NYILATKOZAT

Név: Stadler Domonkos

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: OOGYK7

Szakdolgozat címe:
Kombinatorikus keresési eredmények két forduló esetén

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.06.03.

Stadler Domonkos

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Stadler Domonkos

Kombinatorikus keresési eredmények két forduló esetén

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető:

Katona Gyula

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban köszönöm a témavezetőmnek, Katona Gyulának a rengeteg türelmet és segítséget, amit a dolgozat elkészítése során nyújtott. Hálás vagyok a családomnak a támogatásért, amit az elmúlt években kaptam tőlük. Szeretném megköszönni Kiss Péternek és Zsigri Bálintnak a hasznos tanácsokat. Köszönöm Kulcsár Gergőnek a lelki támogatást, és hogy segített az ábrák megalkotásában. Végül, de nem utolsó sorban, nagyon köszönöm R. Sártory Fruzsinak, hogy helyrepofozta a helyesírásomat.

1. fejezet

Kivonat

A szakdolgozat célja a kombinatorikus keresés általános bemutatása, majd két, a kétfordulós esetet vizsgáló eredmény ismertetése a témakörben. Egy kombinatorikus keresési feladat általában valamilyen halmazrendszer egy vagy több elemét hivatott megmegtalálni. Az ehhez használható eszköz, hogy kérdéseket tehetünk fel arra vonatkozóan, hogy egy-egy halmaz tartalmaz-e keresett elemet. Minden ilyen kérdésre egy bináris választ kapunk, azaz, hogy tartalmaz-e a halmaz keresett elemet. A keresés általában akkor ér véget, ha képesek vagyunk a kapott válaszok alapján pontosan beazonosítani a keresett elemeket, és arra szoktunk törekedni, hogy ezt minél kevesebb kérdéssel lehessen garantálni. Egy forduló azt jelenti, hogy a beletartozó kérdéseket egyszerre tesszük fel, anélkül, hogy ismernénk a rájuk kapott válaszokat.

A következő fejezetben először alkalmazásokat és példafeladatokat fogok mutatni, majd ezeken keresztül bemutatom milyen gyakori variációi léteznek a kombinatorikus keresésnek. Ezután kifejtem két ismert, szemléletes példafeladat megoldását. A harmadik fejezetben egy olyan feladatot mutatok be, ahol a fordulószám nagy szerepet játszik. Az utolsó fejezetben egy olyan eredménnyel fogok foglalkozni, ahol nem a kérdések, hanem a fordulók száma van előtérben.

2. fejezet

Bevezetés

2.1. Valóságbeli példák és alkalmazások

Egy kombinatorikus keresés olyan feladat, ahol egy véges X halmaznak egy vagy több (gyakran defektívnek nevezett) elemét szeretnénk azonosítani vagy "megtalálni" olyan módon, hogy $A \subset X$ részhamazokban keressük, és bináris válaszokat kapunk a szerint, hogy A tartalmaz-e defektív elemet. A matematika általában a szükséges kérdések számát próbálja minimalizálni.

Ennek sokféle változatát lehet vizsgálni, később többet be fogok mutatni ezek közül. Ebben a fejezetben valóságból vett példákat mutatok kombinatorikus keresésre. Ezek segítségével könnyebben lesz átlátható a téma illetve a különböző típusai.

2.1.1. Példa. *A barkochba egy jól ismert szójáték, amit legalább két ember játszik. Az egyik játékos gondol egy szóra, majd a többiek kérdéseket tesznek fel a szó jelentésével kapcsolatban, míg rá nem jönnek a kitalált szóra. A játékban csak eldöntendő kérdéseket szabad feltenni, melyekre csak igennel vagy nemmel szabad válaszolni. A kérdezők akkor nyernek, ha sikeresen kitalálják a gondolt szót. Itt az adott nyelv szavai X, és a kérdések X egy-egy részhalmazát határozzák meg.*
Előfordul, hogy csak limitált számú rákérdezés engedélyezett, azaz nem elég nagyjából tudni a szót, és tippelni párat, hanem pontosan kell tudni. Ebben a verzióban a gondoló személy könnyebben nyerhet.

Elég pár menetet játszanunk, és kiderül, hogy érdemes minél általánosabb kérdésekkel kezdeni a játékot, amelyek választól függetlenül minél nagyobb részét zárják ki a szavaknak. Amennyiben azzal a kérdéssel kezdek, hogy "*Egy színre gondoltál?*", *Igen* válasz esetén ugyan nagyon jól járok, de ezt semmi sem garantálja, és amennyiben nem szín a gondolt szó, szinte semmit nem értem el a kérdésemmel.

Ha precízebben szeretnénk vizsgálni a problémát, egyszerűbb, ha a véges halmazunk, amiből gondol valaki, nem a (magyar) nyelv szavai, hanem például számok egy meghatározott halmaza, így könnyebben lesz kezelhető.

2.1.2. Példa. *Két játékos játszik, az első gondol egy x számra az $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ halmazból, a második megpróbálja kitalálni x-et minél kevesebb kérdés segítségével. A kérdező az X alaphalmaz hatványhalmazából válogathat, azaz bámelyik $A \subset X$ részhalmazt felteheti, mint kérdés, majd a gondoló fél megmondja, hogy $x \in A$ igaz-e.*

A második játékos célja, hogy függetlenül attól, mi a gondolt szám, tudjon garantálni egy t-t, hogy maximum t kérdésből mindenképpen tudja, melyik a gondolt szám. A feladat, hogy ez a t minél kisebb legyen.

A következő példa is egy játék, ezt általában kisgyerekek szokták játszani, de az ebben a fejezetben felsorolt példák között szerintem nagyon érdekes.

2.1.3. Példa. *A hideg-meleg játék a bújócska egy formája. A gyerekek kiválasztanak egy keresőt. A többi játékos közösen eldug egy tárgyat (vagy kiválasztanak valamit a szobában), ezután a keresőnek ezt meg kell találnia. A játék része a feltételezés, hogy az elrejtett tárgy hőt sugározik. Ha a kereső egy irányba fordítja a figyelmét, vizsgálódik, a többiek hőmérsékletet leíró szavakkal vezetik a tárgy felé. Például, ha rossz helyen keres, "hideg", ha nagyon közel van, "forró".*

Ez sokkal kevésbé diszkrét, mint a többi, valójában a kereső folytonosan kérdez a mozgásával, és mindig a tér egy szubjektíven értelmezett szeletére kap választ.

A következő egy egészen más jellegű előfordulása kombinatorikus keresésnek, ez egy valóságból vett alkalmazás;

2.1.4. Példa. *A Wassermann vizsgálat a szifilisz kimutatására való 1906-ban felfedezett vérteszt. A vizsgálat során minden alanytól vérmintát vesznek, majd a vérmintákat egyesével letesztelik, hogy pozitív diagnózist adnak-e. Mivel a vizsgálatot a történelem során sokszor - például a második világháború alatt az Egyesült Államokban sorozáskor - tömegesen kellett végezni, felmerült, hogy lehetne-e spórolni a tesztek árán. Egy-egy csoport vérét összekeverték a vizsgálat előtt. Ennek az volt az előnye, hogy ha egyik személy sem beteg, elég volt csak egy tesztet elhasználni. A pozitív teszt annyit jelent, hogy a leszűrt csoport legalább egyik tagja beteg.*

Ez a fajta feladat valószínűségszámítási probléma, nem fogok róla részletesebben értekezni. Hasonló egészségügyi alkalmazást találhatunk a közelmúltból is.

2.1.5. Példa. *A COVID-19 járvány alatt is alkalmazták ezt a módszert. Svájci iskolákban rutinszerűen, reggelente osztályonként úgy tesztelték a diákokat, hogy egy edénybe mindegyikük beleköpött. A közös nyálmintából egyetlen gyorsteszt segítségével egy egész osztály szűrése megtörtént. Ha bármelyikük beteg volt, akkor a teszt pozitív eredményt adott, és mindenkit hazaküldtek, hogy az iskolát (és a gyerekek egymást) ne veszélyeztessék. Ezt az eljárást magyar iskolában is használták.*

Ez utóbbi esetben a tesztekkel való spórolás valószínűleg csak az egyik szempont volt, praktikus szempontból is teljesen érthető. Ha egy osztályban van beteg, mindenkinek úgyis haza kell mennie, hiszen a többiek elkaphatták tőle. Ez azt jelenti, hogy pozitív teszt esetén nem szükséges rendszerszinten több tesztet csinálni, hiszen mindegy, hogy ki beteg teszteléskor, ha egy teremben jelen voltak, mindenkinek úgy kell viselkednie, mintha elkapta volna a vírust. Spóroláson túl valószínűleg az is előnye ennek az eljárásnak, hogy kisiskolásokat nehéz rávenni napi tsztelésre.

2.1.6. Példa. *Ha van egy hibásan működő gép, amit meg szeretnénk javítani, először megpróbálhatjuk megállapítani, hogy részfunkciókra képes-e. Amennyiben egy ilyen részfunkciót még hiba nélkül képes elvégezni, az ehhez szükséges alkatrészeket kizárhatjuk a lehetséges meghibásodási okok közül. Hasonlóan, ha a teszt nem sikerül, a hozzá szükséges alkatrészek között mindenképpen van hibás.*
Itt egy-egy ilyen alfunkció ellenőrzése egy-egy $A \subset X$ *alkatrészrészhalmazra vonatkozó kérdés.*

Fel szeretném hívni a figyelmet arra, hogy ebben a példában a feltehető kérdések (kiválasztható halmazok) nem tetszőlegesek, hanem korlátozva vannak. Nem tudjuk a kedvenc öt alkatrészünkről egyszerre megállapítani, hogy jól működnek-e, ha teljesen független feladatokat látnak el a szerkezetben.

A következő, egy hasonló témájú, meseszerűbb feladat:

2.1.7. Példa. *Elveszett egy gép belsejéből egy fontos anyacsavar, viszont nagyon rozsdás a csavar, amire rá volt fűzve. A boltban csak azt tudjuk a sok rozsda miatt megállapítani egy anyáról, hogy rámegy-e a csavarra, azt nem, hogy milyen pontosan. Minél kevesebb teszttel szeretnénk kiválasztani a lehető legkisebb anyát, ami még ráfér. Itt a tesztelt anyák az összes náluk nem nagyobbak halmazát reprezentálják.*

Ennek izgalmas változata a következő feladvány:

2.1.8. Példa. *Van valamennyi strucctojásunk, és meg szeretnénk állapítani, hogy egy emeletes ház melyik emeletéről lehet őket ledobni úgy, hogy még pont nem törnek el. Ha valahonnan ledobva eltörik a tojás, akkor minden magasabb emeletről is* *eltörne, ha ép marad, minden lejjebb lévőről ledobva is ép maradna. Feltesszük, hogy a tojások azonos erősek, és nem tud gyengülni a héjuk. Vagy eltörnek, vagy teljesen épen maradnak.*

A cél, hogy minél kevesebb dobással beazonosítsuk a keresett emeletet.

Ez egy tojással triviális a feladat, de egynél többel sokkal érdekesebb.
A Mastermind nevű társasjáték egy nagyon jó példa kombinatorikus keresésre, de most inkább a vele majdnem teljesen megegyező Wordle nevű játékot mutatom be, mert ez az elmúlt pár évben nagy népszerűségnek örvendett, és mert szeretem a nyelvi alapú játékokat.

2.1.9. Példa. *Ez egy, a The New York Times honlapján lévő, naponta újuló feladvány. A cél mindig egy ötbetűs angol szó kitalálása. A játékos ötbetűs szavakat kell tippeljen egészen addig, amíg el nem találja a nap szavát, vagy nem tippel hatot, ami a megengedett maximum. Ekkor veszít, és a honlap megadja a keresett szót. Minden tipp után látja a játékos, hogy a tippelt, és a kitalálandó szóban vannak-e közös betűk, és ha igen, hogy a helyük megegyezik, vagy nem.*

Ez elég különleges, mert egy-egy kérdésre rengeteg információt kapunk válaszul, valójában sok kérdést kódolunk el egy szóban. Emellett nem lehet tetszőleges öt betűt kérdezni, minden tippnek értelmes angol szónak kell lennie.

2.1.10. Példa. *Kémiában az úgynevezett klasszikus analitika. Van egy ismeretlen anyagunk, és ezt szeretnénk beazonosítani. A megjelenése alapján már le tudjuk szűkíteni a lehetőségeket az ismert anyagok egy részhalmazára. Ez után elvégezhetünk kísérleteket, melyeknek jól dokumentált kimenetelei vannak.*

Gyakran ezeknek a beazonosítása nem egyértelmű, ezért előfordul, hogy redundáns tesztek elvégzése is szükséges.

Manapság ez a módszer kevésbé van használatban, szerves vegyületeket például ilyen módon az esetek többségében nem is lehet beazonosítani, ezért főleg kémiaversenyeken fordul elő.

A genetikai sorozatok feltárásában is használnak kombinatorikai szemmel hasonló módszereket.

2.1.11. Példa. *Hibás érme feladvány. Van kilenc érménk, az egyik kicsit nehezebb, mint a többi, és egy kétkarú mérlegünk. Minél kevesebb méréssel meg kell találni a defektív érmét.*

Ennek az az érdekessége, hogy az alaphalmazt egy-egy kérdéseben nem két, hanem három részre szedjük, és kapunk egy választ, hogy melyikben van a túl nehéz érme. A kiválasztott részek itt sem tetszőlegesek, a három halmaz közül kettő méretének meg kell egyeznie, különben semmilyen információt nem tudnánk meg,

2.2. A kombinatorikus keresési feladat felvetése

Most megnézzük, hogy néz ki az általános kombinatorikus keresési feladat és milyen gyakori variációk vannak, amiket érdemes vizsgálni [4]. Ez után bemutatom a legintuitívabb feladatot, a barkochbát. Ez azért is hasznos, mert az összes később vizsgált probléma ennek lesz a szigorítása. Végül - a fordulók fogalmának jobb megértése céljából - megvizsgáljuk a strucctojásokról szóló 2.1.8 példát.

2.2.1. A feladat, és leggyakoribb variációi

2.2.1. Feladat. *Az általános feladatban egy n elemű, véges $[n]$ halmazból szeretnénk megtalálni egy vagy több defektív elemet egy kérdezési* stratégia *segítségével. Egy stratégia egy $\mathcal{A}$ halmazsorozat, ahol $A_i \in \mathcal{A}$-ra $A_i \in 2^{[n]}(i = 1, 2, 3, ..., t)$. Minden A_i-hez tartozik egy $s_i \in \{0, 1\}$ válasz, ami azt mondja meg, hogy van-e A_i-ben defektív elem. Ekkor $s \in \{0, 1\}^n$ a válaszok vektora. $\mathcal{A}$ akkor stratégia, hogyha az $(\mathcal{A}, s)$ rendezett párból egyértelműen megállapítható, melyik a defektív elem. A cél, hogy megállapítsuk, mi a legkisebb t, amihez van stratégia.*

A dolgozatban a válaszokra fogom használni az I, N, azaz *Igen*, *Nem* jelölést is és a *pozitív* illetve *negatív válasz* is hasonló jelentéssel bír.

2.2.2. Definíció. *Variációs lehetőségek.*

- *Ennek a dolgozatnak a szempontjából a legfontosabb variáció a* fordulók *száma. Ha minden kérdésre megkapjuk a választ, majd ennek ismeretében tesszük fel a következő kérdést, akkor azt mondjuk, hogy a feladat* adaptív*. Ha előre megadjuk az összes kérdést, kapunk mindre válaszokat, majd ez alapján megtaláljuk a keresett elemet, akkor azt mondjuk, hogy a feladat nem adaptív vagy egyfordulós.*

  A kettő közti átmenet egy r fordulós játék. Ez azt jelenti, hogy minden forduló kérdéseit egyszerre adjuk meg, a korábbi fordulókra kapott válaszok ismeretében. Ez arra vezet, hogy a kérdezés során $r-1$ alkalommal tudunk reagálni az addigi válaszokra. Két forduló például úgy értelmezendő, hogy megadunk valamennyi kérdést egyszerre, majd mindre megkapjuk a választ. Ezután felteszünk - az új ismeteink függvényében - még egy csoport kérdést, és ezek válaszaiból már ki kell tudnunk következtetni, melyik a keresett elem.

- *Változhat a keresett elemek száma, egy barkochbajátékban mindig egy elemre gondolunk, de ha hibás alkatrészt keresünk, akár 0 vagy több is lehet.*

Előfordulhat az is, hogy minden elem $0 < p < 1$ *valószínűséggel defektív egymástól függetlenül. Ilyen módon például betegségek tesztelése modellezhető.*

- *Az is egy fontos szempont, hogy milyen elemek lehetnek együtt egy kérdésben. Például a 2.1.2 példában tetszőleges részhalmazt választhatunk, míg a legtöbb valóságon alapuló helyzetben nincs ilyen szabadságunk. Ilyenkor nem az alaphalmaz hatványhalmaza, hanem egy előre meghatározott halmazrendszer felett kérdezünk.*
- *Különbözhet a keresés célja is. Főleg, ha egy valószínűségi változótól függ a modellünk, nem tudunk minimális kérdésszámot elvárni. Ilyenkor általában az átlagos kérdésszámot vagy a kérdések számának várható értékét szeretnénk minimalizálni.*
- *A legtöbb példában egy kérdés az alaphalmazt két részre választja. A 2.1.11 példában három részre válik az alaphalmaz, itt egyszerre két azonos méretű kérdést teszünk fel.*

2.2.3. Definíció. *Egy feladat* komplexitása *a minimális kérdésszám, amire létezik stratégia, ami megoldja a feladatot.*

Mivel egy stratégia nem feltétlen minden elemet ugyanannyi kérdésből talál meg, ebben a szakdolgozatban mindig a legrosszabb esetet fogom érteni szükséges kérdésszám alatt. Előfordul, hogy a kérdések számának várható értékét vizsgálják például, de ezzel itt nem fogok foglalkozni.

2.2.4. Lemma. *Ha* F *egy kombinatorikus keresési feladat,* $\alpha_k(F)$ *a* k *fordulós komplexitása, akkor* $\alpha_k(F) \geq \alpha_{k+1}(F)$.

Bizonyítás. Ez triviális, hiszen minden k fordulós stratégia $k + i$ fordulós is tetszőleges $i \geq 0$-ra. □

2.2.2. Barkochba

A legegyszerűbb kombinatorikus keresési feladat, amivel érdemes tisztában lenni, a (számokra vonatkozó) barkochba. Az ebben a szekcióban következő állítások és bizonyítások mind megtalálhatóak [6, 4] valamelyikében. Itt még tetszőlegesek lehetnek a kérdéseink, és még ebben a fejezetben megmutatom, hogy a megengedett fordulók száma sem befolyásol semmit.

2.2.5. Feladat. *Adaptív barkochba (2.1.2) $X = \{1, 2, ..., n\}$ minimális t-t keresünk, ahány kérdésre már van stratégia.*

Érdemes megfigyelni, hogy egy halmaz és a komplementere pont ugyanazt az információt adják, ha feltesszük őket kérdésnek, ugyanis $x \notin A \Leftrightarrow x \in A^c$. Ez azt jelenti, hogy egy kérdésre tekinthetünk úgy is, hogy vesszük az alaphalmaz egy felosztását, és megtudjuk, hogy a gondolt szám melyik félben van. Ez a tulajdonság nem marad meg a későbbi problémáknál, de itt sokat segít a megértésben. Az egyszerűség kedvéért innentől kezdve a "*log*" a kettes alapú logaritmust fogja jelölni.

2.2.6. Állítás. *Az adaptív barkochba (2.2.5) komplexitása pontosan $\lceil log\ n \rceil$.*

Bizonyítás. Először megmutatom, hogy ennyi kérdés tényleg elég, mutatok egy jó stratégiát. Minden kérdés előtt mérjük fel, mely számokat nem zártuk még ki, és felezzük meg őket. Például az első kérdés lehet "*Nagyobb-e, mint $n/2$?*". Ekkor k kérdés után az eredeti számmennyiség 2^k-ada marad. Ezek szerint, mivel $n \leq 2^{\lceil log\ n \rceil}$, ezért $\lceil log\ n \rceil$ kérdés után már csak egy szám lehet a szóba jövők között.

Most megmutatom, hogy ennél kevesebb kérdés nem elég. Indirekt bizonyítás, tegyük fel, hogy van egy jó stratégia, amihez elég kevesebb kérdés. Gondoljunk bele, hogy a játék menetét nem befolyásolja, ha változtatunk a gondolt számon, egészen addig, amíg egy korábban adott válasz nem zárja ki az új számot. Hasonló elgondolás szerint egyáltalán nem is vagyunk kötelesek számot választani, elég, ha mindig úgy válaszolunk, hogy maradjon olyan szám, amire az összes eddigi válasz igaz. Játsszunk (gondolóként) ezen a módon, és mindig válaszoljunk úgy, hogy a válasz után, a szóba jövő számok minél nagyobb része bennmaradjon. Ez mindig legalább a maradék fele. Ha k a kérdés előtt szóbajövők száma, a kérdés után így még legalább $\lceil \frac{k}{2} \rceil \geq \frac{k}{2}$ szám szóbajön. Ha a stratégiában $t < \lceil log\ n \rceil$ kérdés van, az utolsó kérdés után még legalább $\frac{n}{2^t} \geq \frac{n}{2^{\lceil log\ n \rceil - 1}} > 1$ szám jön szóba, így viszont mégsem működik a stratégia, ez ellentmondás, tehát nem elég kevesebb, mint $\lceil log\ n \rceil$ kérdés.

Mutatok egy másik bizonyítást is, ami hasonló, de szemléletesebb lehet.

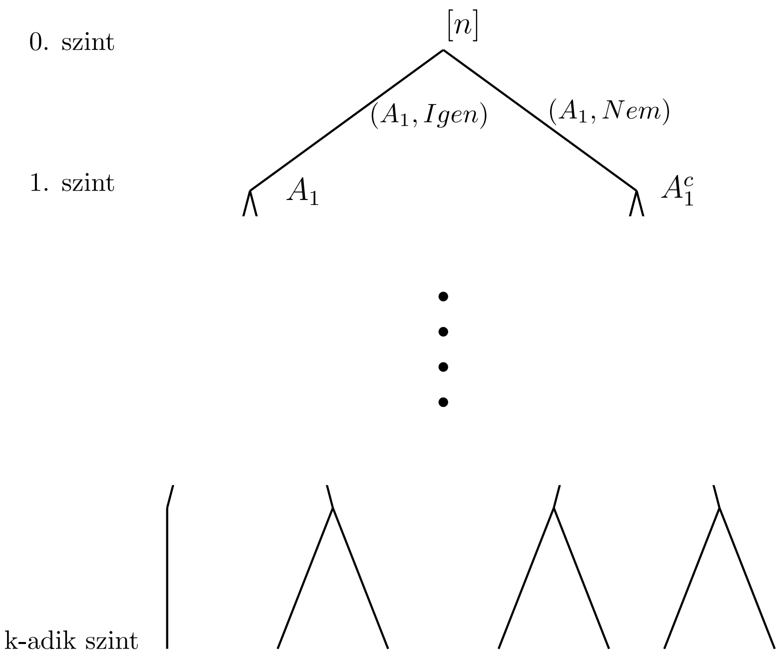
Építünk egy úgynevezett *döntési fát*. Ez egy gráf lesz, ami a kérdező gondolkodását ábrázolja. A csúcsok a még szóbajövő számok részhalmazát reprezentálják, az élek egy-egy kérdés-válasz párt, azaz ahol van kérdés, ott az élek mindig párosával jelennek meg. A csúcsok a *gyökér* nevű kezdőcsúcstól való távolsága a már feltett kérdések számát mutatja. A k-adik szint azon csúcsok halmazát jelenti, amiknek a gyökértől való távolsága k. Ha egy csúcs által reprezentált számhalmaz egyelemű, de még nem volt elhasználva az összes kérdés, az egyszerűség kedvéért kiegészítjük a stratégiát redundáns kérdésekkel, tehát itt a fa úgy fog kinézni, hogy a csúcstól az aljáig egy elágazás nélküli út vezet.

Ez a bizonyítás is indirekt, tegyük fel, hogy van egy stratégia, amelyik $t < \lceil log\ n \rceil$ kérdésből megtalálja a keresett számot. Ha felrajzoljuk a hozzá tartozó döntési fát, azt látjuk, hogy a t-edik szinten minden csúcs egyelemű halmazt jelöl, hiszen csak ebben az esetben megfelelő a stratégia. Mivel minden kérdésre kétféle válasz fordulhat elő, és minden "maradék" számhalmazhoz pontosan egy kérdést kell választani a stratégiában, minden csúcsból maximum kettő él indulhat ki a magasabb szint felé. Ez azt jelenti, hogy a k-adik szinten legfeljebb 2^k csúcs van, tehát a t-edik szinten maximum $2^t < n$. Ez viszont azt jelenti, hogy mégis van olyan csúcs az utolsó szinten, ami egynél több elemű halmazt jelöl, vagyis ezeket a számokat nem tudja megkülönböztetni a stratégia. □

2.2.7. Feladat. *Egyfordulós barkochba (2.1.2)* $X = \{1, 2, ..., n\}$ *minimális* t*-t keresünk, ahány kérdésre már van stratégia.*

2.2.8. Definíció. *Egy* $\mathcal{A}$ *halmazredszer* szeparáló halmazrendszer *pontosan akkor, ha*

$$\forall x_i \neq x_j \quad \exists A_k \in \mathcal{A}\ , x_i \in A_k, x_j \notin A_k \ vagy\ x_i \notin A_k, x_j \in A_k. \tag{2.2.1}$$



2.1. ábra. Döntési fa

2.2.9. Lemma. *Legyen $M \in \{0,1\}^{m \times n}$ az a mátrix, ahol az i-edik sor j-edik eleme 1, akkor és csak akkor, ha $x_j \in A_i$, és 0 egyébként. $\mathcal{A}$ pontosan akkor szeparáló halmazrendszer, ha M oszlopai különböznek.*

Bizonyítás. Ha két oszlop megegyezik, az azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó pontok ugyanazokban a halmazokban vannak benne, ekkor a halmazrendszer nem szeparáló.

Ha $\mathcal{A}$-ra teljesül 2.2.1, bármelyik két x_i, x_j elemet elválaszt az egyik halmaz, és az ehhez tartozó sorban mindenképpen eltér az i-edik és j-edik oszlop.

□

2.2.10. Állítás. *Az egyfordulós barkochbának (2.2.7) is $\lceil log\ n \rceil$ a komplexitása.*

Bizonyítás. Egy forduló esetén egy stratégia mindig ugyanazokat a halmazokat tartalmazza, a gondolt számtól függetlenül ugyanannyi kérdésből áll. Egy $\mathcal{A}$ pontosan akkor működő stratégia, ha szeparáló halmazrendszer. Ez jól látszik, hiszen tetszőleges gondolt számot meg kell tudnunk különböztetni a többitől.

Vegyünk egy jó stratégiához tartozó M mátrixot. n oszlopról tudjuk, hogy mindegyik különböző. Mivel m sora van, és minden eleme kétféle lehet, maximum 2^m különböző oszlop lehet. Ez azt jelenti, hogy $n \leq 2^m$, $log\ n \leq m$, $\lceil log\ n \rceil \leq m$ vagyis a kérdések száma legalább $\lceil log\ n \rceil$, amit a 2.2.4 egyenlőtlenségből is tudunk.

Most megmutatomm, hogy ennyi kérdés elég is, tehát mutatok egy $\lceil log\ n \rceil$ elemű szeparáló halmazrendszert. Legyen A_i a következő kérdés: "*A gondolt szám kettes számrendszerbeli alakjában hátulról az i-edik számjegy egyes?*" Ez természetesen bármely két számot megkülönbözteti, és pont $\lceil log\ n \rceil$ kérdés elég n számhoz. □

Ez a stratégia természetesen működött volna adaptív esetben is, sőt az ott említett felezéses filozófiát is kielégíti, de az adaptív feladathoz adott verzió könnyebben felfogható, és lesz később feladat, ahol egyszerűbben alkalmazható, ezért hasznosnak éreztem bemutatni.

2.2.11. Következmény. *A barkochbafeladatnak tetszőleges fordulószámra $\alpha_k(F) = \lceil log\ n \rceil$ a komplexitása.*

Bizonyítás. A 2.2.4 egyenlőtlenség miatt $\lceil log\ n \rceil \leq \alpha(F) \leq \lceil log\ n \rceil$. □

2.2.3. Strucctojások

Mivel a szakdolgozatban szereplő legfontosabb eredmények két fordulóra vonatkoznak, részletesebben megnézzük a 2.1.8 példát, mert ez a feladat szemléletesebben bemutatja, milyen hasznos, ha több forduló áll rendelkezésre. A példa egy gimnazistáknak szóló feladvány, itt először precízebben kimondom a feladatot, majd bemutatom a hozzá tartozó eredményeket. Az így megjelenő optimális stratégia olyan struktúrájú, amihez hasonlót még látni fogunk későbbi fejezetekben. Először megnézzük, hogy lehetne precízebben megadni a problémát:

2.2.12. Feladat. $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ *alaphalmaz,* $x \in [n+1]$*-et keressük. Minden kérdéssel választ kapunk, hogy* $x \in [k]$ *igaz-e, valamilyen* $1 \leq k \leq n$ *egészre. Szeretnénk minimalizálni egy olyan* t*-t, hogy ennyi kérdéssel garantáltan beazonosíthatjuk* x*-et.* r *darab* Igen *válasz után véget ér a kérdezés.*

Ebben a megfogalmazásban a tojások számát azonosítom be a fordulókkal. Bár a feladat nem követeli meg, hogy az egy-egy tojással való kérdéseinket előre meghatározzuk, mégis érdemes eldönteni, pontosan milyen emeletekről fogjuk ledobni, hiszen ezeket csak tojásonként növekvő sorrendben kérdezhetjük meg. $x = n+1 > n$ azt reprezentálja, ha egyik emeletről sem törnek el a tojások.

2.2.13. Állítás. *A 2.2.12 feladathoz* $r = 1$ *esetben* $t = n$ *kérdésre van szükség.*

Bizonyítás. Mivel intuitív módon csak növekvő sorrendben kérdezhetünk, minden halmazt meg kell kérdezni. Ha kihagynánk egyet, lenne két elem, amit nem tudunk megkülönböztetni. □

2.2.14. Állítás. *A 2.2.12 feladathoz* $r = \infty$ *esetben, azaz adaptív kereséssel (tetszőleges számú tojást törhetünk el)* $t = \lceil log\ (n+1) \rceil$ *kérdésre van szükség.*

Bizonyítás. Ebben az esetben is működik a felezős stratégia, mindig tudunk olyan halmazt kérdezni, ami megfelelő választás lenne az $[n+1]$ feletti adaptív barkochbához, és annál kevesebb kérdés semmiképp nem elég, hiszen ez a feladat megegyezik vele, csak kevesebb féle kérdést tehetünk fel. □

Mielőtt megnézzük általánosan, szemléletesség céljából először a kétfordulós esetet fix n-re nézzük meg. Azt kell észrevenni, hogy ha az első tojás eltörik, csak sorban tudunk szomszédos emeleteket kérdezni a másikkal, az egyfordulós érvelés miatt.

2.2.15. Állítás. *A 2.2.12 feladathoz* $n = 15, r = 2$ *esetben* $t = 5$ *kérdésre van szükség.*

Bizonyítás. Mutatok egy stratégiát: Az első tojással a következő halmazokat szeretnénk megkérdezni: $\mathcal{A} = \{[5], [9], [12], [14], [15]\}$. Ha végig kitart az első tojásunk, az utolsó válasz alapján $x = 15$ vagy $x > 15$. Ha a k-adik kérdésre $Igen$ választ

kapunk, a második tojással végigkérdezzük az A_{k-1} és A_k közti halmazokat növekvő sorrendben ($k = 1$ esetben csak egytől megyünk felfele). $\mathcal{A}$-t pont úgy csináltuk, hogy ez maximum $5 - k$ kérdést igényeljen.
Kevesebb kérdés nem elég, sőt, ez az egyetlen stratégia 5 kérdésre 15 emeletnél. Tegyük fel, hogy bármelyik halmaz helyett mást választunk. Ha a k-adik kérdés helyett bővebb halmazt kérdezünk, *Igen* válasz után nem marad elég kérdésünk, hogy a nála kisebb emeleteket végigkérdezzük, ugyanis az utolsó tojással már csak sorban kérdezhetünk. Ha szűkebb halmazt választunk valamelyik kérdésben, *Nem* válasz esetén túl sok halmazt kell végigkérdezni. □

2.2.16. Megjegyzés. *Jól látszik, hogy ez az algoritmus t kérdéssel két tojással maximum $\sum_{i=1}^{t} i = \frac{t(t+1)}{2}$ emeletet tud megoldani. Ezek szerint adott n-re $t = \min_{t \in \mathbb{Z}^+, t(t+1) \geq 2n} t$.*

r forduló esetén lehet rekurzívan konstruálni egy stratégiát, ahol az első tojással egyre csökkenő halmazokat vágunk le a kérdéseinkkel, és egy Igen *esetén a maradék kérdésből egy $r - 1$ fordulós stratégiát alkalmazunk az utolsó két kérdezett halmaz különbségén.*

Ezekkel itt nem szeretnék sokkal részletesebben foglalkozni, később meg fognak még jelenni hasonló elven alapuló stratégiák.

3. fejezet

Ismeretlen számú keresett elem

3.1. Bevezetés és az adaptív eset

A téma hatalmas irodalmából két cikket fogok ismertetni, amelyek a fordulók számát vizsgálják. Az első cikk egy olyan feladattal foglalkozik, aminek megoldása a fordulók számával csökken. Ezzel szemben a másodikban egy olyan feladattípus szerepel, amelyre belátható, hogy adott feltételek mellett két forduló elég az optimális megoldáshoz.

Ebben a fejezetben Katona egy 2011-es [5] eredményét fogom bemutatni, az itt szereplő állítások majdnem mind innen származnak. Ez egy olyan keresési feladat vizsgálata lesz, ahol a komplexitása nagyon függ a fordulók számától. Az eddigiekhez képest a legnagyobb újdonság, hogy a keresett elemek száma ismeretlen, és addig tart a keresés, amíg be nem tudunk azonosítani legalább egyet, vagy meg nem tudjuk mutatni, hogy egyáltalán nincsen egy sem. A könnyebb megértés érdekében hoztam egy példát a mindennapokból:

3.1.1. Példa. *Ellenpélda keresése. Tegyük fel, hogy matematikusként egy olyan problémán dolgozunk, aminek egy-egy esetét megvizsgálni sok munka, és olyan mérhetetlen számú eset van, hogy az összes vizsgálata szóba sem jön (pl. négyszíntétel). Szerencsénkre az ördög felvette velünk a kapcsolatot, és hajlandó az esetek néhány halmazáról elárulni nekünk, hogy van-e köztük, ami ellenpéldához vezet. A cél, hogy tudjunk találni egy ellentmondásra vezető esetet, vagy megbizonyosodjunk róla, hogy ilyen nincs, úgy, hogy közben az ördög felé minél kisebb tartozást halmozzunk fel.*

A valóságban hasonló feladatoknál általában nem véges sok eset van, de a mese kedvéért elhihetjük, hogy az esetek száma nagy ugyan, de nem végtelen.

A feladat jellegéből érthető módon az ilyen problémák esetén a keresett elemeket nem defektívnek szokták nevezni, hanem valami pozitívnak, én a fejezet további részében *kiválónak* fogom hívni őket.

3.1.2. Feladat. *Adott az $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ halmaz, az elemei közül $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ darab kiváló (az értéke ismeretlen). Tetszőleges $A \subset [n]$ feltehető kérdésként, és a válasz, hogy A-ban van-e kiváló elem. A cél megadni a feladat komplexitását r megengedett fordulószám esetén.*

Mindjárt látni fogjuk, hogy az a feltétel, hogy a keresett elemek száma ismeretlen, egy forduló esetén nagyon megnehezíti a keresést. Az is nagyon érdekes, hogy csak két forduló viszont már elég ahhoz, hogy jelentősen csökkenjen a komplexitás.

3.1.3. Állítás. *A 3.1.2 feladat komplexitása adaptív esetben $\lceil log\ (n+1)\rceil$.*

Bizonyítás. Mutatok egy kérdezési stratégiát ezzel a kérdésszámmal. Hasonló lesz, mint a rendes barkochbánál, csak adaptálni kell ahhoz a lehetőséghez, amikor nincsen kiváló elem. Ha egynél több van, az ebbe a stratégiába nem zavar bele.
Először tegyük fel, hogy $n = 2^l,\ l \in \mathbb{N}$. Az első kérdéssel két 2^{l-1} méretű részre szeretnénk vágni a halmazt, azaz $A_1 = \{1, 2, 3, ..., 2^{l-1}\} = [2^{l-1}]$. A_0 -lal jelölöm $[n]$-et, és $\frac{A_i}{2}$ az A_i halmaz "alsó felét" jelenti, azaz az első kérdés $\frac{[n]}{2}$-ként is felírható. Emlékeztetőnek s_i pedig az i-edik kérdés válasza, tehát $s_i = 1$ azt jelenti, hogy A_i tartalmaz kiváló elemet, $s_i = 0$ pedig, hogy nem. Az i-edik kérdés ilyen módon

$$A_i = \begin{cases} \frac{A_{i-1}}{2}, & \text{ha } s_{i-1} = 1 \\ \frac{A_{i-2} \setminus A_{i-1}}{2}, & \text{ha } s_{i-1} = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Ezzel a stratégiával minden kérdés mérete az előző fele lesz, tehát a $\lceil log\ n\rceil$-edik kérdés már egy elemre kérdez. Ha ezzel együtt minden kérdésre nemleges választ kaptunk, az utolsó elemre még rá kell kérdeznünk, hiszen ebben az esetben nem garantált, hogy van egyáltalán kiváló elem, azaz $A_{\lceil log\ n\rceil+1} = A_{\lceil log\ n\rceil-1} \setminus A_{\lceil log\ n\rceil}$. Amennyiben volt pozitív válasz a lefutás alatt, $\lceil log\ n\rceil$ kérdés elég volt. Ezek szerint ebben az esetben a stratégia $\lceil log\ n\rceil + 1 = \lceil log\ (n+1)\rceil$ kérdésből áll legrosszabb esetben.
Most vegyük azt az esetet, ahol n nem kettőhatvány, azaz $2^l < n < 2^{l+1}$. Most legyen az első kérdés $A_1 = \{1, 2, 3, ..., 2^l\}$. $s_1 = 1$ esetén a maradék kérdésekkel $[2^l]$-ben szeretnénk kiváló elemet találni, úgy, hogy legalább egy van benne. Innentől akár az előző eset, akár 2.2.6 szerint eljárhatunk, a halmazt minden kérdéssel felezve, pontosan $\lceil log\ 2^l\rceil$ további kérdésre van szükség, azaz összesen $1+\lceil log\ 2^l\rceil = \lceil log\ (2^l+1)\rceil = \lceil log\ n\rceil = \lceil log\ (n+1)\rceil$ kérdésre.

$s_1 = 0$ esetén visszakapjuk ezt a feladatot, $[n - 2^l] = [m]$ halmazon, ahol $m < 2^l$ és $\lceil log\ 2^l \rceil = l$ kérdés áll rendelkezésünkre. Ha ilyen módon kérdezünk, és $s_1 = s_2 = ... = s_l = 0$, akkor a maradék halmazunk (amiről nem tudjuk, hogy tartalmaz-e kiváló elemet) $2^1 = 2$-nél kisebb elemszámú. Ha üres, készen vagyunk, ha egyelemű, ez az elem lesz A_{l+1}. A maximum szükséges kérdésszám ebben az esetben is $\lceil log\ (n+1) \rceil$.

Mivel a feladat általánosabb az adaptív barkochbánál 2.2.5, kisebb nem lehet a komplexitása. A két megadott érték csak akkor különbözik, amikor n kettőhatvány, tehát ebben az esetben kell csak megmutatni, hogy nem elég $\lceil log\ n \rceil$ kérdés.

Tegyük fel, hogy egy darab kiváló elem van. Minden kérdésünkkel maximum a még szóbajövő elemek felét zárhatjuk ki. Egy gonosz manó tudja úgy cserélgetni a még meg nem vizsgált elemeket, hogy a kiváló elem mindig a kérdés komplementerében legyen. Ez azt jelenti, hogy $log\ n$ kérdés után ugyan leszűkíthetjük egy elemre a lehetőségeket, de még mindig nem tudjuk, hogy az kiváló-e, szükségünk van még egy kérdésre. Ezzel beláttuk, hogy $\lceil log\ (n+1) \rceil$-nél kevesebb kérdéssel nincsen stratégia. □

Ez az eredmény intuitíven szinte ugyanaz, mint a barkochba esetében, maximum egy extra kérdéssel, ami ahhoz kell, hogy meggyőződjünk róla, biztos van-e kiváló elem. Az is működne, hogy abban az esetben, hogy n kettőhatvány, $A_1 = [n]$-nel kezdünk, és pozitív válasz esetén ugyanúgy járunk el, mint barkochbánál.

A meglepő állítás, hogy ugyanehhez a feladathoz nincsen jobb egyfordulós stratégia, mint egy triviális keresés. Triviális keresésen azt értem, hogy minden elemet, mint egyelemű halmazt, megkérdezünk. Ez a feladat jellegétől függően $n - O(1)$ kérdést jelent.

3.2. Az egyfordulós eset

Ebben a részben azt fogom vizsgálni, mi a 3.1.2 feladat komplexitása, egy forduló esetén. Először karakterizálni szeretnénk minden a feladatot megoldó stratégiát, ehhez szükségünk lesz az alábbi definíciókra:

3.2.1. Definíció. *Egy $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ halmazcsalád rendelkezik* fixponttal*, ha van olyan elem, amelyik $\mathcal{A}$ minden halmazában benne van:*

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset. \tag{3.2.1}$$

3.2.2. Definíció. *Egy $T \subseteq [n]$ halmaz az $\mathcal{A}$ halmazcsalád* metsző halmaza*, ha minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \cap T \neq \emptyset$. Egy halmazcsalád metsző halmazainak halmazát $\mathcal{T}(\mathcal{A})$-val fogom jelölni.*

És most következzen a stratégiák karakterizációja:

3.2.3. Lemma. *Egy $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ nemüres halmazcsalád pontosan akkor stratégia az egyfordulós feladathoz, ha az alábbi két feltételt teljesíti:*

(i)

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = [n] \tag{3.2.2}$$

(ii) Az $\mathcal{A}$ halmaz minden $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ partíciójára, ahol $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ a

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \{T \mid T \cap A \neq \emptyset \text{ minden } A \in \mathcal{A}_1\text{-re, } T \cap A = \emptyset \text{ minden } A \in \mathcal{A}_2\text{-re}\}$$

halmazcsalád rendelkezik fix ponttal, azaz

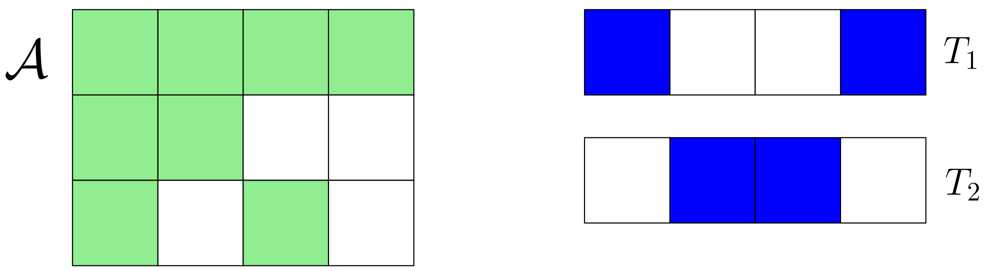
$$\bigcap_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)} T \neq \emptyset. \tag{3.2.3}$$

Bizonyítás. Az $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ partíció a lehetséges válaszokat jelöli, $\mathcal{A}_1$-ben azok a halmazok vannak, amikre pozitív, $\mathcal{A}_2$-ben amelyekre nemleges választ kaptunk. Így az az eset, hogy egy $A \in \mathcal{A}_1$-re $A \subseteq A' \in \mathcal{A}_2$ ellentmondásos válaszokat jelentene. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ üres, a 3.2.3-beli üres metszet $[n]$, tehát az egyenlőtlenség teljesül.
(i) szükségessége triviális, ugyanis ha egy x elemet nem fedünk le egyik halmazzal sem, abban az esetben, hogy csak x kiváló, nem működik a stratégia.
Lássuk be (ii) szükségességét is. Legyen $\mathcal{A}_1$ azon halmazaink, amire 1 választ kaptunk, $\mathcal{A}_2$, amikre 0-t. (Az "1" válasz itt természetesen tartalmazást jelent, nem a tartalmazott kiváló elemek számát.) Ez azt jelenti, hogy a kiváló elemek T nemüres (hiszen volt pozitív válasz) halmaza $\mathcal{A}_1$ minden elemébe belemetsz, és $\mathcal{A}_2$ minden elemétől diszjunkt. Az is igaz, hogy az ilyen tulajdonságú halmazok mind lehetne a kiváló elemek halmaza a mi információink alapján, tehát $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ a kiváló elemek lehetséges halmazainak halmaza. Ha 3.2.3 nem áll, nincsen elég információnk, hogy az egyik elemről biztosan tudjuk, hogy kiváló.
A két feltétel elégségességéhez azt kell megmutatni, hogy ha mindkettő igaz, mindig meg tudjuk oldani a feladatot. Ha minden válasz 0, 3.2.3 miatt tudjuk, hogy nincsen

kiváló elem. Ha van 1 válasz, létrehozható egy $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ halmazcsalád hasonló módon, mint eddig. 3.2.3 miatt ennek van néhány fix pontja. Ezek bármelyike megfelelő kiváló elem. Tegyük fel, hogy az egyik fixpont, x nem kiváló elem. Ekkor a többi fixpont x nélkül biztosan $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ eleme. Ez viszont ellentmondás, x nem lehetne fixpont, tehát tényleg minden fixpont kiváló. □

Ennek az ábrázolásához mutatok egy példát.

3.2.4. Példa. *Legyen $n = 4$, $\mathcal{A}$ egy, a barkochbára kijött megoldás alapján intuitív egyfordulós kérdéscsalád: egy szeparáló halmazrendszer és $\{[n]\}$ uniója, azaz $\mathcal{A} = \{[n], \{1,2\}, \{1,3\}\}$. Tegyük fel, hogy minden kérdésre azt a választ kaptuk, hogy tartalmaz kiváló elemet. Ekkor jól látszik, hogy $T_1 = \{1,4\}$ és $T_2 = \{2,3\}$ is lehetséges halmazai kiváló elemeknek ($T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{A}, \emptyset)$). Ez azt jelenti, hogy a két esetet nem tujuk ezekkel a kérdésekkel megkülönböztetni. Mivel nincsen közös elemük, nem tudunk olyan elemet választani, amelyik biztosan kiváló. Így jól látszik, hogy miért szükséges a lemma feltétele.*



3.2.5. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}, \{\emptyset\} \notin \mathcal{A}$ egy halmazcsalád. Ha $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ rendelkezik fixponttal, $\mathcal{A}$ tartalmaz egyelemű halmazt.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ a fixpont. Ekkor $[n] \setminus \{x\}$ nem lehet metsző halmaz. Mivel $[n]$ minden részhalmazát elmetszi $\{x\}$-en kívül, ezért $\{x\} \in \mathcal{A}$ biztosan teljesül. □

Ez az állítás kombinatorikus keresésen kívül is hasznos lehet, a legtöbb eredmény ebben a témában elég specifikus.

3.2.6. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ nemüres halmazcsalád működő stratégia az egyfordulós 3.1.2 feladatra, akkor tartalmaz egyelemű halmazt.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.2.3 karakterizációs lemma (ii) pontját az $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup \emptyset$ partícióra. Ekkor az állítás szerint $\mathcal{T}(\mathcal{A}, \emptyset) = \mathcal{T}(\mathcal{A})$-nak van fixpontja, az előző 3.2.6 állításból akkor látszik, hogy $\mathcal{A}$ tartalmaz egyelemű halmazt. □

3.2.7. Jelölés. *Ha $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ egy halmazcsalád, és $x \in [n]$, jelölje $\mathcal{A} - x$ azt halmazcsaládot, amit úgy csinálunk, hogy minden halmazból kivesszük x-et, és ha keletkezne benne így üreshalmaz, azt elhagyjuk.*

Hasonlóan, $X \subset [n]$-re jelöljük $\mathcal{A} - X$-szel a következő halmazcsaládot: $\mathcal{A} - X = \{A \setminus X \mid A \in \mathcal{A}, A \not\subseteq X\}$. Ha X egyelemű, $\mathcal{A} - X = \mathcal{A} - x$.

3.2.8. Lemma. *Ha $\mathcal{A}$ nemüres halmazcsalád stratégia az egyfordulós 3.1.2 feladatra $[n]$ alaphalmaz felett és $\{x\} \in \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{A} - x$ egyfordulós stratégia a keresésre $[n] \setminus \{x\}$ alaphalmaz felett.*

Bizonyítás. Az előző következmény szerint mindig van megfelelő x. Alkalmazzuk ismét a 3.2.3 lemma második pontját, ezúttal úgy, hogy $\{x\} \in \mathcal{A}_2$. Ebből következik, hogy x nincs benne $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ egyik elemében sem. Könnyen látható, hogy ekkor $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ megegyezik a $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1 - x, \mathcal{A}_2 - x)$ halmazcsaláddal $[n] \setminus \{x\}$ felett.

Így a lemma (ii) pontja áll $\mathcal{A} - x$-re $[n] \setminus \{x\}$ felett, az (i) pont triviálisan teljesül. Ekkor viszont a lemmát a másik irányba használva kijön, hogy ez jó stratégia az új alaphalmazon. $\square$

3.2.9. Tétel. *A 3.1.2 feladat komplexitása egy forduló esetén n.*

Bizonyítás. A komplexitás ennél nem lehet nagyobb, hiszen a triviális keresés n kérdésből jól működik.
A másik irányhoz azt kell belátni, hogy ha $\mathcal{A}$ egy stratégia, $|\mathcal{A}| \geq n$. Ezt n-re vonatkozó indukcióval fogom belátni. Az $n = 1$ eset triviális, szükséges egy kérdés.
Legyen $n > 1$, $\mathcal{A}$ egy stratégia $[n]$ felett. A 3.2.8 lemmából tudjuk, hogy $\mathcal{A} - x$ stratégia $[n] \setminus \{x\}$ felett. Az indukciós feltevésből kijön ezáltal, hogy $|\mathcal{A} - x| \geq n - 1$.
Mivel az $\{x\}$ halmazt elhagyva kaptuk $\mathcal{A} - x$-et, ezért $|\mathcal{A}| \geq n$. $\square$

3.3. A ketfordulós eset

Továbbra is a 3.1.2 feladattal foglalkozunk, ismeretlen számú kiváló elemünk van $[n]$-ben. Azt fogjuk vizsgálni, hogy egy második forduló megengedése mennyire gyorsítja fel a kérdezést.
Két forduló esetén nevezzük az első forduló kérdéseit $\mathcal{A}$-nak, méretét $|\mathcal{A}| = m$-nek. Az első fordulóra kapott válaszok sorozata, mint vektor legyen s, azaz $s \in \{0,1\}^m$. Ekkor, mivel a második forduló kérdései egy-egy kérdezési stratégiában 2^m félék lehetnek s függvényében, jelöljük ezt $\mathcal{B}(s)$-sel. Ha $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(s))$ minden esetben talál egy

kiváló elemet, vagy megmutatja, hogy nincsen egy sem, akkor stratégia a feladatra, hossza:

$$m + \max_s |\mathcal{B}(s)|. \tag{3.3.1}$$

A feladat $\tau(n)$ komplexitása két fordulón pedig a stratégiák hosszainak minimuma. Ez a komplexitás a 2.2.4 lemma miatt $\lceil log\ (n+1)\rceil \le \tau(n) \le n$.

3.3.1. A második forduló

Először megalkotjuk a 3.2.3 lemma párját a második fordulóra vonatkozóan. Válasszuk szét $\mathcal{A}$-t az alapján, hogy melyik részére milyen választ kapunk. Legyen $\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N$ azon halmazok családja, melyekre 1 illetve 0 választ kaptunk (mint *Igen* és *Nem*). Vegyük észre, hogy miután az első forduló kérdéseit megkérdeztük, extra információval ugyan, de a második forduló úgy viselkedik, mint egy egyfordulós algoritmus egy speciális feladatra, ezt a következő módon jelölöm: $F(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N)$. Ilyenekből akarunk építeni kétfordulós stratégiákat.

3.3.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}_I \neq \emptyset, \mathcal{A}_N \subseteq 2^{[n]}, \mathcal{A}_I \cap \mathcal{A}_N = \emptyset$. Ekkor a $\mathcal{B} \neq \emptyset$ halmazcsalád egyfordulós stratégia a $F(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N)$ feladatra, akkor és csak akkor, ha $\mathcal{B}$ minden $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ partíciójára a*

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \{T \mid T \cap A \neq \emptyset \text{ minden } A \in \mathcal{A}_I\text{-re, } T \cap B \neq \emptyset \text{ minden } B \in \mathcal{B}_1\text{-re,}$$
$$T \cap A = \emptyset \text{ minden } A \in \mathcal{A}_N\text{-re, } T \cap B = \emptyset \text{ minden } B \in \mathcal{B}_2\text{-re}\}$$

halmazrendszer rendelkezik fixponttal, azaz

$$\bigcap_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)} T \neq \emptyset. \tag{3.3.2}$$

Bizonyítás. Válasszuk szét $\mathcal{B}$-t az alapján, hogy mely kérdésekre milyen válaszokat kapunk, kerüljenek $\mathcal{B}_1$-be azon kérdések, amelyekre pozitívat és $\mathcal{B}_2$-be, amelyekre negatívat. Ekkor $\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ pontosan a lehetséges kiváló elemek halmazait tartalmazza, és ezek közül az összeset.

Ha ennek nincsen fixpontja, nincsen olyan elem, ami biztosan kiváló, tehát $\mathcal{B}$ nem stratégia az $F(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N)$ feladatra. Visszafelé, ha $\mathcal{B}$ egy stratégia, ki kell tudnunk választani egy kiváló elemet, ezt nem lehet megtenni, ha egyik sincs benne az összes lehetséges halmazában a kiváló elemeknek, tehát $\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ biztosan rendelkezik fixponttal. □

A következő lemma pont ugyanígy működik, abban az esetben, ha $\mathcal{A}_I = \emptyset$:

3.3.2. Lemma. *Legyen* $\mathcal{A}_I = \emptyset, \mathcal{A}_N \subseteq 2^{[n]}$. *Ekkor a* $\mathcal{B} \neq \emptyset$ *halmazcsalád egyfordulós stratégia a* $F(\emptyset, \mathcal{A}_N)$ *feladatra, akkor és csak akkor, ha teljesíti a következő két feltételt:*

(i)

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \supseteq [n] \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}_N} A \tag{3.3.3}$$

(ii) $\mathcal{B}$ *minden* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *partíciójára a*

$$\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \{T \mid T \cap B \neq \emptyset \text{ minden } B \in \mathcal{B}_1\text{-re}, \\ T \cap A = \emptyset \text{ minden } A \in \mathcal{A}_N\text{-re}, T \cap B = \emptyset \text{ minden } B \in \mathcal{B}_2\text{-re}\}$$

halmazrendszer rendelkezik fixponttal, azaz

$$\bigcap_{T \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)} T \neq \emptyset. \tag{3.3.4}$$

Bizonyítás. Az első pontra ugyanazért van szükség, mint a 3.2.3 lemmában, a második pont bizonyítása ugyanaz, mint az előbb. □

Vegyük észre, hogy

$$\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \mathcal{T}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)|_{[n] \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}_N} A}.$$

Ez azt jelenti, hogy az egy fordulóra vonatkozó 3.2.9 tétel miatt az $\mathcal{A}_I = \emptyset$ esetben $|\mathcal{B}(s)| \geq |[n] \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}_N} A|$.

3.3.3. Lemma. *Legyen* $\mathcal{B}$ *egy egyfordulós stratégia az* $F(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N)$ *feladatra az* $[n]$ *halmaz felett, ahol* $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_N} A$. *Ekkor* $\mathcal{B} - X$ *egy egyfordulós stratégia az* $F(\mathcal{A}_I, \emptyset)$ *feladatra az* $[n] \setminus X$ *halmazon.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathcal{A}_I \neq \emptyset$. Ekkor a 3.3.1 lemma szerint $\mathcal{B}$ minden partíciójára van fixpontja a $\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ halmazcsaládnak. Mivel egyik benne lévő T halmaz sem tartalmazhatja $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_N} A$ elemeit, ezért $\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \mathcal{T}(\mathcal{A}_I - X, \emptyset, \mathcal{B}_1 - X, \mathcal{B}_2 - X)$ és a 3.3.1 feltétele teljesül erre $[n] \setminus X$ felett is. A lemmát ismét alkalmazva megkapjuk, hogy ezen az alaphalmazon stratégia $\mathcal{B} - X$, ugyanis ennek bármilyen partíciója megkapható $(\mathcal{B}_1 - X) \cup (\mathcal{B}_2 - X)$ alakban, ha $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ $\mathcal{B}$ egy partíciója. Így ezt az esetet beláttuk.

Abban az esetben, ha $\mathcal{A}_I = \emptyset$, használjuk a 3.3.2 lemmát. Ennek (i) feltételéből következik, hogy

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B} - X} \supseteq [n] \setminus X.$$

A második feltétel szerint $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{A}_N, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \mathcal{T}(\emptyset, \emptyset, \mathcal{B}_1 - X, \mathcal{B}_2 - X)$ rendelkezik fixponttal, majd a lemma ismételt használatával az állítást beláttuk. □

3.3.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{A}_I \neq \emptyset, \{\emptyset\} \notin (\mathcal{A}_I \cup \mathcal{B})$ *és* $\mathcal{B}$ *egy egyfordulós algoritmus az* $F(\mathcal{A}_I, \emptyset)$ *feladatra. Ekkor létezik egy* $x \in [n]$*, amire* $\{x\} \in (\mathcal{A}_I \cup \mathcal{B})$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk ismét a 3.3.1 lemmát. Eszerint van egy fixpontja a $\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \emptyset, \mathcal{B}, \emptyset) = \mathcal{T}(\mathcal{A}_I \cup \mathcal{B})$ halmazcsaládnak. Így a kívánt tartalmazás következik a 3.2.5 állításból. □

3.3.5. Lemma. *Legyen* $\mathcal{A}_I \neq \emptyset$*. Ha* $\mathcal{B}$ *egyfordulós stratégia az* $F(\mathcal{A}_I, \emptyset)$ *feladatra* $[n]$ *alaphalmaz felett és* $\{x\} \in \mathcal{B}$*, akkor* $\mathcal{B} - x$ *egy egyfordulós stratégia az* $F(\mathcal{A}_I - x, \emptyset)$ *feladatra az* $[n] \setminus \{x\}$ *alaphalmazon.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.3.1 lemmát, vegyünk egy olyan partíciót, ahol $\{x\} \in \mathcal{B}_2$. Ekkor x nincs benne $\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \emptyset, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ egyik elemében sem, ennélfogva $\mathcal{T}(\mathcal{A}_I, \emptyset, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \mathcal{T}(\mathcal{A}_I - x, \emptyset, \mathcal{B}_1 - x, \mathcal{B}_2 - x)$ fennáll $[n] \setminus \{x\}$ felett. A lemma ismételt alkalmazásával megkapjuk a kívánt állítást, mivel $\mathcal{B} - x$ partíciói mind megkaphatóak $(\mathcal{B}_1 - x) \cup (\mathcal{B}_2 - x)$ alakban, ahol $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ $\mathcal{B}$ egy partíciója. □

3.3.6. Lemma. *Legyen* $\mathcal{A}_I \neq \emptyset$*, ha* $\mathcal{B}$ *egyfordulós stratégia az* $F(\mathcal{A}_I, \emptyset)$ *feladatra, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$\min_{A \in \mathcal{A}_I} |A| - 1 \leq |\mathcal{B}|. \tag{3.3.5}$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítom n szerint. Az $n = 1$ eset triviális. Tegyük fel, hogy $n > 1$, $(n-1)$-re tudjuk az állítást. A 3.3.4 lemma szerint van egy x, amire $\{x\} \in (\mathcal{A}_I \cup \mathcal{B})$. $\{x\} \in \mathcal{A}_I$ esetben triviális az állítás.

Ha $\{x\} \in \mathcal{B}$, alkalmazzuk a 3.3.5 lemmát, eszerint $\mathcal{B} - x$ stratégia $F(\mathcal{A}_I - x, \emptyset)$-re $[n] \setminus \{x\}$-on, tehát az indukciós feltevést alkalmazhatjuk rá.. $\mathcal{A}_I - x$ legkisebb halmaza vagy azonos méretű, vagy egyel kisebb, mint $\mathcal{A}_I$-é. Ezek szerint

$$\min_{A \in \mathcal{A}_I} |A| - 2 \leq \min_{A \in (\mathcal{A}_i - x)} |A| - 1 \leq |\mathcal{B} - x| = |\mathcal{B}| - 1. \tag{3.3.6}$$

Ha az egyenlőtlenséghez egyet hozzáadunk, kijön a kívánt állítás n-re. □

3.3.2. Az első forduló

Most el fogunk kezdeni foglalkozni az első fordulóval is. Ehhez először definiálni fogok egy $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ segédhalmazcsaládot, ami jobban reprezentálja $\mathcal{A}$-nál az első fordulóban megismert információt.

Legyen $|\mathcal{A}| = m$ egy halmazcsalád. Definiáljuk $A_1 = \mathrm{argmin}_{A\in\mathcal{A}} |A| = |A_1|$, $A_2 = \mathrm{argmin}_{A\in\mathcal{A},\ A\neq A_1} |A \setminus A_1|$, $A_3 = \mathrm{argmin}_{A\in\mathcal{A},\ A\neq A_1,A_2} |A \setminus (A_1 \cup A_2)|$. Ekkor legyen $H_1 = A_1$, $H_2 = A_2 \setminus A_1$ és $H_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$. $A_4, A_5, .., A_m$-et és $H_4, H_5, ..., H_m$-et hasnolóan definiáljuk, és $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{H_1, H_2, .., H_m\}$.

3.3.7. Lemma. *$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ elemei páronként diszjunktak, és*

$$\bigcup_{i=1}^{m} H_i = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \tag{3.3.7}$$

teljesül.

Bizonyítás. Mindkét rész a definícióból következik. Az uniók egyenlőségéhez meggondolható, hogy minden j-re

$$\bigcup_{i=1}^{j} H_i = \bigcup_{i=1}^{j} A_i$$

fennáll, tehát j szerinti teljes indukcióval könnyen kijön a kívánt állítás. □

3.3.8. Lemma. *Legyen $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(s))$ kétfordulós algoritmus, jelölje $X = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Ekkor*

$$\max_{H\in\mathcal{H}(\mathcal{A})} \{|H| - 1, n - |X|\} \leq \max_{s} \mathcal{B}(s). \tag{3.3.8}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az első fordulóra kapott minden válasz *Nem*, azaz $s = (N, N, .., N)$, akkor $\mathcal{B}(s)$ egyfordulós stratégia az $F(\emptyset, \mathcal{A})$ feladatra. Használjuk fel a 3.3.3 lemmát, ez azt mondja ki, hogy $\mathcal{B} - X$ egyfordulós stratégia az $F(\emptyset, \emptyset)$ feladatra $[n]\setminus X$ alaphalmaz felett. Mivel ez az eredeti feladat $n* = n - |X|$-re, a 3.2.9 tétel miatt az

$$n - |X| \leq |\mathcal{B}((N, N, N, ..., N))| \tag{3.3.9}$$

egyenlőtlenség fennáll.
Most vegyük azt az esetet, ahol van a válaszok között *Igen*, válasszuk szét az első forduló kérdéseit a megszokott módon $\mathcal{A} = \mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_N$ a válaszok szerint. Legyen $Y = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_N} A$, használjuk ismét a 3.3.3 lemmát, azt kapjuk, hogy $\mathcal{B} - Y$ egyfordulós stratégia a $F(\mathcal{A}_I - Y, \emptyset)$ feladatra $[n] \setminus Y$ felett. Vegyük észre, hogy definíció szerint $\mathcal{A}_I - Y$ legkisebb halmaza pont $|H_{j+1}|$ elemű. A 3.3.6 lemmából

$$|Hj + 1| - 1 \leq |\mathcal{B}(s)|. \tag{3.3.10}$$

Ezután, ha vesszük a (3.3.9) és (3.3.10) egyenlőtlenségek baloldalainak maximumát, megkapjuk az állítást. □

3.3.9. Tétel. *A kétfordulós 3.1.2 feladat komplexitása*

$$\tau(n) = \min_{k \in \mathbb{Z}^+} \left\lfloor k + \frac{n}{k+1} \right\rfloor . \tag{3.3.11}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(s))$ kétfordulós stratégiánk, ahol $|\mathcal{A}| = k$. Összegezzük a (3.3.8) egyenlőtlenség bal oldalán lévő lehetséges értékeket:

$$\sum_{i=1}^{k} (|H_i| - 1) + n - |X|. \tag{3.3.12}$$

A 3.3.7 lemmát, és $|X| = k$-t használva ez átírható a következő alakba:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} H_i| - k + n - k = |X| - k + n - k = n - k. \tag{3.3.13}$$

Mivel ez $k+1$ szám összege, az egyik legalább

$$\left\lceil \frac{n-k}{k+1} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor \tag{3.3.14}$$

kell hogy legyen, vagyis ez egy alsó határ $|\mathcal{B}|$-re. Mivel (3.3.1) szerint a komplexitáshoz az első forduló kérdésszáma is kell, kijön, hogy $\tau(n) \geq \left\lfloor k + \frac{n}{k+1} \right\rfloor$
Hogy megmutassam, az egyenlőség teljesül, adok egy algoritmust ilyen kérdésszámmal. Legyen $k = \operatorname{argmin}_{k \in \mathbb{Z}^+} \left\lfloor k + \frac{n}{k+1} \right\rfloor$, és definiáljuk q, r-t a következő maradékos osztás (szerűség) segítségével: $n + 1 = q(k+1) + r$ ahol $0 < r \leq k + 1$. Ekkor $n = q(k+1) + r - 1$, particionáljuk $[n]$-t e szerint $k+1$ részre, $|A_1| = |A_2| = ... = |A_{r-1}| = q + 1$, $|A_r| = ... = |A_k| = |B| = q$, ahol pont $q = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ lesz.
Az első forduló $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{k} \{A_i\}$. Ha mindegyikre *Nem* választ kapunk, egyesével végigkérdezzük B elemeit a második fordulóban, ha van *Igen* válasz az első fordulóra, kiválasztjuk az egyik A_i-t, amelyik tartalmaz kiváló elemet, és egy kivételével végigkérdezzük az elemeit a második fordulóban. Ilyenkor azért nem kell az utolsó elemre rákérdezni külön, mert, ha egyik sem kiváló, az utolsó már biztosan az lesz az első fordulóra kapott válasz miatt. Ez mindkét esetben $k + q$ vagy $k + q - 1$ kérdés. □

Hogy kicsit konkrétabb képet kapjunk a komplexitás nagyságrendjéről, megadjuk n függvényében is.

3.3.10. Következmény.

$$\lfloor 2\sqrt{n} - 1 \rfloor \leq \tau(n) \leq \left\lfloor 2\sqrt{n} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Bizonyítás. Megpróbáljuk minimalizálni k-t az $f(x) = x + \frac{n}{x+1}$ függvény deriválásával, legyen a keresett minimum m. $f'(x) = 1 - \frac{n}{(x+1)^2}$, ezzel szeretnénk szélsőértéket találni $x > 0$ esetben. $f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = n \Rightarrow x = \sqrt{n} - 1$. Mivel $f(x)$ konvex a $[\sqrt{n} - 2, \sqrt{n}]$ intervallumon, ez egy minimumhely. A hozzá legközelebbi egész a $[\sqrt{n} - \frac{3}{2}, \sqrt{n} - \frac{1}{2}]$ intervallumon található, és $f(\sqrt{n} - 1) = 2\sqrt{n} - 1 \leq m \leq max\{f(\sqrt{n} - \frac{3}{2}), f(\sqrt{n} - \frac{1}{2})\} = f(\sqrt{n} - \frac{3}{2}) = \sqrt{n} - \frac{3}{2} + \frac{n}{\sqrt{n} - \frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{n} - \frac{1}{2}$. □

3.3.11. Megjegyzés. [3] *2020-ban Vizer és Gerbner belátták, hogy r forduló esetén a feladat komplexitása* $rn^{\frac{1}{r}} \geq \tau(n, r) \geq rn^{\frac{1}{r}} - 2r + 1$.

Könnyű az előző eredményből mutatni ehhez megfelelő algoritmust. Rekurzívan fogjuk definiálni. Az első fordulóban válasszuk szét $[n]$-et $\lceil n^{\frac{1}{r}} \rceil$ majdnem egyenlő részre, egy kivételével kérdezzük őket meg. Ha volt $Igen$, az egyik ilyen részhalmazban kérdezünk tovább, ha nem volt, a kimaradóban.

3.3.12. Megjegyzés. *Az itt talált stratégia nagyon hasonló, mint a strucctojásos feladathoz 2.2.3 tartozó. Ez a hasonlóság nem annak köszönhető, hogy mindkét feladatnál van, hogy nincsen keresett elem, ez csak konstanssal hosszabbítja meg a stratégiákat. Ami összeköti a kettőt, hogy egy fordulón belül nem jár különösebb hátránnyal diszjunkt halmazokat kérdezni. A tojásos feladat esetében csak olyan kérdések megengedettek, hogy a valódi információ mindig diszjunkt halmazokról szól, míg itt az ok, hogy egynél több kiváló elem is előfordulhat.*

Érdemes megjegyezni, hogy a feladat komplexitása minden megengedett fordulóval (kellően nagy n esetén) drasztikusan csökken.

4. fejezet

Kétfordulós keresés adott halmazrendszeren

4.1. Teszthalmazok

Ebben a fejezetben Damaschke egy 2019-es [2] eredményét fogom bemutatni, minden itt szereplő eredmény innen fog származni. Egy olyan feladatot fogunk vizsgálni, ahol bizonyos feltételek mellett kettőnél több forduló nem segít a komplexitás csökkentésében. Most visszatérünk egy darab keresett *defektív* elemhez, de a megengedett kérdések a hatványhalmaznak csak egy része lesznek, mint a 2.1.6 vagy 2.1.10 példákban.

Emiatt a tulajdonság miatt nem $[n]$ részhalmazaiban gondolkozunk, hanem egy $\mathcal{H} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer elemeiben. Erre tekinthetünk hipergráfként is n csúcson. Ebben az esetben a halmazokat hiperéleknek hívjuk, amik akár kettőnél több (vagy kevesebb) csúcsot is összeköthetnek. $\mathcal{H}$-ra többnyire a teszthalmaz elnevezést fogom használni, mint a szabályos tesztek halmaza.

Ha $\mathcal{H}$ nem szeparáló halmazrendszer, lesznek olyan elemek, amiket nem tudunk megkülönböztetni, tehát azt feltételezzük, hogy mindig szeparáló. Amennyiben nem az, megtehetjük, hogy a pontosan megegyező halmazokban lévő elemeket összevonjuk, így minden tartalmazás szerint indukált ekvivalenciaosztály egyelemű lesz.

Azt már korábban megállapítottuk, hogy garantáltan egy defektív elem esetén X és X^c információértéke megegyezik, tehát kedvünkre hozzáadhatjuk X^c-t $\mathcal{H}$-hoz, ha $X \in \mathcal{H}$, és elvehetjük belőle az egyiket, ha $X, X^c \in \mathcal{H}$ anélkül, hogy a keresés nehézsége változna. Emiatt a meggondolás miatt innentől kezdve azt fogom feltételezni, hogy minden $X \in \mathcal{H}$-ra $|X| \leq n/2$.

Innentől kezdve a fejezet hátralévő részében, amikor egy teszthalmazról van szó, automatikusan arról a feladatról fogok beszélni, amikor pontosan egy defektív elemet keresünk a megengedett kérdésekkel.

Ha $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$ egy fordulóban kérdezett halmazok családja, akkor a válaszoktól függően ez meghatározza az elemek egy C osztályát, ami a még szóbajövő elemek halmaza. A következő fordulóban értelemszerűen már csak ezt az osztályt akarjuk szűkíteni.

Érdemes megemlíteni, hogy ennél a feladatnál a triviális keresés $n-1$ kérdésből áll (mivel az utólsó elem biztos a defektív, ha mindegyik másikról már tudjuk, hogy nem az). Amennyiben már végrehajtottunk teszteket és az utolsó fordulóban szeretnénk triviális keresést alkalmazni, értelemszerűen azon a legszűkebb C osztályon belül tesszük ezt, amelyiket az eddigi kérdéseinkre kapott válaszok meghatároznak, mint a defektív elemet tartalmazó. Ezek szerint ez a lépés $|C| - 1$ kérdést fog igényelni.

4.1.1. Definíció. *$\mathcal{H} \subseteq 2^{[n]}$ teszthalmaz (n, k, r) akkor, ha*

(i) Létezik olyan stratégia, amely r forduló alatt összesen maximum k kérdésből beazonosítja x tetszőleges defektív elemet.

(ii) A (k, r) pár optimális, azaz nem létezik olyan stratégia, ami k kérdésből, $r - 1$ forduló segítségével, vagy $k - 1$ kérdésből és r fordulóval működik tetszőleges x-re.

Ez a definíció erősebb dolgot jelent, minthogy az r fordulós komplexitás k, hiszen az is benne van, hogy minden r-nél kisebb fordulószámra a feladat komplexitása nagyobb.

4.1.2. Definíció. *Jelöljük $r(\mathcal{H})$-val azt a legnagyobb fordulószámot, amihez van olyan k, hogy $\mathcal{H}$ egy (n, k, r) teszthalmaz.*

Ez azt jelenti, hogy ha $r = r(\mathcal{H})$, akkor nincsen haszna r-nél több fordulót használni, tehát ezzel pont olyan effektíven lehet kérdezni, mint adaptív esetben, illetve a kisebb fordulószám miatt még futásidőt is spórolhatunk.

A következő tétel és a hozzá tartozó definíció ad egy feltételt arra, hogy mikor elég egy forduló. Ezt a [1]-ből vett eredményt nem fogom bizonyítani, de majd később felhasználom.

4.1.3. Definíció. *Egy n elem fölött vett $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ teszthalmaz (n, k)* mini tesztfedés*, ha $s \leq 2k$ halmazt tartalmaz, és legalább $s + k$ osztályt határoz meg a pontok között.*

Azaz ezek a kérdések "értékesek".

4.1.4. Tétel. *$\mathcal{H}$ teszthalmazra pontosan akkor van egy egyfordulós $n-k$ kérdéses stratégia, ha tartalmaz egy (n,k) mini tesztfedést.*

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ akkor és csak akkor $(n, n-k, 1)$, ha tartalmaz (n,k) mini tesztfedést, de nem tartalmaz (n,k+1) mini tesztfedést.

4.2. Soha nincsen szükség nagyon sok fordulóra

A következő tétel azt mutatja meg, hogy $r(\mathcal{H})$, azaz a hasznos fordulók száma soha nem túl nagy.

4.2.1. Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{H}$ teszthalmazra $r(\mathcal{H}) \leq \sqrt{2n+4}$.*

Bizonyítás. Egy d fordulós stratégiához hozzá tudunk rendelni egy gondolkodási fát, mégpedig a következő módon. Minden legalább két fokszámú q_i csúcs egy t_i darab halmazból álló $\mathcal{T}_i$ fordulót jelöl, q_1 a gyökér. Egy csúcs gyerekei a benne feltett kérdések válaszaitól függenek, minden esethez van egy különböző. A levelek egyelemű halmazokat jelölnek, akkor jutunk hozzájuk, ha a megfelelő elem defektív, ekkor a stratégia véget ért. A fa *mélysége* a leghosszabb gyökér-levél út hossza, ez megegyezik a stratégia fordulószámával. A bizonyításban feltételezzük, hogy egy stratégiában nem szerepelnek felesleges kérdések, azaz minden kérdés több osztályra bontja a még szóbajövő elemek halmazát.

Vizsgáljunk egy tetszőleges A stratégiához tartozó gondolkodási fát, amelynek mélysége $d > 2$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{T}_1$ meghatároz egy $|C| \geq (n-d+1)$ osztályt valamilyen válaszokra és q_2 az ebben az esetben használt gyereke q_1-nek. Most definiálunk egy A' stratégiát ugyanerre a teszthalmazra. Az első fordulóban kérdezzük meg $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$-t. Amennyiben a keresett elem C-ben van, ugyanúgy járunk el, mint A esetében $\mathcal{T}_2$ után. Egyébként a meghatározott C^c-beli osztályra egy triviális keresést alkalmazunk a második fordulóban.

4.2.2. Állítás. *Az A' stratégia ugyanannyi kérdést igényel, mint A, de kisebb a fordulószáma.*

Bizonyítás. Az új stratégiához tartozó fában a triviális keresések mind 2-hosszú gyökér-levél utak. Ezeken kívül még jelen van az A fájában lévő q_2 gyökerű részgráf az új gyökérre átragasztva. Ez azt jelenti, hogy az itt áthaladó utak mindegyikéből kivágtuk a (q_1, q_2) élt, azaz ezek az utak rövidebbek lettek. Ezzel jól látjuk, hogy A' kisebb fordulószámú, mint A.

Legyen t az A által használt kérdések száma legrosszabb esetben. Ha a keresett x elem C-ben van, a két stratégia pontosan ugyanazokat a kérdéseket használja, vagyis a számuk megegyezik. Egyéb esetben $x \in C^c$, amire $|C^c| \leq (d-1)$. Mivel $\mathcal{T}_1$ meg tudja határozni C-t, ezért nem metszhet bele, hiszen akkor kisebb részhalmazait is meg tudná meghatározni. Ez azt jelenti, hogy mivel nincsenek felesleges kérdések, az A első fordulójának t_1 darab kérdése közül maximum egy nem darabol le C^c-ből új osztályt (ha C vagy C^c maga egy kérdés). Így a legnagyobb elemszámú osztály C-n kívül maximum $(d-1)-(t_1-1) = d - t_1$ elemű lehet.

Ennélfogva $x \in C^c$ esetén A' a két fordulója alatt nem használ több kérdést, mint $(t_1+t_2)+(d-t_1)-1 = d-1+t_2 \leq t_1+t_2+d-2$. Most megmutatom, hogy $t_1+t_2+d-2 \leq t$, amiből készen leszünk, hiszen ekkor A' maximum t kérdést használ. Ehhez tekintsünk A fájában egy maximális (d hosszú) gyökér-levél utat. Mivel C kivételével $\mathcal{T}_1$ csak $\leq (d-1)$-osztályokat határoz meg, a nem q_2 felé menő utak maximum $d-2$ kérdést tartalmazhatnak a hátralevő fordulók alatt, tehát összesen legfeljebb $d-1$ fordulót használnak ki. Ezek szerint egy maximális út biztosan átmegy q_2-n. Ez viszont azt jelenti, hogy abban a kimenetelben, amit ez az út reprezentál, először felteszünk t_1+t_2 kérdést, majd a maradék $d-2$ forduló alatt minimum egyet-egyet. Ezzel a részállítást beláttuk. □

Sikeresen megmutattuk, hogy vagy csökkenteni tudjuk a fordulók számát a kérdések számának növelése nélkül, vagy az első forduló csak legfeljebb $n-d$ elemszámú osztályokat határozhat meg, azaz az első forduló minden esetben legalább d elemet kizár.

Nevezzünk egy stratégiát, és a hozzá tartozó fát *lelkesnek*, ha az első forduló minden esetben legalább d elemet kizár (ahol d a stratégia fordulószáma).

Most vegyünk egy (n,k,r) teszthalmazt, és egy hozzá tartozó stratégiát, megmutatjuk,hogy r nem lehet túl nagy. A stratégiához tartozó T fa lelkes, különben a a teszthalmaz $(n,k,r-1)$ vagy még jobb lenne. Legyen T fa tetszőleges q csúcsához d_q a q gyökerű $T(q)$ részfa mélysége. Amennyiben egy $d_q > 2$ mélységű részfa nem lelkes, az előbbi módon javítjuk (d helyében d_q-val). Ez természetesen nem növeli T mélységét és a feltett kérdések számát. Azok az utak, amelyek nem mennek át q-n, maradnak az addigi állapotukban. Vegyünk egy utat, ami átmegy q-n, és legyen a q előtt feltett kérdések száma s. $T(q)$ maximum $k-s$ kérdést használt, vagyis a 4.2.2 állítás szerint $T'(q)$ sem használ többet.

Ezt a folyamatot szeretnénk ismételgetni, hogy megszabaduljunk az összes nem lelkes 2-nél nagyobb mélységű részfától. Ahhoz, hogy biztosan véget érjen ez a folyamat, definiálunk egy pozitív változót, ami minden részfa javításával csökken. Legyen

$D = \sum_q (d_q - 1)$, ahol az egynél nagyobb fokszámú csúcsokra szummázunk. Minden javításkor D valamelyik összeadandója csökken, és egyik sem nő. Új összeadandó nem jelenik meg benne, mert a triviális keresésekhez $d_q = 1$ tartozik, azaz csak 0 komponenseket jelentenek. Így D szigorúan csökken minden javítással, tehát nem kerülhetünk végtelen ciklusba.

Ezzel megmutattuk egy olyan stratégia létezését, amelyben minden kettőnél nagyobb mélységű részfa lelkes, és van benne pontosan r hosszú gyökér-levél út. Hogyha a válaszok követik ezt az utat, az i-edik forduló legalább $r - i + 1$ elemet kizár (a lelkes stratégia definíciója szerint). Mivel egy stratégia maximum $n-1$ elemet zárhat ki, mielőtt véget érne, $\sum_{i=1}^{r-2}(r-i+1) \leq n-1$ fennáll. Ha a teljes fára szummázzuk, $i = r-2$-nél kell megállni, mert legalább három mélységet feltételeztünk a részfákra. Ez megegyezik a következővel: $\sum_{j=3}^{r} j = \frac{r(r+1)}{2} - 3 \leq n - 1$, amit ha átrendezünk, azt kapjuk, hogy $r \leq \sqrt{2n+4}$. □

Könnyen meggondolható, hogy a bizonyításban látott módszer nem talál garantáltan ideális stratégiát. Egy egyszerű példa erre, hogy ezzel a módszerrel nem kapható egyfordulós stratégia, viszont vannak teszthalmazok, amikre $r(\mathcal{H}) = 1$.

Ennek ellenére az előbb mutatott felső határ lényegében a lehető legjobb:

4.2.3. Tétel. *Tetszőlegesen nagy n-re létezik olyan $(n, r+1, r)$ teszthalmaz $\mathcal{H}$, amire $r = \sqrt{2n} - O(1)$. Azaz az $r(\mathcal{H}) \leq \sqrt{2n+4}$ felső becslés konstanstól eltekintve éles.*

Bizonyítás. Ennek a bizonyításához mutatni fogok egy konstrukciót ilyen teszthalmazra, amiről könnyű belátni, hogy sok fordulóra van szükség minimális kérdésszámú stratégiához.

Legyen $n = \frac{k(k+1)}{2}$. A megengedett tesztek az összes egyelemű halmaz, és páronként diszjunkt $k, k-1, k-2, ..., 3, 2$ méretű halmazok. A teszthalmazhoz tartozó legjobb stratégia nagyon hasonlít ahhoz, amit a strucctojásos feladatnál, két tojás esetén érdemes használni (2.2.16). Elkezdjük a halmazokat méret szerint csökkenő sorrendben kérdezni. Amikor az i-edikre pozitív válasz érkezik, azon belül egy kivételével minden egyelemű halmazt megkérdezünk. Ez $i + (k - i + 1) - 1 = k$ kérdést igényel minden esetben (ha az az elem defektív, amelyik csak egy halmazban szerepel, $k - 1$ kérdés is elég). Megmutatom, hogy $\mathcal{H}$ $(n, k, k-1)$ és $r(\mathcal{H}) = k - 1$, azaz ez egy optimális stratégia.

Nevezzük a k elemű halmazt K-nak. Amennyiben a defektív elem K-ban van, a kérdezésnek mindenképpen tartalmaznia kell $k - 1$ darab egyelemű halmazt K-ból. Ebből jól látszik, hogy az első fordulóban nem lehet K-tól diszjunkt halmaz, hiszen akkor a kérdezés végére túllépnénk a k kérdést. Ezek szerint az első fordulóban csak $X \subseteq K$ halmazokat kérdezhetünk. Abban az esetben, ha ezek közül midegyikre negatív választ kapunk, egy azonos struktúrájú teszthalmazt kell megoldanunk k helyében $k-1$-gyel (esetleg még maradhatnak K-ból szóbajövő elemek, de feltételezhetjük, hogy K szerepel az első fordulóban). Indukció szerint ez $(n-k, k-1, k-2)$. Az indukció kezdetéhez használjuk a hasonló struktúrájú $(3, 2, 1)$ teszthalmazt. $r = k-1$-ből megkapjuk, hogy $(r+1)(r+2) = k(k+1) = 2n$, azaz $r = \sqrt{2n} - O(1)$. □

4.3. Két forduló

4.3.1. Teszthalmaz előnye

Meg szeretnénk határozni egy tulajdonságot, ami segít kategorizálni egy teszthalmazt a szerint, hogy mennyire alkalmas kétfordulós keresésre. Ezt fogjuk nevezni a teszthalmaz *előnyének.* A fogalom mögötti intuíció az lesz, hogy az első fordulóban minél több elemet szeretnénk lefedni lehetőleg kevés kérdésből.

4.3.1. Definíció. *$\mathcal{H}$ teszthalmaz előnye $g = \max_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}}\{|\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S| - s + 1\}$, ahol $s = |\mathcal{S}|$ és $|\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S| < n$, azaz $\mathcal{S}$ nem fedi az összes elemet. Egy ilyen $\mathcal{S}$ $\mathcal{H}$ előnyének g-re vonatkozó tanúja, ha $|\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S| = s + g - 1$, és minimális tanúja, ha nincsen $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, ami tanú g-re.*

4.3.2. Megjegyzés. *Ekvivalens definíció lehetne, hogy az előny a legkisebb olyan g, amire fennáll $|\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S| \leq s + g - 1$ minden nem az összes elemet fedő $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$-ra.*

4.3.3. Definíció. *$\mathcal{S}$ halmazcsalád egy permutációjának az i-edik x_i kiterjesztése az i-edik halmaz olyan elemeinek száma, amelyek egyik kisebb indexű halmazban sem szerepeltek. Egy permutáció L-maximális (lexikografikusan) akkor, ha x_1 a lehető legnagyobb $\mathcal{S}$ permutációi között, x_2 maximális azok között a permutációk között, amelyekre x_1 az, és így tovább.*

4.3.4. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ egy g előnyű teszthalmaz.*

(a) Minden $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ halmazcsaládnak van L-maximális permutációja monoton nem növekvő kiterjesztésekkel.

(b) $k < g$-re létezik olyan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, $s = |\mathcal{S}|$, hogy $\mathcal{S}$ nem fed minden elemet, $s \leq k$ és $|\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S| \geq s + k$.

(c) $\mathcal{H}$ tartalmaz egy $\mathcal{S}$ minimális tanút g-re $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_s \geq 2$ kiterjesztésekkel, ahol $s = |\mathcal{S}|,\ s < g$.

Bizonyítás. (a) magától értetődő, indirekten bizonyíthatjuk. Vegyünk egy L-maximális permutációt, amiben valamilyen i-re $x_i < x_{i+1}$. Ha a két halmaz sorrendjét felcseréljük, x_i növekszik. Ez viszont ellentmond az L-maximalitásnak.

A (b) rész bizonyításához először vegyük észre, hogy az előny definíciója szerint létezik olyan s elemű $\mathcal{S}$, amire $n > |\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S| \geq s + k$. Meg kell mutatni, hogy $s \geq k$ esetben is van ilyen. Vegyünk (a) szerint egy L-maximális permutációt. Jelöljük $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$-sel $\mathcal{S}$ azon kezdőszeletét, amely minden kiterjesztése (a kiválasztott permutációban) nagyobb, mint 1, legyen $s' = |\mathcal{S}'|$. Így $|\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S| \geq s+k$-ból $|\bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S| \geq s'+k$ mindenképpen teljesül. Ha $s' \leq k$, készen vagyunk, hiszen $\mathcal{S}'$ teljesíti a feltételeket.

Tegyük fel, hogy $s' > k$. Vegyük az eddig használt permutáció $\mathcal{S}'$ elemeire vonatkozó részét. Mivel mindegyik kiterjesztés legalább 2, az első k halmaz legalább $2k$ elemet lefed, így ezek együttesére teljesülnek a feltételek.

(c) belátásához használjuk a (b) részhez használt érvelést $k = g - 1$-re. Ekkor $s + g - 1 = s + k \leq |\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S| \leq s + g - 1$ fennáll, azaz a (b)-ből vett halmazcsalád tanú a g előnyre, és minden kiterjesztése legalább 2, így minimális tanú is. □

Az előny definíciójából közvetlenül kijön a következő eredmény, ami az előny ismeretében egy alsó határt ad tetszőleges stratégia kérdésszámára.

4.3.5. Tétel. *Ha $\mathcal{H}$ egy g előnyű teszthalmaz, minden (akár adaptív) stratégia legalább $n - g$ kérdést használ.*

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges adaptív stratégiát és tegyük fel, hogy minden kérdésre negatív választ kaptunk, ez legyen t darab. Az előny defiíciójából tudjuk, hogy ez a t darab halmaz legfeljebb $t + g - 1$ elemet fed le. Mivel a stratégiáról feltettük, hogy működik, $n - 1$ elemet ki kell tudnia zárni a kérdezés végére. Így $t + g - 1 \geq n - 1$, azaz $t \geq n - g$. □

4.3.2. A kétfordulós esetre vonatkozó tételek

A következő tételek a kétfordulós komplexitás és a teszthalmaz előnyének kapcsolatát fogják bemutatni.

4.3.6. Tétel. *Tetszőleges g előnyű $\mathcal{H}$ teszthalmaz felett létezik működő kétfordulós stratégia, ami legfeljebb* $\max\{g, n - g\}$ *kérdést használ.*

Egy ilyen stratégiát kapunk, ha az első fordulóban tesztelünk egy $s < g$ darab hallmazból álló minimális tanút az előnyre, majd a második fordulóban egy triviális keresést hajtunk végre.

Bizonyítás. A 4.3.4 lemma (b) állításából tudjuk, hogy létezik $s \le g-1$ elemű $\mathcal{S}$ halmazcsalád, melyre $|\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S| = s+g-1$. Legyen $\mathcal{S}$ az első forduló.

Tegyük fel először, hogy az első fordulóban minden kérdésre nemleges választ kapunk. Ekkor a még szóbajövő elemek száma $n-(s+g-1)$, egy triviális keresés ezek között $n-(s+g-1)-1 = n-s-g$ kérdést használ a második fordulóban, azaz összesen a két forduló alatt $s+n-s-g = n-g$ kérdésre van szükségünk.

Ha valamelyik kérdésre *Igen* választ kapunk, legyen j a legkisebb indexű ilyen halmaz indexe $\mathcal{S}$ egy L-maximális permutációjában. Ekkor egy triviális keresés a második fordulóban $x_j - 1$ kérdésből megtalálja a defektív elemet. Ez legrosszabb esetben összesen $s + x_1 - 1$ kérdés. A 4.3.4 lemma (c) állításából $\mathcal{S}$ egy minimális tanú, és $x_i \ge 2$ minden i-re. Az előny definíciójából így:

$$g = \sum_{i=1}^{s} x_i - s + 1 = x_1 + \sum_{i=2}^{s} x_i - (s-1) = x_1 + \sum_{i=2}^{s}(x_i - 1) \ge x_1 + s - 1. \quad (4.3.1)$$

Így legfeljebb g kérdést használunk ebben az esetben. □

Legalább $\frac{n}{2}$ előnyű halmazrendszerek esetében tudunk ezen az eredményen javítani:

4.3.7. Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{H}$, $g \ge \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ előnyű teszthalmaz felett létezik kétfordulós stratégia, ami legfeljebb összesen $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ kérdést használ.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $m = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. A stratégia a következő: vegyük egy L-maximális permutációját az előny egy $\mathcal{S}$ tanújának, a kiterjesztéseit továbbra is x_i-vel jelöljük és $s = |\mathcal{S}|$. Ekkor $|\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S| = s+g-1 \ge s+m-1$. Legyen $\mathcal{P}$ a legkisebb olyan kezdőszelete $\mathcal{S}$-nek (a kiválasztott permutáció szerint) amely még teljesíti az $|\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P| \ge p+m-1$ egyenlőtlenséget, ahol $p = |\mathcal{P}|$. Ennek a $\mathcal{P}$-nek a halmazait kérdezzük az első fordulóban.

Ha minden kérdésre negatív választ kapunk, a második fordulóban legfeljebb $n-(p+m-1)-1 = n-m-p \le m-p$ kérdésre van szükség (amennyiben triviális keresést alkalmazunk), ez összesen legfeljebb m. Ha kapunk pozitív választ az első fordulóban, legfeljebb $x_1 - 1$ kérdést kell feltenni a másodikban. Megmutatom, hogy ez nem túl nagy.

Ha $p = 1$, $\mathcal{P}$ egy darab m elemű halmazból áll, ekkor a tétel állítása triviális. Legyen $p > 1$, jelöljük $\mathcal{P}'$-vel azt a halmazcsaládot, amit úgy kapunk, hogy $\mathcal{P}$-ből elvesszük az eddig vett sorrend szerinti utolsó elemét. Ekkor $|\bigcup_{P\in\mathcal{P}'} P| \le (p+m-$

$1) - 2 = (p-1) + m - 2$ teljesül p minimalitása miatt. Mivel minden kiterjesztés legalább kettő, ebből következik, hogy

$$|\bigcup_{P \in \mathcal{P}'} P| = \sum_{i=1}^{p-1} x_i = x_1 + 2(p-2) \leq (p-1) + m - 2, \tag{4.3.2}$$

amiből $p + x_1 - 1 \leq m$ így a tételt beláttuk. □

4.3.8. Megjegyzés. *A kérdésszámra vonatkozó felső határ konstanstól eltekintve éles. Vegyünk egy olyan teszthalmazt teszőleges n-re, ami tartalmazza az összes egyelemű halmazt és két darab, egymástól diszjunkt, majdnem $\frac{n}{2}$ elemű halmazt. Ebben az esetben két fordulónál majdnem $\frac{n}{2}$ kérdésre van szükség, úgy, hogy az előny közel van n-hez. Ez a példa azt is mutatja, hogy nagy előny önmagában az egyfordulós esetben nem segít abban, hogy kevés kérdés elég legyen. Könnyű meggondolni, hogy itt $n-1$-re van szükség, azaz nincsen jobb stratégia egy triviális keresésnél.*

A következő tétel $\frac{n}{2}$-nél kisebb előnyű halmazrendszerekkel foglalkozik, ebben az esetben teljes kategorizációt tudunk adni, hogy mikor $(n, t, 2)$ egy teszthalmaz. Ehhez a fejezet összes korábbi eredményét használni fogjuk.

4.3.9. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer n elem fölött. Minden $k < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$-re:*

(a) k pontosan akkor egyezik meg $\mathcal{H}$ előnyével, ha a felette vett feladat kétfordulós komplexitása $n-k$.

(b) $\mathcal{H}$ pontosan akkor $(n, n-k, 2)$, ha nem tartalmaz (n, k) mini tesztfedést és k az előnye.

(c) Amennyiben (b) teljesül, létezik olyan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, $|\mathcal{S}| = s < k$, hogy $|\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S| = s + k - 1 < n$. Ha az első fordulóban $\mathcal{S}$-t kérdezzük, a másodikban triviális keresést hajtunk végre, legfeljebb $n-k$ kérdésre van szükségünk, vagyis ez a stratégia meghatározza az $(n, n-k, 2)$ besorolást.

Bizonyítás. Az (a) állításhoz legyen $\mathcal{H}$ előnye g. Először tegyük fel, hogy $g = k$, ebből kell megmutatni, hogy egy optimális kétfordulós stratégia $n-k$ kérdést igényel. Mivel $g < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < \frac{n}{2}$, ezért a 4.3.6 tétel miatt legfeljebb $n-g$ kérdés kell egy optimális kétfordulós stratégiához és a 4.3.5 tételből tudjuk, hogy ennél kevesebb kérdésből adaptívan sem megoldható a feladat.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy a feladatot optimálisan megoldó kétfordulós stratégiához $n-k$ kérdés szükséges. A 4.3.5 tételből és a különböző fordulószámok komplexitására vonatkozó 2.2.4 egyenlőtlenségből következik, hogy $n-k \geq n-g$, azaz $k \leq g$.

$g \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ nem igaz, mert ha az lenne, a 4.3.7 tétel szerint $n-k \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ fennállna, ami ellentmond a $k < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ feltevésnek. Így $g < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ mindenképpen teljesül, azaz $g \leq \frac{n}{2}$ is igaz. A 4.3.6 tétel ismételt alkalmazásával megkapjuk, hogy van legfeljebb $n-g$ kérdéssel kétfordulós stratégia, azaz $n-k \leq n-g$, amiből $k \geq g$, így $k = g$ mindenképpen igaz.

A (b) állításhoz először tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ egy $(n, n-k, 2)$ teszthalmaz. Ebből következik, hogy az egyfordulós komplexitása nagyobb, mint $n-k$, vagyis a 4.1.4 tétel miatt nem tartalmazhat (n, k) mini tesztfedést. Az (a) állításból következik, hogy a teszthalmaz előnye k.

A megfordításhoz ugyanezeket az állításokat használjuk. Mivel $\mathcal{H}$ előnye k, az (a) részből következik, hogy a kétfordulós komplexitás $n-k$, és mivel nem tartalmaz (n, k) mini tesztfedést, a 4.1.4 tétel miatt nem tudunk a fordulószámon javítani anélkül, hogy több kérdésre lenne szükség, tahát $\mathcal{H}$ valóban $(n, n-k, 2)$.

A (c) állításhoz a 4.3.4 lemma (b) része miatt tudunk találni $s < k$ darab halmazt, amelyek együtt $s + k - 1$ elemet fednek. Ezt használjuk első fordulóként, ugyanúgy, mint a 4.3.6 tétel bizonyításában. □

4.3.10. Következmény. *Nem létezik $(n, n-k, r)$ teszthalmaz $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$-ra és $r > 2$-re. Következésképpen ha egy $\mathcal{H}$ teszthalmaz adaptív komplexitása $t > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, akkor $r(\mathcal{H}) \leq 2$.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H}$ egy $(n, n-k, r)$ teszthalmaz, két forduló esetén is legalább $n-k$ kérdésre van szükség. Az előző 4.3.9 tételből ekkor tudjuk, hogy $\mathcal{H}$ előnye $g \leq k$. Emellett viszont a 4.3.5 tétel miatt legalább $n-g$ kérdésre van szükség r forduló esetén is, tehát $k \leq g$, vagyis $k = g$. Ekkor, ha megint alkalmazzuk a 4.3.9 tételt, megkapjuk, hogy $\mathcal{H}$ kétfordulós komplexitása $n-k$, de ekkor $r > 2$ ellentmondás.

A második állításhoz legyen $k = n-t$, ekkor az első állításból következik. □

Vegyük észre, hogy az előző fejezetben taglalt feladat esetében a komplexitást minden megengedett forduló csökkenti. Ezzel szemben itt látjuk, hogy ennél a feladattípusnál sok esetben kettőnél több forduló nem javít semmit a szükséges kérdések számán.

Irodalomjegyzék

[1] Robert Crowston, Gregory Gutin, Mark Jones, Saket Saurabh, and Anders Yeo. Parameterized study of the test cover problem. In Branislav Rovan, Vladimiro Sassone, and Peter Widmayer, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 2012*, pages 283–295, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.

[2] Peter Damaschke. Combinatorial search in two and more rounds. *Theoretical Computer Science*, 780:1–11, 2019.

[3] Dániel Gerbner and Máté Vizer. Rounds in a combinatorial search problem. *Discrete Applied Mathematics*, 276:60–68, 2020. 2nd Russian–Hungarian Combinatorial Workshop.

[4] G.O.H. Katona. Chapter 23 - combinatorial search problems. In Jagdish N. Srivastava, editor, *A Survey of Combinatorial Theory*, pages 285–308. North-Holland, 1973.

[5] Gyula O.H. Katona. Finding at least one excellent element in two rounds. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(8):2946–2952, 2011.

[6] Dániel Antal Lenger. Kombinatorikus keresési problémák. `https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/msc_mat/2016/lenger_daniel_antal.pdf`, 2016. MSc szakdolgozat.