „szépen át lehet gyúrni” B-alakúvá anélkül, hogy bárhol széttépnénk vagy összeragasztanánk a gyurmát.

Definíció (Összehúzhatóság) Legyen egy H topológikus térnek A altere. Azt mondjuk, hogy H-ban A **összehúzható** a $z \in H$ pontra, hogyha létezik olyan $f : H \times [0,1] \to H$ folytonos függvény, amire minden $x \in A$-ra $f(x,0) = x$ és $f(x,1) = z$.

Észrevehetjük, hogy ha z-re összehúzható egy A halmaz, akkor bármely másik „z-vel összefüggő” w pontra is összehúzható, hisz a z-ből w-be való áttolás könnyen megoldható folytonosan.

Így konkrét ponttól függetlenül is beszélhetünk összehúzhatóságról: A-ra azt mondjuk, hogy **összehúzható** H-ban, ha van $z \in H$, amire összehúzható.

Példa:

- Az $\mathbb{R}$ topologikus térben $A = [0,1]$ összehúzható az 1 pontra, mondjuk az $f(x,t) := \min(x+t, 1)$ épp a fenti módon viselkedik.
- Az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0^2\}$ topologikus térben $A = \partial B(0^2, 1)$, az origó középpontú 1-sugarú kör nem húzható össze egy pontra, hisz a kör valamelyik elemét át kellene vinni 0^2-n, hogy f folytonos maradjon, de ezt nem lehet, hisz 0^2 nincs benne f értékkészletében.

Definíció (Szimpliciális komplexus) Egy Σ halmazt **szimpliciális komplexusnak** nevezünk, ha minden eleme valamilyen M halamaznak egy véges részhalmaza, és $S \in \Sigma$ esetén S minden részhalmaza is Σ-beli.

A Σ halmaz egy $p+1$-elemű elemét egy p-dimenziós szinguláris szimplexnek nevezünk.

Definíció (Szimplex) Egy szimpliciális komplexust **szimplexnek** nevezünk, ha elemként tartalmazza a véges elemszámú M halmazt is.

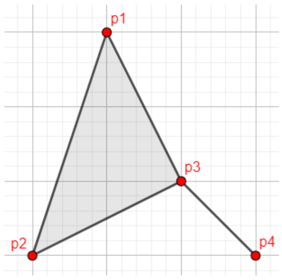
Megjegyzés: $\mathbb{R}^d$-ben a szimpliciális komplexusokat megfeleltetjük az „általuk kitöltött térrel”, vagyis a szinguláris szimplexeket a saját konvex burkaikkal, a komplexusokat pedig elemeik konvex burkainak uniójával.

Egyszerű példa szimpliciális komplexusra A $\mathbb{R}^2$ topologikus téren legyenek p^1, p^2, p^3, p^4 tetszőleges, általános helyzetű pontok. Ekkor ($M = \{p^i : i \in [4]\}$-val) a $Q = \{\{p^1,p^2,p^3\}, \{p^1,p^2\}, \{p^2,p^3\}, \{p^1,p^3\}, \{p^3,p^4\}, \{p^1\}, \{p^2\}, \{p^3\}, \{p^4\}, \varnothing\}$ halmaz egy szimpliciális komplexus, szinguláris szimplexei pedig a $p^1p^2p^3$ háromszög, annak minden éle és csúcsa, valamint a p^3p^4 él és a p^4 pont. Lásd: 4-es ábra

A $Q \setminus \{p^4\}$ halmaz már nem szimpliciális komplexus, hisz a $\{p^3, p^4\}$ elemnek már nem tartalmazza minden részhalmazát.

2.3.3. A tétel bizonyítása

Most már megvannak a szükséges definíciók, amelyekkel az 1.5. Tétel bebizonyítható a [9]-beli módszer szerint.



4. ábra. A példában szereplő Q szimpliciális komplexus, a kitöltött térrel beszínezve

Bizonyítás (1.5. Tétel) Legyenek $X_i \subseteq H_i$ megint olyan „redukált színosztályok”, melyekre $|X_i| \in \mathbb{N}$, és $0^d \in \operatorname{conv}(X_i \cup X_j)$ minden $i \neq j$ esetén. Ezeket a halmazokat elő tudjuk állítani például úgy, hogy minden (i,j) párra alkalmazzuk az 1.1. Tételt $H_i \cup H_j$-re, és az így kapott pontokat a megfelelő X_i-kbe rakosgatjuk.

Legyen $T = \{x^1, x^2, ..., x^{d+1}\}$ egy olyan színes választás, amely konvex burka minimális távolságú 0^d-től, ugyanabban az értelemben, mint az 1.3. Tétel bizonyításában. Mivel véges számú színes választás létezik, biztos, hogy van minimális távolságú.

Legyen v a $\operatorname{conv}(T)$-nek 0^d-hez legközelebbi pontja, és $\epsilon = \|v\|$. Ha $\epsilon = 0$, akkor $0^d \in \operatorname{conv}(T)$, és készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy $\epsilon > 0$. Ekkor jelöljük B-vel a 0^d középpontú, ϵ sugarú kört, és H-val annak a v-pont beli érintőhipersíkját. Jelöljük továbbá H^--al az $\mathbb{R}^d$ térnek a H-tól 0^d-felőli oldalát.

Tudjuk, hogy a v pont $\operatorname{conv}(T)$ egyik lapján van, vagyis van egy x^j pont, amely nem szükséges a $\operatorname{conv}(T)$-beli konvex felírásához. Most tegyük fel, mert szimmetria miatt feltehetjük, hogy ez a pont x^{d+1}.

Most, amennyiben létezik $w \in X_{d+1} \cap H^-$, akkor ugyanúgy járunk el, mint az 1.3. Tétel bizonyításánál.

Ha nincs ilyen w, akkor gondoljuk meg, hogy minden más i-re kell legyen $w_i \in X_i \cap H^-$, hiszen ha valamelyik másik X_i is a H másik oldalán lenne, akkor $X_i \cup X_{d+1}$ is ott lenne, vagyis H elválasztaná 0^d-t $\operatorname{conv}(X_i \cup X_{d+1})$-től, ami ellentmond a feltételeinknek. Rögzítsük az $y^i \in X_i \cap H^-$ pontokat, testzőlegesen választva minden X_i-re egy 0^d-felőli pontot.

Jelöljük $\operatorname{conv}(T \setminus \{x^{d+1}\})$-et S-el. Ekkor S egy $d-1$-dimenziós szimplexnek felel meg az $\mathbb{R}^d$ topologikus térben. Már tisztáztuk, hogy S-nek a 0^d -hoz legközelebbi pontja v. Amennyiben $v \notin \operatorname{int}(S)$, az azt jelenti, hogy x^{d+1} helyett egy másik csúcsot is elhagyhattunk volna T-ből, ezt már tudjuk H^--belire cserélni, ismét a könnyebb esetet kapva, így a továbbiakban feltesszük, hogy $v \in \operatorname{int}(S)$.

Jelöljük L_1-el a 0^d-ból kiinduló, v irányú félegyenest. Ez értelmszerűen metszeni fogja H-t, méghozzá v-ben. Most vegyük X_{d+1} egy tetszőleges z pontját, és jelöljük L_2-el a 0^d-ből kiinduló, $-z$-n átmenő félegyenest. Mivel tudjuk, hogy $X_{d+1} \cap H^- = \emptyset$, z a H túloldalán kell, hogy legyen, így a $-z$ irányú félegyenes épp „elmutat” H-tól, nem metszi sehol.

Jelöljük $L = L_1 \cup L_2$-el az együttes, 0^d pontban megtört „egyenest”.

Most vegyük β_d-t, a d-dimenziós kereszt-politópot, amelynek csúcsai a $\pm e^j : j \in [d]$ pontok, ahol e^j-vel jelöljük a j-edik koordinátában 1, máshol 0 pontot.

Vegyük ennek a határát, $\partial\beta_d$-t, vagyis β_d összes $d-1$-dimenziós lapját. Ezek épp a $\{\pm e^1, \pm e^2, \ldots \pm e^d\}$ alakú ponthalmazokból indukált szimplexek. Ekkor β_d-ben $\partial\beta_d$ összehúzható egy pontra, mondjuk 0^d-re: a $g(x,t) = (1-t)x$ függvényt véve $g(x,0) = x$ és $g(x,1) = 0^d$ minden $x \in \partial\beta_d$-re, és $t \in [0,1]$ esetén folytonos és β_d-n belül marad.

Legyen az $f : \partial\beta_d \to \mathbb{R}^d$ függvény olyan, hogy $f(e^i) = x^i$, és $f(-e^i) = y^i$ minden $i \in [d]$-re, illetve $\partial\beta_d$ egy-egy $d-1$-dimenziós szimplexére megszorítva egy olyan lineáris leképezés legyen, mely a szimplex pontjainak megfelelő bázist átviszi a pontok képeibe (ilyen leképezés minden bázisra és képhalmazra létezik, és ezekkel f folytonos). Ekkor $\partial\beta_d$-nak az f-szerinti képe egy olyan Q szimpliciális komplexus, amelynek csúcsai az x^i és y^i pontok, és minden szinguláris szimplexe egy-egy színes választásnak felel meg, hisz $\partial\beta_d$ definícójából adódóan egy Q-beli szimplex sincs, amelynek egy színosztályból egynél több csúcsa lenne.

Legyen $Q' = Q - \text{int}(S)$, vagyis az a szimpliciális komplexus, amit úgy kapunk, hogy Q-ból kivesszük az $\{x^1, \ldots, x^d\}$ szinguláris szimplexet. Ekkor Q' izomorf egy $d-1$-dimenziós gömbbel, és $\partial Q' = \partial S$. (Ha nem látnánk, hogy Q' határa miért egyezik meg S határával, gondoljunk Q-ra egy hordóként, és S-re mint annak a fedelére. Q'-t úgy kapjuk, hogy levesszük a hordó fedelét, ekkor a nyílt hordó pereme megegyezik a fedél peremével.)

Vegyük észre, hogy $v = L \cap S$ miatt ∂S egy L körül futó $d-1$-dimenziós kör, így nem összehúzható a $(\mathbb{R}^d \setminus L)$ térben. Ekkor, ha $Q' \subset (\mathbb{R}^d \setminus L)$, akkor az azt jelentené, hogy $\partial Q' = \partial S$ nem összehúzható $Q' \subset (\mathbb{R}^d \setminus L)$-ben, azonban $\partial\beta_d$-nek a β_d-beli összehúzhatóságából, és f folytonosságából $\partial Q'$-nek a Q'-beli összehúzhatósága következik, vagyis Q' nem lehet benne $(\mathbb{R}^d \setminus L)$-ben, vagyis Q' nem lehet diszjunkt L-től.

Legyen $w \in Q' \cap L$, és S' egy Q'-beli d-dimenziós szinguláris szimplex, ami tartalmazza w-t. Ha $w \in L_1$, akkor, mivel Q minden S-en kívüli csúcsát H^--belinek választottuk, w közelebb kell, hogy legyen 0^d-hez, mint v, így $\text{conv}(S' \cup \{z\})$ közelebb van 0^d-hez, mint $\text{conv}(T)$, ellentmondva T választásának.

Ha $w \in L_2$, akkor $0^d \in \text{conv}(\{w, z\}) \subset \text{conv}(S' \cup \{z\})$, vagyis van 0^d-t tartalmazó színes választás, megint ellentmondva T választásának.

A feltevésünk tehát hamis kell, hogy legyen, $\epsilon = 0$ mindenképp teljesül, vagyis van 0^d-t tartalmazó színes választás. □

Megjegyzések Látható, hogy az 1.3. Tétel feltételeinek teljesülésekor az 1.4-es féltételei is teljesülnek, vagyis ez valóban a Színes Carathéodory-Tételnek egy általánosítása. Ezek az általánosabb feltételek azonban kevéssé számottevőek abban az értelemben, hogy az alkalmazások zömében csak az 1.3. Tétel feltételeit kell megkövetlnünk, az 1.5. Tételét nem. Tekintve, hogy a megoldás tényleges megtalálását az általánosabb feltételek mellet jóval nehezebb megtalálni, ennek az algoritmikus vonatkozásait nem érdemes, és nem is foguk tüzetesebben vizsgálni.

3. Alkalmazások

A Színes Caratheodory-Tétel a rá közvetlenül visszavezethető feladatok megoldásán kívül más geometriai tételek bizonyítására is felhasználható, illetve egyes esetekben azok megoldásának megtalálását visszavezethetjük egy jó színes választás megtalálására. Ebből láthatjuk, hogy egy jó színes választást megtaláló algoritmussal más problémákat is meg tudnánk oldani, ami még kapóra jöhet, ha azokat a problémákat egyébként nem tudnánk hatékonyan megoldani.

Ebben a fejezetben két konkrét felhasználását mutatjuk be a Színes Carathéodory-Tételnek. Az elsőben a Helly-Tétel egy színes verzióját látjuk majd be az 1.2. Tétel segítségével, ezzel közvetve az eredeti Helly-Tételt is belátva. A másodikban a Tverberg-Tételt látjuk be az 1.3. Tétel segítségével, méghozzá olyan módon, hogy lássuk, egy jó színes választás mutatásával a Tverberg-problémának is meg tudjuk mutatni egy jó megoldását.

3.1. A Színes Helly-Tétel

A Helly-Tétel a diszkrét geometria egyik fő tétele, jelentősége és alkalmazásai világhírűek. Először Eduard Helly bizonyította be 1913-ban. Sokféleképp bizonyítható, de mi konkrétan a Színes Carathéodory 1.2. Tétel-beli alakjából bizonyítjuk be. Ehhez definiáljuk a probléma színes általánosítását, és ezt vezetjük vissza a korábbi tételre.

2.1. Tétel (Helly-Tétel) Legyenek $n \geq d+1$ mellett $X_1, X_2, ...X_n \subset \mathbb{R}^d$ konvex halmazok.

Ha bármely $d+1$ darab halmaznak nemüres a metszete, akkor az összes halmaz metszete is nemüres, vagyis ha minden $I = \{i_1, i_2, ..., i_{d+1}\} \subseteq [n]$-re $\cap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, akkor $\cap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset$.

Megjegyzések: Ha a halmazokról azt is feltesszük, hogy korlátosak és zártak (kompaktak), akkor véges n helyett akár végetlen sok halmazra is igaz a tétel.

2.2. Tétel (Színes Helly-Tétel) Legyenek $H_1, H_2, ..., H_{d+1}$ mind konvex, kompakt $\mathbb{R}^d$-beli halmazok egy-egy véges családja. Ha minden $X_1 \in H_1, ..., X_{d+1} \in H_{d+1}$ halmazválasztás esetén $\cap_{i=1}^{d+1} X_i \neq \emptyset$, akkor valamilyen $i \in [d+1]$-re $\cap_{X \in H_i} X \neq \emptyset$.

Észrevehetjük, hogy $H_1 = H_2 = ... = H_{d+1}$ esetén ez ugyanazt jelenti, mint a sima Helly-Tétel.

A Helly-Tételnek ezt az általánosítását Lovász László már a Színes Carathéodory-Tétel színre lépése előtt bebizonyította, de Bárány a saját tételével új bizonyítást adott [2], ezt a bizonyítást fogjuk itt bemutatni.

A tétel bizonyításában felhasználjuk az 1.2. Tételt, továbbá két ismeretes állítást.

2.3. Lemma A $X_1, ...X_n \subset \mathbb{R}^d$ konvex, kompakt halmazoknak akkor és csak akkor üres a metszete, ha léteznek $Y_1, ...Y_n \subset \mathbb{R}^d$ zárt félterek, amelyeknek szintén üres a metszete, és $X_i \subset Y_i$ minden $i \in [n]$ esetén.

2.4. Lemma (Farkas-Lemma egyik alakja) Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, b \in \mathbb{R}^m$ adottak. A következő két állításból pontosan egy igaz:

- Létezik $x \in \mathbb{R}^n$, amire $Ax \leq b$
- Létezik $y^T \in \mathbb{R}^m$, amire $y \geq (0^m)^T, yA = (0^m)^T, yb = -1$.

Itt $v, w \in R^k$ vektorokra $v \leq w$, ha $v_i \leq w_i$ minden $i \in [k]$-ra.

Ezen állítások bizonyítása körülményes, de a tétel bizonyításában nem számottevőek, így itt nem mutatjuk be őket.

Bizonyítás (2.2. Tétel): Tegyük fel, hogy minden $i \in [d+1]$-re üres a H_i-beli halmazok metszete. Ekkor a 2.3. Lemma szerint léteznek $Z_1, ...Z_{d+1}$ zárt félterek véges családjai, melyek elemeinek mind-mind üres a metszetük.

Ekkor Z_i egy-egy $Y_{i,j}$ félterére léteznek $a^{i,j} \in \mathbb{R}^d, b^{i,j} \in \mathbb{R}$, amelyekre $\langle a^{i,j}, x\rangle \leq b^{i,j}$ megoldásai éppen az $Y_{i,j}$ félsíkot képezik.

Legyen A_i az a mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy az $(a^{i,j})^T$ sorvektorokat egymás alá rakjuk, b^i pedig az az oszlopvektor, melynek $b^{i,j}$ a j-edik koordinátája.

Ekkor az $A_i x^i \leq b^i$ egyenlőtlenség egy megoldása épp egy olyan pont, ami minden féltérben benne van. A feltevésünk és a félterek 2.3. Lemma szerinti választása szerint nincsen ilyen x^i, vagyis van olyan y^i, ami a 2.4. Lemma második állítását elégíti ki.

Ezek az y^i-ok azt jelentik, hogy a $(0^m, -1)$ vektor benne van a $W_i = \{(a^{i,j}, b^{i,j}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \langle a^{i,j}, x\rangle \leq b^{i,j}$ leírja Z_i egy félterét$\}$ halmaz pozitív burkában minden $i \in [d+1]$-re.

Ekkor van $d+1$ darab W_i halmazunk $\mathbb{R}^{d+1}$-ben, hogy $(0^d, -1) \in \cap_{i=1}^{d+1} \mathrm{pos}(W_i) \neq \emptyset$.

Ekkor az 1.2. Tétel szerint létezik $T = \{w^1, ..., w^{d+1}\}$ színes választás, amire szintén $(0^d, -1) \in \cap_{w\in T} \mathrm{pos}(w) \neq \emptyset$. A 2.4. Lemma szerint a választott vektoroknak megfelelő félterek diszjunktak, amiből a 2.3. Lemma szerint az ezeknek megfelelő $X_1, X_2, ...X_{d+1}$ halmazválasztásnak üres a metszete.

Ez ellentmond a H_i halmazcsaládokra kiadott feltételnek, így a feltevésünk hamis, vagyis kell legyen $i \in [d+1]$, amire $\cap_{X\in H_i} X \neq \emptyset$ □

Megjegyzések: Habár egy nemüres metszetű halmazcsalád létezését garantálni tudjuk, az 1.2. Tételt csak az indirekt feltevés megcáfolásához használjuk fel, a tényleges i megtalálásához nem tudjuk felhasználni.

3.2. A Tverberg-Tétel

A diszkrét geometria egy másik nevezetes tételének, a Radon-Tételnek megfogalmazható a következő általánosítása: vegyük az $X = \{x^1, x^2, ..., x^n\} \subset \mathbb{R}^d$ halmaz pontjait. Ezeknek a pontoknak meg akarjuk keresni valamelyik, bizonyos feltételeket teljesítő **partícióját**.

Partíciónak nevezzük az X pontjainak egy olyan $P_1, ..., P_k \subset X$ csoportokba sorolását, amelyre $P_i \cap P_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén (vagyis minden pont legfeljebb egy csoportban van benne), és $\cup_{i=1}^k P_i = X$ (vagyis minden pont benne van egy csoportban).

Egy partíciót szokásosan a csoportok száma alapján jellemezünk, egy k csoportba osztó partíciót k-partíciónak hívunk.

Egy megadott $r \in \mathbb{N}^+$ szám esetén az X halamznak egy **Tverberg-partíciója** alatt egy olyan r-partíciót értünk, amelynek a csoportjainak konvex burkai metszik egymást, vagyis létezik valamilyen $a \in \mathbb{R}^d$ pont, amelyre $a \in \cap_{i=1}^r \mathrm{conv}(P_i)$, vagyis minden csoport konvex burka tartalmazza a-t.

A Tverberg-Tétel azt mondja ki, hogy adott r esetén biztosan létezik Tverberg-partíció, amennyiben legalább $(r-1)(d+1)+1$ pontunk van.

2.5. Tétel (Tverberg-Tétel) Legyenek $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$ adott pontok, $r \in \mathbb{R}$ adott szám. Amennyiben $n > (r-1)(d+1)$, létezik az x^i pontoknak Tverberg-partíciója.

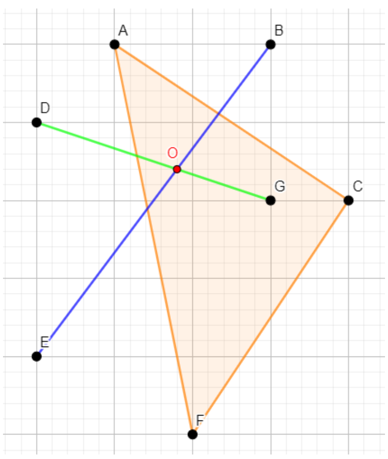
Ebből $r = 2$ behelyettesítésével kapjuk a Radon-Tételt.

Példák: Vegyük a $d = 2, r = 3$ esetet. Ekkor $(3-1)(2+1)+1 = 7$ pont esetén biztos, hogy van Tverberg-partíció (amely itt 3-partíció lesz). Vegyünk hét általános helyzetű $A - G$ pontot (látsd: 5a. ábra). Ezeknek van Tverberg-partíciója, ez látható az ábrán.

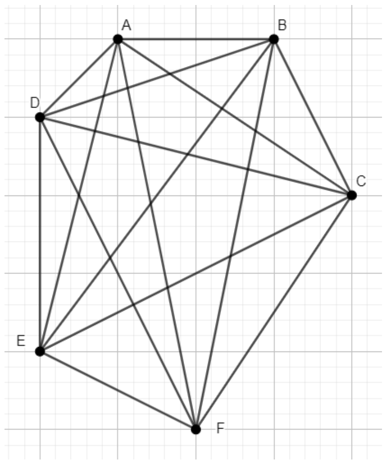
Vegyük ugyanezeket a pontokat G kivételével. (5b. ábra) Itt csak 6 pontunk van, így nem biztos, hogy van Tverberg-partíció (kevés pont esetén általában nincsen), de azért nézzük meg az esetet.

Gondoljunk bele, hogy ha egy osztályba három pont kerül, akkor a másik kettőből az egyikbe csak egy pont jut, vagyis kellene egy pont, ami két másik pont szakaszán helyezkedik el, hogy Tverberg-partíciót találjunk. Mivel nincs három pont, ami egy egyenesen lenne, ez nem lehetséges. Hasonlóan kizárhatjuk azt az esetet, amikor négy pont kerül egy osztályba.

Tehát az osztályok méretei 2-2-2 kéne, hogy legyenek, vagyis három olyan szakaszt kéne venni a pontokból, melyek egy pontban metszik egymát. Az ábrán látszik, hogy ez a példánkban nem lehetséges, vagyis itt nem létezik Tverberg-Partíció.



(a) 7 általásnos helyzetű pont, és egy O közös pontú Tverberg-partíció



(b) 6 általános helyzetű pont, nincs Tverberg partíció

5. ábra. $d = 2, r = 3$ eset

A tételt először Helge Tverberg bizonyította be 1966-ban [10]. Bár Tverberg később mutatott egyszerűbb bizonyításokat is, az eredeti bizonyítás igencsak körülményes és nehezen emészthető.

1992-ben Sarkaria [8] megmutatta, hogy egy Tverberg-partíció megtalálása visszavezethető egy színes választás megtalálási problémára, azaz bebizonyította, hogy az 1.3. Tétel implikálja a 2.5. Tételt, vagyis, mivel az 1.3. Tételről tudjuk, hogy igaz, mutatott egy új, egyszerűbb bizonyítást a Tverberg-Tételre.

Sarkaria eredeti bizonyítása erősen algebrai jellegű, és sok általunk még nem tisztázott fogalmat használ. Szerencsére azonban Bárány és Onn [2] megfogalmazta eme bizonyításnak egy kissé emészthetőbb, „geometriaibb” alakját. Ezt mutatjuk most be.

Bizonyítás (2.5. Tétel) Legyen $n = (r-1)(d+1)$, és $X = \{x^1, ..., x^{n+1}\}$.

Vegyük az $y^1, ..., y^n \in \mathbb{R}^{d+1}$ vektorokat, amelyekre igaz, hogy $y^i_j = x^i_j$ minden $i \in [n], j \in [d]$-re, és $y^i_{d+1} = 1$ minden $i \in [n]$-re, vagyis egy y^i-t úgy kapunk, hogy az x^i végére odateszünk mégegy egyest.

Jelöljük $e^{i,r} \in \mathbb{R}^{r-1}$-el az i-edik, $r-1$ dimenziós bázisvektort, vagyis amelyikben az i-edik helyen 1-es, máshol 0-s van. Vegyük a $v^1, ..., v^{r-1}, v^r$ vektorokat úgy, hogy $i \in [r-1]$ esetén $v^i = e^{i,r}$, és $v^r = -\sum_{i=1}^{r-1} e^{i,r}$. Látható, hogy definícióból adódóan $\sum_{i=1}^{r} v^i = 0^{r-1}$, és hogy ezen kombináció skalárszorosain kívül máshogy nem függenek össze lineárisan.

Most nézzük az $A_{i,j} = v^i y^{jT} \in \mathbb{R}^{(r-1)\times(d+1)}$ mátrixokat. Ekkor $\sum_{i=1}^{r} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{r} v^i y^{jT} = (\sum_{i=1}^{r} v^i) y^{jT} = 0^{(r-1)\times(d+1)}$.

Ha az $(r-1)\times(d+1)$-es mátrixokra $(r-1)(d+1)$-dimenziós vektorokként tekintünk (amit minden gond nélkül megtehetünk), akkor ez pont azt jelenti, hogy a $B_j = \{A_{i,j} : i \in [r]\} \subset \mathbb{R}^{(r-1)(d+1)}$ halmazok mindegyikére $0^{(r-1)(d+1)} \in \mathrm{conv}(B_j)$ minden $j \in [n+1]$-re, hiszen $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} A_{i,j}$ az origónak egy konvex kombinációja.

Tehát van $n+1$ darab ponthalmazunk az $\mathbb{R}^{(r-1)(d+1)} = \mathbb{R}^n$ térben, amelyek mindegyike tartalmazza az origót konvex burkukban. Itt az 1.3. Tétel minden feltétele megvan, tehát van olyan $T = \{a^1, ..., a^{n+1}\}$ színes választás, amelyre szintén $0^{(r-1)(d+1)} \in \mathrm{conv}(T)$.

Itt $B_j \ni a^j = v^i y^{jT}$ valamilyen $i \in [r]$-re. Jelöljük $k(j)$-vel azt az $[r]$-beli számot, amelyre az adott j-hez az előző egyenlőség épp teljesül.

Most minden $i \in [r]$-re jelöljük P_i-vel azon $j \in [n+1]$ számokat, amelyekre y^{jT}-t épp v^i -vel kellett beszorozni, hogy a T-beli elemet megkapjuk: $P_i = \{j \in [n+1] : k(j) = i\}$

Ekkor $P_1, ..., P_r$ egy r-partíciója $[n+1]$-nek, hiszen minden y^j vektort pont egy B_j-beli mátrix/vektorral képviseltetünk T-ben. Ebből értelemszerűen adódik, hogy az $X_i = \{x^j : j \in P_i\}$ halmazok az X-nek képezik egy r-partícióját.

Be szeretnénk látni, hogy ez egy Tverberg-partíció, vagyis hogy van egy olyan $a^0 \in \mathbb{R}^d$, amelyre $a^0 \in \cap_{i=1}^{r}\mathrm{conv}(X_i)$.

Legyen $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a^j = 0^{(r-1)(d+1)}$ az origónak egy konvex kombinációja T elemeiből. Jelöljük z^i-vel a $\sum_{j\in P_i} \lambda_j y^j \in \mathbb{R}^{d+1}$ vektort.

Ekkor (az a^j-kat mátrixként kezelve) kapjuk, hogy:

$$0^{(r-1)\times(d+1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a^j = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j v^{k(j)} y^{jT} = \sum_{i=1}^{r} v^i \sum_{j\in P_i} \lambda_j y^{jT} = \sum_{i=1}^{r} v^i z^{iT}$$

Legyenek $w^i = e^{i,r} - e^{i-1,r}$ azok a vektorok minden $i \in [r-2]$-re, amelyeknek i-edik koordinátája 1, az $i+1$-edik pedig -1. Legyen továbbá $w^{r-1} = e^{r-1,r}$. Ekkor látható, hogy $\langle w^i, v^i\rangle = 1$, $\langle w^i, v^{i+1}\rangle = -1$ és $j \in [r] \setminus \{i, i+1\}$ esetén $\langle w^i, v^j\rangle = 0$ teljesül minden $i \in [r-1]$-re.

Ekkor a fenti egyenlőséget külön-külön jobbról beszorozva w^{kT}-vel minden $k \in [r-1]$-re kapjuk, hogy:

$$0^{(d+1)T} = w^{kT} \sum_{i=1}^{r} v^i z^{iT} = \sum_{i=1}^{r} w^{kT} v^i z^{iT} = z^{iT} - z^{i+1T}$$

Ebből láthatjuk, hogy $z^1 = z^2 = ... = z^r = z \in \mathbb{R}^{d+1}$. Ekkor a $z = z^i = \sum_{j\in P_i} \lambda_j y^j$ összeg utolsó koordinátáit tekintve (ami minden y^j -nek 1) kapjuk a $z_{d+1} = z^i_{d+1} = \sum_{j\in P_i} \lambda_j$

egyenlőséget minden $i \in [r]$-re. Ezzel együtt, mivel $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$, adódik, hogy:

$$\sum_{j \in P_1} \lambda_j = \sum_{j \in P_2} \lambda_j = \dots = \sum_{j \in P_r} \lambda_j = 1/r$$

Jelöljük $q \in \mathbb{R}^d$-vel a z első d koordinátájából álló vektort. Ekkor $rq = \sum_{j \in P_i} r \lambda_j x^j \in \operatorname{conv}(X_i)$ minden $i \in [r]$-re, tehát az $rq = a^0$ pont minden X_i konvex burkában benne van, vagyis ez valóban az X ponthalmaz egy Tverberg-partíciója. $\square$

Megjegyzések: Az $A^{i,j}$ mátrixokat d és r szerint polinomiális időben elő lehet állítani, a T színes választásból pedig n szerint lineáris időben visszakaphatjuk az implikált X_i osztályokat, vagyis a Tverberg-Tétel helytállóságán kívül ezzel azt is beláttuk, hogy ha lenne egy olyan algoritmusunk, amely d-szerint polinomiális időben megtalálja egy tetszőleges színes választás-keresési probléma egy megoldását, azzal polinomiális időben meg tudnánk oldani tetszőleges Tverberg-partíció-keresési problémákat is.

Tekintve, hogy a mai napig nem ismeretes olyan algoritmus, amellyel polinomiális időben meg lehetne találni egy $(r-1)(d+1)+1$ elemű ponthalmaz egy Tverberg-partícióját, ez jó motiváció arra, hogy hatékony algoritmust találjunk a színes választás megtalálására.

4. Algoritmusok

Azt már beláttuk, hogy jó színes választás mindig létezik $d+1$ színosztály létezésekor, sőt, ennek a jó színes választásnak egy felhasználását is láttuk a Tverberg-partícióknál, azonban továbbra sem tisztáztuk, hogy ezt a ponthalmazt hogyan is lehetne megtalálni.

Mielőtt ehhez hozzáfognánk, feltétlenül szükséges kikötnünk, hogy mi tulajdonképpen milyen feladatot is akarunk megoldani. Mi ideálisan olyan algoritmust szeretnénk mutatni, amelyik inputként megkap $d+1$ darab $\mathbb{R}^d$-beli ponthalmazt, amelyek mind tartalmazzák az origót konvex burkukban, és outputként kiad nekünk egy $d+1$ pontból álló halmazt, melynek i-edik eleme az input i-edik halmazából származik, és amelyeknek a konvex burkában megtalálható az origó.

Mivel számítási feladatról van szó, a továbbiakban feltételezzük, hogy az inputban szereplő ponthalmazok véges méretűek. Ekkor a legegyszerűbb *brute force* módszerrel biztosan megtalálható egy jó színes választás, azonban ez akár az összes lehetséges színes választáson végigiterálhat, ami exponenciálisan sokáig tarthat.

Megjegyzendő, hogy amennyiben nem véges méretű ponthalmazokon keresünk színes választást, akkor a 1.1. Tétel szerint kiválaszthatunk legfeljebb $d+1$ pontot minden színosztályból, amelyekre redukálhatóak, és amelyekre már meg tudjuk oldani a feladatot a lenti módszerekkel. Speciális alakú ponthalmaz-inputokra létezhetnek már ismert akár lineáris vagy polinomiális módszerek ezek megtalálására, de általános alakú végtelen elemszámú input esetén ez is nyitott feladat.

A kérdés tehát, hogy tudunk-e okosabban keresni jó választást, vagyis hogy az input méretétől függően milyen kicsi futásidejű algoritmussal tudunk előhozakodni, ami megtalál egy ilyen ponthalmazt. Bárány és Onn [3] már 1997-ben mutattak egy algoritmust, amely, feltéve, hogy a színosztályok konvex burka tartalmazza nem csak az origót, de annak egy ρ sugarú környezetét is, megtalál egy jó színes választást az input mérete és $\frac{1}{\rho}$ szerint polinomiális időben, azonban pusztán az input szerint polinomiális algoritmus a mai napig nem ismeretes.

Ebben a fejezetben bemutatunk néhány algoritmust, amelyek a jó színes választás megtalálását hivatottak elősegíteni.

Az alap feladat: Adottak $X_1, ...X_{d+1} \in \mathbb{R}^d$ ponthalmazok, amelyekre $0^d \in \cap_{i=1}^{d+1} X_i$. Mutassunk egy (biztosan létező) $T = \{x^1, ..., x^{d+1}\}$ színes választást, amelyre $0^d \in \text{conv}(T)$. (A pontok összesített számát n-el fogjuk jelölni)

A továbbiakban azt is feltesszük, hogy a bemenet minden x pontjára $1 \le \|x\| \le 2$. Ezt feltehetjük, hiszen az origó a közös pont. Gondoljunk bele, hogy ha $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i = 0^{d+1}$ az origó egy konvex kombinációja, akkor a változók $\mu_i > 0$ skalárokkal való átsúlyozása után $\sum_{i=1}^{d+1} \frac{\lambda_i}{\mu_i}(\mu_i x^i) = 0^d$, továbbá $\frac{\lambda_i}{\mu_i} > 0$, így az egyenlet mindkét oldalát megszorozva $(\sum_{i=1}^{d+1} \frac{\lambda_i}{\mu_i})^{-1}$-el a bal oldali kombináció skalárjaiak összege 1 lesz, a jobb oldal pedig az origó marad, vagyis az origó ennek a ponthalmaznak is benne lesz a konvex burkában.

Egy nem ilyen alakú bemenetet könnyen átalakíthatjuk ilyenre úgy, hogy egyszerűen végigmegyünk az input összes x pontján, és beszorozzuk őket egy $\|x\|$-hez közeli értékkel. Ezt $\|x\| = 0$ esetén nyilván nem tehetjük meg, azonban ekkor bármilyen x-et tartalmazó színes választás triviálisan tartalmazza az origót konvex burkában, vagyis emiatt igazán nem kell aggódni.

Azért nem simán a $\|x\| = 1$ feltételt kötjük ki, mert Bárányék [3] a számítások zömét $\mathbb{Q}^d$-ben vizsgálja $\mathbb{R}^d$ helyett. Ennek az az előnye, hogy a racionális számokat számítógéppel is tudjuk egzakt kezelni, számottevő számítási-igény növekedés nélkül, és nem kell a valós világ fránya lebegőpontos hibái miatt aggódnunk, amelyek az ilyen típusú feladatoknál a gyakorlatban mindenhol gondokat okoznak.

4.1. Javítólépések

Az 1.3. Tételre adott korábbi bizonyításunk, amelyben mindig egy rossz pontot cserélünk ki egy olyanra, amellyel a konvex burok közelebb kerül az origóhoz, egy igen kézenfekvő, „javítólépéseken” alapuló algoritmusra ad ötletet:

3.1. Algoritmus

Input: Az $X_1, ..., X_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ színosztályok.

1. Induljunk ki egy testzőleges $T = \{x^1, ..., x^{d+1}\}$ színes választásból.
2. Keressük meg $\text{conv}(T)$-nek a 0^d-hez legközelebbi v pontját, ennek távolsága 0^d-től legyen ϵ.
3. Ha $\epsilon = 0$, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor legyen $x^i \in T$ az a pont, amire $v \in \text{conv}(T \setminus \{x^i\})$. Vegyük azt a $w \in X_i$ pontot, amire $\text{conv}(T \cup \{w\} \setminus \{x^i\})$ a legközelebb van 0^d-hez.
4. Legyen $T := T \cup \{w\} \setminus \{x^i\}$ az új színes választás, és vissza a 2. lépéshez.

Ezt az algoritmust már Bárány és Onn is vizsgálta 1997-ben [3], és a vele kapcsolatos, ránézésre is felmerülő aggályokat már ők is megpróbálták megválaszolni.

Futásidő Először is ellenőrizzük, hogy az algoritmus lefut-e véges időben. Ennek az ellenkezője akkor fordulhatna elő, ha ϵ sohase lenne 0, azonban mivel csak véges számú színes választás létezik, és amint azt az 1.3. Tétel bizonyítása során láttuk, hogy $\epsilon > 0$ esetén mindig tudunk úgy választani w-ket, hogy ϵ minden iteráció során szigorúan csökkenjen, vagyis előbb-utóbb $\epsilon = 0$ biztosan teljesül.

Felmerülhet a kérdés, hogy hány iteráció alatt várhatjuk, hogy elérjünk egy jó színes választást. Bárányék [3] megmutatták, hogy bizonyos „szépségi” feltételek teljesülésekor tudunk felső becslést adni az iterációk számára. Ennek alapjául először azt az esetet érdemes vizsgálni, amikor nem kell, hogy konkrétan az origóba nyúló konvex burkunk legyen, csak azt követeljük meg, hogy a legközelebbi pont egy előre megadott ϵ_0 távolságon belül legyen, vagyis az algoritmus 3. lépésében leállunk, amint $\epsilon \leq \epsilon_0$ teljesül.

Ekkor, feltéve hogy van $0 \leq \rho \leq 1$ szám, amire $B(0^d, \rho) \subset \cap_{i=1}^{d+1} \text{conv}(X_i)$, vagyis az origó ρ-sugarú környezete is közös a színosztályok burkaiban, akkor a kövezkező becslést lehet mutatni:

3.2. Tétel A 3.1. Algoritmus iterációinak száma adott, a fentiekben leírt módon viselkedő $0 < \epsilon_0, 0 \leq \rho \leq 1$ mellett felülről becsülhető a következő értékekkel:

- $\rho = 0$ esetén: $\lceil \frac{4}{\epsilon_0^2} \rceil = \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon_0^2})$
- $\rho > 0$ esetén: $1 + \lceil \frac{16}{\rho^2} \log \frac{2}{\epsilon} \rceil = \mathcal{O}(\frac{1}{\rho^2} \log \frac{1}{\epsilon_0})$.

Látható, hogy minél nagyobb a színosztályok burkainak közös része, annál gyorsbban várható, hogy közel érünk az origóhoz.

A tétel bizonyításához a következő, szintén hasznos segédállítást lehet alkalmazni:

3.3. Segédtétel Legyen a w^i a 3.1. Algoritmus futása során a T legközelebbi pontja 0^d-hez. Ekkor az algoritmus futása során teljesül az alábbi rekurzió:

- $\rho = 0$ esetén: $\frac{1}{\|w^{k+1}\|^2} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{\|w^k\|^2}$ (Itt $\frac{1}{0} := +\infty$)
- $\rho > 0$ esetén: $\|w^{k+1}\|^2 \leq (1 - \frac{\rho^2}{4})\|w^k\|^2$.

Ezeket a tételeket itt nem látjuk be, de [3]-ben mindkettőnek megtalálható egy-egy precíz bizonyítása.

A fentiekből látható, hogy habár az input méretében nem polinomiális, de a színosztályok burkainak közös területének mérete és a megengedett eltérés inverzeiben polinomiális iterációszámot tudunk biztosítani a 3.1. Algoritmus lefutásának. Ennek egyértelmű hátránya, hogy ha ezek bármelyike nagyon kicsi, akkor ez elég nagy felső becslés az iterációk számára.

Továbbá bizonyos feladatokban, például a korábban vizsgált Tverberg-partíció keresésénél nem elég, ha a konvex burok nagyon közel van az origóhoz, feltétlenül akarjuk, hogy $\epsilon = 0$-kor álljon le az algoritmus, mi erre is szeretnénk valami becslést adni.

Most vizsgáljuk meg, hogy egy-egy iteráció alatt mennyi számítást kell végezni! Tegyük fel, hogy a jelenlegi T választáshoz már megtaláltuk a minimális távolságú $v \in \mathrm{conv}(T)$ pontot. Ekkor az x^i „felesleges” pontot megtalálhatjuk úgy, hogy $j \in [d+1]$-re sorra megnézzük, hogy $v \in \mathrm{conv}(T \setminus \{x^j\})$ teljesül-e. Ez $d+1$ darab $\mathcal{O}(d+n)$ sorú/oszlopú lineáris egyenletrendszer pozitív megoldását/megoldhatatlanságának belátását jelenti, ami d, n szerint polinomiális időben megoldható.

Ha x^i megvan, akkor a „jobb” w pont pont egy olyan X_i-beli pont lesz, ami minimalizálja az $\langle w, v\rangle$ skalárszorzatot. Ennek szemléletes oka az, hogy minél kisebb a szorzat, annál nagyobb a vektorok által bezárt szög. Ha visszaemlékezünk az 1.3. Tétel bizonyítására, ez pont azt jelenti, hogy w minél jobban „belenyúlik” az origó felőli féltérbe. Ez $\mathcal{O}(n)$ darab skalárszorzás elvégzését jelenti, ez is megoldható d, n szerint polinomiális időben.

A $v \in \mathrm{conv}(T)$ minimális távolságú pont megtalálása azonban már problémás. Egyrészt ehhez a $\min\left(\sum_{j=1}^{d} v_j^2 : v \in \mathrm{conv}(T)\right)$ másodfokú minimalizálási feladatot kéne megoldani minden iterációban, ami már egy jelentősebb számításigényű feladat. Másrészről, amennyiben a racionális téren dolgozunk, egyáltalán nem garantált, hogy az igazi optimális megoldás racionális pont lesz. Ilyenkor csak egy nem egyértelműen meghatározott racionális közelítését tudjuk használni v-nek, amely egyrészt eltorzíthatja az algoritmus további eredményeit, másrészről pedig kellemetlen és idegesítő.

4.2. Javított javítólépések

Az előző algoritmus szarvashibájától eltekintve egész jól működő és alkalmazható módszer lenne, így szeretnénk, ha a fő elvét használhatnánk anélkül, hogy minden lépésben ki kéne számolni a drága v pontot. Ezt Bárányéknak [3] sikerült is megoldani, a következő elvvel:

Ahelyett, hogy minden lépésben újra kiszámolnánk, hogy a jelenlegi választás burka hol lesz legközelebb az origóhoz, inkább az algortimus futása során végig számon tartunk egy „legközelebbi pontot”, méghozzá ezt a jelenlegi választás egy konvex kombinációjának skalárjaival tesszük. Ezeket egy-egy iteráció során esetszétválasztás segítségével polinomiális időben frissíteni tudjuk, ezáltal polimiális idejűvé téve az egyes iterációk futásidejét.

3.4. Algoritmus

Input: Az $X_1, ..., X_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ színosztályok, és az $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_0^+$ leállási közelség.

1. Induljunk ki egy testzőleges $T = \{x^1, ..., x^{d+1}\}$ színes választásból, és a $\lambda = e^1 = (1, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ vektorból.
2. Legyen $v = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i$, ennek távolsága 0^d-től legyen ϵ
3. Ha $\epsilon \leq \epsilon_0$, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor legyen $i \in [d+1]$ olyan, hogy $\lambda_i = 0$ teljesül. (Ilyen i ekkor létezik, lásd később.) Vegyük azt a $w \in X_i$ pontot, amire $\text{conv}(T \cup \{w\} \setminus \{x^i\})$ a legközelebb van 0^d-hez.
4. Legyen $T := T \cup \{w\} \setminus \{x^i\}$ az új színes választás, és Legyen p az origó projekciója a $\text{conv}(T) \supset [v, w]$ szakaszra (vagyis a szakasz origóhoz legközelebbi pontja), a T eleminek egy $\sum_{i=1}^{d+1} \mu_i x^i$ konvex kombinációjaként felírva. Legyen $\lambda := \mu$
5. Ha $p = 0^d$ vagy $\lambda_i = 0$ valamilyen $i \in [d+1]$-re, akkor vissza a 2. lépéshez.
6. Ha T elemi affin összefüggőek, akkor λ-t módosítsuk úgy, hogy $p = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i$ konvex kombináció továbbra is teljesüljön, és $\lambda_i = 0$ legyen valamilyen i-re. (Lásd később, hogy ezt hogy kell.) Vissza a 2. lépéshez.
7. Legyen $\alpha = \min(c \in \mathbb{R}_0^+ : cp \in \text{conv}(T))$. Ha $\alpha = 0$, akkor kész vagyunk. Ha $\alpha > 0$, akkor legyen $\alpha p = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i x^i$ a T-beli elemek egy konvex kombinációja. Legyen $\lambda := \mu$ és vissza a 2. lépéshez.

Be lehet látni, hogy a 3.2. Tétel beli felső becslés ennek az algoritmusnak az iterációszámára is működik (lásd [3], vagyis ez az algoritmus is véges időben lefut, bár ez ránézésre kevésbé nyilvánvaló, mint a 3.1. Algoritmusnál, hisz itt nem a már bizonyítottan létező „jobb pontok” kiválasztásával haladunk előre, hanem magát a konvex kombinációt próbáljuk egyre közebb vinni az origóhoz.

A 3. Lépés Először ellenőrizzük, hogy a 3. lépéshez éréskor a $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i$ konvex kombinációban valóban $\lambda_i = 0$ lesz-e valamilyen i-re, ha meg nem teljesült $\epsilon \leq \epsilon_0$!

Az 1. és 5. lépésből érkezve 2-be ez triviálisan teljesül.

A 6. lépésben hogyan módosítsuk λ-t, hogy ez teljesüljön? Tudjuk, hogy a T halmaz elemei affin összefüggőek, vagyis valamilyen $j \in [d+1]$-re létezik a $\sum_{i \in [d+1] \setminus \{j\}} \mu_i x^i = x^j$ affin kombináció, tehát $\mu_j = -1$-et véve kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{d+1} \mu_i x^i = x^j - x^j = 0^d$, és $\sum_{i=1}^{d+1} \mu_i = \sum_{i \in [d+1] \setminus \{j\}} \mu_i - \mu_j = 1 - 1 = 0$.

Ekkor $c \in \mathbb{R}$-et választhatjuk úgy, hogy $\lambda_i := \lambda_i + c\mu_i = 0$ legyen valamilyen i-re, és $\lambda_j := \lambda_j + c\mu_j \geq 0$ maradjon a többi helyen, ekkor a $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i$ továbbra is a p pont konvex kombinációja, és $\lambda_i = 0$ teljesül.

Mi történik a 7. lépésben? Tudjuk, hogy a T halmaz elemei nem affin összefüggőek, vagyis a konvex burkuk egy $d+1$-csúcsú szimplex. Ekkor αp az a pont, ami az origóból induló, p irányú félegyenesen „először érinti” conv(T)-t. (Mivel $p \in \text{conv}(T)$, ilyen pont biztosan létezik ezen a félegyenesen.) Ha $\alpha = 0$, akkor az origó benne van ebben a szimplexben, akkor a jelenlegi színes választásunk pontos, vagyis kész vagyunk, és nem kell a feltétel miatt aggódnunk.

Ha $\alpha > 0$, akkor αp az a pont, ahol a félegyenes „először metszi” a conv(T) szimplexet, tehát ennek egy $d-1$-dimenziós lapján fog elhelyezkedni, tehát valamelyik x^i mellőzésével is megadható T-beli elemek konvex kombinációjaként, tehát λ_i teljesülni fog.

Futásidő Most vizsgáljuk meg, hogy az egyes iterációk lépései során milyen mértékű számításokat kell elvégeznünk!

2.: A v vektor és annak ϵ normájának kiszámítása $\mathcal{O}(d)$-ben könnyen kiszámolható.

3.: Az x^i pont megtalálása $\mathcal{O}(d)$-ben megy (simán megnézzük $i = 1..d+1$-re, hogy $\lambda_i = 0$-e), majd w megtalálása az előző algortimushoz hasonlóan $\langle v, w\rangle$ minimalizálásával n, d szerint polinomiális időben lefut.

4.: A $p \in [v, w]$ pont megtalálása már nem olyan egyszerű, de ez is megoldható polinomilis időben: Legyen i a korábban megtalált index, és legyen az új $\lambda_i := \frac{\langle v-w, v\rangle}{\|v-w\|^2}$, továbbá $j \in [d+1] \setminus \{i\}$ esetén legyen $\lambda_j := \frac{\langle w-v, w\rangle}{\|v-w\|^2}\lambda_j^k$.

Belátható, hogy ekkor $p = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i$ éppen az origó $[v, w]$-re vett projekciójának egy konvex kombinációja. Akinek ez ránézésre nem egyértelmű, ez részletesebben ki van fejtve a 3.2. Tétel [3]-beli bizonyításában. Ezen értékek kiszámolása $\mathcal{O}(d)$-ben megy, így az új λ vektor és a p pont kiszámítása $\mathcal{O}(d^2)$-ben megoldható.

6.: d-ben polinomiális módszerekkel eldönthető, hogy a T halmaz elemei affin összefüggőek-e, ekkor a korábban vizsgált μ skalárokat is ki tudjuk számolni polinomiális időben. Ekkor rögzített $i \in [d+1]$ esetén egy osztásba kerül kiszámolni, hogy milyen $c_i \in \mathbb{R}$ esetén lesz $\lambda_i + c_i\mu_i = 0$, ezután egyszerűen minden i-re megnézzük, hogy $\lambda + c\mu \geq 0^{d+1}$ teljesül-e, hiszen legalább az egyikre teljesülni fog.

7.: Ha ide elértünk, akkor conv(T) egy $d+1$ csúcsú/oldalú szimplex, azt a pontot keressük, ahol az origóból induló, p irányú félegyenes ezt először metszi. Ehhez először $i = 1..d+1$-re végignézzük, hogy az $(0^d, p)$ **egyenes** hol metszi (ha metszi) a $T \setminus \{x^i\}$ pontjai által meghatározott affin teret.

Egy-egy i-re ez a metszéspont akkor létezik, ha a $\sum_{j\in[d+1]\setminus\{i\}}[\mu_j, \mu_j x^j] = [1, \alpha p]$ feladatnak van valamilyen $[\alpha_i, \mu]$ megoldása, ami pontosan akkor teljesül, ha az $M_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p & x^1 & \dots & x^{i-1} & x^{i+1} & \dots & x^{d+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1\times d+1}$ mátrix nem szinguláris, vagyis ennek $\det(M_i) = \Delta_i$ determinánsa nem nulla.

Ekkor a keresett α_i szám a Cramer-Szabály szerint (a cserélt oszlopú mátrixot első oszlop szerint kifejtve) megkapható az $\alpha_i = -\frac{1}{\Delta_i}\det(\begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^{i-1} & x^{i+1} & \dots x^{d+1} \end{bmatrix}$ képlettel, ez mind polinomiális ($\mathcal{O}(d^3)$) időben kiszámolható (pl. Gauss-eliminációval).

Amennyiben $\Delta_i = 0$, vagyis az affin tér párhuzamos az egyenesünkkel és nincs metszéspont, akkor α_i-t rögzítsük $+\infty$-ként.

Most legyen $\alpha := \max(\alpha_i : i \in [d+1], \alpha_i < 1)$. Ekkor, ha $\alpha \leq 0$, akkor $0^d \in [p, \alpha p] \subset \text{conv}(T)$, hisz p és αp is benne van conv(T)-ben, így a jelenlegi színes választásunk pontos, és kész vagyunk.

Ha $0 < \alpha < 1$, akkor $p := \alpha p$ egy lépésben, és vissza 2-höz, új iteráció.

Láthatjuk, hogy az iteráción belül minden n, d szerint polinomiális időben fut. Ezeket a futásidőket az iterációk számának 3.2. Tétel felső becslésével kombinálva az elvégzendő műveletek számára adott $\rho > 0, \epsilon_0 > 0$ esetén az $\mathcal{O}(\frac{nd+d^4}{\rho^2} \log \frac{1}{\epsilon_0})$ felső becslés adható, illetve $\rho = 0$ esetén $\mathcal{O}(\frac{nd+d^4}{\epsilon_0})$.

Még mindig problémás, hogy meddig fut az algoritmus abban az esetben, ha mindenképpen szeretnénk, hogy az origó ténylegesen benne legyen a színes választás burkában. Alapvető ötlet lenne, hogy $\epsilon_0 = 0$-val futtassuk az algoritmust, de ekkor a futásidőre adott becsléseink használhatatlanokká válnak, így inkább meg szeretnénk állapítani, hogy mennyire kell kicsinek választani ϵ_0-t ahhoz, hogy a talált ϵ_0-hözeli ponttal együtt az origót is garantáltan közrefogjuk.

Bárányék [3] a következő, racionális pontokra vontakozó állítás belátásának segítségével találták meg a megoldást racionális input esetére:

3.5. Segédtétel Ha a $V = \{v_1, ..., v_m\} \subset \mathbb{Q}^d$ halmaz olyan, hogy $0^d \in \text{int}(\text{conv}(V))$, akkor $B(0^d, 2^{-2(d+1)L}) \subset \text{int}(\text{conv}(V))$ is teljesül, ahol L a V ponthalmaz bitmérete.

Magyarán, ha az origó egy racionális ponthalmaz burkának belsejében van, akkor a pontok „bonyolultságától" függően egy bizonyos sugarú környezetéről is tudjuk, hogy benne van a burok belsejében.

Ez a segédtétel, kombinálva a 3.4. Algoritmusnak egy, az iterációszám becslését nem növelő „kerekítőlépéssel" való kiegészítésével (a bitméret alacsonyan tartása végett) egy jó becslést tud adni a $\rho > 0$ eset futásidejére. Megmutatható, hogy ekkor $\epsilon_0 := 2^{-2(d+1)L}$-nek választva (ahol L az egész input bitmérete) az algoritmus racionális input esetén polinomiális lesz L és $\frac{1}{\rho}$ szerint. Ez hasonít a korábbi $\rho > 0$ becsléshez, abban az értelemben, hogy $nd+d^4$ nagyjából egy mértékben mozog L-el, amennyiben az inputbeli pontok „épeszű nevezőjűek".

$\rho = 0$ esetén sajnos nem tudunk jó becslést adni az iterációk számára pontos színes választás keresésekor, így a futásidőre sem, de azért érdemes megjegyezni, hogy az algoritmus ilyekor is véges időben lefut.

4.3. IP-feladat

Most nézzünk egy másik megközelítést! Tegyük fel, hogy nem akarunk/tudunk a fenti módszerhez hasonló programot írni, de mégis meg akarunk oldani egy színes választás-keresési problémát! Meg lehet-e oldani valahogy a problémát már létező módszerekkel? Itt bemutatunk egy mószert, hogy hogyan lehet egy ilyen feladatot IP-feladat, azaz egészértékű lineáris programozási feladatként megadni, amelyre már ismertek megoldás módszerek.

Megjegyzendő, hogy ezek a módszerek nem polinomiálisak, sőt, egy ilyen feladat megoldása NP-nehéz, de „épeszű méretű" input esetén azért már elég gyorsan meg tudunk oldani egy ilyet.

Az LP/IP-feladat fogalma jól ismert, de azért leírunk egy gyors összefoglalót. Egy LP-feladatban tulajdonképpen arról van szó, hogy adott egy $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix, egy $b \in \mathbb{R}^m$ vektor, és egy $c^T \in \mathbb{R}^n$ célfüggvény. Ekkor az $Ax \leq b$ feladat $x \in \mathbb{R}^n$ megoldásai közül szeretnénk találni egy olyat, amelyikre a cx értéke maximális lesz. Ezen kívül megkövetelhetjük, hogy az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszerben helyenként egyenlőség teljesülön, illetve hogy az x megoldás bizonyos koordinátái nemnegatívak legyenek.

Egy IP-feladat annyiban tér el az LP-feladatoktól, hogy azt is megkövetelhetjük, hogy a megoldás bizonyos koordinátái a korábbi feltételek mellett még egészértékűek is legyenek. Ez a megkötés jelentős mértékben megnehezíti a helyes megoldás megtalálását, azonban az ilyen módon modellezhető problémákat is megsokasítja. Egy ilyen probléma a színes választás megtalálása is: LP-feladatként nemigen lehet modellezni, de IP-ként lehet.

A probléma modellezése Legyen $A_i \in \mathbb{R}^{d\times m_i}$ az i-edik színosztály mátrixa, amit úgy kapunk, hogy mind az m_i elemét ábrázoló oszlopvektort egymás mellé teszzük. Ekkor vizsgáljuk meg a következő egyenletrendszer megoldásait (a csupa 1, csupa 0 sorvektorokat itt mérettől függetlenül simán $1v$-el, $0v$-vel jelöljük az átláthatóság kedvéért.)

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{d+1} \\ 1v & 1v & \dots & 1v \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0^d \\ 1 \end{bmatrix}, x \geq 0^n$$

Ennek egy $x \in \mathbb{R}^n$ megoldása a nemnegatív feltétel és az utolsó sor miatt éppen az origónak egy, az input pontjaiból álló konvex kombinációjának skalárjait fogja tartalmazni. A korábban belátott tételekből tudjuk, hogy ilyen konvex kombináció létezik, de egynlőre semmi sem garantálja, hogy egy megoldás pont egy színes választást fog leírni. Valahogy garantálni szeretnénk, hogy egy-egy színosztályból csak egy-egy pontot fogunk tartalmazni a kombinációnkban.

Ennek megoldása végett vegyünk fel egy-egy indikátorváltozót minden inputbeli pontra, azaz legyen az $y^{i,j}$ változó az i-edik színosztály j-edik elemének indikátora. Azt szeretnénk elérni, hogy egy megoldásban $y^{i,j}$ pont akkor venné fel at 1 értéket, ha az i-edik színosztályban pont a j-edik elem van benne a jó színes választásban, egyébként pedig 0 lenne.

Ekkor nyilván ki kell kötni, hogy $y^{i,j}$ nemnegatív, legfeljebb 1, és egészértékű. Ekkor a $\sum_{j=1}^{m_i} y^{i,j} \leq 1$ feltétel megadásával minden $i \in [d+1]$-re egyből garantálni tudjuk, hogy minden színosztályban legfeljebb egy indikátor legyen igaz. (Ha egy színosztály kimaradna, akkor abból tetszőleges ponttal kiegészítve a talált jó megoldást továbbra is jó $d+1$ elemű színes választást kapunk).

Már csak azt akarjuk megoldani, hogy az x megoldás egy megfelelő eleme (legyen $x^{i,j}$) csak akkor lehessen 0-tól eltérő értékű, ha a hozzá tartozó $y^{i,j}$ indikátor értéke 1. Ezt megoldhatjuk, ha minden i, j párra bevezetjük az $x^{i,j} - y^{i,j} \leq 0$ feltételt. Ez miért lesz jó?

$y^{i,j} = 0$ esetén bármilyen $x^{i,j} > 0$ megtörné a feltételt, így ez valóban nem vezet bajhoz. Csak az okozhatna gondot, ha valamilyen $y^{i,j} = 1$ mellett $x^{i,j} > 1$ lenne, ezzel kizárva egy amúgy jó megoldást. Emlékezzünk azonban, hogy x egy konvex kombinációt ír le, vagyis minden eleme nemnegatív, az összegük pedig 1. Ebből triviálisan adódik, hogy minden elemére $0 \leq x^{i,j} \leq 1$, szóval ez a probléma sem fog előfordulni. Tehát ezekkel a feltételekkel az indikátoraink épp az elvárt módon fognak működni.

A célfüggvény ekkor igazából nem befolyásolja a talált megoldás helyességét, de ha szeretnénk a lehető legkevesebb színosztály felhasználásával találni jó színes választást, akkor az indikátorokhoz tartozó elemeit −1-nek választva egy maximális célfüggvényértékű megoldás pont ezt oldja meg, továbbá a pontokhoz tartozó részével azt is megadhatjuk, hogy egyes pontokról mennyire szeretnénk, hogy benne legyenek a megoldásban (például ha egy-egy pont bevevése $c_{i,j}$ egységnyi pénzbe kerülne, akkor ezek ellentettjét érdemes beállítani).

Tehát a következő IP-feladat egy megoldása pont egy, a mi igényeinknek a lehető legjobban eleget tevő színes választás lesz (a csupa 0-mátrixokat $0m$-el, az identitásmátrixot I-vel jelöljük):

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_{d+1} & 0v & ... & 0v \\ 1v & 1v & ... & 1v & 0v & ... & 0v \\ 0v & 0v & ... & 0v & 1v & ... & 0v \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0v & 0v & ... & 0v & 0v & ... & 1v \\ I & 0m & ... & 0m & -I & ... & 0m \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0m & 0m & ... & I & 0m & ... & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ \leq \\ ... \\ \leq \\ \leq \\ ... \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 0^d \\ 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \\ 0^{m_1} \\ ... \\ 0^{m_{d+1}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x \geq 0^n \\ y \in \{0,1\}^n \end{matrix}$$

5. Kapcsolódó feladatok

Megeshet, hogy egy feladat, amelyet vizsgálunk kísértetiesen hasonlít a korábban vizsgált színes-választás keresési problémára, de valamilyen feltétel nem teljesülése miatt, vagy a feladat alapvető természetének eltéréséből adódóan nem tudjuk, esetleg nem akarjuk a korábbi módszereket alkalmazni. Ebben a részben bemutatunk néhány, a Színes Carathéodory-Tétel témaköréhez szorosan kapcsolódó, de itt-ott azért lényegesen eltérő feladatot, és azoknak egyes megközelítéseit.

5.1. Majdnem színes választások

Láthattuk, hogy ha megelégszünk az origót „eléggé megközelítő” konvex burokkal, akkor gyorsabban meg tudunk találni egy megfelelő színes választást, azonban szembe kell néznünk a ténnyel, hogy ez egy nem mindig megengedhető könnyítés. Miféle más módon könnyíthetnénk meg a megoldás megtalálását? Egy korábbi példán láttuk, hogy ha nincs elegendő színosztályunk az 1.3. Tétel feltételeinek kielégítéséhez, az gyakran ellehetetleníti, hogy jó színosztályt találjunk. Ebből logikusan következhet a feltevés, hogy ha több színosztályunk van, mint az feltétlenül szükséges lenne, akkor talán könnyebb dolgunk is lehetne, mint a szűkös $d+1$ színosztály esetén.

Wolfgang Mulzer és Yannik Stein [7] 2015-ben kidolgoztak egy módszert, amellyel $d^{\mathcal{O}(\log d)}$ időben meg lehet találni egy pontos színes választást, amennyiben nem csak $d+1$, de legalább $\Theta(d^2 \log d)$ színosztály áll rendelkezésre. Itt ezt a módszert fogjuk bemutatni, valamint egy, a korábbitól eltérő közelítési algoritmust.

A módszerek alapját egy újféle közelítés, az m-színes választások képezik. Mostantól m-színes választásnak nevezünk egy olyan $T \subseteq X_1 \cup ... \cup X_k$ halmazt, amely minden rendelkezésre álló színosztályból legfeljebb m elemet tartalmaz: $T = T_1 \uplus ... \uplus T_k$, ahol $T_i \subseteq X_i$ és $|T_i| \leq m$.

Ekkor az $m = 1$ speciális eset egy sima színes választást jelent, mostanáig ezeket vizsgáltuk.

Itt vázlatosan bemutatunk egy gyorsabb módszert [7] egy több-mint-1-színes választás találására, illetve a korábban említett, hasonló ötletre alapuló gyorsabb módszert 1-színes választás találására elég sok színosztály esetén.

5.1.1. m-színes választás keresése

Az alapötlet a következő: az inputbeli ponthalmaznak megkeressük egy kiindulási T részhalmazát, ami tartalmazza az origót konvex burkában. Ezt az 1.1. Tételnek egy konstruktív verziója szerint meg tehetjük $\mathcal{O}(d^4)$ időben, így emiatt nem kell aggódnunk.

Így kapunk egy m-színes választást valamilyen m-re. Ekkor belátható, hogy ki lehet cserélni egy-egy „sokszor képviselt" színű pontot más, kevesebbszer szereplő színű pontokra úgy, hogy az origó továbbra is a konvex burokban maradjon.

Ezt többször elismételve belátható, hogy ezzel a módszerrel megfelelő, rögzített ϵ-ra megkapható egy $\lceil \epsilon(d+1) \rceil$-színes választás.

Ehhez két fő segédállítást kell belátnunk, hogy minden gond nélkül mehessen.

4.1. Lemma Legyen $T \subset \mathbb{R}^d$, általános helyzetű ponthalmaz, amire $|T| \le d+1$ és $0^d \in \operatorname{conv}(T)$. Legyen $Q \in \mathbb{R}^d$ olyan $|Q| \le \mathcal{O}(d)$ ponthalmaz, amelynek a $\operatorname{lin}(T)^\perp$-re vett merőleges vetülete tartalmazza az orgót a konvex burkában.

Ekkor $\mathcal{O}(d^4)$ időben kiszámolható egy $t \in T$ pont, amire $0^d \in T \setminus \{t\} \cup Q$.

Ez a tétel sok geometriai fogalomba csomagolva tulajdonképpen azt mondja ki, hogy egy-egy T-beli pontot mindig ki tudunk cserélni valamilyen, más színű pontokból álló közelítő színes választásra.

Ezzel az a baj, hogy nem tudjuk előre megmondani, hogy ez a kiszámított lecserélhető t pont melyik színosztályból fog származni, mi ugyanis konkrétan azt szeretnénk, ha egy olyan pontot cserélhetnénk le, amelynek a színe már sokszor szerepel T-ben, és ezt kevesebbszer szereplő színű pontokkal akarjuk helyettesíteni. Ezt elősegíteni hivatott a következő segédállítás:

4.2. Lemma Legyen $T \subset \mathbb{R}^d$, általános helyzetű ponthalmaz, amire $|T| \le d+1$ és $0^d \in \operatorname{conv}(T)$, és legyen $T_1, ..., T_k$ a T halmaz egy partícója.

Ekkor $\mathcal{O}(d^3)$ időben kiszámolható egy $T' = \{x^1, ..., x^k\} \subset \mathbb{R}^d$, amire teljesül, hogy $x^i \in \operatorname{pos}(T_i)$ minden $i \in [k]$-ra, $0^d \in \operatorname{conv}(T')$, és $\dim T' = k-1$.

Itt az x^i elemet a T_i csoport képviselőjének hívjuk T-ben. Ennek a segédtételtek a segítségével már iráyítani tudjuk az algoritmus futása során, hogy mely színosztályokat cseréljük le.

Az algoritmus előkészítése Mielőtt leírnánk az algoritmust, vezessük be az $M(j) := \lceil (1-\epsilon)^{-\frac{j}{2}} \epsilon(d+1) \rceil$, illetve $D(j) := \lceil (1-\epsilon)^j \epsilon(d+1) \rceil$ jelöléseket. Be lehet látni, hogy az algoritmus futása alatt j-edik mélységű rekurzióban a vizsgált ponthalmaz $D(j)$-dimenziós, és az eggyel fentebbi meghívásnak egy $M(j)$-színes választást ad vissza ebből a halmazból. Ezzel együtt az algoritmus végül a $j=0$ szinten kiszámolt választást adja vissza, vagyis egy $M(0) = \lceil \epsilon(d+1) \rceil$-színes választást.

A rekurzív lépés bemenete a Q színezett ponthalmaz, amin a színes választást keressük, illetve a rekurzió j mélysége, amiből kiszámolható a választás $d := D(j)$ dimenziószáma, illetve hogy milyen $m := M(j)$-re biztosan m-színezés.

A futás során, ha a dimenziószám valamilyen előre rögzített K konstans alá esik akkor ebben a halmazban *brute force* segítségével $\mathcal{O}(K^4 + K^K) = \mathcal{O}(1)$ időben megtalálhatunk egy nekünk megfelelő színes választást. A K számot válasszuk meg nekünk jólesőnek, és rögzítsük.

A továbbiakban a $d_j := D(j)$, és $m_j := M(j)$ jelöléseket alkalmazzuk, pusztán esztétikai okokból.

4.3. Algoritmus **Input:** a $Q = Q_1 \uplus ... \uplus Q_k \subset \mathbb{R}^d$ színes ponthalmaz amin választást keresünk, és a j rekurziómélység. Feltesszük, hogy az inputban szereplő pontok általános helyzetűek.

1. Ha $d_j \leq K$, akkor brute force $\mathcal{O}(1)$-ben kiszámolunk egy jó m_j-színes választást Q elemeiből, ezt visszaadjuk.
2. $d_j > K$ esetén az 1.1. Tételből adódóan $\mathcal{O}(d_j^4)$-ban kiszámolunk egy $T \subset Q$ halmazt, amire $|T| = d_j + 1$, és $0^d \in \mathrm{conv}(T)$.
3. Ha T egy m_j-színes választás, akkor kész vagyunk, adjuk vissza T-t.
4. A T halmazt osszuk fel egy $T_1, ...T_k$ partícióba, ahol $k = d_j - d_{j+1} + 1$, valamint a T-be szereplő színek „egyenletesen oszlanak el" a különböző osztályokban, vagyis egy szín előfordulása két halmaz között legeljebb egyel térhet el.
5. Legyen $T' = \{x^1, ..., x^k\}$ a $T_1, ...T_k$ partíció 4.2. Lemma szerinti képviselői T-ben. Legyen továbbá $L := \{i \in [d+1] : |X_i \cap T| \leq m_j - m_{j+1}\}$ a kevéssé reprezentált (*light*) színosztályok indexeinek halmaza, és $H := [d+1] \setminus L$ (*heavy*) a többié.
6. Vegyünk $d_j - k + 2 = d_j - (d_j - d_{j+1} - 1) + 2 = d_{j+1} + 1$ darab L-beli elemet: $l_1, ..., l_{d_j - k + 2}$. Legyen Y_{l_i} az X_{l_i} színosztály merőleges vetülete $\mathrm{lin}(T')^\perp$-re.
7. Rekurzív számoljuk ki a $\mathrm{lin}(T')^\perp$ lineáris altéren a $(Q = Y_{l_1} \uplus ... \uplus Y_{l_{d_{j+1}+1}}, j = j+1)$ inputból kapott színes választást. Ezt hívjuk $\tilde{S}$-nek, és azt a ponthalmazt, amelynek épp $\tilde{S}$ lesz a vetülete, hívjuk S-nek.
8. Legyen $x^i \in T'$ a 4.1. Lemma által kiszámolt elem, vagyis amelyre az origó benne van $\mathrm{conv}(S \cup T' \setminus \{t_i\})$-ben.
9. Legyen $T := T \setminus T_i \cup S$ az új színes választás, ezt redukáljuk $d+1$ elemre az 1.1. Tétellel. Vissza a 3. lépésre.

Egy-egy 4.-9. iteráció alatt a T színes választásnak legalább egy m_j-nél *heavy* színű pontot lecserélünk csupa *light* ponttal, ezzel csökkentve azt, hogy T milyen m-re m-színes választás, így előbb-utóbb elérünk egy m_j-színes választást, amit visszaadhatunk a 3. lépésben.

Helyenként lehet hogy nem egyértelmű ránézésre, hogy miért fog jól működni az algoritmus, például hogy a 6. lépésben miért lesz elég eleme L-nek ahhoz, amit csinálunk, és hasonló apróságok. Ezeket az aggályokat itt nem vizsgáljuk meg részletesen, [7]-ban található egy precíz bizonyítás az algoritmus helyességére, amiből az algoritmus futásideje is kijön: $d^{\mathcal{O}(\epsilon^{-1} \log \epsilon^{-1})}$.

5.1.2. Sok-sok színosztály

Most nézzük meg az m-színes választásoknak egy másik felhasználási módját, ezúttal egy pontos, 1-színes választás megtalálására. Itt azt akarjuk megmutatni, hogy ha $d^2 \log d$ színosztályunk van, akkor a korábbi algoritmusoknál jobb futásidőben tudunk mutatni egy jó 1-színes választást, méghozzá mindenféle „szépségi” feltétel feltevése nélkül.

A módszer [7] egy „összefésülési” alapötletre épül: a korábbi segédállítás segítségével beláthatjuk, hogy ha van $d+1$ jó m-színes választásunk, akkor ezeknek elemeiből kiválogatkatunk egy jó $\lceil \frac{m}{2} \rceil$-színes választást, méghozzá polinomiális időben.

Ekkor, kiindulási színosztályokat véve egy-egy $d+1$-színes válaszásnak, ezeket elégszer összefésülve végül el fogunk jutni egy 1-színes választáshoz, feltéve, hogy mindig van elég megfelelő m-színes választásunk.

4.4. Lemma Legyenek $X_1, ...X_{d+1} \in \mathbb{R}^d$ különböző színekkel színezett m-színes választások, amelyekre $|X_i| \leq d+1$, és $0^d \in \text{conv}(X_i)$ minden $i \in [d+1]$-re.

Ekkor $\mathcal{O}(d^4)$ időben kiszámítható egy $T \subseteq \cup_{i=1}^{d+1} X_i$ $\lceil \frac{m}{2} \rceil$-színes választás, amire $0^d \in \text{conv}(T)$.

Bizonyítás Minden $i \in [d+1]$-re vegyünk egy olyan $X_i = X_{i,1} \uplus X_{i,2}$ partíciót, amelyre teljesül, hogy minden X_i-ben található szín egyenletesen van elosztva a két csoportban (ez bőven megoldható $\mathcal{O}(d^4)$-ben). Ezután a 4.2. Lemma szerint számoljuk ki az $x^{i,1}, x^{i,2}$ képviselő pontokat. Ez $(d+1)\mathcal{O}(d^3) = \mathcal{O}(d^4)$-ban lefut.

A 4.2. Lemma szerint ekkor $0^d \in \text{conv}(\{x^{i,1}, x^{i,2}\})$, vagyis az origó rajta van az $[x^{i,1}, x^{i,2}]$ szakaszon, ami azt is jelenti, hogy az $x^{i,2}$ és a $-x^{i,1}$ pontok az $(x^{i,1}, x^{i,2})$ egyenesnek ugyanarra a felére esnek az origótól. Mivel a Lemma szerint $x^{i,2} \in \text{pos}(X_{i,2})$, ez azt is jelenti, hogy $-x^{i,1} \in \text{pos}(X_{i,2})$.

Most nézzük meg az $x^{i,1}$ pontokat $i \in [d+1]$-re. Ez $d+1$ pont egy d-dimenziós térben, vagyis lineárisan összefüggőek. Vegyük az origónak egy $\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i x^{i,1} = 0^d$ nem triviális lineáris kombinációját. Egy ilyen megtalálható $\mathcal{O}(d^3)$-ban.

Most legyen az Y_i halmaz $X_{i,1}$, ha $\alpha_i \geq 0$, és $X_{i,2}$, ha $\alpha_i < 0$. Ekkor, mivel $x^{i,1} \in X_{i,1}$ és $-x^{i,1} \in X_{i,2}$, a korábbi lineáris kombináció ekkor éppen az Y_i halmazok elemeinek egy pozitív kombinációját írja le.

Mivel az eredmény az origó, az összeg együtthatóinak „lenormálásával” ez egy konvex kombináció lesz, a végeredmény pedig továbbra is az orgió, tehát a $T = \cup_{i=1}^{d+1} Y_i$ halmazra $0^d \in \text{conv}(T)$, továbbá, mivel az $X_{i,j}$ halmazok közt egyenletesen osztottuk el a színeket, T egy $\lceil \frac{m}{2} \rceil$-színes választás. □

Ezzel a segédállítással már leírható a következő 1-színes választást találó algoritmus:

4.5. Algoritmus

Input: Az $X_1, ..., X_n \subset \mathbb{R}^d$, egyenként legfeljebb $d+1$ elemű színosztályok. (Később megnézzük, hogy n-nek mennyinek kell lennie.)

1. Legyen $A[0] := \cup_{i=1}^{k} \{X_i\}$, és $A[i] := \varnothing$ minden egyéb i-re. (Ekkor egy-egy színosztályra tekinthetünk úgy, mint $d+1$-színes választásokra.)

2. Legyen $i \in \mathbb{N}$ a legnagyobb olyan index, amire $|A[i]| \geq d+1$. Vegyünk $d+1$ darab halmazt $A[i]$-ből, hívjuk őket $Y_1, ...Y_{d+1}$-nek. Legyen T az a színes választás, amit

a 4.4. Lemma ad az Y_j halmazokból. Ezt ritkítsuk meg az 1.1. Tétellel $d+1$ eleműre.

3. Ha T egy 1-színes választás, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor legyen $A[i] := A[i] \setminus \cup_{j=1}^{d+1}\{Y_j\}$ és $A[i+1] := A[i+1] \cup \{T\}$, továbbá a T ritkításakor teljesen kiesett X_j színosztályokat rakjuk vissza $A[0]$-ba. Vissza a 2. lépésre.

Az algoritmus helyességének belátásához azt kell igazolni, hogy a 4.4. Lemma mindig alkalmazható, hogy mindig van legalább $d+1$ elemű $A[i]$, és hogy az algoritmus véges időben leáll.

Látható, hogy az algoritmus futása során $A[0]$-ban mindig csupa $d+1$-színes választások vannak, szóval $i=0$ esetén a 4.4. Lemma egy $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil$-színes választást ad, és $A[1]$-be csak ilyeneket rakunk. Értelemszerűen adódik, hogy az $A[i]$-ben levő választások legfeljebb $\frac{d+1}{2^i}$-színesek, vagyis a lemmát mindig alkalmazhatjuk, és mindig felezi az m-színességet.

Ebből adódik, hogy $A[\lceil \log d+1 \rceil + 1]$-et már nem érjük el, hisz ekkor ebbe már csak egy 1-színes választást rakhatnánk, de ezt már visszaadtuk volna, és az algoritmus leállt volna.

Már csak az kellene, hogy $|A[i]| \geq d+1$ valamilyen $i \in \mathbb{N}$-re. Először is vegyük észre, hogy az algoritmus elején minden színosztály pontosan egyszer szerepel az egész A-ban, és hogy az algoritmus futása során ez a tulajdonság végig meg van őrizve.

Tudjuk továbbá, hogy az algoritmus futása során az A-nak csak az első $\lceil \log d+1 \rceil + 1$ rekeszét használjuk, illetve hogy az A-ban szereplő színes választások legfeljebb d színt tartalmaznak (hiszen egy $d+1$ színű, $d+1$ elemű színes választás már 1-színes lenne, ezt már visszaadtuk volna).

Ekkor $n = d(d+1)(\lceil \log d+1 \rceil + 1) + 1 = \Theta(d^2 \log d)$-nek választva a skatulya-elv szerint biztosan lesz olyan olyan i, amire $A[i]$-ben legalább $d(d+1)$ színosztály szerepel, vagyis ahol legalább $d+1$ színes választás található.

A futásidő becslésénél láthatjuk, hogy egy $A[i+1]$-beli elem kiszámolásához $d+1$ darab $A[i]$-beli elem kiszámolása kell, vagyis az algoritmus technikailag exponenciális lenne d-ben, azonban tudjuk, hogy csak $\mathcal{O}(\log d)$ mélyre kell lemennünk. Ez egybevéve a ténnyel, hogy egy $A[i+1]$-beli elem kiszámolása d szerint polinomiális időben fut megadja, az algoritmus $d^{\mathcal{O}(\log d)}$ időben fut.

5.2. Egy PPAD-teljes probléma

Ebben a fejezetben bemutatunk egy, a Színes Carathéodory-Tételhez szorosan kötődő problémát, amelyről vázlatosan bemutatjuk, hogy a PPAD-osztály eleme, sőt, PPAD-teljes. A feladat bonyolultságának efféle bebizonyítását F. Meunier és P. Sarrabezolles ötlötte ki [6] 2016-ban.

A probléma ezen alakjában a színosztályaink mindegyike egy-egy pontpár, vagyis $X_1, ... X_{d+1}$-re $|X_i| = 2$ teljesül, azonban $0^d \in \operatorname{conv}(X_i)$-t már nem tesszük fel. Ekkor egy másik geometriai állítás, az úgynevezett „Oktaéder-Lemma" szerint amennyiben ezek a pontok általános helyzetben helyezkednek el a d-dimenziós térben, akkor páros sok olyan színes választás létezik, amelynek elemei pozitív összefüggőek, amikor is a konvex burok tartalmazza az origót.

Értelemszerűen adódik, hogy ekkor, ha már tudunk egy ilyen színes választás létezéséről, akkor kell, hogy legyen legalább egy másik színes választás is, hiszen az 1 nem páros szám.

Tehát a probléma a következő:

4.6. Feladat Adottak $X_1, ..., X_{d+1} \in \mathbb{Q}^d$, összességében általános helyzetű pontpárok, illetve egy T színes választás, amelyre $0^d \in \mathrm{conv}(T)$. Adjunk egy $S \neq T$ színes választást, amelyre szintén $0^d \in \mathrm{conv}(S)$.

Mese a PPAD osztályról A PPAD bonyolultásgi osztályt hivatalosan Christos Papadimitriou vezette be 1994-ben. A vezetéknév hasonlósága a rövidítéshez a puszta véletlen műve, ez mindössze a "Polynomial Parity Arguments on Directed graphs" rövidítése. Az osztályban szereplő problémák „hasonló" feladatokat oldanak meg, az osztály definíciójából rövidesen értelmet is nyer, hogy ezt miért mondjuk.

Az osztály „fő" problémája a következő: Van egy D irányított gráfunk, amelyről tudjuk, hogy nagyon-nagyon sok csúcsa van, és hogy mindegyiküknek a be- és kifoka is legfeljebb 1, továbbá bármelyik konkrét csúcsról gyorsan meg tudjuk állapítani, hogy vannak-e ki- és/vagy beszomszédjai, és ha igen, kicsodák. Meg van adva még továbbá egy olyan csúcsa a gráfnak, amelynek 1 a kifoka és 0 a befoka, vagyis egy forrás. A feladat ekkor egy 1-befokú, 0-befokú csúcs (nyelő) keresése.

Mivel nagyon-nagyon sok csúcsa is lehet a gráfnak, a forrásból induló út egyszerű végigjárása sokáig is eltarthat, ennél szeretnénk valami jobbat találni.

Minden olyan problémát PPAD-belinek tekintünk, amely visszavezethető a fenti problémára. Ha egy PPAD-beli feladat olyan, hogy *rá* is vissza lehet vezetni a fő-problémát, akkor azt mondjuk, hogy a feladat PPAD-teljes. Megjegyezzük, hogy a feladatnak létezik irányítatlan verziója is, ez a PPA-osztályt adja meg.

Ilyen probléma például a Sperner-Lemma színes háromszögének megtalálása, illetve egy racionális Nash-egyensúly megtalálása racionális jövedelemmátrixú kétszemélyes játékokra (ezeket a fogalmakat az olvasó által ismertnek fogjuk tekinteni). Ez utóbbi fontos szerepet fog játszani a bizonyításban.

A probléma PPAD-teljessége [6]-ben található egy részletes bizonyítás arra, hogy a 4.6. Feladat PPAD-ban van, illetve hogy ebben teljes is. A teljesség belátásának alapgondolata, hogy a korábban említett Nash-egyensúly megtalálását visszavezetjük a másik színes választás-keresési feladatra, itt ezt mutatjuk be vázlatosan.

Belátható, hogy a következő, „kúpos" verziója a feladatnak ekvivalens a 4.6. Feladattal:

4.7. Feladat Adottak $X_1, ..., X_{d+1} \in \mathbb{Q}^d$, összességében általános helyzetű pontpárok, amelyekre $0^d \notin \mathrm{conv}(\cap_{i=1}^{d+1} X_i)$, illetve egy T színes választás és $p \in \mathbb{Q}^d$ pont, melyekre $p \in \mathrm{pos}(T)$. Adjunk egy $S \neq T$ színes választást, amelyre szintén $p \in \mathrm{pos}(S)$.

Erre a feladatra visszavezethető a korábban említett Nash-egyensúly keresési probléma. Legyenek $A, B \in \mathbb{Q}^{m \times n}$-es mátrixok a két játékos jövedelemmátrixai. Feltehetjük, hogy $A, B > 0m$. Nézzük a következő $M \in \mathbb{Q}^{m+n \times 2(m+n)}$ mátrixot:

$$M = \begin{bmatrix} A & I & 0m & 0m \\ 0m & 0m & I & B^T \end{bmatrix}$$

Mivel A és B pozitívak, az M mátrix minden oszlopa tartalmaz legalább egy pozitív elemet, vagyis az 0^{m+n} origó triviálisan nincs benne M oszlopainak konvex burkában.

Látható továbbá, hogy M-nek az $n+1$-től $2n+m$-edikig tartó oszlopai éppen az $n+m$-es identitásmátrix, vagyis az 1^{m+n} pont triviálisan benne van M oszlopainak konvex burkában.

Legyenek az $X_i = \{M_i, M_{i+m+n}\}$ az M megfelelő oszlopai a pontpárjaink minden $i \in [m+n]$-re, vagyis a mátrix „identitás-részeinek" oszlopait összepárosítjuk a tőlük $m+n$-távol található oszlopokkal. Ezeket a párokat véve színosztályoknak az identitás-rész éppen egy színes választás lesz, amelynek pozitív burkában benne van az 1^{m+n} pont.

Ekkor, ha a 4.7. Feladatot meg tudjuk oldani polinomiális időben, akkor ezzel meg tudunk találni egy másik S színes választást, amire $1^{m+n} \in \mathrm{pos}(S)$ szintén teljesül, vagyis tudunk mutatni egy olyan $\alpha \in \mathbb{Q}^{m+n}$ megoldást az $M\alpha = 1^{m+n}$ feladatra, melynek az identitás-részen kívül az A-s és B^T-s részeken is vannak pozitív elemei, illetve minden $i \in [m+n]$-re α_i és α_{i+m+n} közül legalább egy 0 lesz.

Ekkor belátható, hogy α éppen egy Nash-egyensúlyt ír le. Ez azt jelenti, hogy a Nash-egyensúly megtalálását polinomiális időben vissza lehet vezetni a 4.7. Feladat megoldására, vagyis, mivel az előbbiről tudjuk, hogy PPAD-teljes, az utóbbi is az.

Mivel a 4.7. Feladat ekvivalens a 4.6. Feladattal, ez is PPAD-teljes lesz.

Megjegyzések: A 4.7. Feladat megoldására is mutatható egy, a korábban bemutatott algoritmussal hasonlatosan javítólépésekre alapuló algortimus, azonban értelemszerűen ennek a futásideje sem lesz „igazán" polinomiális, vagyis ezzel egyelőre nem sikerült betörni a PPAD-osztályt, de mindig jó, ha egy osztálynak újabb teljes problémákat tudunk tulajdonítani.

Hivatkozások

[1] Imre Bárány. „A Generalization of Carathéodory's Theorem". *Discrete Mathematics 40* (1981), 141–152. old.

[2] Imre Bárány és Shmuel Onn. „Carathéodory's Theorem, Colorful and Applicable". (1997).

[3] Imre Bárány és Shmuel Onn. „Colourful Linear Programming and Its Relatives". *Mathematics of Operations Research , Aug., Vol. 22, No. 3* (1997), 550–567. old.

[4] kshum5987. *Proof of Carathéodory's thoerem.* URL: `https://planetmath.org/proofofcaratheodorystheorem`.

[5] Kozma László. *Az algebrai topológia elemei.* Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen, 1998.

[6] Frédéric Meunier és Pauline Sarrabezolles. *Colorful linear programming, Nash equilibrium, and pivots.* 2016.

[7] Wolfgang Mulzer és Yannik Stein. *Approximating the Colorful Carathéodory Theorem.* 2015.

[8] K. S. Sarkaria. „Tverberg's Theorem VIA number fields". *Israel Journal of Mathematics, 79* (1992), 317–320. old.

[9] Király Tamás. *Kiegészítés a Poliéderes Kombinatorika jegyzethez.* 2021.

[10] Helge Tverberg. „A generalisation of Radon's theorem". *Journal of the London Mathematical Society, 41* (1966), 123–128. old.