NYILATKOZAT

Név: Paróczi Orsolya

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: E9D1MY

Szakdolgozat címe:
Átdarabolások klasszikus és modern kontextusban

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023. 06. 07.

Paróczi Orsolya

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Paróczi Orsolya

Átdarabolások klasszikus és modern kontextusban

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető:
Pálfy Máté András

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Pálfy Máténak, aki mindig elérhető volt számomra és iránymutatással látott el. Olyan közeget teremtett, amiben élvezetes és könnyű volt új témákat felfedezni, sosem éreztem a részéről semmilyen nyomást vagy elégedetlenséget. Továbbá hálával tartozom neki a motivált, jó hangulatú konzultációkért, végtelen türelméért és a támogatásért, amit nyújtott. Óriási köszönet illeti a családomat is, akik mindig hittek benne, hogy én bármire képes vagyok és ezt éreztették is velem. Ezen felül szeretném megköszönni a barátaimnak az elképzelhetetlen mennyiségű türelmüket és segítségüket.

Bevezetés

Az átdarabolások témaköre tekintélyes matematikatörténeti múlttal rendelkezik. Kezdetben sokszögek sokszögdarabbal való egymásbadarabolhatóságával foglalkoztak, Bolyai tétele azt állítja, hogy ez pontosan akkor tehető meg, ha a két sokszög területe ugyanakkora. Ezt követően Max Dehn cáfolta ennek az állításnak a megfelelőjét három dimenzióban, avagy létezik két egyforma térfogatú poliéder, amelyek nem darabolhatóak át poliéderdarabokkal (Hilbert 3. problémája).

Ezután az általános érdeklődés afelé terelődött, hogy tetszőleges darabokat megengedünk az átdarabolás során. Ennek az időszaknak a legmegdöbbentőbb tétele a Banach–Tarski-paradoxon, amely azt mondja ki, hogy egy tömör egységgömb egymásbadarabolható két tömör egységgömbbel. A szakdolgozat keretén belül belátjuk a Banach–Tarski-paradoxont és annak egy erősítését is.

Az euklideszi terekben való átdarabolhatóság fogalmát általánosítva, lehet vizsgálni tetszőleges G csoport hatását egy X téren, és ez a csoporthatás mellett két X-beli halmaz egymásbadarabolhatóságát. Adott $A, B \subseteq X$ részhalmazok akkor darabolhatók át egymásba, ha léteznek $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ és $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ diszjunkt felbontások és $g_i \in G$ csoportelemek, hogy $g_i(A_i) = B_i$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Itt egy klasszikus kérdés, hogy mikor lesz a G hatása paradox az X halmazon, ami azt jelenti, hogy X egymásbadarabolható két diszjunkt nemüres részhalmazával is. A 2.2-es alfejezetben belátjuk a neves Tarski-tételt, ami végesen additív mértékekkel karakterizálja, hogy mikor lesz egy G csoport hatása paradox az X téren.

Tekinthetjük egy G csoport hatását önmagán bal eltolással, ha ez a hatás nem paradox, akkor a csoportot amenábilisnak nevezzük. A 2.3-es alfejezetben az amenábilis csoportok alapvető tulajdonságait fogjuk vizsgálni, mint például zártak a részcsoportképzésre, direktösszegre, stb.

Később teret nyert az a kérdés, hogy a sokszögeknél általánosabb, de valamilyen regularitási feltételnek mégis eleget tevő darabokkal mely halmazok lesznek egymásbadarabolhatóak. A regularitási feltétel általában azt jelenti, hogy Borel, Baire-mérhető vagy Lebesgue-mérhető darabokat használunk. Ezen témakör vizsgálata a Borel-kombinatorika eszközein alapul. Emiatt a 3.1-es alfejezetben bevezetjük a Borel-gráf fogalmát és alapvető tételeket mondunk ki és bizonyítunk be a lokálisan véges Borel-gráfokról. Ezek után a szükséges ismeretekkel felvértezve a 3.2-es alfejezetben belátjuk a Banach–Tarski paradoxon Baire-mérhető változatát, avagy az átdarabolásban szereplő darabokról feltehetjük, hogy Baire-mérhetőek. Ez az állítás azért is figyelemre méltó, mert Lebesgue-mérhető darabokkal már természetesen nem oldható meg az átdarabolás, így ez a tétel valamilyen szempontból "optimális".

1. fejezet

Előkészületek

1.1. Előismeretek és jelölések

1.1.1. Definíció. *Egy $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ halmazfüggvényt végesen additív mértéknek nevezünk, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és ha diszjunkt $A_1, \dots A_n \subseteq X$ halmazokra igaz, hogy $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.*

Megjegyzés. *Általában a mérték definíciója ennél szigorúbb, viszont a szakdolgozat keretein belül csak erre lesz szükségünk. A továbbiakban szereplő mértékek említésekor mindig végesen additív mértékre gondolunk.*

1.1.2. Definíció. *Egy $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ mérték invariáns egy G az X-en ható csoportra, ha minden $A \subseteq X$-re és $g \in G$-re $\mu(A) = \mu(g(A))$.*

Megjegyzés. *Minket azért a végesen additív G-invariáns mértékek fognak érdekelni, mert a G-invariánsság garantálja, hogy a g-beli elemmel egymásba vihető halmazok mértéke megegyezik, és ez a véges additivitással együtt azt eredményezi, hogy az egymásbadarabolás mértéktartó.*

Jelölés. *Egy $G = (V, E)$ gráfban jelöljük az $X \subseteq V$ csúcshalmaz szomszédainak halmazait $N_G(X)$-el, vagy ha a kontextusból egyértelmű, akkor $N(X)$-el.*

1.1.3. Tétel (Kőnig–Hall-tétel)**.** *Legyen $G = (V, A, B)$ egy véges páros gráf A és B osztályokkal. A gráfban akkor és csakis akkor van teljes párosítás, ha minden $W \subseteq A$ és minden $W \subseteq B$ részhalmazra $|N(W)| \geq |W|$.*

Megjegyzés. *A tétel igaz nem egyszerű gráfokra is, hiszen a többszörös élek elhagyásával a szomszédhalmazok nem változnak, így az eredeti tétel állítása használható a módosított gráfra (amelyből elhagytuk a többszörös éleket).*

Jelölés. *Legyen $Z = X \times Y$. Ekkor az X-re való vetítést π_0-al, az Y-ra való vetítést pedig π_1-el jelöljük.*

Jelölés. *Legyen X egy tetszőleges tér, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ pedig egy tetszőleges halmazrendszer. Ekkor az $\mathcal{A}$ által generált σ-algebrát $\sigma_X(\mathcal{A})$-val jelöljük, ha X egyértelmű, akkor $\sigma(\mathcal{A})$-al.*

Jelölés. *Ha (X, τ) egy topologikus tér, akkor a $\sigma(\tau)$ halmazcsaládot $\mathcal{B}(X)$-el jelöljük és a tér Borel-halmazainak nevezzük.*

Jelölés. *Legyen (X, τ) egy topologikus tér. Egy $A \subseteq X$ halmaz belsejét $int(A)$-val, külsejét $ext(A)$-val, a lezártját $\overline{A}$-val, a komplementerét pedig A^C-vel jelöljük.*

1.1.4. Definíció. *Legyen (X, τ) egy topologikus tér. Egy $A \subseteq X$ halmazt sehol sem sűrűnek nevezünk, ha $int(\overline{A}) = \emptyset$. Egy halmazt első kategóriájúnak nevezünk, ha előáll mint sehol sem sűrűek megszámlálható uniója. Egy halmaz reziduális, ha a komplementere első kategóriájú.*

1.1.5. Definíció. *Egy $A \subseteq X$ halmazt Baire-tulajdonságúnak nevezünk, ha létezik olyan U nyílt halmaz, hogy $A \triangle U$ egy első kategóriájú halmaz.*

Megjegyzés. *A Baire-tulajdonságú halmazok épp megegyeznek a nyíltak és az első kategóriájúak által generált σ-algebrával.*

Feltételezzük, hogy az olvasó tudja, mi az a szabadcsoport és a speciális ortogonális csoport.

Jelölés. *Jelöljük az n dimenziós speciális ortogonális csoportot $SO(n)$-nel.*

Megjegyzés. *3 dimenzióban a speciális ortogonális csoport elemei megegyeznek az origón átmenő egyenes körüli forgatásokkal, így a továbbiakban $SO(3)$ elemeire forgatásokként tekintünk.*

1.1.6. Tétel (A végesen generált Abel-csoportok alaptétele)**.** *Ha G egy végesen generált Abel-csoport, akkor izomorf valamely $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{j_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{j_k}}$-el, ahol $n, j_i \in \mathbb{N}$, p_i prím és a $\mathbb{Z}_{p_i^{j_i}}$ a $p_i^{j_i}$-rendű ciklikus csoportot jelöli.*

1.1.7. Lemma. *Létezik egy olyan $\lim^* : l^\infty \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, amelyre igaz, hogy $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim^*_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$. Ezt a $\lim^*$ függvényt Banach-limesznek nevezzük.*

Megjegyzés. *A hagyományosan definiált Banach-limesznek általában a fentieken kívül más elvárt tulajdonágai, de számunkra csak erre lesz szükség.*

Megjegyzés. *A Banach-limesz fenti tulajdonságaiból következik az is, hogy ha* $x_n \geq y_n$ *minden* n*-re, akkor* $\lim^*_{n\to\infty} x_n \geq \lim^*_{n\to\infty} y_n$*, továbbá ha* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergenes, akkor* $\lim^*_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$*, azaz a határérték "szépen" kiterjeszthető a konvergens sorozatok teréről a korlátos sorozatok terére.*

1.1.8. Definíció. *Egy* (X, τ) *topologikus teret szeparábilisnak nevezünk, ha létezik megszámlálható sűrű részhalmaza. Teljesen metrizálhatónak nevezzük, ha megadható olyan teljes metrika, amely kompatibilis a topológiával.*

1.1.9. Definíció. *Egy* (X, τ) *topologikus teret lengyel térnek nevezünk, ha szeparábilis és teljesen metrizálható.*

1.1.10. Lemma. *Ha* X, Y *lengyel terek, akkor a szorzattér Borel* σ*-algebrája megegyezik a terek Borel* σ*-algebráinak szorzatával, azaz:*

$$\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$$

[5, Azonosság 3.1.]

1.1.11. Lemma. *Legyen* (X, τ) *egy lengyel tér,* $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}(\tau)$ *Borel-halmazok egy sorozata. Ekkor létezik olyan* $\tau' \supseteq \tau$ *lengyel topológia, hogy minden* B_i *halmaz nyíltzárt* τ'*-ben.* [3, Tétel 13.1., 13.3.]

1.1.12. Tétel (Lusin-Souslin)**.** *Legyenk* X, Y *lengyel terek és* $f : X \to Y$ *Borel. Ha* $A \subseteq X$ *Borel és* $f|_A$ *injektív, akkor* $f(A)$ *is Borel.* [3, Tétel 15.1.]

1.1.12.1. Következmény. *Ha* (X, τ) *és* (X, τ') *lengyel terek, továbbá* τ *a* τ' *topológia finomítása* ($\tau' \subseteq \tau$)*, akkor* $\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B}(\tau')$*.*

Bizonyítás. A $\mathcal{B}(\tau') \subseteq \mathcal{B}(\tau)$ irányú tartalmazás nyilvánvaló, a másik irányhoz használjuk az $id : (X, \tau') \to (X, \tau)$ injktív függvényt. Ha $A \in \mathcal{B}(\tau')$, akkor az A halmaz id szerinti képe az előző 1.1.12 tétel miatt Borel, viszont ez épp azt jelenti, hogy $A \in \mathcal{B}(\tau)$. □

1.1.13. Tétel (Lusin–Novikov uniformizációs tétel)**.** *Legyenek* X, Y *lengyel terek, és* $f : X \to Y$ *egy Borel-függvény. Legyen* $A \subseteq X$ *olyan Borel, hogy minden* $y \in Y$*-nak megszámlálható sok* f *szerinti ősképe van* A*-ban. Ekkora* $f(A) \subseteq Y$ *egy Borel-halmaz. Továbbá létezik megszámlálható sok* $g_n : f(A) \to A$*,* $n \in \mathbb{N}$ *Borel-függvény úgy, hogy mindegyik* f *jobb inverze és minden* $x \in A$*-hoz létezik* $n \in \mathbb{N}$*, melyre* $g_n(f(x)) = x$*.* [5, Tétel 3.8.]

1.1.14. Tétel (Kuratowski–Ulam)**.** *Legyenek X, Y lengyel terek és $A \subseteq X \times Y$. Ekkor ha A Baire-tulajdonságú, akkor a következőek ekvivalensek:*

- *A első kategóriájú (illetve reziduális)*
- *Az* $\{x \in X : A_x$ első kategóriájú (illetve reziduális) Y-ban$\}$ *halmaz reziduális X-ben, ahol $A_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$*

[3, Tétel 8.41.], 8.41 tétel

1.1.15. Tétel (Tychonoff-tétel)**.** *Tetszőlegesen sok kompakt tér szorzata a szorzat-topológiával egy kompakt tér lesz.*

1.1.16. Lemma. *Legyen $g_i : X \to \{0, 1\}$ Borel-függvények egy olyan sorozata, hogy minden x-hez létezik i, melyre $g_i(x) = 1$. Ekkor a $G : X \to \mathbb{N}$ függvény, amely minden x-hez a legkisebb i indexet rendeli, amelyre $g_i(x) = 1$ egy Borel-függvény.*

Bizonyítás. A g_i függvények segítségével definiáljuk a $g : X \to \{0, 1\}^\omega$ függvényt $g(x) := (g_1(x), g_2(x), \ldots)$-ként. Emlékeztetőül $\{0, 1\}^\omega$ téren a bázisnyíltak úgy néznek ki, hogy véges sok koordinátában rögzítünk valamit, a többiben az egész teret vesszük. Ekkor g is Borel-függvény lesz, hiszen egy ilyen alakú halmaz g szerinti őse véges sok Borel-halmaz metszete ($\bigcap_{i \in I} g_i^{-1}(0/1)$ valamilyen véges I-re), így Borel.

Legyen $V_i := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^\omega \mid x_i = 1$, és $x_j = 0$ ha $j < i\}$, természetesen V_i egy Borel-halmaz (nyílt is). Ekkor a fent definiált G függvény valóban Borel, mert $G(x) = i \iff x \in g^{-1}(V_i)$. $\square$

2. fejezet

A hagyományos kontextus

2.1. Klasszikus eredmények

Jelölés. *Jelöljük F_n-nel az n elem által generált szabadcsoportot és F_∞-nel a megszámlálhatóan végtelen elem által generált szabadcsoportot.*

2.1.1. Definíció. *Egy $x_1, \dots x_n$-ből képzett redukált szó az egy olyan $w(x_1, \dots x_n) = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ formális kifejezés, ahol $\varepsilon_j = \pm 1$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$ minden $j \in \{0, 1, \dots, k\}$-re és $x_{i_j}^{\varepsilon_j} \neq x_{i_{j+1}}^{-\varepsilon_{j+1}}$ minden $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$-re.*

Ha G egy csoport, és $a_1, \dots, a_n \in G$, akkor egy belőlük képzett redukált szót $w(a_1, \dots a_n) = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ alakban adhatunk meg.

2.1.2. Definíció. *Legyen G csoport, ekkor $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ elemeket függetlennek nevezzük, ha az összes belőlük képzett nemüres redukált szó különbözik az identitástól.*

2.1.3. Definíció. *Legyen G csoport, ekkor $a_1, a_2, \dots \in G$ elemeket függetlennek nevezzük, ha minden véges részhalmazuk független.*

2.1.4. Lemma. *$SO(3)$ tartalmaz F_2-t.*

Bizonyítás. Az F_2 létezésének bizonyításához elég megadni független a, b elemeket. A bizonyításban azt fogjuk belátani, hogy az x és z tengelyek körüli $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ szögű forgatások függetlenek.

Legyen a az x körüli $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ szögű forgatás, b pedig a z körüli ugyanilyen szögű forgatás. Ekkor a forgatások mátrixalakban:

$$3a = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad 3b = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vizsgáljuk a fenti mátrixokat hármas maradék szerint (a '[ ]' jelöli a hármas maradékosztályt):

$$[3a] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad [3a^{-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$[3b] = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [3b^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nevezzük a fenti mátrixokat alapmátrixoknak. Nézzük a következő mátrixokat:

$$A = [3a] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az $A, B, C, D, -A, -B, -C, -D, 0$ mátrixok zártak az alapmátrixokkal való balról szorzásra. Például:

$$[3b] \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -C$$

A teljes szorzótábla a következőképp néz ki:

$\times$	A	B	C	D
$[3a] = A$	-A	0	A	A
$[3a^{-1}]$	0	-B	B	B
$[3b]$	C	C	-C	0
$[3b^{-1}]$	D	D	0	-D

Vegyünk egy tetszőleges $M = a^{k_1}b^{k_2}\dots a^{k_n}$ a-ra végződő redukált szót ($k_n \in \mathbb{Z}^+$, $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\forall\, i = 1, 2, \dots n-1$), ehelyett az egy 3-hatvánnyal felszorzott $3^{\sum_{i=1}^{n}|k_i|}M = (3a^{sgn(k_1)})^{|k_1|}(3b^{sgn(k_2)})^{|k_2|}\dots(3a)^{k_n}$ szót fogjuk vizsgálni, és a szorzatot jobbról balra egyszerűsítjük. $A = [3a]$, ezért $3^{\sum_{i=1}^{n}|k_i|}M = (3a^{sgn(k_1)})^{|k_1|}\dots(3b^{sgn(k_{n-1})})^{|k_{n-1}|}A^{k_n}$, viszont $A^{k_n} = \pm A$ a szorzótábla szerint, ezért a kifejezés $(3a)^{k_1}\dots(3b)^{k_{n-1}}(\pm A)$-ra egyszerűsödött. A következő lépésekben $\{\pm A, \pm B, \pm C, \pm D\}$-beli elemet kell szoroznunk balról az alapmátrixokkal a szorzótábla szerint. Ezt a redukciós lépést folytatva a szorzat egy $\{0, \pm A, \pm B, \pm C, \pm D\}$-beli elemmé egyszerűsödik.

Viszont nem lehet 0 a következő érvelés miatt: tegyük fel, hogy a következő tényező, ami után nullává vált a szorzat a $[3b]$ volt, ekkor az addig egyszerűsített szónak $\pm D$-nek kell lennie végén, de az esetben az eredeti szóban megjelent volna egy $[3b][3b^{-1}]$ tag, ami ellentmond azzal, hogy a szó redukált volt. Ezért a redukciós lépéseket el tudjuk végezni, anélkül, hogy nullát kapnánk, amiből $3^{\sum_{i=1}^{n}|k_i|}M \in \{\pm A, \pm B, \pm C, \pm D\}$ következik. Ebből következik, hogy $M \neq I$, mert $3^{\sum_{i=1}^{n}|k_i|}I = 0$ lenne a hármas maradékok vizsgálatával. Szimmetria okokból hasonlóan definiálhatóak segédmátrixok a^{-1}-re, b-re vagy b^{-1}-re végződő szavak esetén is és a bizonyítás lényegében ugyanígy megismételhető. $\square$

Megjegyzés. *Jól ismert csoportelméleti állítás, hogy egy F_2 tartalmaz F_∞-t, így $SO(3)$ is tartalmaz F_∞-t*

2.1.5. Tétel. *Legyen $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Ekkor létezik olyan $E \subseteq S$, amelyre E-nek van végtelen sok diszjunkt egybevágó példánya S-ben, de S lefedhető E-nek négy egybevágó példányával.*

Bizonyítás. Legyen $U \subseteq SO(3)$ végtelen független origó körüli forgatásokból álló rendszer (ilyen létezik az előző lemma és megjegyzés miatt). Legyen $a \in U$, $V = U \setminus \{a\}$, G pedig a V elemei által generált részcsoport (ezt az a-t később fogjuk használni). Definiáljuk S elemein a következő $\sim$ ekvivalenciarelációt: $x \sim y \iff \exists\, g \in G\;\; g(x) = y$. Legyen $C \subseteq S$ a $G \setminus \{id\}$ elemeihez tartozó fixpontok halmaza. Ekkor C ekvivalenciaosztályok uniója, mert ha $y \sim x \in C$, akkor egyrészt $\exists\, f \in G$, melyre $f(x) = x$, másrészt $\exists\, g \in G$, melyre $g(x) = y \implies x = fg^{-1}(y) \implies y = gfg^{-1}(y) \implies y \in C$. Legyen $H \subseteq S \setminus C$ egy olyan halmaz, mely minden $S \setminus C$-beli ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Egy tetszőleges rögzített $b \in V$ mellett definiáljuk a következőképp az általunk keresett halmazt: $E = \{g(x) :\; x \in H,\; g \in G$, és a g-t definiáló G-beli szó b hatványával kezdődik$\}$.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy S-ben létezik E-nek végtelen sok egybevágó példánya, azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges különböző $v_1, v_2 \in V \setminus \{b\}$-kre $v_1E \cap v_2E = \emptyset$. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy $\exists\, f(x),\; g(y) \in E\;\, (x, y \in H)$, melyekre $v_1f(x) = v_2g(y)$. Átalakítva $g^{-1}v_2^{-1}v_1f(x) = y$ adódik, ahol a baloldali függvény nem az identitás, mert v_1, v_2 és b függetlenek, így $v_2^{-1}v_1$ nem b-hatvány,

f és g viszont b-hatvánnyal kezdődik. Ebből $x \sim y$ következik, de mivel $x, y \in H$, ezért egyenlőség áll fenn, ekkor viszont x fixpontja egy nem identitás elemnek, ami ellentmond H definicíójával.

Most megmutatjuk, hogy $S \setminus C$ lefedhető E két egybevégó példányával. Legyen $x \in S \setminus C$ tetszőleges, ekkor létezik $y \in H$, melyre $x \sim y$, azaz $x = g(y)$ valamely $g \in G$-re. Ha g b-hatvánnyal kezdődik, akkor $g(y) \in E$, egyébként $bg(y) \in E$, azaz $S \setminus C \subseteq E \cup b^{-1}E$.

Vegyük a bizonyítás elején definiált a-t, amely független G elemeitől. Utolsó lépésként azt látjuk be, hogy $C \subseteq a^{-1}E \cup a^{-1}b^{-1}E$. Vegyük észre hogy ehhez elég lenne az is, hogy $C \cap aC = \emptyset$, mert akkor $aC \subseteq S \setminus C \subseteq E \cup b^{-1}E$. Indirekt bizonyítunk, legyen $x \in C$ és $a(x) \in C$, C definíciója miatt ekkor léteznek $f, g \in G \setminus \{id\}$, melyekre $f(x) = x$ és $ga(x) = a(x)$, azaz $a^{-1}ga(x) = x$. Tehát x fixpontja mindkét forgatásnak, ami viszont csak akkor történhet meg, hogy ha azonos a tengelyük. Ez esetben viszont kommutálnak, amiből $fa^{-1}ga = a^{-1}gaf$, majd $f^{-1}a^{-1}g^{-1}afa^{-1}ga = id$ adódik. Ez viszont ellentmond azzal, hogy U független, hiszen f és g a V elemeiből képzett nemüres szavak.

$\square$

Megjegyzés. *Az is igaz, hogy $SO(3)$-ban létezik kontinuum sok elem által generált szabadcsoport. Ennek a felhasználásával a bizonyítást lényegében ugyanúgy megismételve azt is beláthatjuk, hogy létezik olyan E, aminek van kontinuum sok diszjunkt egybevágó példánya S-ben, és S lefedhető E-nek négy egybevágó példányával.*

Jelölés. *Ha $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, akkor $X \cong Y$, ha létezik $\mathbb{R}^n$-nek olyan f egybevágósága, amelyre $f(X) = Y$, és ekkor az X és Y halmazokat egybevágónak nevezzük.*

2.1.6. Definíció. *Az $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ átdarabolhatóak egymásba, ha léteznek $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ és $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ (páronként) diszjunkt felbontások, amelyre $X_i \cong Y_i$. Ezt $X \sim Y$-el jelöljük.*

2.1.7. Definíció. *Az X beledarabolható Y-ba, ha létezik $Z \subseteq Y$, melyre $X \sim Z$.*

2.1.8. Tétel (Hausdorff-paradoxon). *Legyen $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Ekkor S előáll A, B, C, D diszjunkt uniójaként, ahol D megszámlálható, $A, B, C, B \cup C$ pedig mind átdarabolhatók egymásba.*

Ezt a tételt nem bizonyítjuk, viszont a 2.1.5 tétellel egy egyszerűbben bizonyítható és a továbbiakban jobban használható állítást láttunk be.

2.1.9. Lemma (Cantor–Schröder–Bernstein átdarabolásokra). *Legyenek $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek. Ha $X \sim U \subseteq Y$ és $Y \sim V \subseteq X \implies X \sim Y$, avagy ha X beledarabolható Y-ba és Y beledarabolható X-be, akkor a két halmaz átdarabolható egymásba.*

Bizonyítás. $X \sim U$, ezért léteznek $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ diszjunkt felbontások és φ_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ egybevágóságok, melyekre $\varphi_i(X_i) = U_i$. Hasonlóan, legyenek $Y = \bigcup_{i=j}^k Y_j$, $V = \bigcup_{j=1}^k V_j$ diszjunkt felbontások és ψ_j $(j \in \{1, \ldots, k\})$ a megfelelő egybevágóságok.

Definiáljuk f függvényt a következőképp: $f(x) = \varphi_i(x)$, ha $x \in X_i$, hasonlóan legyen $g(x) = \psi_j(x)$, ha $x \in Y_j$. Ekkor f függvény egy injekció X-ből Y-ba, a g függvény pedig Y-ból X-be. A Cantor–Schröder–Bernstein-tétel bizonyításának egy következménye [1, Tétel 4.3., 4.4.] tétel, hogy ekkor léteznek $X = A_1 \cup A_2$ és $Y = B_1 \cup B_2$ diszjunkt felbontások úgy, hogy $f(A_1) = B_1$ és $g(B_2) = A_2$. Ekkor

$$X = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup g(B_2) = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i \cap A_1) \cup \bigcup_{j=1}^{k} \psi_j(Y_j \cap B_2)$$

$$Y = B_1 \cup B_2 = f(A_1) \cup B_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i \cap A_1) \cup \bigcup_{j=1}^{k} (Y_j \cap B_2)$$

amiből világos, hogy $X \sim Y$. $\square$

2.1.10. Tétel (Banach–Tarski-paradoxon). *Legyenek $B, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ azonos sugarú zárt gömbök, ekkor $B_1 \cup B_2 \sim B$.*

Bizonyítás. A 2.1.9 tétel miatt elég azt bizonyítanunk, hogy $B_1 \cup B_2$ beledarabolható B-be, hiszen a másik irányú beledarabolhatóság nyilvánvaló. A 2.1.5 tétel alapján léteznek $A_1, A_2, \ldots, A_8, C_1, C_2, \ldots$ egybevágó halmazok, melyekre $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = S_{B_1}$ (a B_1 gömb felszíne) és $A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 = S_{B_2}$, továbbá a C_n halamzok páronként diszjunktak és $\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq S_B$. Az A_i halmazok nem feltétlen diszjunktak, de ez nem okoz gondot, néhány A_i metszetét darabolhatjuk ugyanis a legkisebb indexű A_i szerint. Ebből már a gömbfelszínek átdarabolhatósága könnyen látható, a gömbök belsejeire a következőképp fogunk áttérni. Ha A része valamely fenti gömb felszínének, akkor jelölje A^* a gömb középpontja és az A által kifeszített kúpot a középpont nélkül, azaz az olyan pontok halmazát, amik előállnak a A egy pontjának és a gömb középpontjának konvex kombinációjaként, de nem a gömb középpontjai. Jelöljük B_1, B_2, B gömbök középpontjait rendre O_1-el, O_2-vel és O-val. Ekkor a fentieket összefoglalva azt kapjuk, hogy $A_1^*, \ldots, A_8^*, C_1^*, C_2^*, \ldots$ továbbra is egybevágó halmazok, $A_1^* \cup A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^* \cup \{O_1\} = B_1$ és $A_5^* \cup A_6^* \cup A_7^* \cup A_8^* \cup \{O_2\} = B_2$, továbbá a C_n^* halamzok páronként diszjunktak és $\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} C_n^* \subseteq B$. Ezekből a felbontásokból adódik, hogy $B_1 \setminus \{O_1\}$ beledarabolható $C_1^* \cup C_2^* \cup C_3^* \cup C_4^*$-ba, és hasonlóan $B_2 \setminus \{O_2\}$ beledarabolható $C_5^* \cup C_6^* \cup C_7^* \cup C_8^*$-ba. Ha még a két középpontot is "beledaraboljuk" C_9^*-ba és C_{10}^*-ba, akkor megkapjuk, hogy $B_1 \cup B_2$ valóban beledarabolható B-be. □

Megjegyzés. *A tételt néha azzal az extra feltétellel mondják ki, hogy B_1 és B_2 diszjunktak, de a nem diszjunkt eset triviálisan következik a diszjunkt esetből.*

Megjegyzés. *Ugyanezzel a gondolatmenettel az is igazolható, hogy ha $B, B_1, \ldots, B_n \subseteq \mathbb{R}^3$ azonos sugarú zárt gömbök, akkor $B \sim B_1 \cup \ldots \cup B_n$.*

A következő következményt mint a Banach–Tarski-paradoxon erős alakját is szokták említeni.

2.1.10.1. Következmény (Banach–Tarski-paradoxon). *Ha $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ korlátosak és nem üres belsejűek, akkor $X \sim Y$.*

Bizonyítás. Elegendő azt belátani, hogy X beledarabolható Y-ba, hiszen ekkor a szimmetria és a 2.1.9-es tétel miatt $X \sim Y$. Legyen $B \subseteq Y$ gömb, ekkor mivel X korlátos, lefedhető B-nek véges sok egybevágó példányával, legyenek ezek $B_1, \ldots, B_n$. Az előbbi megjegyzés miatt $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ beledarabolható B-be, így X is beledarabolható Y-ba. □

2.2. Tarski-tétel

A továbbiakban az átdarabolhatóságot sokkal általánosabban vizsgáljuk, amihez az eddigi fogalmaink általánosítására lesz szükségünk.

2.2.1. Definíció. *Az (X, G) párt térnek nevezzük, ha $X \neq \emptyset$, és a G az X permutációiból álló részcsoport, ahol a művelet a kompozíció.*

2.2.2. Definíció. *Legyen (X, G) tér, $A, B \subseteq X$. Ekkor A és B átdarabolhatóak egymásba, ha léteznek $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ (páronként) diszjunkt felbontások, valamint $g_i \in G$ transzformációk, amelyre $B_i = g_i(A_i)$. Ezt az általánosított átdarabolhatóságot is $A \sim B$-el jelöljük.*

Könnyen látható, hogy ez az eddigi átdarabolhatóság-fogalmunkat valóban kiterjeszti. Például a Banach–Tarski-tétel(2.1.10) ebben az általános felállásban úgy fogalmazható meg, hogy $X = \mathbb{R}^3$ és $G = SO(3)$ (a térben csak ezek az irányításés térfogattartó transzformációk). Emiatt az eddigi elnevezéseinket a továbbiakban ugyanúgy használhatjuk, és a legtöbb eddig használt tétel is átöröklődik, például Cantor–Schröder–Bernstein tétel átdarabolásos verziója is kiáltalánosodik:

2.2.3. Tétel. *Legyen (X, G) tér. Ha $A, B \subseteq X$, $A \sim B_0 \subseteq B$ és $B \sim A_0 \subseteq A$, akkor $A \sim B$.*

Bizonyítás. A bizonyítás lényegében ugyanaz, mint a tétel előző fejezetben említett kevésbé általános változatáé (2.1.9). □

2.2.4. Definíció. *Az $A \subseteq X$ halmaz paradox, ha $A \neq \emptyset$, $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ és $A \sim A_1 \sim A_2$. Az $A = A_1 \cup A_2$-t az A halmaz paradoxikus dekompozíciójának nevezzük.*

2.2.5. Példa. *Vegyük észre, hogy a 2.1.5 tételben, amikor megadtunk a gömbfelszínen egy olyan halmazt, amelynek négy egybevágó példánya lefedi a gömbfelszínt, de megszámlálható diszjunkt példány is elfér, akkor igazából a gömbfelszín egy paradoxikus dekompozícióját találtuk meg. Ugyanis ha $A_1, A_2, \ldots$ a megszámlálható diszjunkt példány, akkor $S \sim A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$-el (2.1.9) és $S \sim A_5 \cup A_6 \cup \ldots$-al is, azaz $S = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cup (A_5 \cup A_6 \cup \ldots)$ egy paradoxikus dekompozíció. Természetesen ha a gömfelszínen levő halmazokhoz tartozó kúpokat vesszük, akkor $B \setminus \{0\}$ egy paradoxikus dekompozícióját kapjuk.*

A továbbiakban a paradox halmazokat szeretnénk jellemezni, a következő tétel egy nyilvánvaló feltételt ad meg arra, hogy egy halmaz mikor nem paradox.

2.2.6. Tétel. *Legyen (X, G) tér és X-en egy $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ végesen additív, G-invariáns mérték. Ekkor, ha $A, B \subseteq X$ és $A \sim B$, akkor $\mu(A) = \mu(B)$, továbbá ha $\mu(A) = 1$, akkor A nem paradox.*

Bizonyítás. Legyenek $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ és $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ diszjunkt felbontások, melyekre $g_i(A_i) = B_i$ megfelelő $g_i \in G$ transzformációkkal. Ekkor $\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(g(A_i)) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \mu(B)$. Ha A paradox lenne, akkor $A = A_1 \dot\cup A_2$ és $A \sim A_1 \sim A_2$. A feltételeinket használva ebből $\mu(A) = 2\mu(A)$ adódik, ami nem állhat fenn, ha $\mu(A) = 1$, azaz A nem lehet paradox. □

A fejezet fő eredménye a fenti tétel megfordítása lesz, ehhez viszont szükségünk lesz némi előkészületekre.

Az átdarabolhatóság mint ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályokra bontja az (X, G) teret, és mi ezeken az ekvivalenciaosztályokon szeretnénk definiálni egy összeadást, melyre $A \cap B = \emptyset$ esetén $[A \cup B] = [A] + [B]$ teljesül ($[A]$-val jelöljük az A

halmaz osztályát). Mivel csak diszjunkt halmazokat szeretnénk összeadni, viszont nem fér el minden halmaznak két diszjunkt példánya X-en, ezért egy nagyobb térre lesz szükségünk. Legyen az új terünk X megszámlálható sok példánya "egymás mellett", azaz formálisan az $X \times \mathbb{N}$ halmaz a $G' = \{(g, \pi) : g \in G, \pi \in S_{\mathbb{N}}\}$ csoporttal ellátva. Legyen $\mathcal{A} = \{A : \exists N \ A \subseteq X \times \{0, \ldots, N\}\}$, ekkor $\mathcal{A}$ invariáns G'-re, azaz az $(\mathcal{A}, G)$ pár egy tér. Legyen $\mathcal{S} = \{[A] : A \in \mathcal{A}\}$, ez lesz az alaphalmazunk. Az X térnek van egy természetes beágyazása $X \times \mathbb{N}$-be ($X \hookrightarrow X \times \{0\}$), így X részhalmazai $\mathcal{A}$ elemeinek tekinthetőek.

A fent beharangozott módon definiáljuk $\mathcal{S}$-en az összeadást a következőképp: ha $a, b \in \mathcal{S}$ elemekhez léteznek $A, B \in \mathcal{A}$ diszjunkt reprezentánselemek, akkor legyen $[A] + [B] = [A \cup B]$. Ez a művelet jóldefiniált, mert tetszőlges $A' \in [A]$, $B' \in [B]$ diszjunkt reprezentánselemeket választva $A \cup B \sim A' \cup B'$ (hiszen $A \sim A'$ és $B \sim B'$), ebből pedig $[A'] + [B'] = [A' \cup B'] = [A \cup B] = [A] + [B]$ adódik. Ahhoz, hogy az összeadás minden $\mathcal{S}$-beli elemre definiált legyen, azt kell belátnunk, hogy minden $a, b \in \mathcal{S}$ elemekhez léteznek $A, B \in \mathcal{A}$, $[A] = a$, $[B] = b$ halmazok, melyek diszjunktak. Ehhez válasszunk tetszőleges A, B_0 reprezentánselemeket rendre az a és b osztályokból. Az A, B_0 halmazokhoz létezik N, melyre $A, B_0 \subseteq X \times \{0, \ldots, N\}$. Legyen $\pi \in S_{\mathbb{N}}$ olyan, hogy $\pi(\{0, \ldots, N\}) \subseteq \{N+1, N+2, \ldots\}$. Ekkor $B = (id, \pi)(B_0)$ diszjunkt A-tól és $B \sim B'$ is teljesül. Így tehát $\mathcal{S}$ minden elemére értelmeztük az összeadást.

A definícióból könnyen ellenőrizhető, hogy a fent definiált $(\mathcal{S}, +)$ pár kommutatív, nullelemes félcsoport.

Megadunk egy parciális rendezést az $\mathcal{S}$ halmazon a következőképp: $a, b \in \mathcal{S}$ elemekre $a \leq b$ pontosan akkor, ha létezik $c \in \mathcal{S}$, melyre $a + c = b$.

Megjegyzés. *Az $a \leq b$ reláció igazából azt jelenti, hogy tetszőleges A, B reprezentánselemek választásával A beledarabolható B-be.*

2.2.7. Tétel. *Ez a reláció reflexív, tranzitív és asszimetrikus, azaz ha $a, b, c \in \mathcal{S}$, akkor*

- $a \leq a$
- $a \leq b,\ b \leq c \implies a \leq c$
- $a \leq b,\ b \leq a \implies a = b$

Bizonyítás. Az első két állítás könnyen ellenőrizhető. Tegyük fel, hogy $a \leq b$ és $b \leq a$, továbbá legyen $A \in a$ és $B \in b$. A rendezés definíciója miatt létezik olyan $d = [D]$, melyre $a + d = b$ (azaz $[A \dot\cup D] = [B]$). Ebből adódik, hogy A beledarabolható B-be (hiszen egybevágó B egy részhalmazával), így a 2.2.3 tétel miatt $A \sim B$, azaz $a = b$. $\square$

2.2.8. Tétel. *Ha $a, b \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$-re $na \leq nb$, akkor $a \leq b$.*

Ez a tétel a fenti eredményeket felhasználva következik az alábbi tételből.

2.2.9. Tétel (König-Valkó)**.** *Legyen (X, G) tér. Ha $A_1, \ldots, A_n$ diszjunktak és $B_1, \ldots, B_n$ szintén diszjunktak, $A_1 \sim A_2 \sim \ldots \sim A_n$, $B_1 \sim \ldots \sim B_n$, továbbá $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ beledarabolható $B_1 \cup \ldots \cup B_n$-be, akkor A_1 beledarabolható B_1-be.*

Bizonyítás. A feltétel szerint $A_1 \cup \ldots \cup A_n \sim C \subseteq B_1 \cup \ldots \cup B_n$ a $h_1, \ldots, h_k \in G$ segítségével. Legyen $f : \bigcup_{i=1}^n A_i \to C$ az a függvény, melyre $f(x) = h_i(x)$, ha x abba a részbe esik, amire h_i-t alkalmazzuk az átdarabolásnál. A további átdarabolhatóságokból ugyanígy adódnak az $f_i : A_i \to A_1$ és a $g_j : B_1 \to B_j$ függvények.

Tekintsük azt a páros gráfot, melynek két csúcshalmaza A_1 és B_1 (közös pontok esetén azokat duplikálva, hogy a gráfban A_1 és B_1 diszjunktak legyenek), és melynek $\{(x, y) : x \in A_1, y \in B_1, \exists\, i, j,\ y = g_j^{-1} f f_i(x)\}$ az élhalmaza. Minden $x \in A_1$ esetén x foka n (többszörös éleket is megengedve), mert a $g_j^{-1} f f_i(x)$ kifejezésben csak i válaszható szabadon, j-t már meghatározza, hogy $f_i(x)$ melyik B_j-ben van. Minden $y \in B_1$ esetén y foka legfeljebb n a fentihez hasonló érvelés miatt. Legyen $V \subseteq A_1$ véges halmaz, $N(V) \subseteq B$ pedig V szomszédainak halmaza. Ekkor a V-ből induló élek száma pontosan $n|V|$, másrészt az $N(V)$-ből induló élek száma lefeljebb $n|N(V)|$, és a V-ből induló élek részhalmaza az $N(V)$-ből induló éleknek, így $n|V| \leq n|N(V)|$, azaz $|V| \leq |N(V)|$, vagyis teljesül a Kőnig–Hall-tétel (1.1.3) feltétele. Így a gráfban van párosítás, amely fedi A_1-et, ami az átdarabolások nyelvére visszafordítva azt jelenti, hogy A_1 beledarabolható B_1-be. $\square$

2.2.10. Tétel. *Ha $\varphi : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ homomorfizmus, akkor a $\mu(A) := \varphi([A])$ G-invariáns, végesen additív mérték $P(X)$-en.*

Bizonyítás. Ha $A \subseteq X$ és $g \in G$, akkor $[g(A)] = [A]$, ezért $\mu(g(A)]) = \varphi([g(A)]) = \varphi([A]) = \mu(A)$. Ha pedig $A, B \subseteq X$ diszjunktak, akkor $\mu(A \cup B) = \varphi([A \cup B]) = \varphi([A] + [B]) = \varphi([A]) + \varphi([B]) = \mu(A) + \mu(B)$. $\square$

2.2.11. Tétel. *Ha $A \in X$ nemüres és $\exists\, n \in \mathbb{N}^+$, melyre $(n+1)[A] \leq n[A]$, akkor A paradox.*

Bizonyítás. Indukcióval adódik, hogy $n[A] \geq (n+1)[A] \geq \ldots \geq 2n[A]$, amiből a 2.2.8 tétel szerint $[A] \geq 2[A]$. Ugyanakkor a definícióból látható, hogy $[A] \leq 2[A]$, tehát a 2.2.7 (3.) pontja szerint $[A] = 2[A]$, ami azt jelenti, hogy léteznek $A_1, A_2 \sim A$ diszjunkt halmazok, úgy hogy $A_1 \cup A_2 \sim A$, ami tanúsítja, hogy A paradox. □

2.2.12. Tétel (Tarski-tétel)**.** *Legyen (X, G) tér, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Az A halmaz pontosan akkor nem paradox, ha létezik olyan $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ végesen additív G-invariáns mérték, melyre $\mu(A) = 1$.*

Bizonyítás. Az egyik irányt már beláttuk a fejezet elején a 2.2.6 tételben, azaz $\mu(A) = 1$ esetén A nem lehet paradox.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy A nem paradox és legyen $\mathcal{S}$ mint fent, legyen még $a = [A]$. A 2.2.10 tétel miatt elég egy olyan $\varphi : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ homomorfizmust adni, melyre $\varphi(a) = 1$.

Legyen $\mathcal{S}_a = \{na : n \in \mathbb{N}\}$, továbbá legyen $\varphi(na) = n$ ($n \in \mathbb{N}$), ekkor φ egy jóldefiniált hozzárendelés, azaz $na = ma$ esetén $n = m$. Ha ugyanis ekkor mondjuk $n < m$ volna, akkor $m \geq n + 1$ miatt $na = ma \geq (n + 1)a$, ami azt jelentené, hogy A paradox az előző tétel miatt. Így definiáltuk φ-t $\mathcal{S}_a$-n, könnyen látható, hogy φ homomorfizmus és $\varphi(a) = 1$.

A továbbiakban φ-t szeretnénk kiterjeszteni transzfinit rekurzióval következő halmazra: $F := \{x \in \mathcal{S} : \exists n \in \mathbb{N}, x \leq na\}$; ekkor $\mathcal{S}_a \leq F \leq \mathcal{S}$. Legyen α egy rákövetkező rendszám és tegyük fel, hogy az előző lépésekben φ-t már kiterjesztettük $T \to [0, \infty]$ homomorfizmussá, ahol $\mathcal{S}_a \leq T \leq F$. Ez a feltétel az 1. lépésben igaz, mert $T = \mathcal{S}_a$-ra teljesül, hiszen ha $na \leq ma$, akkor $n \geq m + 1$-ből $ma \geq na \geq (m + 1)a$ következne.

A α. lépésben, ha $T \lneq F$, akkor válasszunk egy $z \in F \setminus T$-t. A $\langle T, z \rangle$ generált félcsoport a $\{x + nz : x \in T, n \in \mathbb{N}\}$ halmaz. Egy alkalmas $c \in [0, \infty)$ számmal szeretnénk definiálni φ kiterjesztését a következőképp: $\varphi(x + nz) = \varphi(x) + nc$, ha $x \in T, n \in \mathbb{N}$. A jóldefiniáltság, illetve a homomorfizmus megmutatásához elég belátni, hogy ha $x, y \in T$, $n, m \in \mathbb{N}$, akkor $x + nz \leq y + mz$ esetén

$$\varphi(x) + nc \leq \varphi(y) + mc. \tag{2.1}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\varphi : \langle T, z \rangle \to [0, \infty]$ ekkor homomorfizmus. A következő részben tehát egy olyan c létezését fogjuk bizonyítani, amelyre igaz a fenti 2.1 implikáció.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $n = m$, azaz $x + nz \leq y + nz$. Mivel $z \in F$, van olyan $u \in \mathcal{S}$ és $k \in \mathbb{N}$, melyre $z + u = ka$, így $nz + nu = nka$. Ebből $x + nka = x + nz + nu \leq y + nz + nu = y + nka$ adódik, és mivel mindkét oldalon T-beli elem áll, ezért $\varphi(x) + nk \leq \varphi(y) + nk$; azaz egy ilyen típusú egyenlőtlenség nem ad megszorítást c-re.

A következő esetben legyen $n < m$, azaz $x + nz \leq y + mz$. Ekkor azt kell belátnunk, hogy valamely c-re $\varphi(x) + nc \leq \varphi(y) + mc$, azaz átrendezve $\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{m-n} \leq c$ tetszőleges $x, y \in T$, $n < m$-re. Legyen

$$\mathcal{A} = \{\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{m - n} : x, y \in T, n < m, x + nz \leq y + mz\},$$

ekkor $\mathcal{A} \neq \emptyset$, mert $0 + 0z \leq 0 + 1z$, azaz $0 \in \mathcal{A}$. Ebből az esetből c-re az a feltétel adódik, hogy $c \geq \sup\mathcal{A}$.

Az előző esethez hasonlóan, ha $u + pz \leq v + qz$, ahol $p > q$, akkor a $\frac{\varphi(v)-\varphi(u)}{p-q} \geq c$-nek kell teljesülnie és analóg módon definiáljuk az

$$\mathcal{F} = \{\frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{p - q} : v, u \in T, q < p, u + pz \leq v + qz\}$$

halmazt, ami szintén nem üres, mert $z \in F$ miatt van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $0 + z \leq ka + 0z$, így $k \in \mathcal{F}$.

Pontosan akkor van megfelelő c, ha $\sup \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{F}$, vagyis ha

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{m - n} \leq \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{p - q} \tag{2.2}$$

feltéve, hogy $x + nz \leq y + mz \ \ (n < m)$ és $u + pz \leq v + qz \ \ (q < p)$. A kezdeti 2.2 egyenlőtlenséget átrendezve

$$(p - q)\varphi(x) - (p - q)\varphi(y) \leq (m - n)\varphi(v) - (m - n)\varphi(u) \iff$$

$$\iff (p - q)\varphi(x) + (m - n)\varphi(u) \leq (m - n)\varphi(v) + (p - q)\varphi(y) \iff$$

$$\iff \varphi((p - q)x + (m - n)u) \leq \varphi((m - n)v + (p - q)y).$$

Ennek igazolásához tekintsük az alábbiakat:

$$x + nz \leq y + mz \implies (p - q)x + (p - q)nz \leq (p - q)y + (p - q)mz,$$

$$u + pz \leq v + qz \implies (m - n)u + (m - n)pz \leq (m - n)v + (m - n)qz.$$

A két sort összeadva és rendezve

$$(p - q)x + (m - n)u + (mp - nq)z \leq (p - q)y + (m - n)v + (mp - nq)z.$$

A korábbiakban láttuk (az $n = m$ esetnél), hogy ekkor (c választásától függetlenül)

$$\varphi((p - q)x + (m - n)u) + (mp - nq)c \leq \varphi((p - q)y + (m - n)v) + (mp - nq)c,$$

ez pedig a bizonyítandó állítás volt. Létezik tehát megfelelő c, amivel beláttuk, hogy φ a feltételeinkkel kiterjeszthető.

Tehát a α. transzfinit rekurziós lépésben kiterjesztettük a függvényt T-ről $\langle T, z\rangle$-re φ tulajdonságainak megőrzésével. Ha α limeszrendszám, akkor az előtte levő kiterjesztések unióját vegyük a α. lépésben. Ez is megőrzi φ tulajdonságait, mert azok véges elemmel ellenőrizhetőek. Azaz a φ függvény valóban kiterjeszthető F-re rendezéstartó homomorfizmusként. Az F halmazon kívül pedig definiáljuk φ-t ∞-nek, azaz ha $w \in \mathcal{S} \setminus F$-re $\varphi(w) = \infty$. Könnyű ellenőrőzni, hogy ekkor $\varphi : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ homomorfizmus. □

2.3. Amenábilis csoportok

Egy G csoport hat saját magán balszorzással, így tehát (G, G) tér és ennek a segítségével definiálhatunk egy csak a csoporttól függő paradoxitás-fogalmat:

2.3.1. Definíció. *Egy G csoportot akkor nevezünk paradoxnak, ha a (G, G) téren a G halmaz paradox.*

A Tarski-tétel (2.2.12) alapján a következő mondható a G csoport paradoxitásáról:

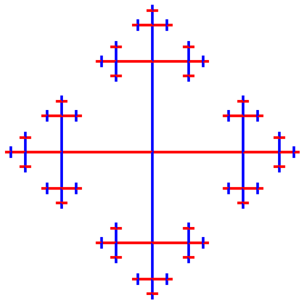
2.3.1.1. Következmény (Tarski-tétel speciális esete)**.** *A G csoport pontosan akkor nem paradox, ha létezik $\mu : P(G) \to [0, 1]$ végesen additív, G-invariáns mérték, melyre $\mu(G) = 1$.*

2.3.2. Definíció. *A G csoport amenábilis, ha létezik $\mu : P(G) \to [0, 1]$ végesen additív, G-invariáns mérték, melyre $\mu(G) = 1$. (Azaz a Tarski-tétel miatt G pontosan akkor amenábilis, ha nem paradox)*

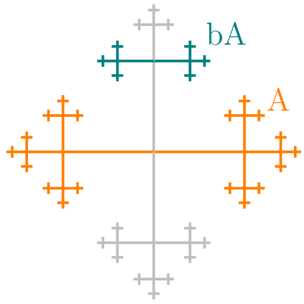
2.3.3. Tétel. *Az F_2 csoport paradox.*

Bizonyítás. Legyen a két generáló elem a, b és legyen ekkor $A = \{a^{n_1}b^{k_1} \dots a^{n_s}b^{k_s}$ redukált szó $: n_1 \neq 0\}$, könnyen látható, hogy $(aA) \cup A = F_2$ (mert n_1 lehet negatív is). Az A, bA, b^2A és b^3A halmazok diszjunktak, továbbá F_2 beledarabolható $A \cup (bA)$-ba és $(b^2A) \cup (b^3A)$-ba. Ezt a könnyen ellenőrizhető állítást a legkönnyebb vizuálisan látni, ehhez nyújt segítséget a 2.1 és a 2.2 ábra. F_2-t a beledaraboláshoz bontsuk fel $A \cup B$-re, ahol az B a valamilyen b-hatvánnyal kezdődő elemek halmaza. Ekkor $bA \subseteq bA$ és $aB \subseteq A$, tehát $A \cup B = F_2$ valóban beledarabolható $bA \cup A$-ba és ugyanígy természetesen $(b^2A) \cup (b^3A)$-be is. A 2.2.3 tétel szerint (mivel a másik irányú "beledarabolhatóság" triviális) így $F_2 \sim A \cup (bA)$ és $F_2 \sim F_2 \setminus (A \cup (bA))$.

□



2.1. ábra. F_2 (Cayley-)gráfja



2.2. ábra. $A \cup bA$ a Cayley-gráfon

A következő két tétel kapcsolatot teremt a tér és a rajta ható csoport paradoxitása között:

2.3.4. Tétel. *Legyen (X, G) tér, ahol G paradox. Ha minden $g \neq id \in G$ elemre teljesül, hogy nincs fixpontja, akkor X paradox.*

Bizonyítás. A G hatása ekvivalenciaosztályokra bontja X-et, ahol $x \sim y$, ha létezik $g \in G$, melyre $y = g(x)$. Legyen U olyan halmaz, amely minden ekvivalenciaosztályból egy elemet tartalmaz.

Ekkor, ha $g \neq h$, akkor $gU \cap hU = \emptyset$. Tegyük fel az ellenkezőjét, legyen x olyan, melyre $x = gu_1 = hu_2$ valamilyen $u_1, u_2 \in U$-ra. Ebből viszont az következne, hogy $h^{-1}gu_1 = u_2 \implies u_1 \sim u_2 \implies u_1 = u_2$, ami viszont ellentmondás, hiszen $h^{-1}g$-nek nem lehet fixpontja.

Legyen G paradoxikus dekompozíciója $G = \mathcal{A} \dot\cup \mathcal{B}$ (azaz $G \sim \mathcal{A} \sim \mathcal{B}$). Ekkor X paradoxikus dekompozíciója megadható

$$X = A \dot\cup B \text{ alakban, ahol } A := \bigcup_{g \in \mathcal{A}} gU \text{ és } B := \bigcup_{g \in \mathcal{B}} gU.$$

Általánosan ha $\mathcal{H} \subseteq G$, akkor legyen $H := \bigcup_{g \in \mathcal{H}} gU$. Az "egybevágóság" és a $\sim$ reláció is átöröklődik ez a megfeleltetés mellett G-ről X-re. Ha például $\mathcal{C}_i, \mathcal{D}_i \subseteq G$ halmazokhoz létezik valamilyen $h \in G$, amelyre $h(\mathcal{C}_i) = \mathcal{D}_i$, akkor a fenti módon képzett A_i, B_i halmazokra is igaz, hogy $h(A_i) = B_i$, hiszen

$$h(\mathcal{C}_i) = \bigcup_{g \in \mathcal{C}_i} hgU = \bigcup_{f \in h\mathcal{C}_i} fU = \bigcup_{f \in \mathcal{D}_i} fU = \mathcal{D}_i.$$

Továbbá, ha $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$, akkor a definíció szerint léteznek $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ és $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ partíciók és $g_i \in G$ elemek, melyekre $g_i(\mathcal{C}_i) = \mathcal{D}_i$, ami a fenti érvelés miatt azt jelenti, hogy a belőlük képzett halmazokra is $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ és $g_i(C_i) = D_i$, azaz $C \sim D$. Az U szerepe annál a tulajdonságnál fontos, hogy ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ diszjunktak, akkor C és D is az lesz. Tehát az átöröklődés miatt $X \sim A \sim B$, továbbá $A \cap B = \emptyset$ teljesül a fenti érvelés miatt. $\square$

2.3.5. Tétel. *Legyen (X, G) tér és G egy amenábilis csoport. Ekkor létezik egy $\mu : P(X) \to [0, 1]$ végesen additív, G-invariáns mérték, hogy $\mu(X) = 1$, azaz G hatása a téren nem lehet paradox.*

Bizonyítás. Legyen $\nu : P(G) \to [0, 1]$ a G amenábilitását tanúsító mérték, és rögzítsünk egy $x_0 \in X$ elemet. Definiáljuk ekkor a keresett $\mu : P(X) \to [0, 1]$ mértéket a következőképp: $\mu(A) := \nu(\{g \in G \mid g(x_0) \in A\})$. Ekkor μ additív és $\mu(X) = 1$. Ellenőrizzük, hogy μ invariáns-e egy $h \in G$-beli elemmel való szorzásra:

$$\mu(hA) = \nu(\{g \in G \mid g(x_0) \in hA\}) = \nu(\{g \in G \mid h^{-1}g(x_0) \in A\}) =$$

$$= \nu(h\{g \in G \mid g(x_0) \in A\}) = \nu(\{g \in G \mid g(x_0) \in A\}) = \mu(A)$$

$\square$

Az amenábilis csoportok további vizsgálatához be kell vezetnünk egy bizonyos szempontból általánosított integrálfogalmat.

2.3.6. Definíció. *Legyen $A \neq \emptyset$, amelyen van egy olyan $\mu : \mathcal{P}(A) \to [0, \infty)$ végesen additív mérték, amelyre $\mu(\emptyset) = 0$.*

- *Ha $f : A \to \mathbb{R}$ egyszerű (véges értékkészletű), $R(f) = \{c_1, \dots, c_k\}$ (c_i-k különbözőek), akkor legyen $\int_A f\, d\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(f^{-1}(\{c_i\}))$.*
- *Ha f korlátos függvény, akkor létezik egyszerű függvények f_n sorozata, melyekre $f_n \to f$ egyenletesen (2.3.7). Ez esetben legyen $\int_A f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu$ (2.3.8).*

A továbbiakban azt fogjuk meggondolni, hogy a fent leírtak valóban megtehetőek és az integrál rendelkezik a megszokott alaptulajdonságokkal.

2.3.7. Lemma. *Ha f korlátos függvény, akkor létezik egyszerű függvények f_n sorozata, melyekre $f_n \to f$ egyenletesen.*

Bizonyítás. Legyen $f(A) \subseteq (a, b)$. Ha $f(x) \in [a + \frac{b-a}{n}i, a + \frac{b-a}{n}(i + 1))$, akkor legyen $f_n(x) := f(a + \frac{b-a}{n}i)$. Így $|f - f_n| \leq \frac{b-a}{n}$, tehát $f_n \to f$ egyenletesen. $\square$

2.3.8. Lemma. *Ha f_n egyszerű függvények egy sorozata és $f_n \to f$ egyenletesen, akkor $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu$ létezik.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, ekkor létezik olyan n_0, hogy ha $m, n > n_0$, akkor $|f_n - f| < \varepsilon$ és $|f_n - f_m| < 2\varepsilon$. Ebből $|\int_A f_n \, d\mu - \int_A f_m \, d\mu| \leq \int_A |f_n - f_m| \, d\mu < 2\varepsilon\mu(A)$, tehát $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu$ tényleg létezik. □

Megjegyzés. *Az integrál tulajdonságainak bizonyításai valójában nem körkörösek, még ha elsőre annak tűnhetnek is. A fenti bizonyításban csak azt használjuk ki, hogy egyszerű függvényekre az integrál lineáris és teljesül rá a háromszögegyenlőtlenség, amit a későbbi tételekben be fogunk látni. Ezen tételek második feleihez (a korlátos eset) viszont már szükségünk lesz a fenti határérték létezését garantáló tételre.*

2.3.9. Lemma. *Az így definiált integrál lineáris, azaz $\int_A (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_A f \, d\mu + \beta \int_A f \, d\mu$, ahol $f, g : A \to \mathbb{R}$ korlátos függvények, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. A fent definiált esetek szerint fogunk bizonyítani:

- Ha $f : A \to \mathbb{R}$ egyszerű, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ valamely $c_i \in \mathbb{R}$ számokkal és $A_i \subseteq A$ halmazokkal. Legyen hasonlóan $g = \sum_{j=1}^{k} d_j \chi_{B_i}$, ekkor $\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (\alpha c_i + \beta d_i) \chi_{A_i \cap B_j}$, az integrálokra áttérve és a definíciót használva:

$$\int_A (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \int_A \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (\alpha c_i + \beta d_i) \chi_{A_i \cap B_j} \, d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (\alpha c_i + \beta d_i) \mu(A_i \cap B_j) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c_i \mu(A_i \cap B_j) + \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} d_i \mu(A_i \cap B_j) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) + \beta \sum_{j=1}^{k} d_i \mu(B_j) = \alpha \int_A f \, d\mu + \beta \int_A f \, d\mu$$

- Ha f, g korlátos függvények, akkor a hozzájuk egyenletesen tartó egyszerű függvények sorozatai legyenek f_n és g_n, ekkor $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ egyenletesen.

$$\alpha \int_A f \, d\mu + \beta \int_A f \, d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int_A g_n \, d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A \alpha f_n + \beta g_n \, d\mu = \int_A \alpha f + \beta g \, d\mu$$

  Ezzel beláttuk, hogy integrál valóban lineáris minden függvényre.

□

2.3.10. Lemma. *Erre az integrálfogalomra is teljesül a háromszögegyenlőtlenség, azaz $|\int_A f \, d\mu| \leq \int_A |f| \, d\mu$.*

Bizonyítás. A fent definiált esetek szerint fogunk bizonyítani:

- Ha $f : A \to \mathbb{R}$ egyszerű, akkor $\int_A f\, d\mu = \sum_{i=1}^k c_i\mu(f^{-1}(\{c_i\})) \leq \sum_{i=1}^k |c_i|\mu(f^{-1}(\{c_i\})) = \int_A |f|\, d\mu$.
- Ha $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor a hozzá egyenletesen tartó egyszerű függvények sorozata legyen f_n. Ekkor $\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} f_n \leq \lim_{n\to\infty} |f_n| = \int_A |f|\, d\mu$.

□

2.3.11. Lemma. *Ha G csoport, $\mu : P(G) \to [0,1]$ végesen additív, G-invariáns mérték, továbbá $F : G \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, és $g \in G$, akkor*

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \int_G F\, d\mu$$

Bizonyítás. Ha $F = \chi_A$, akkor

$$F(gx) = \begin{cases} 1, & \text{ha } gx \in A \\ 0, & \text{ha } gx \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in g^{-1}A \\ 0, & \text{ha } x \notin g^{-1}A \end{cases} = \chi_{g^{-1}A}(x),$$

ezért

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \mu(g^{-1}A) = \mu(A) = \int_G F\, d\mu.$$

Ha F egyszerű függvény, azaz $F = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}$ alakban írható valamely $c_i \in \mathbb{R}$ számokra, akkor

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_G \chi_{A_i}(gx)\, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_G \chi_{A_i}\, d\mu = \int_G F(x)\, d\mu.$$

Ha F korlátos, akkor van olyan s_n egyszerű függvényekből álló sorozat, amely egyenletesen tart F-hez G-n. Ekkor

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_G s_n(gx)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_G s_n(x)\, d\mu = \int_G F\, d\mu,$$

így készen vagyunk. □

Ezzel visszatérhetünk az amenábilis csoportok további vizsgálatához.

2.3.12. Tétel. *Ha G amenábilis, akkor minden részcsoportja is az.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, legyen $H \leq G$ egy paradox részcsoport, és legyen továbbá $U \subseteq G$ olyan halmaz, mely H minden jobboldali mellékosztályából pontosan egy elemet tartalmaz. Mivel $G = HU$, és H parodoxitása miatt létezik olyan C, D diszjunktak, melyekre $H = C \cup D$ és $H \sim C \sim D$. Így $G = (C \cup D)U = CU \cup DU$, ahol $CU \cap DU = \emptyset$ és persze $G \sim CU$, $G \sim DU$ (mert ugyanazt a darabolást kell megcsinálni csak minden mellékosztályban). □

Megjegyzés. *Az előző tételt és azt felhasználva, hogy F_2 paradox (2.3.3) adódik, hogy ha egy csoportban van két független elem, akkor paradox. Ezek után természetes kérdésként merülhet fel, hogy vajon a másik irány is igaz, azaz a paradox halmazok tartalmaznak-e szükségszerűen F_2-t részcsoportként. A probléma sokáig nyitott volt, ma már tudjuk, hogy a válasz nemleges, egy ellenpélda az állításra a $B(2, 665)$ Burnside-csoport (amelyet két elem generál, a definiáló reláció pedig $w^{665} = 1$, ahol w befutja a csoport elemeit).*

2.3.13. Tétel. *Legyen G egy csoport, $H \lhd G$. Ekkor ha H és ${}^{G}/_{H}$ amenábilisak, akkor G is amenábilis.*

Bizonyítás. Legyen az amenábilitást tanúsító mérték H-n μ_1, a ${}^{G}/_{H}$-n pedig μ_2. Egy tetszőleges $A \subseteq G$-re definiáljuk az $f_A(x) := \mu_1(xA \cap H)$ függvényt. Gondoljuk meg, hogy ha x és y H azonos jobboldali mellékosztályában vannak, akkor $f_A(x) = f_A(y)$. Legyen ugyanis ekkor $y = hx$ (valamilyen $h \in H$-ra), ebből

$$f_A(y) = \mu_1((yA) \cap H) = \mu_1(hxA \cap H) = \mu_1(h^{-1}(hxA \cap H)) = \mu_1((xA) \cap H) = f_A(x).$$

Mivel f_A konstans a mellékosztályokon, ezért definiálhatjuk az $\overline{f_A} : {}^{G}/_{H} \to [0, 1]$ függvényt a következőképp: $\overline{f_A}(\overline{x}) := f_A(x)$, ahol $\overline{x}$ a Hx mellékosztályt jelöli.

Legyen a keresett mérték $\mu(A) := \int_{G/H} \overline{f_A}\, d\mu_2$. Ellenőrizzük μ tulajdonságait. $f_G \equiv 1$, emiatt $\mu(G) = 1$. Legyenek A, B diszjunktak, ekkor

$$f_{A\cup B}(x) = \mu_1(x(A \cup B) \cap H) = \mu_1(xA \cap H) + \mu_1(xB \cap H) = f_A(x) + f_B(x),$$

amiből az adódik, hogy $\overline{f_{A\cup B}}(\overline{x}) = \overline{f_A}(\overline{x}) + \overline{f_B}(\overline{x})$ és $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy μ mérték G-invariáns. Mivel $\mu(gA) = \int_{G/H} \overline{f_{gA}}\, d\mu_2$, ezért ehhez f_{gA}-t kell jobban megértenünk a továbbiakban: $f_{gA}(x) = \mu_1(x(gA) \cap H) = f_A(gx)$, és ez igaz $\overline{f_{gA}}(\overline{x}) = \overline{f_A}(\overline{gx})$ formában is. Ezeket összefoglalva felírhatjuk, hogy

$$\mu(gA) = \int_{G/H} \overline{f_{gA}}(\overline{x})\, d\mu_2(\overline{x}) = \int_{G/H} \overline{f_A}(\overline{gx})\, d\mu_2(\overline{x}) = \int_{G/H} \overline{f_A}(\overline{x})\, d\mu_2(\overline{x}) = \mu(A)$$

használva a 2.3.11 lemmát a 3. egyenlőségnél. Ezzel beláttuk, hogy μ valóban G-invariáns és be is fejezetük G amenábilitásának bizonyítását. $\square$

2.3.14. Tétel. *Ha G minden végesen generált részcsoportja amenábilis, akkor G is.*

Bizonyítás. A célunk egy olyan $\mu : P(G) \to [0, 1]$ tanúsító mérték adása, amely végesen additív, G-invariáns és $\mu(G) = 1$. Legyen $H \leq G$ egy végesen generált részcsoport. Ekkor $P(H)$-n létezik egy ν mérték, melyre $\nu(H) = 1$ és $\nu(hA) = \nu(A)$ ($\forall\, h \in H$, $A \subseteq H$). Ezt terjesszük ki $P(G)$-re úgy, hogy tetszőleges $A \subseteq G$ esetén $\mu(A) := \nu(A \cap h)$. Erre a mértékre igaz lesz, hogy

$$\mu(hA) = \nu(hA \cap H) = \nu(h^{-1}hA \cap h^{-1}H) = \nu(A \cap H) = \mu(A),$$

ha $A \subseteq G$, $h \in H$, azaz μ invariáns a H-beli elemekkel való balról szorzásra.

Tekintsük az $X := \prod_{A \subseteq G}[0,1]$ teret, amely a Tychonoff-tétel (1.1.15) miatt kompakt. Az X tér elemeire tekinthetünk úgy, mint az összes $\mu : P(G) \to [0,1]$ függvényre, ezért mi X egy speciális elemét keressük. Legyen továbbá

$$M_H = \{\mu : P(G) \to [0,1] \,|\, \mu \text{ additív}, \, \mu(G) = 1, \, \mu(hA) = \mu(A) \;\; \forall\, h \in H, \, A \subseteq G\}.$$

Az előző érvelés miatt $M_H \neq \emptyset$, ha H egy végesen generált részcsoport. Továbbá az M_H^C halmaz nyílt, mert ha az M_H halmazt definiáló feltételek valamelyike nem teljesül, akkor létezik egy kis környezet, amelyben ugyanaz a feltétel szintén nem teljesül (emlékeztetőül az X téren levő bázisnyíltak úgy néznek ki, hogy véges sok "koordinátát" lefixálunk, a többiben pedig a $[0,1]$-et vesszük). Például lássuk be, hogy az additivitás egy zárt feltétetel. Ha $\mu : P(G) \to [0,1]$ nem additív, akkor léteznek valamilyen diszjunkt A, B halmazok és $\varepsilon > 0$, hogy $\mu(A \cup B) + \varepsilon < \mu(A) + \mu(B)$. Ekkor ha csak $\mu(A)$ értékén változtatunk legfeljebb ε-nyit, akkor μ továbbra sem lesz additív, ezzel megadtuk μ egy nyílt környezetét, amelyben egyik függvény sem additív.

Az természetesen igaz, hogy ha $H_1, H_2, \ldots, H_k$ végesen generált részcsoportok, akkor $\langle H_1, \ldots, H_k \rangle$ is egy végesen generált részcsoport, emiatt $\emptyset \neq M_{\langle H_1, \ldots, H_k \rangle} \subseteq M_{H_1} \cap \ldots \cap M_{H_k}$, ami miatt $M_{H_1} \cap \ldots \cap M_{H_k} \neq \emptyset$. Így azt tudjuk, hogy bármely véges sok M_H (ahol H végesen generált) zárt halmaz metszete nem üres, így a Cantor-metszettétel miatt $\bigcap_{H \text{ vég. gen.}} M_H \neq \emptyset$, és az ebben a metszetben levő μ jó választás tanúmértéknek. □

2.3.14.1. Következmény. *Ha G_i $(i \in I)$ amenábilis csoportok növő lánca (I rendezett, ha $i \leq j$, akkor $G_i \leq G_j$), akkor $\bigcup_{i \in I} G_i$ is amenábilis.*

Bizonyítás. Legyen $H \leq \bigcup_{i \in I} G_i$ egy tetszőleges végesen generált részcsoport. Ekkor valamilyen véges J indexhalmazra $H \leq \bigcup_{i \in J} G_i = G_{max(J)}$, azaz H egy amenábilis csoport részcsoportja, így ő is amenábilis. Mivel $\bigcup_{i \in I} G_i$ minden végesen generált részcsoportja amenábilis, így az előző tétel miatt ő is amenábilis. □

Megjegyzés. *Minden véges csoport amenábilis, hiszen a számlálómérték lenormálva a csoport elemszámával egy megfelelő tanúmérték.*

2.3.15. Tétel. *Minden Abel-csoport amenábilis.*

Bizonyítás. Legyen G egy Abel-csoport, ekkor a 2.3.14 tétel miatt elég G végesen generált részcsoportjaira ellenőrizni az amenábilitást, és ezek a részcsoportok az 1.1.6 tétel miatt izomorfak $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{j_i}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{j_k}}$-el valamely $n, j_i \in \mathbb{N}$, p_i prím értékek mellett.

A 2.3.13 tétel miatt ha egy direktösszeg minden tagja amenábilis, akkor maga a direktösszeg is az, így csak azt kell leellenőriznünk, hogy $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_p$ amenábilisak (ahol p egy tetszőleges prím). $\mathbb{Z}_p$ természetesen amenábilis az előző megjegyzés miatt.

Lássuk be, hogy $\mathbb{Z}$ amenábilis. Ehhez egy $\mu : P(\mathbb{Z}) \to [0, \infty]$ végesen additív, $\mathbb{Z}$-invariáns mértéket fogunk megadni. Legyen $A \subseteq \mathbb{Z}$ tetszőleges, ekkor definniáljuk a következő halmazfüggvényt:

$$\mu_n(A) := \frac{|A \cap [-n, n]|}{2n+1}.$$

Természetes lenne az a gondolat, hogy definiáljuk $\mu(A)$-t $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$-ként, viszont ez a limesz általában nem létezik. Ehelyett az 1.1.7 lemmában kiterjesztett határérték-fogalmat, az Banach-limeszt fogjuk használni, legyen

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty}{}^{*} \mu_n(A).$$

Ellenőrizzük, hogy az így definiált μ végesen additív. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ két diszjunkt halmaz, ekkor

$$\mu_n(A \cup B) = \frac{|(A \cup B) \cap [-n, n]|}{2n+1} = \frac{|A \cap [-n, n]| + |B \cap [-n, n]|}{2n+1} = \mu_n(A) + \mu_n(B),$$

ezzel μ_n additivitását beláttuk, μ additivitása pedig következik belőle: $\mu(A \cup B) = \lim^*_{n\to\infty} \mu_n(A \cup B) = \lim^*_{n\to\infty}(\mu_n(A) + \mu_n(B)) = \lim^*_{n\to\infty} \mu_n(A) + \lim^*_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(A) + \mu(B)$.

A bizonyítás befejezéséhez csak azt kell belátnunk, hogy μ egy $\mathbb{Z}$-invariáns mérték. Legyen $A \subseteq \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ tetszőlegesek, n rögzített. Vegyük észre, hogy az A halmazra és a $k(A) := A + k$ eltoltjára a következő tartalmazás teljesül:

$$A \cap [-n, n] \subseteq k(A) \cap [-n-k, n+k] \subseteq A \cap [-n-2k, n+2k].$$

Ezt átírva a számosságaikra, majd felhasználva μ_n definícióját, a következő adódódik:

$$(2n+1)\mu_n(A) \leq (2(n+k)+1)\mu_n(k(A)) \leq (2(n+2k)+1)\mu_n(A)$$
$$\frac{2n+1}{2n+2k+1}\mu_n(A) \leq \mu_n(k(A)) \leq \frac{2n+4k+1}{2n+2k+1}\mu_n(A)$$

$$-\frac{2k}{2n+2k+1}\mu_n(A) \leq \mu_n(k(A)) - \mu_n(A) \leq \frac{2k}{2n+2k+1}\mu_n(A)$$

A két szélső sorozat konvergens (ha $n \to \infty$), hiszen $0 \leq \mu_n(A) \leq 1$ és $\frac{2k}{2n+2k+1} \to 0$. A rendőr-elvet használva emiatt $\mu_n(k(A)) - \mu_n(A) \to 0$, azaz

$$\mu(k(A)) = \lim_{n\to\infty}^{*} \mu_n(k(A)) = \lim_{n\to\infty}^{*} \mu_n(A) = \mu(A).$$

Ezzel beláttuk μ szükséges tulajdonságait, amivel bebizonyítottuk, hogy $\mathbb{Z}$ amenábilis, és csak erre volt szükségünk a bizonyítás befejezéséhez. □

2.3.15.1. Következmény. *Minden feloldható csoport amenábilis.*

Bizonyítás. Legyen G feloldható és legyen egy normállánca $\{1\} \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 1$, akkor G Abel, azaz a 2.3.15 tétel miatt amenábilis. Ha $n > 1$, akkor az indukciós feltevés miatt H_{n-1} amenábilis, G/H_{n-1} Abel, így a 2.3.13 tétel miatt G is amenábilis. □

3. fejezet

A modern kontextus

3.1. Borel-kombinatorika és lokálisan véges gráfok

3.1.1. Definíció. *A standard Borel-tér egy olyan* $(X, \mathcal{A})$ *pár, ahol* X *egy halmaz és létezik rajta olyan* τ *lengyel topológia, melyre* $\mathcal{A}$ *egyenlő* $\sigma_X(\tau)$*-val.*

3.1.2. Definíció. *Borel-gráfnak azt a* $G = (V, E, \mathcal{B})$ *hármast nevezzük, ahol* (V, E) *egy gráf (azaz* $E \subseteq V^2$ *egy szimmetrikus antireflexív reláció),* $(V, \mathcal{B})$ *egy standard Borel-tér és* E *a* $V \times V$*-nek egy Borel-részhalmaza.*

3.1.3. Definíció. *Egy* $G = (V, E, \mathcal{B})$ *Borel-gráfot akkor nevezünk lokálisan végesnek, ha minden él foka véges, azaz minden* $v \in V$*-re* $|N(\{v\})|$ *véges. (Ez nem jelenti azt, hogy létezik egy közös felső korlát a fokszámokra.)*

3.1.4. Lemma. *Minden* X *lengyel téren létezik egy* $\mathcal{J}$ *megszámlálható család, amelyre* $\mathcal{B}(X) = \sigma_X(\mathcal{J})$*.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy megszámlálható sűrű $Y \subseteq X$ halmazt és egy kompatibilis d metrikát. Legyen $\mathcal{J}$ az olyan racionális sugarú gömbök uniója, melyek középpontja Y-beli. Nyilván $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}$. Minden nyílt halmaz előáll $\mathcal{J}$-beliek megszámlálható uniójaként, így $\sigma(\mathcal{J})$ tartalmazza a nyíltakat és ezért az egész σ-algebrát is. $\square$

Megjegyzés. *A fenti lemmában* $\mathcal{J}$ *választható algebrának is. Ehhez csak azt szükséges meggondolni, hogy az általa generált* σ*-algebra nem változik és a halmazcsalád továbbra is megszámlálható marad, de ezek természetesen igazak.*

3.1.5. Lemma. *Legyen* X *egy lengyel tér és* $\mathcal{J}$ *egy algebra, mely generálja* $\mathcal{B}(X)$*-et. Tetszőleges* $A, B \subseteq X$ *véges halamzokra létezik* $J \in \mathcal{J}$*, hogy* $A \subseteq J$ *és* $B \cap J = \emptyset$*.*

Bizonyítás. Különböző $a, b \in X$ elemekhez létezik egy $J_{a,b} \in \mathcal{J}$, mely a és b közül csak az egyiket tartalmazza (különben $\mathcal{B}(X) = \sigma_X(\mathcal{J})$ nem szeparálná a-t és b-t). Feltehető, hogy $J_{a,b}$ a-t tartalmazza, ellenkező esetben áttérhetnénk a komplementerére. Egy rögzített $a \in A$-ra a $J_a := \bigcap_{b \in B} J_{a,b}$ halmaz tartalmazza a-t és diszjunkt B-től, innen $J = \bigcup_{a \in A} J_a$ kielégiti a lemma állítását. □

3.1.6. Lemma. *Legyen $(V, \mathcal{B})$ egy standard Borel-tér, és $G = (V, E)$ egy lokálisan véges gráf. Ekkor a következőek ekvialensek:*

(i) Az $E \subseteq V^2$ halmaz Borel (azaz $(V, E, \mathcal{B}$ egy Borel-gráf)

(ii) Minden $Y \subseteq V$ Borel-halmazra a szomszédainak $N(Y)$ halmaza is Borel

(iii) Minden $Y \subseteq V$ Borel-halmazra, az $N^{\leq 1}(Y)$ egységgömb (azaz az olyan csúcsok halmaza, amelyek távolsága Y-tól legfeljebb 1) is Borel

Bizonyítás. Lássuk először be, hogy $(i) \implies (ii)$, legyen $Y \subseteq V$ tetszőleges Borel. Vegyük észre, hogy $N(Y)$ előáll, mint $Z := (Y \times V) \cap E$ projekciója a második koordinátára. A vetítést egy folytonos függvény, és Z-ről V-re minden elemnek megszámlálható (igazából véges) az őségpe. Ezért $N(Y) = \pi_1(Z)$ egy Borel-halmaz az 1.1.13 tétel miatt.

A $(ii) \implies (iii)$ triviálisan következik abból, hogy $N^{\leq 1}(Y) = N(Y) \cup Y$.

Bizonyítsuk be, hogy $(iii) \implies (i)$. A 3.1.4 lemma miatt létezik egy megszámlálható $\mathcal{J}$ σ-algebra, amely generálja $\mathcal{B}-t$. Egy $J \in \mathcal{J}$-re legyen A_J a $J \times (V \setminus N^{\leq 1}(J))$ halmaz és átlóra vett tükörképének, $(V \setminus N^{\leq 1}(J)) \times J$-nek az uniója. Az 1.1.10 miatt ezek az A_J-k Borelek. A diagonális eleme a szorzat standard Boreljeinek, azaz $Diag_V = \{(x, x) : x \in V\}$ egy Borel halmaza V^2-nek. Elég azt belátni, hogy

$$E = V^2 \setminus (\mathrm{Diag}_V \cup (\bigcup_{J \in \mathcal{J}} A_J)),$$

mert az összes jobboldali halmaz Borel.

Az A_J-k definíciójukból adódóan diszjunktak az E-től, ezért az $\subseteq$ irányú tartalmazás nyilvánvaló. A másik irányhoz vegyünk egy tetszőleges $(x, y) \in V^2 \setminus E$ elemet. Feltehető, hogy $x \neq y$, különben $(x, y) \in \mathrm{Diag}_V$ és kész lennénk. A 3.1.5 lemma miatt létezik olyan $J \in \mathcal{J}$, amely tartlmazza x-et, de diszjunkt $N^{\leq 1}(y)$-től. Ekkor $y \notin N^{\leq 1}(J)$, emiatt pedig az (x, y) pár A_J-beli. □

3.1.7. Definíció. *Egy $r \in \mathbb{N}$-re a G gráf $\leq r$-edik hatványa $G^{\leq r}$ egy gráf ugyanazon a csúcshalmazon, és két csúcs között akkor van él, ha G-beli távolságuk legfeljebb r. A G gráf r-edik hatványa az a G^r gráf, amelyben két csúcs között akkor van él, ha a távolságuk pontosan r.*

3.1.8. Lemma. *Ha $G = (V, E, B)$ egy lokálisan véges Borel-gráf, akkor az $\leq r$-edik és r-edik hatványa, azaz $G^{\leq r}$ és G^r is Borel-gráfok ($r \in \mathbb{N}$).*

Bizonyítás. Először lássuk be a $G^{\leq r}$ gráfra. $G^{\leq r}$ gráf nyilván lokálisan véges. Annak az ellenőrzéséhez, hogy $G^{\leq r}$ Borel-gráf-e, a 3.1.6 lemma (iii) feltételét fogjuk ellenőrizni. A $G^{\leq r}$ gráf definíciójából adódik, hogy $N^{\leq 1}_{G^{\leq r}}(A) = N^{\leq r}_G(A)$. Az $N^{\leq r}_G(A)$ halmazt megkaphatjuk úgy is, hogy A-ra alkalmazzuk az $N^{\leq 1}_G$ operációt r-szer. A 3.1.6 lemmában beláttuk, hogy ez az operáció megőrzi a Borel-halmazokat. Beláttuk, hogy a $G^{\leq r}$ gráfra teljesül a 3.1.6 (iii) feltétele, így a gráf Borel.

Ahhoz, hogy belássuk a G^r-ra is, vegyük észre, hogy $N_{G^r}(A) = N^{\leq r}_G(A) \setminus N^{\leq r-1}_G(A)$, ami egy Borel-halmaz, azaz teljesül a 3.1.6 tétel (ii) feltétele, tehát G^r is egy Borel-gráf. □

3.1.9. Definíció. *Legyen $G = (V, E, B)$ egy lokálisan véges Borel-gráf. A színezés egy olyan $c : V \to X$ függvény (ahol X valamilyen halmaz), amelynél bármely két szomszédos csúcs színe (azaz c szerinti képe) különböző. Egy Borel-színezésen azt értjük, hogy a c függvény Borel és az X egy standard Borel-tér.*

Megjegyzés. *A szakdolgozat keretein belül mi csak megszámlálható színezésekkel fogunk foglalkozni, ekkor pedig az előző általános definíció csak annyit jelent, hogy minden színosztály Borel-halmaz.*

3.1.10. Tétel. *Minden lokálisan véges $G = (V, E, \mathcal{B})$ Borel-gráf Borel-színezhető megszámlálható színnel (egy $c : V \to \omega$ Borel-függvénnyel).*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy megszámlálható $\mathcal{J} = \{J_0, J_1, \ldots\}$ algebrát, ami generálja a $\mathcal{B}$-t, ez létezik a 3.1.4 lemma miatt. Definiáljuk a következő halmazt:

$$A := \{(x, k) \in V \times \omega : x \in J_k \text{ és } N(x) \cap J_k = \emptyset\}$$

Azaz $(x, k) \in A$, ha a J_k szeparálja x-et a szomszédaitól. Minden $x \in V$-re létezik legalább egy k, melyre $(x, k) \in A$ a 3.1.5 lemma miatt, és válasszuk $c(x)$-et a legkisebb ilyen k-nak.

Ha két különböző csúcs ugyanazt a k színt kapná, akkor mindketten J_k-beliek lennének, de akkor nem lehetnének szomszédosak, mert a szomszédaik J_k-tól diszjunktak (A definíciója miatt). Azaz $c : V \to \omega$ tényleg egy színezés.

Azt kell meggondolni, hogy $c : V \to \omega$ egy Borel-függvény. Egy rögzített k-ra definiáljuk:

$$B_k := \{x \in V : c(x) \geq k\}$$

Mivel $c^{-1}(k) = B_k \setminus B_{k+1}$, ezért elég azt belátani, hogy minden B_k Borel. A B_k komplementere ekkor pontosan az $A \cap (V \times \{0, \dots, k-1\})$ halmaz π_0 szerinti képe (A-ból kivesszük az olyan párokat, amely második koordinátája $\leq k$, majd vesszük ezen pontok első koordinátáit). Ekkor az 1.1.13 tétel miatt elég azt belátni, hogy $A \subseteq V \times \omega$ Borel. Ehhez vegyük észre, hogy A a definíciója miatt előáll, mint $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}((J_k \setminus N(J_k)) \times \{k\})$. Ebben a megszámlálható unióban minden halmaz Borel a 3.1.6 lemma miatt, azaz A is Borel és ezzel befejeztük a bizonyítást. □

3.1.11. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. A $c : V \to \omega$ színezést r-ritkának nevezzük, ha a $d_G(x, y) \leq r \implies c(x) \neq c(y)$ implikáció teljesül.*

Megjegyzés. *Legyen $G = (V, E)$ egy Borel-gráf. Vegyük észre, hogy egy $c : V \to \mathcal{X}$ függvény pontosan akkor r-ritka, ha c a $G^{\leq r}$ gráf egy színezése. Mivel G^r is Borel-gráf (3.1.8), a* 3.1.10 *tétel miatt létezik Borel-színezése, így G-nek is létezik r-ritka Borel-színezése.*

3.2. Baire-átdarabolás

3.2.1. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Az $A \subseteq V$ csúcsok egy halmaza G-invariáns, ha összefüggőségi komponensek uniója, azaz nincs A-ból nem A-ba menő él.*

Következzen néhány technikai, a későbbiekben nagyon hasznos lemma és tétel:

3.2.2. Lemma. *Ha $G = (V, E)$ egy lokálisan megszámlálható gráf, akkor létezik Borel involúciók olyan $T_i : V \to V$ sorozata, melyre x és y pontosan akkor vannak egy összefüggőségi komponensben, ha létezik T_i, amire $T_i(x) = y$* [5, 7.1-es tétel speciális esete.].

3.2.3. Lemma. *Ha $G = (V, E)$ egy lokálisan megszámlálható gráf, akkor létezik Borel involúciók olyan $T_i : V \to V$ sorozata, melyre x és y között akkor van él, ha létezik T_i, amire $T_i(x) = y$* [5, 7.1-es tétel speciális esete.].

3.2.4. Definíció. *Legyen G egy gráf. A G címkézésnek nevezünk bármilyen l függvényt, amely G-ből valamilyen megszámlálható halmazba képez. A (G, l) párt címkézett gráfnak nevezzük.*

3.2.5. Definíció. *Legyen (G, l) egy címkézett gráf. Ekkor az F függvényt r-lokális szabálynak nevezzük a (G, l)-en, ha F a V-ből képez és az értéke csak a $N_G^{\leq r}(x)$-től és az ottani címkézéstől függ, azaz ha $N_G^{\leq r}(x) \cong N_G^{\leq r}(y)$ és létezik a címkézéssel* *kompatibilis a izomorfizmus, akkor $F(x) = F(y)$. Az F függvényt lokális szabálynak nevezzük, ha valamely r-re r-lokális szabály.*

3.2.6. Tétel. *Legyen $G = (V, E, \mathcal{B})$ egy lokálisan véges Borel-gráf egy 2-ritka $l : V \to \omega$ Borel-címkézéssel. Ekkor minden $F : V \to \omega$ lokális szabály a (G, l)-en egy Borel-függvény.* [5, Tétel 5.17.]

3.2.7. Tétel. *Legyen $G = (V, E, \mathcal{B})$ egy lokálisan véges Borel-gráf egy $l : V \to \omega$ Borel-címkézéssel. Legyenek F tetszőleges függvény V-ről és F_n függvények lokális szabályok (G, l)-en. Ha minden $x \in V$-re létezik n_x, hogy minden $n \geq n_x$-re $F_n(x) = F(x)$, akkor F is Borel.* [5, Tétel 5.20.]

Az előkészületek után most rátérhetünk a fejezet fő eredményéhez vezető útra.

3.2.8. Tétel. *Legyen a G egy lokálisan véges Borel-gráf egy (X, τ) lengyel téren, és $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy tetszőleges függvény. Ekkor létezik Borel-halmazoknak egy A_n sorozata úgy, hogy $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ reziduális, G-invariáns és $x \neq y \in A_n$-re $d_G(x, y) > f(n)$.*

Bizonyítás. Minden $r \in \mathbb{N}$-re, legyen $c_r : X \to \mathbb{N}$ a $G^{\leq r}$ egy Borel-színezése (ilyen létezik a 3.1.8 lemma és 3.1.10 tétel miatt), legyen továbbá $B_{i,r} = c_r^{-1}(i)$.

Definiáljuk a következő halmazt:

$$H := \{(x, p) \in X \times \mathbb{N}^\omega \mid x \in X_p := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{p(n), f(n)}\}.$$

Először lássuk be, hogy H Borel. Az 1.1.11 lemma miatt vehetünk egy olyan τ' lengyel topológiát, amiben minden $B_{i,r}$ halmaz nyíltzárt. Azt fogjuk belátni, hogy H nyílt az $(X, \tau') \times \mathbb{N}^\omega$ térben (a finomított topológiával). Ehhez vegyünk egy tetszőleges $(x, p) \in H$-t. Ekkor valamely n-re $x \in B_{p(n), f(n)}$, legyen ez n_0 Vegyük észre, hogy ha p és p' megegyeznek az n_0. helyen, akkor $x \in X_{p'}$ is teljesül. Emiatt legyen $U \subseteq N^\omega$ azon p'-k halmaza, melyek megegyeznek p-vel az n_0. helyen, így $(B_{p(n_0), f(n_0)} \times U) \subseteq H$ valóban (x, p) egy nyílt környezete. Ezzel beláttuk, hogy H nyílt $(X, \tau') \times \mathbb{N}^\omega$-ban, az 1.1.10 lemmát és az 1.1.12.1 következményt használva ebből adódik, hogy H Borel $(X, \tau) \times \mathbb{N}^\omega$-ban.

Jelöljük egy fix $x \in X$-re H_x-el a H halmaz x-beli függőleges szekcióját, azaz $H_x := \{p \in \mathbb{N}^\omega \mid x \in X_p\}$. Ekkor H_x egy sűrű nyílt halmaz $(X, \tau) \times \mathbb{N}^\omega$-ban. A nyíltság bebizonyításához vegyünk egy tetszőleges $p \in H_x$-et. A definíció miatt x valamilyen n_0-ra eleme $B_{p(n_0), f(n_0)}$-nak, ekkor p-nek egy H_x-beli környezete lesz az olyan pontok halmaza, amelyek megyeznek p-vel az n_0. helyen. Sűrű, mert tetszőleges $(p_1, \ldots, p_n)$ véges sorozat befejezhető úgy, hogy H_x-beli legyen. A komplementere sehol sem sűrű, ezért H_x reziduális.

Ezek után a 3.2.2 lemmából adódó T_i-ket felhasználva definiáljuk a $\tilde{H}_i$ halmazokat a következőképp:

$$\tilde{H}_i := \{(x,p) \in X \times \mathbb{N}^\omega \mid T_i(x) \in X_p\}.$$

Érdemes ezekre a $\tilde{H}_i$-kre úgy tekinteni, mintha a H függőleges szekcióit kevertük volna össze Borel módon. Precízen legyen az $f_i : X \times \mathbb{N}^\omega \to X \times \mathbb{N}^\omega$ az a függvény, melyre $f_i(x,p) := (T_i(x), p)$. Ekkor f_i egy injektív Borel-függvény, mert T_i is injektív Borel volt, továbbá $\tilde{H}_i$ a H Borel-halmaz f_i szerinti képe, ezért $\tilde{H}_i$ is Borel (1.1.12 tétel). Legyen $\tilde{H} := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \tilde{H}_i$. Vegyük észre, hogy $\tilde{H}$ Borel, és minden függőleges szekciója egy reziduális halmaz $\mathbb{N}^\omega$-ban, hiszen ez H-ra igaz volt, de akkor minden H_i-re és ezáltal a metszetükre is.

A Kuratowski–Ulam-tétel (1.1.14) miatt reziduális sok $p \in \mathbb{N}^\omega$ létezik, melyre $\tilde{H}^p$ (a p-beli vízszintes szekció) reziduális. Válasszunk egy ilyen p-t, és legyen

$$A_n := \tilde{H}^p \cap B_{p(n),f(n)}.$$

Az A_n halmazok Borelek, mert a metszet mindkét tagja is az. Az $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \tilde{H}^p \cap X_p = \tilde{H}^p$ halmaz reziduális. Továbbá G-invariáns, mert ha $x \in \tilde{H}^p$, akkor minden i-re $T_i(x) \in X_p$, ami épp azt jelenti, hogy minden y-ra, ami x-el egy összefüggőségi komponensben van $y \in \tilde{H}^p$. Ha $x \neq y$ tetszőlegesek A_n-beliek, akkor az $f(n)$-edik színezés azonos színosztályában voltak, viszont az $f(n)$. színezésben két azonos színű távolsága nagyobb, mint $f(n)$. Így az A_n halmazokra valóban igaz a tétel állítása. □

Jelölés. *Ha G egy gráf, M pedig egy párosítás, akkor $G - M$ legyen az a gráf, amit G-ből kapunk az olyan csúcsok elhagyásával, amelyek le vannak fedve M élei által.*

3.2.9. Definíció. *Egy G gráfon az M párosítást Borel-párosításnak nevezzük, ha $M \subseteq G \times G$ egy Borel-halmaz.*

Megjegyzés. *Ha G egy lokálisan véges Borel-gráf és $M \subseteq G \times G$ egy Borel-párosítás, akkor $G - M$ is egy lokálisan véges Borel-gráf.*

Később látni fogjuk, hogy a párosítások és az átdarabolások között szoros kapcsolat van. Mivel a mi végső célunk egy Baire-tulajdonságú átdarabolás, ezért most nem csak egy tetszőleges párosítást keresünk, a későbbiekben szükségünk lesz erősebb tulajdonságokra. Ehhez viszont szükségünk lesz egy kevésbé szokványos erősebb Hall-feltételre is, ami lehetővé fogja tenni a későbbi konstrukciókat.

3.2.10. Tétel. *Legyen G egy lokálisan véges páros Borel-gráf egy lengyel téren B_0, B_1 osztályokkal. Tegyük fel, hogy létezik ε, melyre minden olyan véges F halmazra, melyre $F \subseteq B_0$ vagy $F \subseteq B_1$ igaz, teljesül az, hogy $|N_G(F)| \geq (1+\varepsilon)|F|$. Ekkor létezik olyan reziduális, G-invariáns Borel-halmaz, melyre G-t megszorítva létezik teljes Borel párosítás.*

3.2.11. Definíció. *Egy G páros gráf a B_0, B_1 osztályokkal kielégíti a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon,n}$-t, ha G kielégíti a Hall feltételt és továbbá minden G^2-összefüggő F halmazra, amelyre $|F| \geq n$ és $F \subseteq B_0$ vagy $F \subseteq B_1$ igaz, arra teljesül, hogy $|N_G(F)| \geq (1+\varepsilon)|F|$.*

Megjegyzés. *Ha G egy páros gráf X-en, akkor minden véges $F \subseteq X$ particionálható G^2-összefüggő halmazokra, hogy az összefüggő részek szomszédai ekkor diszjunktak. Vegyük észre, hogy ezt az észrevételt felhasználva a 3.2.10 tétel feltétele éppen az, hogy a gráf valamely ε-ra kielégíti a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon,1}$-et.*

Bizonyítás (3.2.10 tétel). Legyen G mint a tételben, és ε olyan, amelyre G kielégíti a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon,1}$-et. Felhívnánk a figyelmet arra, hogy azt nem követeljük meg, hogy B_0 vagy B_1 Borel legyen. Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy monoton növő függvény, amelyre minden n-re $f(n) \geq 8$ és $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{8}{f(n)} < \varepsilon$. Alkalmazzuk a 3.2.8 tétel állítását erre a függvényre, így kapunk egy G-invariáns, reziduális $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ halmazt, ami olyan A_n Borelek uniója, amely elemeinek páronkénti távolsága nagyobb mint $f(n)$. Erre az A-ra megszorítva fogunk Borel teljes párosítást keresni.

Indukcióval fogunk konstruálni M_n Borel párosításoknak egy felszálló sorozatát úgy, hogy az M_n párosítás élei lefedik a $\bigcup_{m\leq n} A_m$ csúcsokat. Azt is meg fogjuk követelni, hogy $G - M_n$ kielégítse a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon_n, f(n)}$ feltételt, ahol $\varepsilon_n = \varepsilon - \sum_{i\leq n} \frac{8}{f(i)}$.

A jelölés kompatksága céljából legyen $M_{-1} = \emptyset$ és $\varepsilon_{-1} = \varepsilon$. A tétel feltétele szerint a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon_{-1},1}$ teljesül. Tegyük fel, hogy megkonstruáltuk M_{n-1}-et, ahogy fent, ebből fogjuk most megadni M_n-t. Legyen $X_{n-1} \subseteq X$ a $G - M_{n-1}$ gráf csúcshalmaza. Minden $x \in A_n \cap X_{n-1}$-re tudunk találni egy x-re illeszkedő e élet úgy, hogy a $(G - M_{n-1}) - \{e\}$ gráf kielégíti a Hall-feltételt. Ez azért van, mert $G - M_{n-1}$ kielégíti a Hall-feltételt és bármely e él jó választás lesz, amely benne van a $G - M_{n-1}$-en levő teljes párosításban. Legyen M_n' egy Borel-halmaz, mely minden $x \in A_n \cap X_{n-1}$-hez tartalmaz pontosan egy őt fedő fenti tulajdonságú élet. Ilyen M_n'-et konstruálhatunk a 3.2.3 lemmában levő T_i-k segítségével. Minden $x \in A_n \cap X_{n-1}$-re az $\{x, T_i(x)\}$ él eleme M_n'-nek, ha az i a legkisebb olyan index, amelyre $T_i(x) \neq x$ és $(G - M_{n-1} - \{\{x, T_i(x)\}\})$ kielégíti a Hall-feltételt.

Rögzítsünk le egy i-t. Annak a belátásához, hogy M_n' Borel, először azt fogjuk bebizonyítani, hogy az az F függvény Borel, ami x-hez $0-1$ értéket rendel, attól függően, hogy $(G - M_{n-1} - \{\{x, T_i(x)\}\})$ kielégít-e a Hall-feltételt vagy sem. A Hall-feltétel egy nagyon egyszerű ekivalens átfogalmazását fogjuk használni: legyen x egy fix csúcs, és ellenőrizzük sorban, hogy minden r-re $N^{\leq r}_{G-M_{n-1}}(x)$ lefedhető-e egy $G - M_{n-1}$-beli párosítással. Ez ekvivalens a Hall-feltétellel, hiszen ha van párosítás, akkor nyilván teljesül, a másik irányban pedig egy véges halmaz benne lesz valamely r sugarú környezetben, azt lefedtük párosítással, ezért teljesül rá a Hall-feltétel.

A fenti megfigyelés motiválja a következő függvény definiálást (fix i-re):

$$F_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A_n \cap X_{n-1},\ T_i(x) \neq x \text{ és } N^{\leq r}_{G-M_{n-1}}(x) - \{x, T_i(x)\} \text{ lefedhető} \\ & \text{egy } G - M_{n-1} - \{x, T_i(x)\}\text{-beli párosítással} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Erről az F_r függvényről szeretnénk belátni, hogy egy $(r+1)$-lokális szabály (a lokális szabály definícióját lsd. 3.2.5-ben) alkalmas címkézés mellett. Legyen $c : V \to \omega$ a csúcsok egy 2-ritka színezése. Legyen a $G - M_{n-1}$ gráf címkézése a következő ($a \neq b$ és $a, b \notin \omega$):

$$l(x) = \begin{cases} a, & \text{ha } x \in A_n \cap X_{n-1} \\ b, & \text{ha } x = T_i(y) \neq y \text{ valamely } y \in A_n \cap X_{n-1}\text{-re} \\ c(x), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ez a címkézés Borel, hiszen $A_n \cap X_{n-1}$ Borel-halmaz, T_i Borel-függvény. Mivel az A_n-beli pontok legalább 8 távolságra vannak egymástól, így a címkék valóban jóldefiniáltak, "nem érhetnek össze". Gondoljuk meg, hogy ekkor az F_r függvény valóban egy $(r+1)$-lokális szabály $(G - M_{n-1}, l)$-en. Ha $N^{\leq r+1}_{G-M_{n-1}}(x) \cong N^{\leq r+1}_{G-M_{n-1}}(y)$ és van a címkézéssel kompatibilis izomorfizmus, akkor $l(x) = l(y)$.

- Ha $l(x) = l(y) = n \in \omega$ vagy $l(x) = l(y) = b$, akkor $x, y \notin A_n \cap X_{n-1}$, azaz $F_r(x) = F_r(y) = 0$.
- Ha $l(x) = l(y) = a$ és nincs a szomszédaik között b címkéjű, ez azt jelenti, hogy $T_i(x) = x$ és $T_i(y) = y$, azaz $F_r(x) = F_r(y) = 0$.
- Ha $l(x) = l(y) = a$ és van a környezetükben b címkéjű, akkor $N^{\leq r+1}_{G-M_{n-1}}(x) - \{x, T_i(x)\} \cong N^{\leq r+1}_{G-M_{n-1}}(y) - \{y, T_i(y)\}$, és emiatt a $N^{\leq r}_{G-M_{n-1}}(x) - \{x, T_i(x)\}$ és $N^{\leq r}_{G-M_{n-1}}(y) - \{y, T_i(y)\}$ gráfok ugyanakkor fedhetőek párosítással (mert a $\leq r$ távolságra levő pontok párosításában csak $\leq r + 1$ távol levő pontok szerepelhetnek).

Tehát az F_r függvény valóban egy $(r+1)$-lokális szabály $(G - M_{n-1}, l)$-en, ebből a 3.2.6 tételt használva az következik, hogy F_r egy Borel-függvény.

A fent említett ekvivalens Hall–feltétel miatt igaz az, hogy $\lim_{r\to\infty} F_r(x) = F(x)$ (fix x-re az $F_r(x)$ függvény r-ben monoton csökkenő). A 3.2.7 tétel miatt F függvény is Borel.

Emlékeztetőül M'_n-t úgy definiáltuk, hogy minden $x \in A_n \cap X_{n-1}$-re az $\{x, T_i(x)\}$ él eleme M'_n-nek, ha az i a legkisebb olyan index, amelyre $T_i(x) \neq x$ és $(G - M_{n-1} - \{\{x, T_i(x)\}\})$ kielégíti a Hall-feltételt. Fent beláttuk, hogy fix i-re ez a függvény Borel és ekkor az 1.1.16 tétel miatt a legkisebb megfelelő index kiválasztása is egy Borel-függvény.

Ezzel beláttuk azt, hogy M'_n választható Borel-módon, definiáljuk az új párosítást a következőképp:

$$M_n := M_{n-1} \cup M'_n.$$

A bizonyítás befejezéséhez azt kell belátnunk, hogy a $G - M_n$ kielégíti a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon_n, f(n)}$-t, feltéve, hogy a $G - M_{n-1}$ kielégíti a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon_{n-1}, f(n-1)}$-et. Legyen F egy véges $(G - M_n)^2$-összefüggő részhalmaza $B_0 \cap X_n$-nek vagy $B_1 \cap X_n$-nek, ahol $X_n \subseteq X$ a $G - M_n$ gráf csúcshalmaza.

Legyen $D = N_{G-M_{n-1}}(F) - N_{G-M_n}(F)$. Először tegyük fel, hogy $|D| \geq 2$. Minden $x \in D$-nek létezik F-beli y_x szomszédja. Továbbá minden $x \in D$ vagy A_n-beli vagy egy A_n-beli elem szomszédja (hiszen az M_n-hez olyan éleket vettünk hozzá, amelyek egyik végpontja A_n-beli). Rögzítsünk különböző $x, x' \in D$-ket. Ekkor x-hez és x'-hez rendre egyértelműen hozzárendelhetőek z és z' elemek az A_n halmazból (vagy maga x és x' vagy az M_n-beli párjaik), hogy $d_G(x, z) \leq 1$, $d_G(x', z') \leq 1$. Vegyük észre, hogy z és z' szükségszerűen különbözőek, mert ha $x \in A_n$, $x' \in A_n$, akkor $z = x \neq x' = z'$, ha $x \in A_n$, $x' \notin A_n$, akkor $z = x$, de z' nem lehet x, mert x és x' között nem futhat él (egy osztálybeliek), ha pedig $x \in A_n$, $x' \in A_n$, akkor mindkettejüknek különböző A_n-beli párjuk van (M_n egy párosítás). Azt tudjuk továbbá A_n tulajdonsága miatt, hogy $d_G(z, z') > f(n)$ (mert $z \neq z'$), így $d_G(y_x, y_{x'}) > f(n) - 4$. Mivel F egy $(G - M_n)^2$-összefüggő halmaz, ezért nézhetjük az y_x-et és $y_{x'}$-t összekötő utat $(G - M_n)^2$-ben. Ezen az úton minden második elem F-bei, így az y_x-től lefeljebb $(f(n) - 4)/2$ távol van legalább $\lfloor (f(4) - 4)/4 \rfloor \geq f(n)/8$ pont. Az $(f(n) - 4)/2$ sugarú zárt gömbök az y_x pontok körül mind páronként diszjunktak, ezért $|F| \geq \frac{8}{f(n)}|D|$. Mivel $N_{G-M_{n-1}}(F) \supseteq N_{G-M_n}(F)$, továbbá felhasználva, hogy $|F| \geq f(n)$ és azt, hogy $N_{G-M_{n-1}}$ kielégíti a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon_{n-1}, f(n-1)}$ feltételt:

$$|N_{G-M_n}(F)| = |N_{G-M_{n-1}}(F)| - |D| \geq (1 + \varepsilon_{n-1})|F| - \frac{8}{f(n)}|F| = (1 + \varepsilon_n)|F|$$

Ezzel csak a $\mathrm{Hall}_{\varepsilon_n, f(n)}$ feltételt láttuk be, viszont szükségünk van a hagyományos Hall-feltételre is. Az egyenlőtlenséglánc csak akkor teljesül, ha $|F| \leq f(n-1)$, az ellenkező esetben:

$$|N_{G-M_n}(F)| = |N_{G-M_{n-1}}(F)| - |D| \geq |F| - \frac{8}{f(n)}|F| \geq |F| - \frac{8}{f(n)}f(n-1).$$

Ha $\frac{8}{f(n)}f(n-1) < 1$, akkor a Hall-feltétel teljesül, ez viszont igaz, ha minden n-re $f(n) \geq 8f(n-1)$ (f választható így). Ezzel a $|D| \geq 2$ esetet beláttuk.

Nézzük most azt az esetet, amelyben $|D| \leq 1$. Először lássuk be azt, hogy $|N_{G-M_n}(F)| \geq |F|$. Vegyük észre, hogy $N_{G-M_n}(F) = N_{G-M_{n-1}}(F)$ vagy $N_{G-M_n}(F) = N_{G-M_{n-1}-\{e\}}(F)$ valamilyen $e \in M'_n$-re. Az első esetben az indukciós hipotézis miatt, a másodikban az M'_n választása miatt teljesül a Hall-feltétel. Mivel $|N_{G-M_{n-1}}(F)| - |N_{G-M_n}(F)| \leq 1$ és ha azt is tudjuk, hogy $|F| \geq f(n)$, akkor $|N_{G-M_n}(F)| \geq |N_{G-M_{n-1}}(F)| - (1/f(n))|F|$, amiből $|N_{G-M_n}(F)| \geq (1+\varepsilon_n)|F|$ következik. $\square$

A következőekben kapcsolatot szeretnénk teremteni a paradoxikus dekompozíciók és a párosítások között.

3.2.12. Definíció. *Legyen a Γ egy X téren ható csoport és $S \subseteq \Gamma$ egy véges szimmetrikus ($s \in S \iff s^{-1} \in S$) halmaz. Legyen $G(S)$ egy páros gráf a $\{0,1,2\} \times X$ csúcshalmazon, ahol (i,x) és (j,y) csúcsok között akkor megy él, ha i és j közül pontosan egy 0, és létezik olyan $\gamma \in S$, amelyre $\gamma x = y$.*

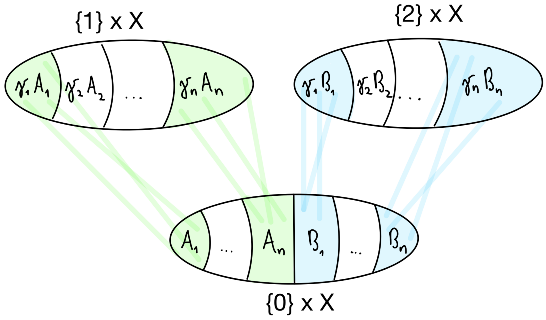
Ekkor $G(S)$-ben pontosan akkor létezik egy M teljes párosítás, ha Γ-nak létezik paradoxikus dekompozíciója S elemeit használva. Ahhoz, hogy ezt belássuk, legyen $S = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ és M egy teljes párosítás $G(S)$-en. Most legyen

$$A_i := \{x : (0,x) \text{ csúcs } (1, \gamma_i x)\text{-el van összekötve } M\text{-ben és } \gamma_j x \neq \gamma_i x, \text{ ha } j < i\},$$

és teljesen analóg módon

$$B_i := \{x : (0,x) \text{ csúcs } (2, \gamma_i x)\text{-el van összekötve } M\text{-ben és } \gamma_j x \neq \gamma_i x, \text{ ha } j < i\}.$$

Azt megjegyeznénk, hogy az A_i, B_i halmazok között lehet üres. Ha X-et a $\{0\} \times X$-el azonosítjuk, akkor látható, hogy $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}$ halmaz X egy partícióját adja. Viszont, ha úgy tekintünk rá, mint $\{1\} \times X$ vagy $\{2\} \times X$, akkor rendre azt fogjuk kapni, hogy a $\{\gamma_1 A_1, \ldots, \gamma_n A_n,\}$ és a $\{\gamma_1 B_1, \ldots, \gamma_n B_n\}$ halmazok is partícionálják X-et. Az $A = \bigcup_{i \leq n} A_i$, $B = \bigcup_{i \leq n} B_i$ jelölést használva a paradoxikus dekompozíció $A \cup B \sim A \sim B$. A másik irány ugyanezzel az azonosítással bizonyítható.



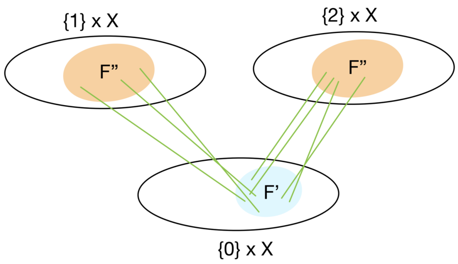
3.2.13. Definíció. *Legyen Γ a G csoport egy hatása az (X,τ) topologikus téren (azaz Γ egy $G \times X \to X$ függvény). Azt mondjuk, hogy G Borel-automorfizmusokkal hat, ha minden $g \in G$ elemre a $\Gamma_g : X \to X$ függvény Borel, ahol $\Gamma_g(x) := \Gamma(g,x)$.*

A fejezet fő tétele a következő:

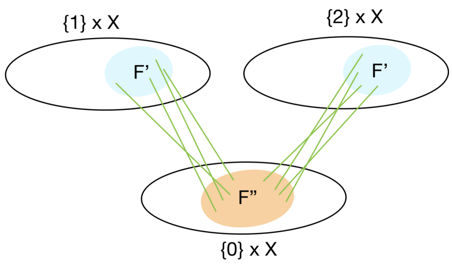
3.2.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy csoport Borel-automorfizmusokkal hat egy lengyel téren, és ennek a hatásnak van paradoxikus dekompozíciója. Ekkor ennek a hatásnak van olyan paradoxikus dekompozíciója, ahol minden darab Baire-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen Γ egy csoport, amely Borel-automorfizmusokkal hat az X lengyel téren, és a hatásnak van egy paradoxikus dekompozíciója az S véges szimmetrikus halmaz elemeit használva. Ekkor az előbbi észrevétel miatt, amely összekapcsolja a párosításokat a paradoxikus dekompozíciókkal, $G(S)$-ban van teljes párosítás, azaz kielégíti a Hall-feltételt. Bővítsük az S-et $S^2 := \{\gamma\delta : \gamma, \delta \in S\}$-é, ekkor azt állítjuk, hogy $G(S^2)$ kielégíti a $\mathrm{Hall}_{1,1}$-et.

Az $F = \{0\} \times F'$ alakú halmazokra könnyen látható, hogy igaz, hiszen $N_{G(S)}(\{0\} \times F') = \{1,2\} \times F''$, ahol $|F''| \geq |F'|$ (és me $|N_{G(S)}(F)| \leq |N_{G(S^2)}(F)|$).



(a) $F = \{0\} \times F'$ eset



(b) $F = \{1,2\} \times F'$ eset

A bizonyítás befejezéséhez elég ellenőrizni az $F = \{1,2\} \times F'$ alakú halmazokat, mert $N_{G(S^2)}((\{1\}\times F_1)\cup(\{2\}\times F_2)) = N_{G(S^2)}(\{1,2\}\times(F_1\cup F_2))$ és $|(\{1\}\times F_1)\cup(\{2\}\times$

$F_2)| \leq |\{0,1\} \times (F_1 \cup F_2)|$. Ezért vegyünk egy tetszőleges $F = \{1,2\} \times F'$ halmazt. Ha $N_{G(S)}(\{1,2\} \times F') = \{0\} \times F''$, akkor $|F''| \geq |F|$, mert $G(S)$ kielégíti a Hall-feltételt. A következő lépésben azt szeretnénk belátni, hogy $N_{G(S)}(\{1,2\} \times F'') \subseteq N_{G(S^2)}(\{1,2\} \times F')$. Vegyük a bal oldal egy tetszőleges $(0,x)$ elemét és az ő egyik $\{1,2\} \times F''$-beli szomszédját (i, f_1)-et. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $s \in S$, hogy $sf_1 = x$. Mivel $f_1 \in F''$, ezért léteznek $f_2 \in F'$, $s' \in S$ elemek, melyre $s'f_2 = f_1$. Ezeket összesítve az adódik, hogy a $(0,x)$ csúcs az $(1, f_2)$ szomszédja $N_{G(S^2)}$-ben, mert $s'sf_2 = x$. Emiatt $N_{G(S)}(\{1,2\} \times F'') \subseteq N_{G(S^2)}(\{1,2\} \times F')$ valóban igaz.

A fentieket összefoglalva:

$$|N_{G(S^2)}(F)| = |N_{G(S^2)}(\{1,2\} \times F')| \geq |N_{G(S)}(\{1,2\} \times F'')| \geq |\{1,2\} \times F''| \geq 2|F|$$

(itt használjuk, hogy $G(S)$ kielégíti a Hall-feltételt).

A fenti érvelés miatt $G(S^2)$ egy páros Borel-gráf, amely kielégíti a $\mathrm{Hall}_{1,1}$ feltételt, ezért a 3.2.10 tétel értelmében létezik egy Borel teljes párosítás egy $G(S^2)$-invariáns reziduális A Borel-halmazon. A kiválasztási axiómát használva kiegészíthetjük egy teljes párosítássá az egész gráfon. Ekkor a fenti módon ehhez a gráfhoz asszociált paradoxikus dekompozíció Baire-tulajdonságú darabokból áll. Ez azért van, mert az olyan x-ek halmaza, hogy $(0,x) \in A$ Borel és reziduális, és emiatt a paradoxikus dekompozíció relatív Borel egy reziduális Borel halmazon. □

3.2.14.1. Következmény (Dougherty és Foreman tétele)**.** *A háromdimenziós $B \subseteq \mathbb{R}^3$ egységgömb egymásbadarabolható két egységgömbbel csak Baire-tulajdonságú darabokat használva.*

Bizonyítás. Az SO(3) csoport hat a $B \setminus \{0\}$-n, és a 2.2.5 példában meggondoltuk, hogy a módosított Hausdorff-paradoxon épp $B \setminus \{0\}$ egy paradoxikus dekompozícióját adja. Mivel ez a hatás folytonos (azaz Borel) és $B \setminus \{0\}$ egy lengyel tér, ezért a 3.2.14 miatt ennek a hatásnak van olyan paradoxikus dekompozíciója, amely Baire-tulajdonságú darabokat használ. A befejezéshez a fentieket csak azzal a könnyű állítással kell kombinálnunk, hogy $B \setminus \{0\}$ egymásbadarabolható B-vel csak Borel darabokat használva [2, Következmény 3.10.]. □

Hivatkozások

[1] Hajnal András és Hamburger Péter. *Halmazelmélet*. Tankönyvkiadó, 1983.

[2] Stan Wagon. *The Banach-Tarski Paradox*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1985. DOI: `10.1017/CBO9780511609596`.

[3] A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461241904. URL: `https://books.google.hu/books?id=WR3SBwAAQBAJ`.

[4] Donald L Cohn. *Measure theory*. Springer, 2013.

[5] Oleg Pikhurko. *Borel Combinatorics of Locally Finite Graphs*. 2021. arXiv: `2009.09113 [math.CO]`.