Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

A pénzügyi folyamatok memóriájának hatása az optimális befektetésre

Témavezető:
Rásonyi Miklós
Egyetemi Docens

Szerző:
Kovács Levente
Alkalmazott Matematikus BSc

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Első sorban köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Rásonyi Miklósnak, aki bevezetett a pénzügyi matematika világába. Hatalmas jóindulatával és türelmével mindig segített, amikor elakadtam, és a számomra nehéz fogalmakat is érthetően magyarázta el. Az általa nyújtott támogatás és az idő, amit rám szánt, nélkülözhetetlen volt ahhoz, hogy a dolgozat a jelenlegi formájában megvalósulhasson.

Köszönöm a családomnak és barátaimnak, hogy a tanulmányaim során végig támogattak és bátorítottak engem, amikor szükségem volt rá. Hálás vagyok, hogy mindig készségesen meghallgatták a matematikával kapcsolatos problémáimat és gondolataimat.

1. fejezet

Bevezetés

A frakcionális Brown-mozgás különböző Hurst paraméterekkel $H \in (0,1)$ már régóta foglalkoztatta a pénzügyi matematikusokat. Viszont egy ideális kereskedési modellben, ahol a piaci tökéletlenségek figyelmen kívül vannak hagyva, a frakcionális Brown-mozgás nem szolgáltat elfogadható modellt, mivel potenciális arbitrázs lehetőségeket eredményez $\left(H \neq \frac{1}{2} \text{ esetén}\right)$. Ennek következtében egy ideig nem alkalmazták ezt a modellt pénzügyi folyamatok elemzésére. Azonban számos kutatás eredménye megmutatta, hogy amennyiben piaci súrlódás figyelhető meg, az arbitrázs hatása eltűnik és a frakcionális Brown-mozgás egy alkalmas jelölt lesz az árfolyamat leírására. Ebben a dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy az árfolyamat memóriája hogyan befolyásolja az optimális befektetést, abban az esetben, ha a pénzügyi folyamat a frakcionális Brown-mozgást követi.

Először bemutatunk két Brown-mozgásból származtatott modellt, amelyek a pénzügyi matematika fejlődésében fontos szerepet játszottak (Bachelier, Black-Scholes), valamint ismertetjük a frakcionális Brown-mozgás tulajdonságait.

Ezt követően felvázoljuk a likviditási problémát, illetve megmutatjuk, hogy milyen árhatások lehetnek egy piaci környezetben, amelyek a piaci súrlódások figyelembe vételét indokolják.

Ezután rátérünk a dolgozat fő eredményére, ahol az azonnali árhatású piacokon azt az esetet tekintjük, amikor az árfolyamat a diszkrét idejű, hosszú és pozitív memóriájú $\left(H > \frac{1}{2}\right)$ frakcionális Brown-mozgást követi. Megmutatjuk, hogy a várhatóan elérhető profit növekedésének a nagyságrendbeli gyorsasága $\mathcal{O}\left(T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}\right)$, ahol H a Hurst paraméter, ami a folyamat kovariancia struktúráját befolyásolja, $\alpha > 1$ pedig a piaci súrlódásért felelős paraméter. Tehát a profit akkor nő gyorsabban, ha az árfolyamat trajektóriája simább (H nő) és ha a piaci súrlódás kevésbé bünteti a nagy kereskedési sebességet (α csökken). Ezen kívül megadjuk az aszimptotikusan optimális stratégiát, amivel ez a profit növekedés elérhető. Az eredményeink abban az értelemben aszimptotikusak, hogy hosszú időtávlatban érvényesek. Azonban érdemes megfigyelni, hogy ilyen hosszú távú kereskedések tényleg előfordulnak a gyakorlatban, például nagyfrekvenciájú kereskedés esetében, ahol a kereskedés milliszekundumonként zajlik és a kereskedési idő hossza néhány óra.

Összehasonlításképpen bemutatjuk a diszkrét idejű, negatív memóriájú $\left(H < \frac{1}{2}\right)$ esetben elért eredményeket, amelyek 2021-ben lettek elvégezve, lásd [1]. Így arra vonatkozó megfigyeléseket tehetünk, hogy hogyan változik az optimális befektetési stratégia attól függően, hogy az árfolyamat pozitív vagy negatív memóriájú.

Végül megemlítünk néhány nyitott kérdést a feladattal kapcsolatban, amelyeknek a megválaszolására további kutatásokra van szükség.

2. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben ismertetem azokat a gazdasági és matematikai fogalmakat, amelyek a szakdolgozat megértéséhez szükségesek.

2.1. Gazdasági fogalmak

2.1. Definíció. *Portfóliónak nevezzük egy kereskedő pénzügyi befektetéseinek összességét.*

2.2. Definíció. *Arbitrázsnak nevezzük az olyan lehetőségek kihasználását, mellyel kockázatmentesen nyílik lehetőségünk profit elérésére.*

2.3. Definíció. *Piaci súrlódásnak nevezzük a kereskedés során fellépő piaci környezet által okozott plusz költségeket (pl. tranzakciós költség, likviditási költség).*

2.4. Definíció. *Volatilitásnak nevezzük azt a mérőszámot, amely azt határozza meg, hogy egy adott árfolyamat mennyire oszcillál.*

2.5. Definíció. *Derivatívának nevezzük az olyan pénzügyi szerződéseket, amelyek egy mögöttes eszköz értékén alapulnak.*

2.6. Definíció. *Opciónak nevezzük az olyan derivatívát, amely jogot biztosít a birtokosának, hogy egy mögöttes eszközt előre meghatározott áron egy bizonyos időben vásároljon vagy adjon el. Egy európai opciót csak a lejárati dátumon, míg egy amerikai opciót a lejárati dátumig bármikor ki lehet váltani.*

2.2. Sztochasztikus folyamatok

2.7. Definíció. *Az $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ valószínűségi változók sztochasztikus folyamatot alkotnak, ha ezeknek minden véges $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ családjára meg van adva az együttes eloszlásfüggvény.*

2.8. Definíció. *Az $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sztochasztikus folyamat kovariancia-függvénye:*

$$r(t,s) := \operatorname{cov}(X_t, X_s) \tag{2.1}$$

2.9. Definíció. *Az $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sztochasztikus folyamat erősen stacionárius, ha minden $n \in \mathbb{N}$, $t_1 \in \mathbb{Z}, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ és $h \in \mathbb{Z}$ esetén $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ együttesen ugyanolyan eloszlású, mint a h-val való eltoltja $(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h})$.*

2.10. Definíció. *Az $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sztochasztikus folyamat gyengén stacionárius, ha $E[X_t]$ nem függ t-től (azaz konstans), illetve a kovariancia-függvény $r(t,s)$ értéke csak a $t-s$ eltéréstől függ.*

Gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat kovariancia-függvénye tehát egyváltozós: $r(t,s) = r(t-s)$. Vagyis gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat kovariancia-függvénye $r(h) := \operatorname{cov}(X_{t+h}, X_t)$ módon számolható. A későbbiekben ha valamiről azt állítjuk, hogy stacionárius, akkor gyengén stacionáriusnak értjük.

2.11. Definíció. *Egy $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stacionárius folyamatra az $r(k)$ kovariancia-függvénnyel ellátva azt mondjuk, hogy:*
Rövid memóriájú, ha

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |r(k)| < \infty \quad \text{és} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) > 0 \tag{2.2}$$

Hosszú memóriájú, ha

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |r(k)| = \infty \tag{2.3}$$

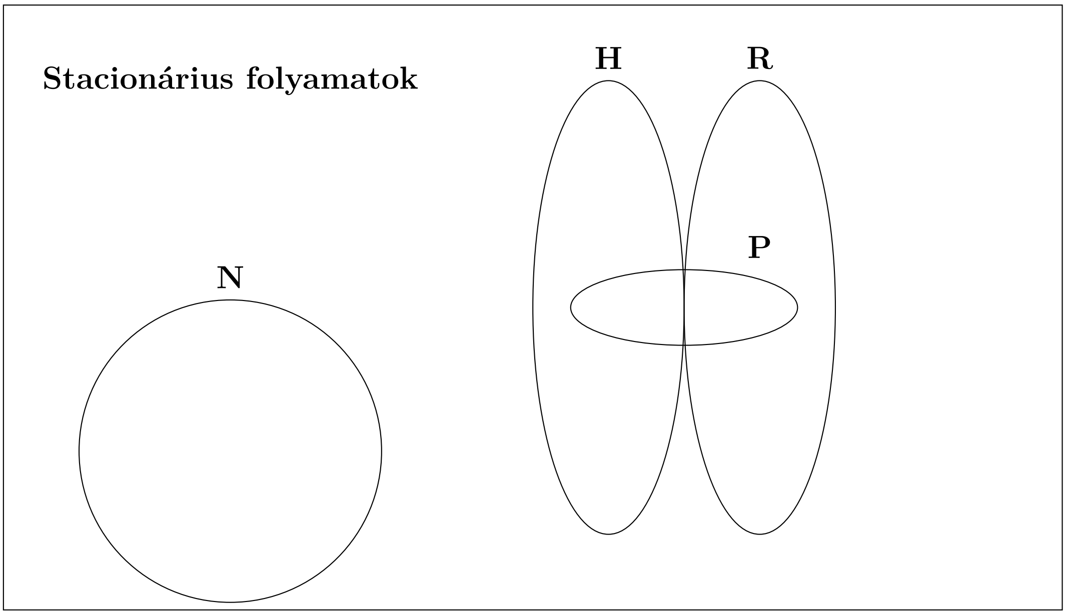
Pozitív memóriájú, ha

$$\operatorname{cov}(X_{l+k}, X_l) = r(k) \geq 0 \quad \forall\, k, l \in \mathbb{Z} \tag{2.4}$$

Negatív memóriájú, ha

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |r(k)| < \infty \quad \text{és} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) = 0 \tag{2.5}$$

Szemléltetésképpen egy Venn-diagramon ábrázoljuk, hogy a különböző stacionárius folyamatokat memóriájuk szerint csoportosítva milyen tartalmazások figyelhetőek meg.



N: Negatív memóriájúak, **H**: Hosszú memóriájúak, **R**: Rövid memóriájúak, **P**: Pozitív memóriájúak

Ahogy az ábra is mutatja, megfigyelhető, hogy a pozitív memóriájú folyamatok lehetnek hosszú és rövid memóriájúak is, attól függően, hogy milyen gyors a kovariancia-függvény lecsengése. A frakcionális Brown-mozgás esetében azonban a pozitív memóriájú folyamatok egyben hosszú memóriájúak is.

2.12. Definíció. *Az $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sztochasztikus folyamatot Gauss-folyamatnak nevezzük, ha bármely véges számú peremeloszlása együttesen normális eloszlású, azaz minden $n \in \mathbb{N}$, $t_1 \in \mathbb{Z}, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ esetén $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ együttesen normális eloszlású.*

A normális eloszlású valószínűségi változóknak van egy fontos speciális tulajdonságuk, amit most bizonyítás nélkül kimondunk. Ezt a későbbiekben sokszor fogjuk alkalmazni.

2.13. Állítás. *Legyen az X valószínűségi változó normális eloszlású, ekkor a következő tulajdonság teljesül valamilyen $C > 0$ konstans esetén:*

$$E|X|^p = C\sigma^p \tag{2.6}$$

ahol σ az X szórását jelöli.

2.3. Brown-mozgás

A Brown-mozgás a pénzügyi matematika egyik legfontosabb kifejezése, amelyből olyan sztochasztikus folyamatok származtathatóak, amelyek ideális kereskedési környezetben adnak helyes modellt árfolyamatok leírására. Ebben a fejezetben két ilyen modellt ismertetünk, amelyek a pénzügyi matematika fejlődése szempontjából történelmileg is jelentősek.

2.14. Definíció. *A $B(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatot Brown-mozgásnak hívjuk, ha eleget tesz a következő feltételeknek:*

1. *$B(t, \omega)$ majdnem minden trajektóriája a 0-ból indul, azaz* $P(\omega : B(0, \omega) = 0) = 1$

2. *Minden $0 \leq s < t$ esetén a $B(t)-B(s)$ valószínűségi változó normális eloszlású,* 0 *várható értékű és $t - s$ szórásnégyzetű paraméterekkel.*

3. *$B(t, \omega)$ növekményei függetlenek, tehát minden $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ esetén a $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ valószínűségi változók függetlenek.*

4. *$B(t, \omega)$ majdnem minden trajektóriája folytonos függvény, vagyis* $P(\omega : B(\cdot, \omega) \text{ folytonos}) = 1$

2.3.1. Bachelier modell

Louis Bachelier neve a pénzügyi matematika megszületéséhez kötődik, mivel ő volt az, aki a Brown-mozgás matematikai tulajdonságait részvényárfolyamok modellezésére először használta. Eredményeit a doktori disszertációjában közölte 1900-ban, amely még Einstein munkásságát is öt évvel megelőzte. Modelljében a következőképpen írja le az árfolyamatot:

$$S_t = \sigma B_t + \mu t \tag{2.7}$$

Itt σ a volatilitást, B_t a Brown-mozgást, $\mu \in \mathbb{R}$ az árfolyamat drift-jét jelöli.

Az árfolyamat drift-jén azt a tendenciát értjük, amilyen irányba a folyamat az idővel halad, függetlenül a rendszerben előforduló ingadozásoktól vagy zajoktól. Diszkrét idejű folyamatoknál ezt az értéket például lineáris regresszióval lehet megbecsülni.

A Bachelier modell jól működik alacsony volatilitású árfolyamatok leírására, azonban hátránya például az állandó volatilitás feltételezése. Ez a modell utat nyitott kifinomultabb modellek kidolgozására, mint például a Black-Scholes modell, amelyet az 1970-es években fejlesztettek ki, és jelenleg a legszélesebb körben használt modell európai opciók árazására.

2.3.2. Black-Scholes modell

A Black-Scholes modell egyike azoknak az árfolyamat modelleknek, amely a Brown-mozgásból származtatható. Ez a modell azt feltételezi, hogy a piac egy kockázatos (pl. részvény) és egy kockázatmentes (pl. kötvény) eszközből áll, amelyek az alábbi folyamatokat követik. Jelöljük K_t-vel a kockázatmentes, S_t-vel a kockázatos eszköz árfolyamatát.

$$K_t = e^{rt} \tag{2.8}$$
$$S_t = S_0 \cdot e^{\sigma B_t + \mu t} \tag{2.9}$$

Itt r a kockázatmentes kamatlábat, σ a volatilitást, B_t a Brown-mozgást, $\mu \in \mathbb{R}$ az árfolyamat drift-jét jelöli.

Ebben a modellben feltesszük, hogy r, σ és μ konstans paraméterek. A piacról pedig azt feltételezzük, hogy arbitrázsmentes, idealisztikus, azaz nincsenek piaci súrlódások, és a kockázatos és a kockázatmentes eszközzel is bármekkora értékben lehet kereskedni.

A modell használatakor a fő elv az opció fedezése a kockázatos eszköz olyan arányban történő eladásával és vételével, amellyel a kereskedésünket kockázatmentessé tehetjük. Ez a fajta kereskedés ad alapot bonyolultabb fedezeti stratégiáknak, amelyet a befektetési bankok széles körben használnak. Black és Scholes megmutatták, hogy létezik olyan kockázatmentes kereskedési stratégia, amely nem függ a kockázatos eszköz jövőbeli árától. Ez a stratégia egy parciális differenciálegyenlethez vezetett, amelynek a megoldását a Black-Scholes formula adja, amely a kockázatos eszközhöz tartozó (európai) opció árfolyamatát határozza meg.

2.4. Frakcionális Brown-mozgás

A frakcionális Brown-mozgás a Brown-mozgás egy általánosítása, a két folyamat közötti különbség, hogy előbbi esetében a növekmények nem függetlenek. Mandelbrot volt az első, aki ezt a fajta sztochasztikus folyamatot árfolyamatok modellezésére használta, lásd [2]. Ez a modell az előbbi két modellel ellentétben abban az esetben alkalmazható, ha piaci súrlódások figyelhetők meg a kereskedési környezetben.

2.15. Definíció. *Hurst paraméternek nevezzük a frakcionális Brown-mozgás kovariancia-függvényét befolyásoló paraméterét.*

2.16. Definíció. *A* $\left(B_t^H\right)_{t\in[0,\infty)}$ $H \in (0,1)$ *Hurst paraméterrel ellátott sztochasztikus folyamatot frakcionális Brown-mozgásnak nevezzük, amely egy folytonos, nulla várható értékű Gauss-folyamat az alábbi kovariancia-függvénnyel ellátva:*

$$\operatorname{cov}\left(B_t^H, B_u^H\right) = \frac{t^{2H} + u^{2H} - |t-u|^{2H}}{2}, \quad t, u \geq 0 \tag{2.10}$$

Ugyan a frakcionális Brown-mozgás egy folytonos idejű sztochasztikus folyamat, azonban mi a későbbiekben ennek a diszkretizált változatát, vagyis a $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{N}}$ folyamatot fogjuk tekinteni.

Az imént definiált kovariancia-függvényből könnyen levezethető a frakcionális Brown-mozgás növekményeinek kovariancia-függvényére is egy becslés a következőképpen:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left(B_{t+1}^H - B_t^H, B_1^H - B_0^H\right) \\
&= \operatorname{cov}\left(B_{t+1}^H, B_1^H\right) - \operatorname{cov}\left(B_t^H, B_1^H\right) \\
&= \frac{(t+1)^{2H} + 1^{2H} - t^{2H}}{2} - \frac{t^{2H} + 1^{2H} - (t-1)^{2H}}{2} \\
&= \frac{(t+1)^{2H} - 2t^{2H} + (t-1)^{2H}}{2} \approx \frac{\left(t^{2H}\right)''}{2} \\
&= H(2H-1)t^{2H-2}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

A frakcionális Brown-mozgás növekményei stacionárius folyamatot alkotnak, így a kovariancia-függvény csak a növekmények távolságától függ. Ezek alapján különböző Hurst paraméterek esetén a frakcionális Brown-mozgás a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $H > \frac{1}{2}$ esetén a folyamat növekményei pozitívan korreláltak
2. $H < \frac{1}{2}$ esetén a folyamat növekményei negatívan korreláltak
3. $H = \frac{1}{2}$ esetén a folyamat a hagyományos Brown-mozgás független növekményekkel

2.5. Analízisbeli fogalmak

2.17. Definíció. *Szuperlineárisnak nevezzük a $g(x)$ függvényt, ha tetszőleges lineáris $f(x)$ függvény esetén*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{2.12}$$

A bizonyítások során többször is fogunk integrálokkal becsülni végtelen sorokat, ezekre mondunk most ki két állítást, bizonyítás nélkül.

2.18. Állítás. *Legyen $f(x)$ monoton növő, pozitív függvény, a, b egészek. Ekkor a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\int_{a-1}^{b} f(x)\,dx \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq \int_{a}^{b+1} f(x)\,dx \tag{2.13}$$

2.19. Állítás. *Legyen $f(x)$ monoton csökkenő, pozitív függvény, a, b egészek. Ekkor a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\int_{a}^{b+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq \int_{a-1}^{b} f(x)\,dx \tag{2.14}$$

Most már minden szükséges előismeretünk megvan ahhoz, hogy rátérhessünk a dolgozat fő problémáira. A következő fejezetben ismertetjük a realisztikus piacokon fellépő likviditási problémákat és árhatásokat, amik megindokolják, hogy miért szükséges a piaci súrlódásokat figyelembe venni, illetve felvázoljuk a piaci modellt, amelyben dolgozni fogunk és definiáljuk a megengedett befektetési stratégiákra szükséges feltételeket.

3. fejezet

Piaci környezet

3.1. Likviditási probléma

A likviditás nehézsége egy jelentős piaci súrlódás, amely a pénzügyi piacok gördülékeny működését befolyásolja. Likviditási problémának nevezzük azt a jelenséget, amikor egy eszközt nehezen, vagy egyáltalán nem tudunk eladni vagy megvásárolni azonnal egy korrekt áron a vásárlók vagy eladók hiánya miatt. Akkor nevezünk egy eszközt likvidnek, ha azt könnyű megvásárolni és eladni. Likvid eszközök például a különböző valuták, illetve a nagy cégek részvényei (mint a Google vagy Apple részvények). Más részről illikvid eszközök az ingatlanok, vagy a magánvállalkozások.

A likviditási problémát elsődlegesen a kereslet és kínálat közötti egyensúly felborulása okozza. Ha a piacon több eladó, mint vásárló van, az eszköz ára lecsökken. Ez a hatás egy negatív ismétlődést hoz létre, ahol az eszköz árának csökkenése további eladásokhoz és további árcsökkenéshez vezet. Hasonlóképpen, ha több a vevő, mint az eladó, akkor az eszköz ára gyorsan emelkedik, ami egy eszközár-buborékot eredményez, vagyis az eszköz túlértékeltté válik.

A kereslet és kínálat kiegyensúlyozatlanságán túl sok más tényező is okozhat likviditási problémákat. Például a piaci bizonytalanság és a volatilitás visszatarthatja a vásárlókat és az eladókat a piacra lépéstől, ami a likviditás csökkenéséhez vezet. Továbbá az eszközzel kapcsolatos elégtelen információ, például annak valódi értéke vagy kockázatai szintén megnehezítik a vevők vagy eladók megtalálását, ezzel csökkentve a likviditást.

A likviditási probléma jelentős hatással lehet a piaci szereplőkre. A befektetők számára az illikviditás növelheti a veszteségek kockázatát, mivel kedvezőtlen ármozgások esetén nehéz lehet gyorsan kilépni egy pozícióból. A kereskedők számára a likviditás hiánya csökkentheti stratégiáik jövedelmezőségét, mivel előfordulhat, hogy nem tudják a kereskedéseiket a kívánt áron vagy mennyiségben végrehajtani.

A likviditási probléma megoldására a piaci szereplők gyakran különféle stratégiákat alkalmaznak. A diverzifikáció az egyik ilyen stratégia, ahol a kereskedők a befektetéseiket különböző eszközök és piacok között osztják el annak érdekében, hogy csökkentsék likviditási kockázatukat. A likviditási probléma kezelésének egy másik módja az új pénzügyi eszközök, például derivatívák bevezetése. A derivatívák használatával a befektetők fedezhetik kockázataikat és új likviditási forrásokhoz juthatnak hozzá. Például egy határidős ügylet lehetővé teszi a befektető számára, hogy egy jövőbeli időpontban előre meghatározott áron vásároljon vagy adjon el egy eszközt. A határidős ügyletek használatával a befektetők rögzíthetik egy eszköz árát és csökkenthetik a volatilitásnak való kitettségüket, ezáltal javítva a piacon a likviditást.

A likviditás egyik legfontosabb mérőszáma a „bid-ask spread”, ami a legjobb ajánlat és a legjobb eladási ár különbsége. A likvid piacokon ez az érték pontosan megfelel a likviditás költségének.

3.2. Piaci árhatások

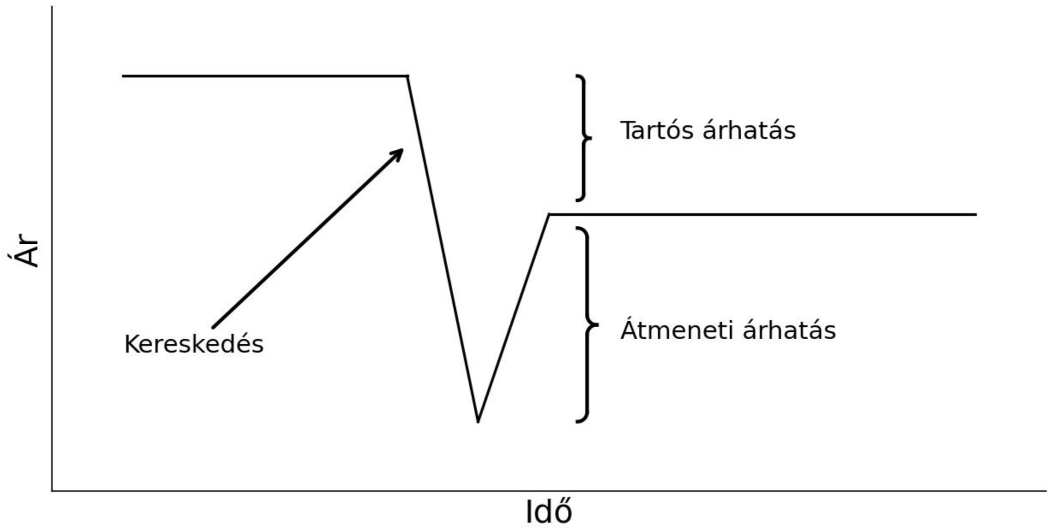
Azt a hatást, amikor a kereskedők a tranzakcióikkal befolyásolják az árfolyamat mozgását, árhatásnak nevezzük. Ebben a szakaszban ennek három típusát ismertetjük, amelyeknek a fellépése szorosan összefügg az illikviditás jelenségével.

3.2.1. Átmeneti árhatás

Átmeneti árhatásnak nevezzük egy eszköz árának a valódi értékétől való átmeneti eltérését a piaci szereplők kereskedési tevékenységének hatása miatt. Rövid távú hatásról van szó, azaz rövid ideig tart, amíg az eszköz ára visszatér a valódi értékéhez. Ez a hatás a kereslet és kínálat kiegyensúlyozatlansága miatt léphet fel. Például egy nagy vételi megbízás egy korlátozott likviditással rendelkező piacon átmenetileg megnövelheti egy eszköz árát, mivel a rendelkezésre álló kínálatot gyorsan felvásárolják, ezzel hiányt okozva az eszközből, ami az ár megnövekedéséhez vezet. Hasonlóképpen, egy korlátozott likviditású piacon egy nagy eladási megbízás átmenetileg csökkentheti egy eszköz árát, mivel a piacon többlet keletkezik az eszközből. Az átmeneti árhatás mértéke a piac likviditásától és a megbízás nagyságától függ. Egy nagyobb likviditású piacon az átmeneti árhatás általában kisebb, mivel az egyéni tranzakciók a kereslet és kínálat egyensúlyát csak nehezen tudják felborítani.

3.2.2. Tartós árhatás

Tartós árhatás alatt azt a hatást értjük, ami hosszú távon befolyásolja egy eszköz árfolyamatát. Ez tipikusan tranzakciók sorozatának az eredménye, amikor a kereskedők között konszenzus van egy eszköz eladásáról vagy vételéről. Az átmeneti árhatástól eltérően a tartós árhatás megváltoztathatja az eszköz valódi értékét, amit az alábbi ábrával szemléltetünk is.



3.2.3. Azonnali árhatás

A harmadik árhatás típus az azonnali árhatás, amely egy eszköz árfolyamatát azonnal befolyásolja. Ez a hatás általában egy megbízás végrehajtása miatt következik be, az okozott hatás nagysága számos tényezőtől függhet, azonban általánosságban elmondható, hogy a megbízások végrehajtásának sebessége és nagysága a két legfontosabb paraméter. Ez azt jelenti, hogy egy nagy vételi megbízás megemeli egy eszköz árát, míg egy nagy eladási megbízás lenyomja azt.

Összefoglalva, realisztikus piacokon a likviditási probléma, illetve a különböző árhatások úgynevezett piaci súrlódást eredményeznek. A matematikai modellünk felállításakor az azonalli árhatást vesszük figyelembe, aminek a definiálását a következő szakaszban tesszük meg.

3.3. Piaci modell

Tekintsük azt a pénzügyi piacot, ahol a kockázatos eszköz ára az S_t, $t \in \mathbb{N}$ folyamatot követi. A kockázatmentes eszköz ára változatlan.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ az S_t-re vonatkoztatott természetes filtrációval ellátott valószínűségi mértéktér. $E[X]$ jelentse az X valós értékű valószínűségi változó várható értékét (amennyiben az létezik).

Ahhoz, hogy a modellünk realisztikus legyen figyelembe kell vennünk a piaci súrlódásokat. A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy a piacon jelen van egy szuperlineáris azonnali árhatás, ahol a portfóliónk értékéből levonásra kerül minden egyes kereskedési időpillanatban a kereskedési sebesség egy bizonyos hatványával arányos mennyiség. Ezt a bizonyos hatványt a későbbiekben α-val jelöljük és a szakirodalomban az értékét jellemzően $\alpha = \frac{3}{2}$, vagy $\alpha = 2$-nek választják.

Adott $T \in \mathbb{N}$ esetén a T időpontig befejeződő teljesíthető stratégiák osztályát úgy definiáljuk, hogy

$$\mathcal{S}(T) := \{\phi = (\phi_t)_{t=0}^{T} : \phi \text{ valós értékű, a filtrációra mérhető folyamat}\} \tag{3.1}$$

ϕ_t azt jelenti, hogy a kereskedő a t.-ik időpillanatban mekkora mennyiségben adott el, vagy vásárolt az adott eszközből. Ha analóg módon szeretnénk fogalmazni a folytonos időbeli modellel, akkor ϕ_t a t.-ik időpillanatbeli kereskedési sebességet határozza meg.

Tegyük fel, hogy a kereskedés megkezdésekor nem rendelkezünk semekkora részben a kockázatos eszközzel. Ekkor azt, hogy a t.-ik időpillanatban mekkora mennyiségben rendelkezünk a kockázatos eszközzel úgy számolhatjuk ki, hogy

$$\Phi_t := \sum_{u=0}^{t-1} \phi_u \tag{3.2}$$

Súrlódásmentes kereskedés esetén azt is tudjuk, hogy a $T+1$.-ik időpillanatban a készpénzünk mennyisége egyenlő

$$\sum_{u=1}^{T+1} \Phi_u (S_u - S_{u-1}) \tag{3.3}$$

amennyiben a kezdő pozíciónk 0 volt.

Végezzük el a következő algebrai átalakításokat, ahhoz hogy egy hasonló összefüggést kapjunk a befektető adott időpillanatbeli készpénz mennyiségére abban az esetben, ha piaci súrlódás is megfigyelhető:

$$\begin{aligned}
&\sum_{u=1}^{T+1} \Phi_u (S_u - S_{u-1}) \\
&= \sum_{u=1}^{T+1} \Phi_u S_u - \sum_{u=1}^{T+1} \Phi_u S_{u-1} \\
&= \sum_{u=1}^{T+1} S_u \sum_{k=0}^{u-1} \phi_k - \sum_{u=1}^{T+1} S_{u-1} \sum_{k=0}^{u-1} \phi_k \\
&= S_{T+1} \sum_{k=0}^{T} \phi_k + \sum_{u=1}^{T} S_u \sum_{k=0}^{u-1} \phi_k - \sum_{u=1}^{T+1} S_{u-1} \sum_{k=0}^{u-1} \phi_k \\
&= \sum_{u=0}^{T} S_u \sum_{k=0}^{u-1} \phi_k - \sum_{u=0}^{T} S_u \sum_{k=0}^{u} \phi_k + S_{T+1} \sum_{k=0}^{T} \phi_k \\
&= \sum_{u=0}^{T} S_u \left(\sum_{k=0}^{u-1} \phi_k - \sum_{k=0}^{u} \phi_k \right) + S_{T+1} \sum_{k=0}^{T} \phi_k \\
&= -\sum_{u=0}^{T} S_u \phi_u + S_{T+1} \sum_{k=0}^{T} \phi_k
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Feltesszük, hogy a súrlódás árhatása a kereskedési sebesség egy szuperlineáris hatványfüggvénye, így az előbb levezetett képletet kiegészítjük a súrlódás hatását leíró tényezővel:

$$-\sum_{u=0}^{T} \phi_u S_u + S_{T+1} \sum_{u=0}^{T} \phi_u - \sum_{u=0}^{T} \lambda |\phi_u|^{\alpha} \tag{3.5}$$

itt feltesszük, hogy $\alpha > 1$ és $\lambda > 0$.

Fontos megjegyezni, hogy csak azokat a portfóliókat szeretnénk figyelembe venni, ahol a kereskedési időszak végén az összes kockázatos eszközünket eladjuk, így a kereskedés során szerzett profitunkat készpénz formájában tudjuk realizálni. A matematikai megfogalmazáshoz így a következő halmazt kell definiálnunk:

$$\mathcal{G}(T) := \left\{ \phi \in \mathcal{S}(T) : \Phi_{T+1} = \sum_{u=0}^{T} \phi_u = 0 \right\} \tag{3.6}$$

Amennyiben $\phi \in \mathcal{G}(T)$, és feltesszük, hogy 0 kezdőtőkével indulunk, úgy a készpénzben meglevő pozíciónk a $T+1$.-ik időpillanatban a következőképpen határozható meg:

$$X_T(\phi) := -\sum_{u=0}^{T} \phi_u S_u - \sum_{u=0}^{T} \lambda |\phi_u|^\alpha \tag{3.7}$$

Fontos még azt a kikötést megtennünk, hogy a készpénzben meglevő pozíciónk várható értéke semikor se vehesse fel a $-\infty$ értéket, ehhez a portfóliók következő halmazát kell definiálnunk minden $T \in \mathbb{N}$-re

$$\mathcal{A}(T) := \{\phi \in \mathcal{G}(T) : E[(X_T(\phi))\_] < \infty\} \tag{3.8}$$

ahol $x\_ := \max\{-x, 0\}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ez tehát azoknak a stratégiáknak a halmaza, amelyek nulla kezdőtőkéből indulnak, és a kereskedési időszak végén az összes befektetésünket készpénzben realizáljuk, aminek a várható értéke szigorúan nagyobb, mint $-\infty$.

Most definiáljunk egy függvényt, ami meghatározza, hogy egy adott $T+1$ időpontig mi a lehetséges stratégiák közül elérhető profit várható értékének a szuprémuma, vagyis az optimális stratégiával várhatóan elérhető legnagyobb nyereség.

$$u(T) := \sup_{\phi \in \mathcal{A}(T)} E[X_T(\phi)] \tag{3.9}$$

A célunk a későbbiekben az, hogy megadjunk egy olyan ϕ befektetési stratégiát, amely legalább aszimptotikusan, ahogy $T \to \infty$ eléri $u(T)$ növekedési szintjét.

4. fejezet

Aszimptotikusan optimális befektetés

Először fogalmazzunk meg az árfolyamatra és a növekmények tulajdonságaira feltételezéseket.

4.1. Feltevés. *Legyen az $S_t, t \in \mathbb{N}$ folyamat nulla várható értékű Gauss-folyamat, amelynek a növekményei stacionáriusak úgy, hogy*

$$\operatorname{cov}(S_u - S_t, S_t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq u \tag{4.1}$$

Definiáljuk a növekmények kovariancia-függvényét a következőképpen:

$$r(k) :=\ \operatorname{cov}(S_1 - S_0, S_{k+1} - S_k),\ k \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

Tegyük fel, hogy a kovariancia-függvény a következő feltételeknek megfelel:

$$r(0) = 1,\ J_1 k^{2H-2} \leq r(k) \leq J_2 k^{2H-2},\ k \geq 1 \tag{4.3}$$

ahol $J_1, J_2 > 0$ és $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

4.2. Megjegyzés. *A fenti feltételek egy hosszú és pozitív memóriájú folyamatot határoznak meg. A diszkrét idejű frakcionális Brown-mozgás $H > \frac{1}{2}$ Hurst-paraméterrel eleget tesz ezeknek, lásd* [3].

A következő tétel a dolgozat fő eredménye, amely explicit formában megadja az aszimptotikusan optimális stratégiát, valamint meghatározza a várhatóan elérhető profit növekedésének nagyságát.

4.3. Tétel. *Legyen $\lambda > 0$, $\alpha > 1$ és az árfolyamatra legyenek igazak az előbb megfogalmazott feltételek. Ekkor, ha λ elég kicsi, akkor a*

(i) várhatóan elérhető maximális profitra a következő teljesül:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{u(T)}{T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}} < \infty \tag{4.4}$$

(ii) az optimális befektetési stratégia:

$$\phi_t(T,\alpha) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(S_t)|S_t|^{\frac{1}{\alpha-1}}, & 0 \le t \le 2\lfloor T/4 \rfloor \\ -\frac{1}{2\lfloor T/4\rfloor}\sum_{s=0}^{2\lfloor T/4\rfloor} \phi_s, & 2\lfloor T/4\rfloor < t \le 4\lfloor T/4\rfloor \\ 0, & \textit{különben} \end{cases} \tag{4.5}$$

Emellett a stratégia mellett teljesül, hogy

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{E[X_T(\phi(T,\alpha))]}{T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}} > 0 \tag{4.6}$$

ez azt jelenti, hogy a $\phi(T,\alpha)$ stratégia esetén a profit növekedésének gyorsasága $\mathcal{O}(T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1})$.

A fenti stratégia arra az intuícióra épül, hogy az olyan piacon, ahol súrlódás figyelhető meg nem lehet tetszőleges sebességgel vásárolni vagy eladni, mivel a súrlódás szuperlineáris árhatása miatt ezek olyan veszteségeket okozhatnának, amelyek egy egyébként nyereséges befektetést is tönkretehetnek. A mi stratégiánk úgy működik, hogy a kereskedés első felében attól függően veszünk vagy adunk el, hogy a kezdeti ($S_0 = 0$) értékhez képest az ár pozitív vagy negatív értékű és annál gyorsabban kereskedünk, minél nagyobb az árkülönbözet a kezdeti értékhez képest pozitív vagy negatív irányban. A kereskedés második felében a súrlódás árhatása miatt állandó sebességgel adjuk el az eszközöket, amiket a kereskedés első felében megvásároltunk.

5. fejezet

Bizonyítások

Először határozzuk meg a portfóliók várhatóan elérhető maximális nyereségét. Tehát az $X_T(\phi) = \sum_{u=0}^{T} \phi_u(-S_u) - \sum_{u=0}^{T} \lambda|\phi_u|^\alpha$ értékére kell felső becslést adnunk. Ehhez tekintsük a $\sup_{x\in\mathbb{R}}(xy - G(x))$ optimalizálási feladatot, ahol $G(x) := \lambda|x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

5.1. Állítás.

$$G^*(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}}(xy - G(x)) = \frac{\alpha-1}{\alpha}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}|y|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \quad y \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Bizonyítás. Ott lesz az $xy - G(x)$ függvénynek lokális szélsőértéke az x változó szerint, ahol az x-szerinti parciális deriváltja 0-val egyezik meg.

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy - \lambda|x|^\alpha) = \begin{cases} y - \lambda\alpha x^{\alpha-1}, & x \geq 0 \\ y + \lambda\alpha(-x)^{\alpha-1}, & x < 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Mivel mindkét esetben a derivált nullával egyezik meg, így a következő összefüggés kapható:

$$\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}|y|^{\frac{1}{\alpha-1}} = |x| \tag{5.3}$$

Tudjuk, hogy $\lim_{x\to\pm\infty} xy - \lambda|x|^\alpha = -\infty$, mert az $|x|^\alpha$ a kifejezésben a domináló tényező és $\lambda > 0$. Ebből viszont következik, hogy az x változó szerinti lokális szélsőérték jelen esetben az abszolút maximumértéknek felel meg. Helyettesítsük be tehát a megkapott összefüggéseket.

$$
\begin{aligned}
|xy| - \lambda|x|^\alpha &= \lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}|y|^{\frac{1}{\alpha-1}}|y| - \lambda\lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}|y|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&= \lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}|y|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \frac{\alpha-1}{\alpha}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}|y|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Ezzel az állítást beláttuk, hiszen a funkcionál maximális értékét pontosan meghatároztuk. □

Legyen $x := \phi_u$, $y := -S_u$. Ekkor a G^* definíciója szerint minden $\phi \in \mathcal{G}(T)$ esetén,

$$
X_T(\phi) \leq \sum_{u=0}^{T} G^*(-S_u) = C\sum_{u=0}^{T}|S_u|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \tag{5.5}
$$

valamilyen $C > 0$ konstans esetén és mivel az S_u Gauss-folyamat, így

$$
EX_T(\phi) \leq C\sum_{u=0}^{T} E|S_u|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = C\sum_{u=0}^{T} M_{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\mathrm{Var}(S_u))^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \tag{5.6}
$$

Ahhoz, hogy további becsléseket tudjunk adni, a $\mathrm{Var}(S_n)$ értékét felülről kell becsülnünk minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ esetén. Ezt a növekmények stacionárius tulajdonságát kihasználva tesszük meg.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S_n) &= \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \mathrm{cov}(\sum_{j=1}^{n} S_j - S_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} S_i - S_{i-1}) \\
&= n\mathrm{Var}(S_1 - S_0) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{cov}(S_j - S_{j-1}, S_i - S_{i-1}) \\
&= n\mathrm{Var}(S_1 - S_0) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{cov}(S_1 - S_0, S_{i-j+1} - S_{i-j}) \\
&= nr(0) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} r(i-j) \\
&\leq nr(0) + 2J_2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)^{2H-2}
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le n + 2J_2 \sum_{i=2}^{n} \int_0^{i-1} u^{2H-2}\, du \\
&= n + 2J_2 \sum_{i=2}^{n} \frac{(i-1)^{2H-1}}{2H-1} \\
&\le n + 2J_2 \int_1^n \frac{v^{2H-1}}{2H-1}\, dv \; = n + \frac{2J_2\left(n^{2H}-1\right)}{2H(2H-1)} \\
&\le \frac{2J_2+1}{2H-1} n^{2H} =: J_3 n^{2H}
\end{aligned}
$$

Más részről a $\mathrm{Var}(S_n)$ értékére alsó becslést is adhatunk.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \mathrm{cov}(\sum_{j=1}^{n} S_j - S_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} S_i - S_{i-1}) \\
&= n\mathrm{Var}(S_1 - S_0) + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{cov}(S_j - S_{j-1}, S_i - S_{i-1}) \\
&= n\mathrm{Var}(S_1 - S_0) + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{cov}(S_1 - S_0, S_{i-j+1} - S_{i-j}) \\
&= nr(0) + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} r(i-j) \\
&\ge nr(0) + 2J_1 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)^{2H-2} \\
&\ge 2J_1 \sum_{i=2}^{n} \int_1^i u^{2H-2}\, du \\
&= 2J_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{i^{2H-1}-1}{2H-1} \\
&\ge \frac{2J_1}{2H-1} \int_1^n v^{2H-1} - 1\, dv \\
&= \frac{2J_1}{2H-1} \left(\frac{n^{2H}-1}{2H} - (n-1) \right) \\
&\ge \frac{J_1}{2H(2H-1)} \left(n^{2H}-1\right)
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

ha n elég nagy. Az alsó becslés azt mutatja, hogy $\mathrm{Var}(S_n)$ értéke legalább n^{2H} nagyságrendben nő, vagyis $\mathrm{Var}(S_n) \ge J_4 n^{2H}$ valamilyen $J_4 > 0$ konstans esetén.

Most már az $EX_T(\phi)$ értékét tovább tudjuk felülről becsülni a következőképpen.

$$\begin{aligned} EX_T(\phi) &\leq CM_{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \sum_{u=0}^{T} (J_3 u^{2H})^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \\ &= CM_{\frac{\alpha}{\alpha-1}} J_3^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \sum_{u=0}^{T} u^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}} \\ &\leq CM_{\frac{\alpha}{\alpha-1}} J_3^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \int_0^{T+1} u^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}\, du \\ &= CM_{\frac{\alpha}{\alpha-1}} J_3^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} \frac{(T+1)^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}}{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ebből az következik, hogy a várhatóan elérhető maximális profit $\mathcal{O}\left(T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}\right)$ gyorsasággal nő. Ez bizonyítja (i)-et, vagyis

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\sup_{\phi\in\mathcal{A}(T)} EX_T(\phi)}{T^{(\frac{H\alpha}{\alpha-1})+1}} < \infty \tag{5.10}$$

teljesülését.

A (ii) rész bizonyításához válasszuk a $\phi_t := \phi_t(T,\alpha)$ stratégiát. Ekkor figyeljük meg, hogy $X_T(\phi)$ a következő tagokra bomlik:

$$\begin{aligned} X_T(\phi) = & -\sum_{u=0}^{\frac{T}{2}} |S_u|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \sum_{u=0}^{\frac{T}{2}} \lambda |S_u|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ & + \sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{T} S_u \frac{2}{T} \sum_{s=0}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sgn}(S_s)|S_s|^{\frac{1}{\alpha-1}} - \sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{T} \lambda \left| \frac{2}{T} \sum_{s=0}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sgn}(S_s)|S_s|^{\frac{1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} \end{aligned} \tag{5.11}$$

A fenti kifejezésben jelöljük a tagokat sorrendben haladva $I_1(T)$, $I_2(T)$, $I_3(T)$, $I_4(T)$-vel. Tehát

$$X_T(\phi) = -I_1(T) - I_2(T) + I_3(T) - I_4(T)$$

Tekintsük először az $I_2(T)$, $I_4(T)$ tagokat és vegyük észre, hogy amennyiben $\alpha > 1$, akkor az $|x|^\alpha$ függvény konvex, így alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Ekkor

$$EI_4(T) \leq EI_2(T) = \lambda E\left[\sum_{u=0}^{\frac{T}{2}} |S_u|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right] = \lambda \sum_{u=0}^{\frac{T}{2}} E|S_u|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \tag{5.12}$$

Az $I_3(T)$ tag várható értékének meghatározásához a Gauss-eloszlású valószínűségi változók egy speciális tulajdonságát kell kihasználnunk. Nevezetesen, hogy az

S_u, $u > s$ esetén felbontható, mint $S_u = \rho(u,s)S_s + W_{u,s}$, ahol $W_{u,s}$ független S_s-től és nulla várható értékű, $\rho(u,s) = \frac{\mathrm{cov}(S_u,S_s)}{\mathrm{Var}(S_s)}$.

$$
\begin{aligned}
EI_3(T) &= \frac{2}{T}\sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{T}\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}} E\left[S_u \mathrm{sgn}(S_s)|S_s|^{\frac{1}{\alpha-1}}\right] \\
&= \frac{2}{T}\sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{T}\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}} E\left[\rho(u,s)S_s \mathrm{sgn}(S_s)|S_s|^{\frac{1}{\alpha-1}}\right] + E\left[W_{u,s}\mathrm{sgn}(S_s)|S_s|^{\frac{1}{\alpha-1}}\right] \qquad (5.13)\\
&= \frac{2}{T}\sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{T}\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}} E\left[\rho(u,s)|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]
\end{aligned}
$$

Mivel $E\left[W_{u,s}\mathrm{sgn}(S_s)|S_s|^{\frac{1}{\alpha-1}}\right] = E\left[W_{u,s}\right]E\left[\mathrm{sgn}(S_s)|S_s|^{\frac{1}{\alpha-1}}\right] = 0$.

Ahhoz, hogy további becsléseket tudjunk adni először rögzített $v > 1$ esetén meg kell határoznunk az $S_k - S_l$ és S_l kovarianciáját, ahol $k, l \in \mathbb{N}$ és $k > vl$, vagyis a k és az l időpillanatok kellően távol vannak egymástól.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(S_k - S_l, S_l) \\
&= \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{l} S_i - S_{i-1}, \sum_{j=l+1}^{k} S_j - S_{j-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=l+1}^{k} \mathrm{cov}(S_i - S_{i-1}, S_j - S_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=l+1}^{k} \mathrm{cov}(S_1 - S_0, S_{j-i+1} - S_{j-i}) \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=l+1}^{k} r(j-i) \qquad (5.14)\\
&\geq J_1 \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=l+1}^{k} (j-i)^{2H-2} \\
&\geq J_1 \sum_{i=1}^{l}\int_{l+1-i}^{k+1-i} u^{2H-2}\,du \\
&= \frac{J_1}{2H-1}\sum_{i=1}^{l}\left((k+1-i)^{2H-1} - (l+1-i)^{2H-1}\right)
\end{aligned}
$$

Mivel $\left((k+1-i)^{2H-1} - (l+1-i)^{2H-1}\right)$ növekszik i-ben a konkavitás miatt, így

$i = 1$-ben minimális. Ezért

$$\begin{aligned}
&\frac{J_1}{2H-1}\sum_{i=1}^{l}\left((k+1-i)^{2H-1}-(l+1-i)^{2H-1}\right)\\
&\geq \frac{J_1}{2H-1}l\left(k^{2H-1}-l^{2H-1}\right)\\
&\geq \frac{J_1(v^{2H-1}-1)}{2H-1}l^{2H} =: J_5 l^{2H}
\end{aligned}\tag{5.15}$$

Tudjuk a növekményekre való feltevés alapján, hogy $\mathrm{cov}(S_u, S_s) \geq \mathrm{Var}(S_s)$, vagyis $\rho(u,s) \geq 1$ minden $s \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, $u \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ esetén. Most egy jobb becslést adunk $\rho(u,s)$ értékére abban az esetben, ha $u \in \left[\frac{3T}{4}, T\right]$, $s \in \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right]$, $v = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(S_u, S_s)\\
&= \mathrm{cov}(S_u - S_s, S_s) + \mathrm{Var}(S_s)\\
&\geq J_5 s^{2H} + \mathrm{Var}(S_s)\\
&\geq J_5\left(\frac{T}{4}\right)^{2H} + \mathrm{Var}(S_s)\\
&= \frac{J_5}{4^{2H}}T^{2H} + \mathrm{Var}(S_s) =: c_1(H)T^{2H} + \mathrm{Var}(S_s)
\end{aligned}\tag{5.16}$$

Most már tovább tudjuk becsülni $\rho(u,s)$ értékét abban az esetben, ha $u \in \left[\frac{3T}{4}, T\right]$, $s \in \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\rho(u,s) &= \frac{\mathrm{cov}(S_u, S_s)}{\mathrm{Var}(S_s)}\\
&\geq \frac{c_1(H)T^{2H} + \mathrm{Var}(S_s)}{\mathrm{Var}(S_s)}\\
&\geq 1 + \frac{c_1(H)T^{2H}}{J_3 s^{2H}}\\
&\geq 1 + \frac{c_1(H)T^{2H}}{J_3\left(\frac{T}{2}\right)^{2H}}\\
&= 1 + \frac{c_1(H)2^{2H}}{J_3} =: 1 + c_2(H)
\end{aligned}\tag{5.17}$$

Ezzel minden rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy az EI_3 értékére egy alsó becslést adjunk. Ehhez az I_3 kifejezésben szereplő szummákat szét kell szednünk több részre, hogy a fentebb levezetett becsléseinket fel tudjuk használni. Először is

$$\frac{2}{T}\sum_{u=\frac{3T}{4}+1}^{T}\sum_{s=0}^{\frac{T}{4}} E\left[\rho(u,s)|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right] \geq \frac{2}{T}\sum_{u=\frac{3T}{4}+1}^{T}\sum_{s=0}^{\frac{T}{4}} E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]\tag{5.18}$$

továbbá,

$$\frac{2}{T}\sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{\frac{3T}{4}}\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}}E\left[\rho(u,s)|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]\geq\frac{2}{T}\sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{\frac{3T}{4}}\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right] \tag{5.19}$$

Most tudjuk kihasználni az $u\in\left[\frac{3T}{4},T\right]$, $s\in\left[\frac{T}{4},\frac{T}{2}\right]$ esetére kidolgozott becsléseinket, miszerint

$$\frac{2}{T}\sum_{u=\frac{3T}{4}+1}^{T}\sum_{s=\frac{T}{4}+1}^{\frac{T}{2}}E\left[\rho(u,s)|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]\geq\frac{2(1+c_2(H))}{T}\sum_{u=\frac{3T}{4}+1}^{T}\sum_{s=\frac{T}{4}+1}^{\frac{T}{2}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right] \tag{5.20}$$

A következő lépésben az EI_3-EI_1 kifejezés értékére adunk alsó becslést, hiszen ekkor az $EX_T(\phi)$ értékét is alulról fogjuk tudni becsülni.

$$\begin{aligned}
&EI_3-EI_1\\
&=\frac{2}{T}\sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{T}\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}}E\left[\rho(u,s)|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]-\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]\\
&\geq\frac{2}{T}\sum_{u=\frac{3T}{4}+1}^{T}\sum_{s=0}^{\frac{T}{4}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]+\frac{2}{T}\sum_{u=\frac{T}{2}+1}^{\frac{3T}{4}}\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]\\
&\quad+\frac{2(1+c_2(H))}{T}\sum_{u=\frac{3T}{4}+1}^{T}\sum_{s=\frac{T}{4}+1}^{\frac{T}{2}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]-\sum_{s=0}^{\frac{T}{2}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]\\
&=\frac{2c_2(H)}{T}\sum_{u=\frac{3T}{4}+1}^{T}\sum_{s=\frac{T}{4}+1}^{\frac{T}{2}}E\left[|S_s|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]\\
&\geq\frac{2c_2(H)\frac{T}{4}}{T}\sum_{s=\frac{T}{4}+1}^{\frac{T}{2}}M_{\frac{\alpha}{\alpha-1}}J_4^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}s^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}\\
&\geq\frac{c_2(H)M_{\frac{\alpha}{\alpha-1}}J_4^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}}{2}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}s^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}}\,ds\\
&=\frac{c_2(H)M_{\frac{\alpha}{\alpha-1}}J_4^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}}{2\left(\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1\right)}\left[\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}-\left(\frac{T}{4}\right)^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}\right]\\
&\geq AT^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

valamilyen $A > 0$ konstans esetén. Ekkor

$$\frac{EI_3 - EI_1}{T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}} \geq A \tag{5.22}$$

Ebből már következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{E[X_T(\phi(T,\alpha))]}{T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}} &= \frac{EI_3 - EI_1 - EI_2 - EI_4}{T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}} \\ \geq A - \frac{2\lambda K T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}}{T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}} &= A - 2\lambda K \end{aligned} \tag{5.23}$$

valamilyen $K > 0$ konstans esetén. Emiatt

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{E[X_T(\phi(T,\alpha))]}{T^{\frac{H\alpha}{\alpha-1}+1}} > 0 \tag{5.24}$$

elég kicsi λ esetén. Vagyis ezzel beláttuk a (ii) állítást abban az esetben, ha T 4-el osztható. Amennyiben T tetszőleges egész szám, akkor a számolások ugyanúgy elvégezhetőek, kis változtatásokkal az egyenletekben, miszerint a szummázási határoknál a megfelelő egész értékeket kell venni.

6. fejezet

Negatív memóriájú eset

Összehasonlításképpen ebben a fejezetben bizonyítás nélkül ismertetjük a [1] cikk eredményeit, amely a diszkrét idejű, negatív memóriájú esetet írja le. A piaci modell és a megengedett stratégiákra vonatkozó feltételek megegyeznek a 3. fejezetben leírtakkal.

6.1. Feltevés. *Legyen a* $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *egy valós értékű, nulla várható értékű stacionárius Gauss-folyamat, amely az árfolyamat növekményeit jelenti. Jelölje az* $r(t) := \operatorname{cov}(Z_0, Z_t)$, $t \in \mathbb{Z}$ *a növekmények kovariancia-függvényét. Tegyük fel, hogy létezik* $T_0 > 0$ *és* $J_1, J_2 < 0$ *úgy, hogy minden* $t \geq T_0$ *esetén*

$$J_1 t^{\chi} \leq r(t) \leq J_2 t^{\chi} \tag{6.1}$$

ahol $\chi \in (-2, -1)$. *Továbbá,*

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} r(t) = 0 \tag{6.2}$$

Definiáljuk az árfolyamatot a következőképpen: $S_0 = 0$ *és* $S_t = S_{t-1} + Z_t,\ t \geq 1$ *esetén.*

A fenti feltevések azt fejezik ki, hogy a $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ egy negatív memóriájú sztochasztikus folyamat, lásd [3]. Ha $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ egy $H < \frac{1}{2}$ Hurst paraméterű frakcionális Brown-mozgás növekményei, akkor a (6.1) feltétel $\chi := 2H - 2$ esetén teljesül.

A következő tétel a cikk fő eredménye, explicit formában megadják az aszimptotikusan optimális stratégiát és meghatározzák a várhatóan elérhető profit növekedésének nagyságát.

6.2. Tétel. *Legyenek igazak az árfolyamatra az előbb megfogalmazott feltételek. Ekkor, ha λ elég kicsi, akkor a*

(i) várhatóan elérhető maximális profitra a következő teljesül:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{u(T)}{T^{\left(\frac{\chi}{2}+1\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)+1}} < \infty \tag{6.3}$$

(ii) az optimális befektetési stratégia:

$$\phi_t(T,\alpha) := \begin{cases} -\operatorname{sgn}(S_t)|S_t|^{\frac{1}{\alpha-1}}, & 0 \le t \le 3\lfloor T/6\rfloor \\ -\frac{1}{3\lfloor T/6\rfloor}\sum_{s=0}^{3\lfloor T/6\rfloor}\phi_s, & 3\lfloor T/6\rfloor < t \le 6\lfloor T/6\rfloor \\ 0, & \textit{különben} \end{cases} \tag{6.4}$$

Emellett a stratégia mellett teljesül, hogy

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{E[X_T(\phi(T,\alpha))]}{T^{\left(\frac{\chi}{2}+1\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)+1}} > 0 \tag{6.5}$$

A fenti stratégia arra az intuícióra épül, hogy az olyan piacon, ahol súrlódás figyelhető meg nem lehet tetszőleges sebességgel vásárolni vagy eladni, mivel a súrlódás szuperlineáris árhatása miatt ezek olyan veszteségeket okozhatnának, amelyek egy egyébként nyereséges befektetést is tönkretehetnek. Ez a stratégia úgy működik, hogy ellentétesen kereskedünk az árváltozáshoz képest, vagyis akkor veszünk, ha az ár negatív a kezdeti árhoz képest és akkor adunk el, ha pozitív. Annál gyorsabban kereskedünk, minél nagyobb az árkülönbözet a kezdeti értékhez képest pozitív vagy negatív irányban. A kereskedés második felében a súrlódás árhatása miatt állandó sebességgel adjuk el az eszközöket, amiket a kereskedés első felében megvásároltunk.

Jól látható, hogy a pozitív memóriájú esethez képest az optimális befektetési stratégiában annyi a különbség, hogy a kereskedés első felében éppen ellenkező esetben kell eladni vagy venni a kezdeti értékhez képesti árkülönbözetet tekintve.

7. fejezet

Kitekintés

A bizonyítások során egy kulcsfontosságú lépés volt a Gauss-eloszlású valószínűségi változók egy speciális tulajdonságának a kihasználása, miszerint az S_u, $u > s$ esetén felbontható, mint $S_u = \rho(u,s)S_s + W_{u,s}$, ahol $W_{u,s}$ független S_s-től és nulla várható értékű, $\rho(u,s) = \frac{\mathrm{cov}(S_u,S_s)}{\mathrm{Var}(S_s)}$. Ez a lépés diszkrét és folytonos esetben is egy kritikus pontja volt a bizonyításnak, lásd [4]. Felmerül a kérdés, hogy mit lehet mondani abban az esetben, ha a folyamat nem Gauss. Van más folyamat is, ahol ez a projekció működhet? Egy lehetséges megközelítés lehetne azt megvizsgálni, hogy mi történik abban az esetben, ha az $S(t)$ folyamat Gauss-folyamatoknak egy úgynevezett keveréke. Ez alatt azt értjük, hogy tekintsük a $G_1(t),\ldots,G_n(t)$ nulla várható értékű, $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ szórású, független Gauss-folyamatokat. Legyen $\pi \in \{1,\ldots,n\}$ valószínűségi változó, amely független minden mástól. Ekkor $S(t) := G_\pi(t)$.

A matematikai modellünkben a piaci árhatások közül mi azt az esetet vizsgáltuk, amikor azonnali árhatás figyelhető meg. Egy érdekes kérdés lenne azt az esetet megvizsgálni, amikor átmeneti árhatás van jelen a piacon. Ennek az árhatásnak egy lehetséges matematikai modellezését a következő cikkben dolgozták ki: [5]. További kutatási lehetőséget vet fel annak a megválaszolása, hogy ebben az esetben mi lenne a várhatóan elérhető profit növekedésének a nagyságrendbeli gyorsasága és mi lenne az ehhez szükséges optimális befektetési stratégia.

Azt az esetet is meg lehetne vizsgálni, hogy mi történik ha másik hasznossági függvényt szeretnénk maximalizálni, vagyis a $\sup_{\phi\in\mathcal{A}(T)} E\left(u[X_T(\phi)]\right)$ értéket szeretnénk meghatározni valamilyen u függvény esetén. Ezt a feladatot Peter Bank és Moritz Voß például $u(x) := -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$ esetében oldották meg, lásd [5].

Irodalomjegyzék

[1] Lóránt Nagy és Miklós Rásonyi. „Optimal long-term investment in illiquid markets when prices have negative memory”. *Electronic Communications in Probability* 26.none (2021), 1 –12. old. DOI: 10.1214/21-ECP387. URL: https://doi.org/10.1214/21-ECP387.

[2] Benoit B. Mandelbrot. „When Can Price be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models”. *The Review of Economics and Statistics* 53.3 (1971), 225–236. old. ISSN: 00346535, 15309142. URL: http://www.jstor.org/stable/1937966.

[3] Liudas Giraitis, Hira L Koul és Donatas Surgailis. *Large sample inference for long memory processes*. World Scientific, 2012.

[4] Paolo Guasoni, Zsolt Nika és Miklós Rásonyi. „Trading Fractional Brownian Motion”. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 10.3 (2019), 769–789. old. DOI: 10.1137/17M113592X. eprint: https://doi.org/10.1137/17M113592X. URL: https://doi.org/10.1137/17M113592X.

[5] Peter Bank és Moritz Voß. „Optimal Investment with Transient Price Impact”. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 10.3 (2019), 723–768. old. DOI: 10.1137/18M1182267. URL: https://doi.org/10.1137/18M1182267.

[6] Martin Baxter és Andrew Rennie. *Financial Calculus: An Introduction To Derivative Pricing*. Cambridge University Press, 1996.

[7] Charles-Albert Lehalle és Sophie Laruelle. *Market microstructure in practice*. World Scientific, 2018.

[8] Maureen O’hara. *Market microstructure theory*. John Wiley & Sons, 1998.

[9] John Y. Campbell, Andrew W. Lo és A. Craig MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, 1996.

NYILATKOZAT

Név: Kovács Levente

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: P91GFE

Szakdolgozat címe:
A pénzügyi folyamatok memóriájának hatása az optimális befektetésre

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.05.

Kovács Levente

a hallgató aláírása