Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Másodrendű felületek és felületsorok a projektív térben

Szakdolgozat

Készítette:

Lantos András

matematika BSc szak
matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Verhóczki László

egyetemi docens,
Geometriai Tanszék

Budapest
2023

NYILATKOZAT

Név: Lantos András

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: APJ8XX

Szakdolgozat címe:
Másodrendű felületek és felületsorok a projektív térben

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2023.12.29.

Lantos András

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Verhóczki Lászlónak a szakdolgozat elkészítése során nyújtott szakmai segítséget. A vele lezajlott rendszeres konzultációk nagymértékben hozzájárultak ahhoz, hogy ez a szakdolgozat elkészült. Szeretném még megköszönni családomnak és barátaimnak is a kitartó támogatást, amelyet egyetemi tanulmányaim és a szakdolgozat megírása során nyújtottak.

Előszó

A szakdolgozat célja a másodrendű felületek tulajdonságainak és metszeteinek vizsgálata a projektív geometria eszközeivel.

Mint ismeretes, két másodrendű felület metszetgörbéje, vagy más szóval két másodrendű felület áthatási görbéje, egy negyedfokú egyenlettel írható le. Speciális esetben a metszetként adódó negyedrendű térgörbe előáll két másodrendű síkgörbe uniójaként. Ilyenkor azt szokás mondani, hogy a két felület metszetgörbéje szétesik két másodrendű síkgörbére. Az úgynevezett széteső áthatás tétele egy elégséges feltételt ad meg arra vonatkozóan, hogy a metszetgörbe két másodrendű síkgörbe uniójaként álljon elő. Ez a feltétel többek között azt is előírja, hogy léteznie kell két olyan közös pontnak, amelyekben a két felület érintősíkja egybeesik. Ezeket nevezik a metszet duplapontjainak, mivel a síkgörbék metszik egymást ezen pontokban. A tételnek egy tömör bizonyítása megtalálható a Kárteszi Ferenc által írt [6] könyv 30. paragrafusában a 176–177. oldalakon. A szakdolgozatban egy részletes bizonyítást adunk a széteső áthatás tételére a projektív tér másodrendű felületsorainak alkalmazásával. A tétel alapján konkrét példákat is mutatunk olyan másodrendű felületpárokra, amikor a metszetgörbe szétesik két másodrendű síkgörbére.

Célszerűnek tartjuk megjegyezni, hogy a széteső áthatás tétele a műszaki gyakorlatban is alkalmazható, mivel két lemezelt felületet könnyebb úgy csatlakoztatni egymáshoz, ha a csatlakozási görbéjük egy másodrendű síkgörbe, például egy kör vagy egy ellipszis.

A szakdolgozat első fejezetében a projektív tér értelmezésére és azon a homogén koordináták bevezetésére kerül sor. A projektív tér értelmezése megfelel a Hajós György által írt [3] tankönyv 44. paragrafusában szereplő tárgyalásnak. Az euklideszi tér párhuzamos egyenesosztályaihoz hozzárendelünk egy-egy ideális pontot, és az euklideszi teret ezen ideális pontokkal kibővítve nyerjük a projektív teret. A koordinátázás során a projektív tér pontjaihoz valós számnégyeseket rendelünk, amelyek csak számszorzótól eltekintve egyértelműek. Megmutatjuk, hogy egy általános helyzetű pontötös is meghatároz egy homogén koordinátázást a projektív téren, ami lehetővé teszi a koordinátatranszformáció eszközének az alkalmazását.

A második fejezetben a projektív tér másodrendű felületeinek a tárgyalására kerül sor. A fejezetben leírt fogalmak és állítások nagyrészt megfelelnek a [3] tankönyv 46–48. paragrafusaiban, illetve a [4] egyetemi jegyzet VI. fejezetében szereplő, a síkbeli másodrendű görbékre vonatkozó fogalmaknak és állításoknak azzal a lényegi különbséggel, hogy a dolgozatban térbeli felületeket vizsgálunk. Vizsgálatainkban kulcsszerepet játszik a pontok adott másodrendű felületre vonatkozó konjugáltságának a fogalma és az azzal kapcsolatos állítások. Ily módon lehetőség nyílik az érintősík és az autopolár pontnégyes fogalmának az értelmezésére is. Az autopolár pontnégyes alkalmazásával is igazolható, hogy alkalmas koordinátatranszformációval a felület egyenletét olyan alakra lehet hozni, amelyben már nem szerepel vegyes másodfokú tag. Ezt felhasználva eljutunk a projektív tér másodrendű felületeinek az osztályozási tételéhez is. A fejezet végén konkrét példát mutatunk egy másodrendű felület kanonikus egyenletének a meghatározására.

A dolgozat harmadik fejezetében úgynevezett másodrendű felületsorokat tárgyalunk, melyeket két kiindulási felület határoz meg. A vizsgálatok során kiderül, hogy a felületsor bármely két különböző tagjának ugyanaz a metszete, és emiatt ezt a metszetet a felületsor alapgörbéjének is nevezik. A másodrendű felületsornak egy másik kedvező tulajdonsága, hogy egyrétegűen kitölti a teljes projektív teret eltekintve az alapgörbétől.

A negyedik fejezetben egy részletes bizonyítást adunk két másodrendű felület szétesső áthatásának a tételére. Ehhez viszont előbb azt kell megvizsgálnunk, hogy a két felületből származtatott felületsor mely feltételek teljesülése esetén tartalmaz síkpárt. Végül a tétel alkalmazásaként olyan konkrét példákat tárgyalunk, amikor a két felület metszetgörbéje megegyezik két másodrendű síkgörbe uniójával. A példák szemléltető ábráit a GeoGebra program felhasználásával önállóan készítette el a szerző.

1. fejezet

A projektív tér koordinátázása

1.1. Az euklideszi tér koordinátázása

Ebben a rövid alfejezetben bevezetünk néhány jelölést, továbbá felidézünk néhány alpvető fogalmat. A jelölések és a fogalmak vonatkozásában a Hajós György által írt [3] tankönyvet igyekszünk követni.

A dolgozatban X fogja jelölni az euklideszi tér pontjainak halmazát. A pontokat nagy latin betűkkel, az egyeneseket kis latin betűkkel, a síkokat pedig görög betűkkel jelöljük majd. Ha adva van két pont A és B, akkor az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ fogja jelölni, a pontokon áthaladó egyenest pedig $\langle A, B\rangle$. Szokás szerint félkövér betűkkel (például $\mathbf{v}$) jelöljük a térbeli szabad vektorokat, melyeket az egymással egyenlő irányított szakaszok ekvivalenciaosztályaiként értelmezünk. A vektorok esetében bevezethető az összeadás és a számmal való szorzás művelete. Ismeretes, hogy a szabad vektorok egy 3-dimenziós vektorteret képeznek az $\mathbb{R}$ valós számtest felett.

A térben úgy lehet megadni egy derékszögű koordináta-rendszert, ha rögzítünk egy O kezdőpontot és három páronként egymásra merőleges $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ egységvektort, melyeket élvektoroknak nevezünk. Ekkor az $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ négyes egy Descartes-féle koordináta-rendszert ad meg a térben. Az O kezdőponton áthaladó azon egyeneseket, amelyek tartalmazzák az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ élvektorokat koordinátatengelyeknek hívjuk. Ezeket konkrétan x tengelynek, y tengelynek és z tengelynek szokás nevezni.

Ha veszünk egy P pontot, akkor annak koordinátáit az alábbiak alapján értelmezzük. Az $\overrightarrow{OP}$ vektort egyértelműen lehet előállítani az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ vektorok lineáris kombinációjaként az
$\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j} + z_P\,\mathbf{k}$ formában valamely $x_P,\ y_P,\ z_P$ valós számokkal. Az $x_P,\ y_P,\ z_P$ együtthatókat mondjuk a P pont koordinátáinak, a belőlük nyert $(x_P,\ y_P,\ z_P)$ számhármast pedig a P pont koordináta-hármasának.

A koordináta-rendszer alkalmazása lehetővé teszi, hogy a térbeli alakzatok geometriai jellemzőinek vizsgálatában az algebra eszközeit is fel tudjuk használni. Ugyanis, a koordináták alapján a speciális alakzatokat egyenletekkel is le lehet írni. A térbeli koordinátageometria alapjai részletesen tárgyalva vannak a [3] tankönyv 49. paragrafusában, A dolgozatban majd alkalmazni fogjuk az ebben leírt alapvető ismereteket.

A továbbiakban szükségünk lesz még a párhuzamosság jólismert fogalmára is. Eszerint két egyenest egymással párhuzamosnak nevezünk, ha nincs közös pontjuk és van olyan sík, amelyben mindkét egyenes benne van. Két síkot pedig akkor mondunk párhuzamosnak, ha nincs közös pontjuk.

Egy $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort egy adott e egyenes irányvektorának nevezünk, ha a $\mathbf{v}$ vektort reprezentáló irányított szakaszok párhuzamosak az e egyenessel.

1.2. A projektív tér értelmezése az euklideszi tér kibővítésével

A projektív geometria elméletének kialakulásában, illetve kidolgozásában fontos szerepet játszott a centrális vetítés tulajdonságainak a tanulmányozása. Ez adta az ötletet az ideális pontok, vagy más szóval a végtelen távoli pontok értemezéséhez.

Mint ismeretes, az euklideszi térben az egyenesek párhuzamossága egy szimmetrikus és tranzitív reláció. A tranzitív kapcsolat azt jelenti, hogy amennyiben az e egyenes párhuzamos az f egyenessel és az f párhuzamos a g egyenessel, akkor az $e,\ g$ egyenesek is párhuzamosak egymással. Ennek alapján a térbeli egyeneseket diszjunkt halmazokba, vagy más szóval osztályokba lehet sorolni oly módon, hogy két egyenes pontosan akkor párhuzamos egymással, ha egyazon osztályhoz tartoznak. Az egyenesek így nyert halmazait nevezzük el párhuzamos egyenesosztályoknak. Világos, hogy bármely egyenes pontosan egy ilyen egyenesosztályhoz tartozik.

Amennyiben adva van egy e egyenes, akkor a továbbiakban jelölje $\mathcal{P}(e)$ azon egyenesek halmazát (vagy más szóval osztályát), amely az e–t és a vele párhuzamos egyeneseket tartalmazza. Világos, hogy amennyiben az $e,\ f$ egyenesek nem párhuzamosak, akkor $\mathcal{P}(e)$ és $\mathcal{P}(f)$ diszjunkt halmazok.

A projektív tér értelmezése, illetve az euklideszi tér kibővítése az alábbi ötleten alapul. Az euklideszi tér minden egyes párhuzamos egyenesosztályának feleltessünk meg egy úgynevezett ideális pontot (vagy más szóval végtelen távoli pontot). Fontos itt kiemelni, hogy a különböző párhuzamos egyenesosztályokhoz különböző ideális pontokat rendelünk hozzá. Ha veszünk egy e egyenest, akkor az őt tartalmazó $\mathcal{P}(e)$ párhuzamos egyenesosztályhoz rendelt ideális pontot jelölje I_e. Világos, hogy amennyiben az $e,\ f$ egyenesek párhuzamosak egymással, vagyis egyazon osztályhoz tartoznak, akkor fennáll $I_e = I_f$. Ha viszont e és f nem párhuzamosak, akkor az ideális pontokra igaz $I_e \neq I_f$.

A fentiek alapján bevezetett ideális pontok halmaza legyen ι. Az euklideszi tér kibővítésével értelmezett projektív tér pontjainak halmazán az $\bar{X} = X \cup \iota$ halmazt értjük. Ezen projektív tér egyeneseit és síkjait pedig az alábbiak szerint definiáljuk.

Az euklideszi tér bármely $\mathcal{P}(e)$ párhuzamos egyenesosztályának összes egyenesét bővítsük ki az osztálynak megfelelő I_e ideális ponttal. Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{P}(e)$ osztály összes egyeneséhez csatoljuk hozzá még az I_e ideális pontot is. Az így kapott alakzatokat már az $\bar{X}$ projektív tér egyeneseinek mondjuk.

Az X euklideszi térben vegyünk egy tetszőleges σ síkot, továbbá az általa tartalmazott egyeneseket. A σ-beli egyenesekhez csatolt ideális pontok $i_\sigma = \{ I_e \mid e \subset \sigma \}$ halmazát is a projektív tér egyik egyenesének tekintjük, és ezen alakzatra az ideális egyenes elnevezést használjuk.

A σ síkot pedig bővítsük ki az i_σ egyenessel, illetve az i_σ pontjainak halmazával. A kibővítéssel nyert $\bar{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$ alakzatot projektív síknak nevezzük és az $\bar{X}$ tér egy síkjának tekintjük.

Vegyük észre, hogy ha a σ és ϱ síkok párhuzamosak egymással, akkor az általuk meghatározott ideális egyenesek egybeesnek, vagyis fennáll $i_\sigma = i_\varrho$. Emiatt a projektív térbeli $\bar{\sigma},\ \bar{\varrho}$ síkok ebben az ideális egyenesben metszik egymást.

A bővítés során vett ideális pontok ι halmazát szintén a projektív tér egyik síkjának tekintjük. Ezt a továbbiakban a tér ideális síkjának mondjuk. Evidens, hogy ι a projektív tér összes ideális egyenesét tartalmazza.

Megjegyzés. A megkülönböztetés céljából a nem ideális pontokat a projektív tér közönséges pontjainak hívjuk, továbbá a projektív tér nem ideális egyeneseit közönséges egyeneseknek mondjuk.

Megjegyzés. A projektív tér pontjainak, egyeneseinek, illetve síkjainak az illeszkedésésével és metszetével kapcsolatos alapvető tulajdonságok részletesen tárgyalva vannak a [3] tankönyv 44. fejezetében.

1.3. Homogén koordináták a projektív térben

Az előző alfejezetben leírtak alapján az $\bar{X}$ projektív teret úgy értelmezzük, hogy az euklideszi teret kibővítjük a párhuzamos egyenesosztályokhoz rendelt ideális pontok ι halmazával.

A továbbiakban mindvégig feltesszük, hogy az X euklideszi térben már rögzítve van egy $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j},\, \mathbf{k})$ derékszögű koordináta-rendszer. Az $\bar{X} = X \cup \iota$ projektív tér egy koordinátázását ezen derékszögű koordináta-rendszerből kiindulva végezhetjük el. Fontos megjegyeznünk, hogy az alábbiak során bevezetett koordináták már csak számszorzótól eltekintve lesznek egyértelműek.

1.1. Definíció. Legyen P a projektív tér egy közönséges pontja (azaz legyen $P \in X$). Tekintsük az $\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j} + z_P\,\mathbf{k}$ helyvektor kifejezésében szereplő $x_P,\ y_P,\ z_P$ derékszögű koordinátákat. A P pont térbeli homogén koordinátáin azon $(\lambda\, x_P,\ \lambda\, y_P,\ \lambda\, z_P,\ \lambda)$ számnégyeseket értjük, ahol a λ tetszőleges valós szám lehet kivéve a 0 értéket.

Megjegyzés. A definíció szerint, amennyiben egy P közönséges pont Descartes-féle koordinátái $x_P,\ y_P,\ z_P$, akkor az $(x_P,\ y_P,\ z_P,\ 1)$ számnégyesnek az összes λ $(\lambda \neq 0)$ valós számmal vett szorzata szintén egy homogén koordináta-négyese P-nek.

A továbbiakban a $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ jelöléssel arra utalunk majd, hogy λ befutja a valós számok számok halmazát a 0 kivételével.

1.2. Definíció. Legyen I_e a projektív tér azon ideális pontja, amelyet a $\mathcal{P}(e)$ párhuzamos egyenesosztályhoz rendeltünk. Az e egyenes egyik $\mathbf{v}$ irányvektorát fejezzük ki az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként a $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ alakban. Az I_e ideális pont térbeli homogén koordinátáin azon $(\lambda\, v_1,\ \lambda\, v_2,\ \lambda\, v_3,\ 0)$ számnégyeseket értjük, ahol a λ tetszőleges valós szám lehet kivéve a 0 értéket.

Megjegyzés. A fentiek alapján a projektív tér összes pontjához olyan számnégyeseket rendeltünk, amelyek csak számszorzóban térnek el egymástól. Vegyük észre, hogy a $(0,0,0,0)$ számnégyes egyetlen ponthoz sincs hozzárendelve.

Megjegyzés. Legyen P a projektív tér egy pontja. Tekintsük a P pont egyik $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ homogén koordináta-négyesét. Mivel a homogén koordináták csak számszorzótól eltekintve egyértelműek, a továbbiakban a $P[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4]$ jelölést alkalmazzuk a P pont koordinátáira.

A definíciókból következik, hogy a P pont ideális akkor és csak akkor, ha fennáll $x_4 = 0$. Amennyiben $x_4 \neq 0$, akkor a P közönséges pont Descartes-féle koordinátáira teljesül
$x_P = \dfrac{x_1}{x_4},\ y_P = \dfrac{x_2}{x_4},\ z_P = \dfrac{x_3}{x_4}.$

Vegyük a valós számnégyesek $\mathbb{R}^4$ terét. Ismeretes, hogy a számnégyesek esetében is értelmezhető az összeadás és a számmal való szorzás művelete. Emiatt a számnégyesek maguk is egy vekorteret képeznek az $\mathbb{R}$ valós számtest felett, melynek nullvektora $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$. Ennek a 4-dimenziós vektortérnek egy természetes bázisát képezik az $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ és $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$ számnégyesek. Amennyiben veszünk egy $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ számnégyest, akkor arra nyilván fennáll az $\mathbf{x} = \sum_{r=1}^{4} x_r\,\mathbf{e}_r$ összefüggés.

1.3. Definíció. Legyen P egy pont a projektív térben. Az $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ számnégyest a P pont egyik meghatározó vektorának mondjuk $\mathbb{R}^4$–ben, ha $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ az egyik homogén koordinátanégyese P-nek.

Megjegyzés. Tekintsük most az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ koordináta-rendszer tengelyeihez csatolt $I_x,\ I_y,\ I_z$ ideális pontokat. Vegyük észre, hogy az 1.2. Definíció alapján $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ meghatározó vektorai ezen ideális pontoknak, továbbá $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$ az egyik meghatározó vektora az O kezdőpontnak.

A definíciók alapján könnyen belátható, hogy igaz az alábbi kijelentés, amely fontos szerepet játszik a tárgyalásunkban.

1.4. Állítás. *A homogén koordinátázással egy bijektív megfeleletetés adódik az $\bar{X}$ projektív tér pontjai és az $\mathbb{R}^4$ vektortér 1-dimenziós alterei között.*

Megjegyzés. Világos, hogy amennyiben az $\mathbb{R}^4$–beli $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ vektor a P pont egyik meghatározó vektora, akkor a P-nek megfelelő 1-dimenziós altér $\{\, t\,\mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$, amely az $\mathbf{x}$ valós számszorosaiból áll. Ezt az $\mathbf{x}$ által generált alteret $\mathbb{R}\mathbf{x}$ fogja jelölni.

Megjegyzés. A továbbiakban a $\bar{X}$ projektív térnek az $\mathbb{R}^4$–beli $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ vektorral meghatározott pontjára az $[\mathbf{x}]$ jelölést alkalmazzuk. Ennek megfelelően bármely λ $(\lambda \neq 0)$ valós számmal fennáll a $[\lambda\,\mathbf{x}] = [\mathbf{x}]$ egyenlőség.

A projektív térben is igaz az, hogy két ponthoz pontosan egy egyenes illeszkedik, vagyis egy egyenest már egyértelműen meghatározza két pontja. Világos, hogy egy egyenes pontjainak a meghatározó vektorai az $\mathbb{R}^4$–nek egy 2-dimenziós alterében vannak. Emiatt könnyen belátható az alábbi állítás.

1.5. Állítás. *A projektív tér valamely P és Q pontjainak egy-egy meghatározó vektora legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$. Ekkor a P, Q pontokon áthaladó $\langle P, Q\rangle$ egyenes pontjainak az $\mathbb{R}^4$–beli meghatározó vektorai kifejezhetőek a $\lambda\,\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbb{R},\ \lambda^2 + \mu^2 > 0)$ lineáris kombinációk formájában.*

A projektív tér síkjaihoz is homogén koordináta-négyeseket lehet rendelni, amelyek szintén csak számszorzótól eltekintve egyértelműek.

Az euklideszi térben vegyünk egy σ síkot, amelyet az

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

egyenlet ír le, ahol az $a,\ b,\ c,\ d$ együtthatók olyan valós számok, hogy $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Ismeretes, hogy ez esetben az $\mathbf{n} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ vektor a σ síknak egy normálvektora, vagyis $\mathbf{n}$ merőleges az összes σ–beli vektorra.

A közönséges pontok Descartes-féle koordinátái és homogén koordinátái között fennáll az $x = x_1/x_4,\ y = x_2/x_4,\ z = x_3/x_4$ összefüggés. Amennyiben ezt beírjuk a fenti egyenletbe, majd azt megszorozzuk az x_4–gyel, akkor az

$$a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4 = 0 \tag{1.1}$$

egyenlethez jutunk. Vegyünk egy σ–beli e egyenest, amelynek egyik irányvektora legyen $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$. Mivel az $\mathbf{n},\ \mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, a skaláris szorzatukra fennáll $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$, vagyis a vektorok koordinátáira teljesül az $a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 = 0$ összefüggés. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\bar{\sigma}$ projektív sík I_e ideális pontjának a $(v_1,\ v_2,\ v_3,\ 0)$ homogén koordinátái is kielégítik a fenti egyenletet. Megállapíthatjuk tehát, hogy a projektív térben a $\bar{\sigma}$ projektív síkot az (1.1) egyenlet írja le a homogén koordinátákra nézve.

1.6. Definíció. Legyen adva a projektív térben egy sík. A sík egyik homogén koordináta-négyesének mondjuk az $(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)$ számnégyest, ha az $u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + u_3\,x_3 + u_4\,x_4 = 0$ egyenletet éppen a sík pontjainak a homogén koordinátái elégítik ki.

Megjegyzés. A definícióból adódik, hogy az előzőekben tárgyalt $\bar{\sigma}$ síknak $(a,\ b,\ c,\ d)$ az egyik homogén koordináta-négyese. Világos, hogy a projektív tér ideális pontjait tartalmazó ι síkot az $x_4 = 0$ egyenlet írja le. Emiatt $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ adja ezen síknak az egyik homogén koordináta-négyesét.

1.4. Koordinátatranszformációk a projektív térben

Az $\bar{X}$ projektív tér öt pontjáról azt mondjuk, hogy azok általános helyzetűek, ha közülük bármelyik négy nincs egy síkon. Vegyük észre, hogy ebben az esetben az öt pont közül bármelyik három nem lehet rajta egy egyenesen. Az alábbiak során azt tárgyaljuk, hogy egy általános helyzetű pontötös miként határoz meg számszorzótól eltekintve egy $\mathbb{R}^4$–beli bázist, továbbá egy homogén koordinátázást az $\bar{X}$ projektív téren.

Tekintsünk az $\bar{X}$ térben egy $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F$ általános helyzetű pontötöst. Legyen $\mathbf{f}$ ($\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$) az F pont egyik meghatározó vektora $\mathbb{R}^4$–ben, vagyis egy olyan $\mathbb{R}^4$–beli vektor, amelyre igaz $F = [\,\mathbf{f}\,]$. A korábban értelmezett megfeleltetés szerint ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{R}^4$–beli $\mathbb{R}\,\mathbf{f} = \{\, t\,\mathbf{f} \mid t \in \mathbb{R}\}$ 1-dimenziós altérnek megfelelő pont éppen az F.

Rögzítsük le ezt az $\mathbf{f}$ vektort. Ekkor a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ pontokhoz egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{R}^4$–beli $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4$ meghatározó vektorok, melyekre teljesül

$$\mathbf{f} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4\,.$$

Mivel a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ pontok nincsenek egy síkon, ezek a $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4$ meghatározó vektorok egy bázist képeznek a valós számnégyesek $\mathbb{R}^4$ terében.

1.7. Definíció. Az $\bar{X}$ projektív tér $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F$ általános helyzetű pontötöséhez rendelt egyik $\mathbb{R}^4$–beli bázison a $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4$ vektorok által alkotott bázist értjük.

Vegyük észre, hogy a pontötöshöz rendelt $\mathbb{R}^4$–beli bázis csak számszorzótól eltekintve egyértelmű. Amennyiben az F pontnál az $\mathbf{f}$ vektor helyett annak egy $\lambda\,\mathbf{f}$ ($\lambda \neq 0$) számszorosát rögzítjük le, akkor a bázis négy vektora is a λ–szorosára módosul.

Legyen adva az $\bar{X}$ projektív térben egy $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F$ általános helyzetű pontötös. A továbbiakban ezt a pontötöst egy térbeli koordináta-alakzatnak, illetve egy projektív térbeli koordinátarendszernek nevezzük és a $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ jelölést alkalmazzuk rá. Az elnevezést azzal indokoljuk, hogy az alábbi definíció alapján ez a pontötös meghatároz egy homogén koordinátázást a projektív téren.

1.8. Definíció. Vegyük a pontötöshöz rendelt egyik $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4$ bázist $\mathbb{R}^4$–ben. Tekintsük az $\bar{X}$ tér egy tetszőleges P pontját, amelynek az $\mathbb{R}^4$–beli egyik meghatározó vektora legyen $\mathbf{x}$ (vagyis igaz $[\mathbf{x}] = P$). Fejezzük ki az $\mathbf{x}$ vektort a bázisvektorokból az $\mathbf{x} = x'_1\,\mathbf{b}_1 + x'_2\,\mathbf{b}_2 + x'_3\,\mathbf{b}_3 + x'_4\,\mathbf{b}_4$ lineáris kombináció formájában. A P pontnak a $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-alakzatra vonatkozó homogén koordinátáin a $(\lambda\,x'_1,\ \lambda\,x'_2,\ \lambda\,x'_3,\ \lambda\,x'_4)$ számnégyeseket értjük, ahol $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$.

Megjegyzés. A projektív térbeli $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-alakzatnál, vagy más szóval koordináta-rendszernél, a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ pontokat bázispontoknak szokás nevezni, az F pontot pedig egységpontnak.

Megjegyzés. Abból indultunk ki, hogy az X euklideszi térben adva van egy $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ derékszögű koordináta-rendszer. Tekintsük a kibővítés során a koordinátatengelyekhez csatolt $I_x,\ I_y,\ I_z$ ideális pontokat, továbbá azt az E közönséges pontot, amelynek helyvektorára fennáll $\overrightarrow{OE} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Ekkor az $\mathbb{R}^4$–beli $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4$ és $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$ vektorok egy-egy meghatározó vektorát képezik az $I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E$ pontoknak.

A leírtak alapján már könnyű belátni, hogy az $I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E$ pontötös általános helyzetű és a hozzárendelt egyik bázis éppen az $\mathbb{R}^4$ tér $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4$ természetes bázisa. A továbbiakban ezen speciális pontötösre a $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ koordináta-alakzatként hivatkozunk.

Vegyünk egy tetszőleges P pontot és annak egy $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4$ meghatározó vektorát. A fenti 1.8. Definíció szerint $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ egyúttal a P pont egyik homogén koordináta-négyese a speciális $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ koordináta-rendszerre nézve.

Vizsgáljuk meg a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzatokra vonatkozó homogén koordináták kapcsolatát. A $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4$ vektorokat fejezzük az $\mathbb{R}^4$–beli természetes bázis vektoraival a

$$\mathbf{b}_j = b_{1j}\,\mathbf{e}_1 + b_{2j}\,\mathbf{e}_2 + b_{3j}\,\mathbf{e}_3 + b_{4j}\,\mathbf{e}_4 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

alakban. A lineáris kombinációk együtthatóiból képezzük azt a 4×4–es $\mathbf{B}$ mátrixot, amelynél az i–edik sor j-edik eleme éppen b_{ij} $(1 \le i, j \le 4)$.

A fentiek alapján pedig teljesül

$$\mathbf{x} = \textstyle\sum_{j=1}^{4} x'_j\,\mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^{4} x'_j\big(\sum_{i=1}^{4} b_{ij}\,\mathbf{e}_i\big) = \sum_{i=1}^{4}\big(\sum_{j=1}^{4} b_{ij}\,x'_j\big)\,\mathbf{e}_i\,.$$

Mivel az $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen áll elő az $\mathbb{R}^4$–beli $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4$ bázis lineáris kombinációjaként, igazak az

$$x_1 = \textstyle\sum_{j=1}^{4} b_{1j}\,x'_j, \quad x_2 = \sum_{j=1}^{4} b_{2j}\,x'_j, \quad x_3 = \sum_{j=1}^{4} b_{3j}\,x'_j, \quad x_4 = \sum_{j=1}^{4} b_{4j}\,x'_j$$

összefüggések. Vegyük észre, hogy a fenti négy egyenlőség egyenértékű a következő mátrixegyenlettel:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Ezzel a mátrixegyenlettel írható le a $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ és $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-alakzatokra vonatkozó homogén pontkoordináták kapcsolata.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy miként transzformálódnak a projektív tér síkjainak homogén koordinátái.

1.9. Definíció. A projektív térben tekintsük a pontok $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-alakzatra vonatkozó homogén koordinátáit, továbbá vegyünk egy térbeli síkot. Az $(u'_1,\ u'_2,\ u'_3,\ u'_4)$

számnégyest a sík $\mathcal{K}'$ rendszerre vonatkozó egyik homogén koordináta-négyesének nevezzük, ha az általa meghatározott $u'_1\,x'_1 + u'_2\,x'_2 + u'_3\,x'_3 + u'_4\,x'_4 = 0$ egyenletet csakis a sík pontjainak homogén koordinátái elégítik ki.

Vegyünk a projektív térben egy $\bar{\sigma}$ síkot, amelyet a kiindulási $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ koordináta-alakzatban az $u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + u_3\,x_3 + u_4\,x_4 = 0$ egyenlet ír le, vagyis ebben $(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)$ a síknak egy homogén koordináta-négyese. Világos, hogy ez az egyenlet felírható egy sormátrix és egy oszlopmátrix szorzatának felhasználásával is az $(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$ alakban. Ha alkalmazzuk az (1.2) összefüggést, akkor ebből az

$$(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)\cdot\mathbf{B}\cdot\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = 0$$

mátrixegyenletet kapjuk a $\mathcal{K}'$–beli homogén pontkoordinátákkal. Ebből pedig az következik, hogy az

$$(u'_1,\ u'_2,\ u'_3,\ u'_4) = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)\cdot\mathbf{B} \tag{1.3}$$

összefüggés adja meg a $\bar{\sigma}$ sík homogén koordinátáinak kapcsolatát a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzatokra vonatkozóan.

2. fejezet

Másodrendű felületek

2.1. Az euklideszi tér másodrendű felületei

A továbbiakban is feltesszük, hogy az X euklideszi térben adva van egy $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ derékszögű koordináta-rendszer. Definiáljuk a másodrendű felületeket, amelyek a síkbeli másodrendű görbéknek a térbeli megfelelői.

2.1. Definíció. Legyenek $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$ olyan valós számok, amelyek közül legalább egy nem 0, továbbá legyenek $b_1,\ b_2,\ b_3,\ c$ tetszőleges valós számok.Tekintsük a térbeli koordinátákra vonatkozó

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,xy + 2\,a_{13}\,xz + 2\,a_{23}\,yz + 2\,b_1\,x + 2\,b_2\,y + 2\,b_3\,z + c = 0 \quad \text{(MFE)}$$

másodfokú egyenletet. Azon pontok $\mathcal{F}$ halmazát, amelyek koordinátái kielégítik az egyenletet, az (MFE) egyenlet által leírt másodrendű felületnek nevezzük.

Megjegyzés. Egy térbeli $\mathcal{F}$ alakzatot akkor mondunk másodrendű felületnek, ha van olyan másodfokú egyenlet, amely éppen az $\mathcal{F}$ ponthalmazt írja le.

A fenti (MFE) egyenletben szereplő együtthatókból képezzük a $4{\times}4$–es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixot. Ennek alkalmazásával a másodrendű felületek (MFE) egyenlete az alábbi mátrixos formában is felírható:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix alapján értelmezni lehet a másodrendű felületek egy osztályát.

2.2. Definíció. Az (MFE) másodfokú egyenlettel leírt $\mathcal{F}$ másodrendű felületet közönségesnek mondjuk, ha $\mathcal{F} \neq \emptyset$ és az együtthatókból képzett $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix determinánsa nem 0, vagyis igaz $det\,\mathbf{A} \neq 0$.

Az euklideszi térben is alkalmazhatunk különböző derékszögű koordináta-rendszereket, vagyis használhatjuk a koordinátatranszformációk eszközét annak érdekében, hogy az alakzatok leíró egyenlete egyszerűbb legyen. A koordinátatranszformációk részletes tárgyalása fellelhető a [3] könyv 34. paragrafusában.

Alkalmas koordinátatranszformációval a másodrendű felületek egyenlete is egyszerűbb alakra hozható. Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi alapvető tételt, melynek igazolása megtalálható a [3] tankönyv 51. paragrafusában. A felsorolt kanonikus egyenleteknél a leírt alakzat típusát is megadjuk.

2.3. Tétel. *Alkalmas koordinátatranszformációval és az egyenletnek egy megfelelő μ $(\mu \neq 0)$ számmal való beszorzásával elérhető, hogy egy adott másodrendű felület egyenlete megegyezzen az alábbi speciális egyenletek egyikével, melyekben $a,\ b,\ c$ valamely pozitív valós számok.*

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ *: ellipszoid;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ *: egyetlen pont;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ *: üres halmaz;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ *: egyköpenyű hiperboloid;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ *: másodrendű kúp;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ *: kétköpenyű hiperboloid;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ *: elliptikus paraboloid;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ *: hiperbolikus paraboloid;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *: elliptikus henger;*
- $x^2 - 2ay = 0$ *: parabolikus henger;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *: hiperbolikus henger;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ *: üres halmaz;*

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ *: metsző síkpár;*
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ *: egyetlen egyenes;*
- $x^2 - a^2 = 0$ *: párhuzamos síkpár;*
- $x^2 + a^2 = 0$ *: üres halmaz;*
- $x^2 = 0$ *: egyetlen sík.*

Megjegyzés. Az előző definíció alapján az euklideszi térben az alábbi felületeket tekintjük közönségesnek: ellipszoidok, egyköpenyű vagy kétköpenyű hiperboloidok, elliptikus vagy hiperbolikus paraboloidok.

2.4. Definíció. Egy másodrendű felületet akkor mondunk vonalfelületnek, ha minden pontján áthalad legalább egy olyan egyenes, amely rajta van a felületen.

Megjegyzés. Világos, hogy a másodrendű hengerfelületek és a kúpfelület egyaránt vonalfelületek. Azonban azt is igazolni lehet, hogy az egyköpenyű hiperboloidok és a hiperbolikus paraboloidok szintén vonalfelületek. Ezek esetében bármely felületi ponton pontosan két olyan egyenes halad át, amelyek rajta vannak a felületen. A részletes bizonyítás megtalálható a [3] könyv 50. paragrafusában.

2.2. A projektív tér másodrendű felületei

Emlékezzünk rá, hogy a projektív tér koordinátázásához egy az euklideszi térben rögzített $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j},\, \mathbf{k})$ Descartes-féle koordináta-rendszert vettünk alapul.

2.5. Definíció. Legyenek a_{rs} $(1 \leq r \leq s \leq 4)$ olyan valós számok, amelyek közül legalább egy nem 0. Az

$$\begin{gathered} a_{11}\,(x_1)^2 + a_{22}\,(x_2)^2 + a_{33}\,(x_3)^2 + a_{44}\,(x_4)^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 \\ +2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{14}\,x_1\,x_4 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + 2\,a_{24}\,x_2\,x_4 + 2\,a_{34}\,x_3\,x_4 = 0 \end{gathered} \qquad \text{(HMFE)}$$

egyenlettel a projektív térben leírt másodrendű felületen azon pontok $\mathcal{F}$ halmazát értjük, amelyek homogén koordinátái kielégítik az egyenletet.

A fenti (HMFE) egyenletben 10 együttható szerepel. Ezekből képezzük az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$ negyedrendű, szimmetrikus mátrixot, amelynek elemeire tehát fennáll $a_{rs} = a_{sr}$ $(1 \leq r,\, s \leq 4)$. Ezt mondjuk a (HMFE) másodfokú egyenlethez tartozó szimmetrikus mátrixnak.

A felület egyenlete ezzel felírható az

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

formában is.

Megjegyzés. A (HMFE) egyenlet általános alakjában szereplő $2\,a_{12}\,x_1x_2,\ 2\,a_{13}\,x_1x_3,\ 2\,a_{14}\,x_1x_4,$ $2\,a_{23}\,x_2x_3,\ 2\,a_{24}\,x_2x_4,\ 2\,a_{34}\,x_3x_4$ kifejezéseket vegyes másodfokú tagoknak mondjuk. Ezek eltűnése esetén az egyenlethez tartozó $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix diagonális.

Az euklideszi tér másodrendű felületeinek kibővítése

Az euklideszi térben vegyünk egy másodrendű felületet, amelyet az

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,xy + 2a_{13}\,xz + 2a_{23}\,yz + 2\,b_1\,x + 2\,b_2\,y + 2\,b_3\,z + c = 0 \quad \text{(MFE)}$$

egyenlet ír le a Descartes-féle koordinátákra nézve. Emlékezzünk rá, hogy a közönséges pontok derékszögű és homogén koordinátái között fennállnak az $x = x_1/x_4,\ y = x_2/x_4,\ z = x_3/x_4$ összefüggések. Ha ezeket behelyettesítjük az egyenletbe és azt megszorozzuk az $(x_4)^2$ kifejezéssel, akkor egy homogén másodfokú egyenletet kapunk. Ez indokolja az alábbi definíciót.

2.6. Definíció. Az (MFE) egyenlettel megadott $\mathcal{F}$ másodrendű felület projektív kibővítésének mondjuk azt az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületet a projektív térben, amelyet az

$$\begin{gathered} a_{11}\,(x_1)^2 + a_{22}\,(x_2)^2 + a_{33}\,(x_3)^2 + c\,(x_4)^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 \\ +2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + 2\,b_1\,x_1\,x_4 + 2\,b_2\,x_2\,x_4 + 2\,b_3\,x_3\,x_4 = 0 \end{gathered}$$

egyenlet ír le a homogén pontkoordinátákra nézve.

Megjegyzés. A legtöbb esetben az $\bar{\mathcal{F}}$ ponthalmaz bővebb az $\mathcal{F}$ alakzatnál, mivel tartalmaz ideális pontokat is. Ha viszont az $\mathcal{F}$ felület egy ellipszoid, akkor belátható, hogy fennáll $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

Megjegyzés. Világos, hogy a projektív tér azon másodrendű felületeinél, amelyek nem az euklideszi tér egy másodrendű felületének a kibővítésével állnak elő, a (HMFE) egyenlet a

$$(2\,a_{14}\,x_1 + 2\,a_{24}\,x_2 + 2\,a_{34}\,x_3 + a_{44}\,x_4)\,x_4 = 0$$

alakot ölti. A leírt felület vagy egy síkpár, melynek egyike az ideális pontok ι síkja, vagy pedig maga a ι ideális sík.

2.3. Konjugált pontok egy másodrendű felületre nézve

Ezen alfejezetben szereplő fogalmakat és állításokat majd alkalmazni fogjuk a negyedik fejezetben a széteső áthatás tételének a bizonyításánál. Megjegyezzük, hogy az alfejezet eredményeinek egy része megtalálható az [1] jegyzet 8. fejezetében, ahol egy n-dimenziós projektív tér másodrendű hiperfelületeinek a tárgyalására kerül sor. A szakdolgozatban mi csakis a 3-dimenziós projektív tér felületeit tanulmányozzuk.

A továbbiakban is feltesszük, hogy a projektív térben a $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ koordinátarendszerre vonatkozó homogén koordinátákat alkalmazzuk. Ennek kapcsán viszont meg kell említenünk, hogy az alfejezetben bevezetésre kerülő fogalmak koordinátatranszformációval szemben invariánsak.

A projektív térben legyen adva egy $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület a (HMFE) egyenlettel. Világos, hogy az $a_{sr} = a_{rs}$ $(1 \le r < s \le 4)$ jelölés mellett a (HMFE) egyenletet felírhatjuk a $\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} a_{rs}\, x_r\, x_s = 0$ szummációs alakban is. A leíró egyenlet alapján lehet értelmezni a konjugált pontok fogalmát az adott felületre nézve. A definíció megfelel a másodrendű görbére vonatkozó konjugáltság fogalmának, amely többek között a [3] tankönyv 46. paragrafusában is szerepel.

2.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy a (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületre nézve a $P\,[y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4]$ ponthoz konjugált a $Q\,[z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4]$ pont, ha a homogén koordinátáikkal teljesül a $\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} a_{rs}\, y_r\, z_s = 0$ egyenlőség.

Megjegyzés. Világos, hogy a konjugáltság egy szimmetrikus kapcsolatot ad a pontok között, vagyis ha a P ponthoz konjugált a Q pont, akkor a Q ponthoz is konjugált a P. Emellett egy P pont pontosan akkor konjugált önmagához a (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ felületre nézve, ha rajta van a felületen.

Megjegyzés. A $P,\ Q$ pontok koordináta-négyeseiből képezzük az $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ és $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ sormátrixokat, továbbá vegyük a felületet leíró (HMFE) egyenlet együtthatóiból nyert $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrixot. Ekkor a $\mathbf{z}$ sormátrix $\mathbf{z}^T$ transzponáltja egy oszlopmátrixot ad. Vegyük észre, hogy a két pont akkor konjugált egymáshoz, ha ezen mátrixokkal fennáll az $\mathbf{y}{\cdot}\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{z}^T = 0$ egyenlőség. Egyébként bármely $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ számnégyesekre teljesül $\mathbf{y}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{z}^T = \mathbf{z}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}^T$.

A valós számnégyesek $\mathbb{R}^4$ terében vegyük a $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$ nullvektort. Ez szerepel az alábbi definícióban.

2.8. Definíció. A projektív tér egy $P\,[y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4]$ pontját a (HMFE) egyenlettel leírt másodrendű felület szinguláris pontjának mondjuk, ha homogén koordinátáira fennáll az $\mathbf{y}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$ egyenlőség.

Megjegyzés. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, vagyis egyenlő az $\mathbf{A}^T$ transzponáltjával, az $\mathbf{y}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$ összefüggés egyenértékű azzal, hogy fennáll $\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}^T = \mathbf{0}^T$.

Látható, hogy a (HMFE) egyenlettel leírt másodrendű felületnek csak akkor van szinguláris pontja, ha az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 0, vagyis $det\, \mathbf{A} = 0$ teljesülése esetén. Ekkor a szinguláris pont rajta van a felületen és a tér összes pontjához konjugált.

Igazolható, hogy amennyiben a másodrendű felületnek van szinguláris pontja, akkor a szinguláris pontok halmaza vagy egyetlen pont, vagy egy egyenes, vagy pedig egy sík.

2.9. Állítás. *Legyen $P\,[y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4]$ egy olyan pont, amely nem szinguláris pontja az (HMFE) egyenlettel megadott másodrendű felületnek. Ekkor a P–hez konjugált pontok egy síkot képeznek, amelynek egyik homogén koordináta-négyesét az*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

összefüggéssel nyert $(u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4)$ számnégyes adja.

Bizonyítás. Tekintsük a P pont homogén $\mathbf{y} = (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)$ koordináta-négyeséből nyert $\mathbf{y}^T$ oszlopmátrixot és az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^T$ szorzatot. Mivel P nem szinguláris pontja a felületnek, a fenti (2.2) összefüggéssel meghatározott $(u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4)$ számnégyes legalább egy eleme különbözik 0–tól.

Vegyünk a térben egy tetszőleges R pontot, melynek egyik homogén koordináta-négyese legyen $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$. A definíció szerint az $\bar{\mathcal{F}}$ felületre nézve az R pont akkor konjugált a P ponthoz, ha teljesül a $\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} a_{rs}\, x_r\, y_s = 0$ egyenlőség. Vegyük észre, hogy ez az összefüggés felírható az

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$$

mátrixegyenlet alakjában is, amelyben az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^T$ szorzat megegyezik az $(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ oszlopmátrixszal. A fenti mátrixegyenletből adódik, hogy az R pont pontosan akkor konjugált a P–hez, ha koordinátái kielégítik az

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 + u_4\, x_4 = 0$$

egyenletet. Világos, hogy ez az egyenlet azt a síkot írja le, amelynek (u_1, u_2, u_3, u_4) az egyik homogén koordináta-négyese. $\square$

Az előző állítás alapján egy újabb fogalmat lehet értelmezni.

2.10. Definíció. A projektív térben vegyük a (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületet, továbbá egy olyan P pontot, amely nem szinguláris pontja a felületnek. Azt a síkot, amelyet a P–hez konjugált pontok képeznek, a P pont $\bar{\mathcal{F}}$ felületre vonatkozó polársíkjának mondjuk.

A másodrendű felület egymással konjugált pontjaira vonatkozik az alábbi kijelentés.

2.11. Állítás. *Ha az (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület két pontja P és Q konjugáltak egymáshoz, akkor a rajtuk áthaladó $\langle P, Q\rangle$ egyenest tartalmazza a felület.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a felületre eső $P\,[y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4]$, $Q\,[z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4]$ pontok konjugáltak egymáshoz. Tekintsük a pontok $\mathbf{y} = (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)$ és $\mathbf{z} = (z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4)$ homogén koordináta-négyeseit, mint két sormátrixot. Mivel mindkét pont rajta van a felületen és konjugáltak, teljesülnek az

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}^T = 0, \qquad \mathbf{z}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{z}^T = 0, \qquad \mathbf{y}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{z}^T = 0$$

egyenlőségek. Az 1.5. Állítás szerint a két ponton áthaladó $\langle P, Q\rangle$ egyenes bármely pontjának homogén koordináta-négyesei kifejezhetőek a $\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z}$ alakban valamely $\lambda,\ \mu$ valós együtthatókkal. Írjuk be ezt a kifejeztést a felület $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = 0$ egyenletébe, ahol $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$. Ily módon azt kapjuk, hogy fennáll a

$$(\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z})\cdot\mathbf{A}\cdot(\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z})^T = \lambda^2\cdot(\mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}^T) + 2\,\lambda\,\mu\cdot(\mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{z}^T) + \mu^2\cdot(\mathbf{z}\,\mathbf{A}\,\mathbf{z}^T) = 0$$

összefüggés tetszőleges $\lambda,\ \mu$ értékekre. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\langle P, Q\rangle$ egyenes bármely pontjának koordináta-négyesei kielégítik a felületet leíró (HMFE) egyenletet, tehát az egyenes rajta van a felületen. $\square$

A fenti állításból adódik, hogy amennyiben az $\bar{\mathcal{F}}$ egyetlen pontján sem megy át felületi egyenes, akkor az $\bar{\mathcal{F}}$ felület bármely két pontját is vesszük, azok nem lehetnek konjugáltak egymáshoz. Ennek következtében igaz az alábbi kijelentés.

2.12. Következmény. *Legyen a (HMFE) egyenlettel leírt másodrendű $\bar{\mathcal{F}}$ felület vagy egy ellipszoid, vagy egy kétköpenyű hiperbolid, vagy pedig egy elliptikus paraboloid projektív bővítése. Ekkor egy tetszőleges P felületi pont polársíkjának egyetlen közös pontja van a felülettel, nevezetesen a P pont.*

2.13. Állítás. *Ha egy egyenest tartalmaz a (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület, akkor az egyenes bármely két pontja konjugált egymáshoz az $\bar{\mathcal{F}}$–re nézve.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy e egyenes rajta van az $\mathcal{F}$ felületen. Legyenek $P\,[y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4]$ és $Q\,[z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4]$ ezen e egyenes két tetszőleges pontja. Vegyük az e egyenesen azt a pontot, amelynek az egyik homogén koordináta-négyese $\mathbf{y} + \mathbf{z} = (y_1 + z_1,\, y_2 + z_2,\, y_3 + z_3,\, y_4 + z_4)$. Írjuk be ezt a tartalmazó felület $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^T = 0$ egyenletébe, ahol $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$. Ekkor azt kapjuk, hogy fennáll

$$0 = (\mathbf{y} + \mathbf{z})\cdot\mathbf{A}\cdot(\mathbf{y} + \mathbf{z})^T = \mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}^T + 2\cdot\mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\,\mathbf{A}\,\mathbf{z}^T\,.$$

Mivel P és Q is rajta vannak a felületen, ebből adódik, hogy teljesül $\mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{z}^T = 0$, tehát a $P,\ Q$ pontok konjugáltak egymással. $\square$

Vannak olyan másodrendű vonalfelületek, amelyek minden pontján pontosan két felületi egyenes halad át. Az előző állításból adódik, hogy ezekre igaz az alábbi kijelentés.

2.14. Következmény. *Legyen a (HMFE) egyenlettel leírt másodrendű $\bar{\mathcal{F}}$ felület vagy egy egyköpenyű hiperbolid, vagy pedig egy hiperbolikus paraboloid projektív bővítése. Ekkor bármely felületi pont polársíkja két egyenesben metszi el a felületet.*

A 2.13. Állításnak van egy további következménye is.

2.15. Következmény. *Ha egy síkot tartalmaz a (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület, akkor a sík bármely két pontja konjugált egymáshoz az $\bar{\mathcal{F}}$–re nézve.*

2.16. Állítás. *Legyen P egy olyan pont a (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületen, amely nem szinguláris pont. Ha egy a P ponton átmenő egyenes nincs rajta a P polársíkján, akkor az egyenesnek és a felületnek pontosan két közös pontja van.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy a P–n áthaladó olyan h egyenest, amelyet nem tartalmaz a P polársíkja. Legyen Q egy további pontja a h egyenesnek. Vegyük a P pont egyik $\mathbf{y} = (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)$, illetve a Q pont egyik $\mathbf{z} = (z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4)$ homogén koordináta-négyesét. Mint ismeretes, a h egyenes pontjainak meghatározó vektorai kifejezhetőek a $\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z}$ alakban, ahol λ és μ a valós paraméterek. A h egyenes egy adott $\lambda,\ \mu$ számpárhoz tartozó pontja akkor van rajta az $\bar{\mathcal{F}}$ felületen, ha homogén koordinátái kielégítik az $\mathbf{x}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}^T = 0$ egyenletet, ahol $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$. Ha a h egyenesre vonatkozó kétparaméteres kifejezést beírjuk a felület egyenletébe, akkor a

$$\lambda^2\,(\mathbf{y}\mathbf{A}\,\mathbf{y}^T) + 2\,\lambda\,\mu\,(\mathbf{y}\mathbf{A}\,\mathbf{z}^T) + \mu^2\,(\mathbf{z}\mathbf{A}\,\mathbf{z}^T) = 0$$

egyenletet nyerjük a $\lambda,\ \mu$ ismeretlenekre. Mivel a P egy felületi pont, fennáll $\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{y}^T = 0$. Alkalmazzuk most az $\alpha = \mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{z}^T$ és $\beta = \mathbf{z}\mathbf{A}\mathbf{z}^T$ jelölést. Mivel a $P,\ Q$ pontok nem konjugáltak egymással, $\alpha \neq 0$ teljesül. A fentiek alapján a $\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z}$ vektornak megfelelő pont akkor van rajta az $\bar{\mathcal{F}}$ felületen, ha a $\lambda,\ \mu$ együtthatók megoldják a

$$\mu(2\,\lambda\,\alpha + \mu\,\beta) = 0$$

egyenletet, amelyben $\alpha,\ \beta$ rögzített számok és $\alpha \neq 0$. Látható, hogy ennek a $\lambda,\ \mu$ ismeretlenekre vonatkozó egyenletnek számszorzótól eltekintve csak két megoldása van. Világos, hogy $\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 0$ az egyik megoldó számpár, és ehhez éppen a P tartozik. A másik számpár, amely megoldja az egyenletet $\lambda_2 = \beta,\ \mu_2 = -2\,\alpha$. Tehát a P felületi ponton átmenő h egyenesnek a $\beta\,\mathbf{y} - 2\,\alpha\,\mathbf{z}$ koordinátájú pontja van még rajta van az $\bar{\mathcal{F}}$ felületen. Eszerint a h egyenesnek és az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületnek pontosan két közös pontja van. $\square$

Az eddigi állítások alapján igaz az alábbi kijelentés, amely a polársík kitüntetett szerepére utal.

2.17. Következmény. *Legyen P egy olyan pont az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületen, amely nem szinguláris pont. A P pontot tartalmazó síkok közül egyedül a P polársíkja rendelkezik azzal a tulajdosággal, hogy bármely a P–n áthaladó síkbeli egyenes vagy rajta van az $\bar{\mathcal{F}}$ felületen, vagy pedig a P–n kívül már nincs további közös pontja a felülettel.*

A fenti kijelentés alapján már be lehet vezetni az érintősík fogalmát.

2.18. Definíció. Legyen P egy olyan pontja az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületnek, amely nem szinguláris pont. A felület P pontbeli érintősíkján P-nek az $\bar{\mathcal{F}}$-re vonatkozó polársíkját értjük.

Megjegyzés. A másodrendű felület szinguláris pontjában nem értelmezhető az érintősík.

A későbbi tárgyalások során felhasználjuk az alábbi állítást is.

2.19. Állítás. *Ha egy egyenesnek van három olyan pontja, amelyek rajta vannak az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületen, akkor az $\bar{\mathcal{F}}$ tartalmazza az egyenest.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy e egyenes három pontja, $P,\ Q$ és R rajta van a (HMFE) egyenlettel leírt $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületen. Ha a P egy szinguláris pont, akkor a tér bármely pontjához konjugált, tehát a Q ponthoz is. A 2.11. Állításból adódik, hogy ekkor az e egyenes rajta van a felületen.

Ha P nem szinguláris pont, akkor a 2.16. Állítás következtében az e egyenest tartalmazza a P polársíkja, mivel e–nek kettőnél több közös pontja van a felülettel. Emiatt újból azt kapjuk, hogy P és Q konjugáltak egymáshoz, és az összekötő egyenesük rajta van a felületen. □

2.4. A másodrendű felületek projektív osztályozása

2.4.1. A másodrendű felület kanonikus egyenlete

Ebben az alfejezetben is abból indulunk ki, hogy a projektív térben a $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ koordináta-rendszerre vonatkozó homogén koordinátákat alkalmazzuk. Tekintsünk egy $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületet, melyet a (HMFE) egyenlet ír le az $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ homogén pontkoordinátákra nézve.

Amennyiben a térben veszünk egy másik $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-alakzatot, akkor az $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ és $(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')$ homogén koordináta-négyesek kapcsolatát az (1.2) összefüggés írja le, amelyben $\mathbf{B}$ a bázistranszformáció mátrixa. Világos, hogy transzponálással ebből az

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')\cdot\mathbf{B}^T$$

egyenlet adódik. Ebből pedig az következik, hogy a $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületet az

$$(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet írja le a $\mathcal{K}'$–beli pontkoordinátákra vonatkozóan.

Jelölje $\mathbf{A}'$ az $\bar{\mathcal{F}}$ felületet a $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzatban leíró egyenlet együtthatóiból képzett szimmetrikus mátrixot. A fentiek alapján erre fennáll az $\mathbf{A}' = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ egyenlőség. Világos, hogy az $\mathbf{A}'$ mátrix a'_{rs} elemeivel a felülete egyenlete a $\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} a'_{rs}\, x'_r\, x'_s = 0$ alakban is felírható.

A továbbiakban azt tárgyaljuk, hogy alkalmas koordináta-alakzatot választva miként lehet egyszerűbb alakra hozni a másodrendű felület egyenletét. Az elsődleges célunk az, hogy a leíró egyenletből eltüntessük a vegyes másodfokú tagokat. Ezt úgy tudjuk elérni, hogy a [4] jegyzet VI. fejezetének a 4. paragrafusában leírt, a síkbeli másodrendű görbékre vonatkozó autopolár háromszöges eljárást a térbeli felületekre alkalmazzuk.

Kézenfekvő, miszerint négy pontot akkor mondunk általános helyzetűnek, ha a négy pont nincs egy síkon.

2.20. Definíció. Legyenek $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ általános helyzetű pontok a projektív térben. Azt mondjuk, hogy ezek egy autopolár pontnégyest képeznek a (HMFE) egyenlettel leírt másodrendű felületre nézve, ha a négy pont közül bármelyik kettő konjugált egymáshoz.

2.21. Állítás. *Bármely másodrendű felülethez léteznek autopolár pontnégyesek.*

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan P_1 pontot, amely nincs rajta a felüleleten. Ekkor a P_1 pont nem lehet szinguláris és a polársíkja, melyet jelöljön ϱ_1, nem halad át rajta. Ha a ϱ_1 síkot tartalmazza a felület, akkor annak bármely két pontja konjugált egymáshoz. Ez esetben vehetjük a ϱ_1 három nem kollineáris $P_2,\ P_3,\ P_4$ pontját és máris adódik egy autopolár pontnégyes.

Amennyiben a ϱ_1 síkot nem tartalmazza a felület, akkor legyen P_2 ezen síknak egy olyan pontja, amely nincs a felületen. Világos, hogy ez esetben a P_2 pont ϱ_2 polársíkján rajta van a P_1 pont, tehát ϱ_1 és ϱ_2 különböző síkok. Vegyük ezen síkok g metszésvonalát, melynek összes pontja konjugált a $P_1,\ P_2$ pontokhoz. Ha a g egyenest tartalmazza a felület, akkor annak tetszőleges $P_3,\ P_4$ pontjaival egy autopolár pontnégyeshez jutunk.

Amennyiben a g egyenest nem tartalmazza a felület, akkor legyen P_3 ezen egyenesnek egy olyan pontja, amely nincs rajta a felületen. Ekkor a P_3–nak a felületre vonatkozó ϱ_3 polársíkja nem tartalmazza g egyenest, hanem azt egy a P_3–tól különböző pontban metszi. Ez a metszéspont a $\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3$ polársíkok egyetlen közös pontja. Ha ezt a metszéspontot választjuk P_4–nek, akkor a $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ általános helyzetű pontnégyes autopolár az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületre nézve. $\square$

2.22. Állítás. *Ha a $\mathcal{K}'$ koordináta-rendszer $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ alappontjai egy autopolár pontnégyest képeznek az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületre nézve, akkor az $\bar{\mathcal{F}}$ felület $\mathcal{K}'$–beli egyenletében nem szerepelnek vegyes másodfokú tagok.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{A}'$ szimmetrikus mátrix a'_{12} eleme eltűnik. A $\mathcal{K}'$ szerinti koordinátázásnál a B_1 bázispontnak $(1,0,0,0)$ az egyik homogén koordináta-négyese, a B_2 bázispontnak pedig $(0,1,0,0)$. Mivel a két pont konjugált egymáshoz, azt kapjuk, hogy fennáll

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{23} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a'_{12} \,.$$

Hasonló módon adódik, hogy az $\mathbf{A}'$ szimmetrikus mátrixnak bármely olyan eleme 0, amely nem a négyzetes mátrix főátlójában van. Eszerint az $\mathbf{A}'$ egy diagonális mátrix, vagyis az $\bar{\mathcal{F}}$ felületnek a $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzatra vonatkozó egyenletében nincsenek vegyes tagok. $\square$

2.23. Definíció. A projektív térben egy $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület másodfokú egyenletét kanonikusnak nevezzük, ha abban nem szerepel vegyes másodfokú tag.

2.24. Következmény. *Bármely $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felülethez van olyan $\mathcal{K}'$ koordináta-rendszer, hogy az $\bar{\mathcal{F}}$ felületnek a $\mathcal{K}'$–ra vonatkozó másodfokú egyenlete kanonikus.*

2.4.2. A másodrendű felületek osztályozási tétele

Tegyük fel, hogy az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület egy olyan $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-rendszerben van leírva, ahol a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ alappontok autopolár pontnégyest alkotnak az $\bar{\mathcal{F}}$-re nézve. A 2.22. Állítás szerint ekkor az egyenletben már nem szerepelnek a vegyes tagok, vagyis az egyenlet az

$$a'_{11}(x'_1)^2 + a'_{22}(x'_2)^2 + a'_{33}(x'_3)^2 + a'_{44}(x'_4)^2 = 0 \qquad \text{(KMFE)}$$

kanonikus alakot ölti.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az egységpont megfelelő módosításával még a kanonikus egyenlet is egyszerűbb alakra hozható.

2.25. Állítás. *Van olyan $\tilde{\mathcal{K}} = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ \tilde{F}\}$ koordináta-alakzat, hogy a másodrendű felület arra vonatkozó kanonikus egyenletében az együtthatók értéke vagy 1, vagy -1, vagy pedig 0.*

Bizonyítás. A $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzathoz, illetve a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F$ pontötöshöz rendelt egyik $\mathbb{R}^4$–beli bázis legyen $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4$. Ez azt jelenti, hogy ezek

$$\mathbf{f} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4$$

összege az F egységpont egyik meghatározó vektora.

Tekintsük azt az esetet, amikor a (KMFE) kanonikus egyenletben a négy együttható egyike sem 0, vagyis fennáll $a'_{rr} \neq 0$ $(r = 1,2,3,4)$. Vegyük az $\mathbb{R}^4$–beli $\tilde{\mathbf{b}}_r = \dfrac{1}{\sqrt{|a'_{rr}|}}\mathbf{b}_r$ $(r = 1,2,3,4)$ vektorokat, majd azt az $\tilde{F}$ pontot, amelynek

$$\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{b}}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_2 + \tilde{\mathbf{b}}_3 + \tilde{\mathbf{b}}_4$$

a meghatározó vektora. Világos, hogy ez esetben a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ \tilde{F}$ pontötöshöz rendelt egyik bázis éppen $\tilde{\mathbf{b}}_1,\ \tilde{\mathbf{b}}_2,\ \tilde{\mathbf{b}}_3,\ \tilde{\mathbf{b}}_4$.

Tekintsünk egy tetszőleges P pontot, amelynek a $\mathcal{K}'$–beli egyik homogén koordináta-négyese legyen $(x'_1,\, x'_2,\, x'_3,\, x'_4)$. Ekkor az

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{|a'_{11}|}\cdot x'_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{|a'_{22}|}\cdot x'_2, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{|a'_{33}|}\cdot x'_3, \quad \tilde{x}_4 = \sqrt{|a'_{44}|}\cdot x'_4$$

számokkal alkotott $(\tilde{x}_1,\, \tilde{x}_2,\, \tilde{x}_3,\, \tilde{x}_4)$ négyes adja a P pontnak a $\tilde{\mathcal{K}} = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ \tilde{F}\}$ koordináta-alakzatra vonatkozó egyik koordináta-négyesét.

Vezessük be az $\varepsilon_r = \dfrac{a_{rr}}{|a_{rr}|}$ $(r = 1,2,3,4)$ jelölést. Mivel a pontkoordináták között fennáll az $x'_r = \dfrac{1}{\sqrt{|a'_{rr}|}}\,\tilde{x}_r$ kapcsolat, (KMFE) alapján a felület $\tilde{\mathcal{K}}$–beli egyenleteként

$$\varepsilon_1\,(\tilde{x}_1)^2 + \varepsilon_2\,(\tilde{x}_2)^2 + \varepsilon_3\,(\tilde{x}_3)^2 + \varepsilon_4\,(\tilde{x}_4)^2 = 0\,.$$

adódik, és ebben az ε_r együtthatók értéke vagy 1, vagy pedig -1.

A fenti eljárás kiterjeszthető arra az esetre is, amikor a kanonikus egyenlet együtthatói között a 0 is szerepel. Annyi módosítást kell csak tenni, hogy ha $a'_{rr} = 0$ teljesül valamely r indexre, akkor a $\tilde{\mathbf{b}}_r = \mathbf{b}_r$ vektort alkalmazzuk az $\tilde{F}$ egységpont $\tilde{\mathbf{f}}$ meghatározó vektorának előállításában. $\square$

Az alfejezet eddigi eredményei alapján már könnyen igazolni lehet az alábbi tételt, melyet a másodrendű felületek osztályozási tételének szokás mondani. A tételben felsorolt kanonikus egyenleteknél a leírt másodrendű felület elnevezését is megadjuk.

2.26. Tétel. *Megfelelő $\tilde{\mathcal{K}}$ koordináta-alakzatot alkalmazva a projektív tér koordinátázásához mindig elérhető, hogy abban egy adott másodrendű felület egyenlete megegyezzen az alábbi speciális egyenletek egyikével:*

- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_3)^2 - (\tilde{x}_4)^2 = 0$ *: projektív gömb,*
- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 - (\tilde{x}_3)^2 - (\tilde{x}_4)^2 = 0$ *: projektív hiperboloid,*
- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_3)^2 + (\tilde{x}_4)^2 = 0$ *: üres halmaz,*
- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 - (\tilde{x}_3)^2 = 0$ *: projektív kúp,*
- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_3)^2 = 0$ *: egyetlen pont,*
- $(\tilde{x}_1)^2 - (\tilde{x}_2)^2 = 0$ *: két sík,*
- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 = 0$ *: egyetlen egyenes,*
- $(\tilde{x}_1)^2 = 0$ *: egyetlen sík.*

2.4.3. Konkrét példa a kanonikus egyenlet meghatározására

A projektív térben tekintsük azt az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felületet, melyet a $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ koordináta-alakzatra nézve a

$$6\,(x_1)^2 + 3\,(x_2)^2 + (x_3)^2 - 2\,(x_4)^2 - 4\,x_1\,x_2 + 4\,x_1\,x_4 + 2\,x_2\,x_3 - 6\,x_2\,x_4 + 8\,x_3\,x_4 = 0$$

egyenlet ír le. Eszerint a másodfokú egyenlet együtthatóiból képzett szimmetrikus mátrixra fennáll $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Azt tárgyaljuk, hogy miként lehet egy olyan $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzatot választani, amelyre vonatkozóan a felület egyenlete már kanonikus alakot ölt. A 2.22. Állítás szerint ehhez egy olyan koordináta-alakzatot kell vennünk, amelyben a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ bázispontok egy autopolár pontnégyest képeznek.

A B_1 első alappont legyen azonos az I_x ponttal, vagyis legyen $B_1 = I_x$. Látható, hogy ez a $B_1\,[1, 0, 0, 0]$ pont nincs rajta a felületen, mivel a koordinátái nem elégítik ki az egyenletet. Az ehhez konjugált pontok a B_1 polársíkján vannak, melyet jelöljön ϱ_1. A 2.9. Állításból adódik, hogy a ϱ_1 sík egyenlete:

$$6\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_4 = 0.$$

Válasszuk második alappontnak a ϱ_1 síkra eső $B_2\,[0, 1, 0, 1]$ pontot, amely szintén nincs rajta a felületen. A 2.9. Állítás szerint a $(0, 1, 0, 1)$ sormátrix és az $\mathbf{A}$ mátrix szorzataként ezen B_2 pont ϱ_2 polársíkjának az egyik homogén koordináta-négyesét nyerjük. A szorzás elvégzésével adódik, hogy a ϱ_2 síkot az $5\,x_3 - 5\,x_4 = 0$ egyenlet írja le.

Világos, hogy a harmadik bázispontnak rajta kell lennie a $\varrho_1,\ \varrho_2$ síkok g metszésvonalán. Tekintsük ezen a g egyenesen a $B_3[0, 1, 1, 1]$ pontot, mint alappontot. Közvetlen számolással adódik, hogy ezen B_3 pont koordinátái sem elégítik ki a felület egyenletét. A 2.9. Állítás alkalmazásával azt kapjuk, hogy a B_3 pont ϱ_3 polársíkjának az egyenlete:

$$x_2 + 6\,x_3 - x_4 = 0.$$

A negyedik bázispont már csakis a $\varrho_1,\ \varrho_2, \varrho_3$ síkok egyetlen közös pontja lehet. Belátható, hogy ez éppen a $B_4[2, 5, -1, -1]$ lesz, mivel ennek koordinátái mindhárom sík egyenletét kielégítik.

Ellenőrzésként meg lehet határozni a B_4 pont ϱ_4 polársíkjának az egyenletét is, amely konkrétan $x_2 - x_4 = 0$. Látható, hogy $B_1,\ B_2,\ B_3$ pontok valóban rajta vannak a ϱ_4 síkon.

Hátramaradt még az F egységpont megválasztása. Az egyszerűség érdekében célszerű úgy eljárni, hogy a pontötöshöz rendelt $\mathbb{R}^4$–beli bázis $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0, 0),\ \mathbf{b}_2 = (0, 1, 0, 1),\ \mathbf{b}_3 = (0, 1, 1, 1),\ \mathbf{b}_4 = (2, 5, -1, -1)$ legyen. Ez esetben az $F\,[3, 7, 0, 1]$ lesz a $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzat egységpontja.

Korábbi tárgyalásaink szerint $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-alakzatra vonatkozóan az $\bar{\mathcal{F}}$ felületet a

$$(x_1',\, x_2',\, x_3',\, x_4') \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet írja le, amelyben $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Közvetlen számolással azt kapjuk, hogy fennáll

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 78 \end{pmatrix}.$$

Eszerint a felületet a

$$6\,(x_1')^2 - 5\,(x_2')^2 + 6\,(x_3')^2 + 78\,(x_4')^2 = 0$$

kanonikus egyenlet írja le. Ennek alapján már megállapíthatjuk, hogy az $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület egy projektív gömb. Ha még a 2.25. Állítás bizonyításában leírt transzformációt is alkalmazzuk, akkor $\bar{\mathcal{F}}$-nek a $\tilde{\mathcal{K}}$ koordináta-rendszerbeli egyenlete az $(\tilde{x}_1)^2 - (\tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_3)^2 + (\tilde{x}_4)^2 = 0$ alakot ölti.

2.5. Másodrendű görbék a projektív síkon

Ebben az alfejezetben egy összefoglaló áttekintést adunk a projektív sík másodrendű görbéiről. A célunk az, hogy felidézzük azokat a másodrendű görbékkel kapcsolatos alapvető fogalmakat és tételeket, melyeket a szakdolgozat további fejezeteiben alkalmazni fogunk. Egyébként a téma részletes tárgyalása megtalálható a [3] tankönyv 46–48. paragrafusaiban, továbbá a [4] egyetemi jegyzet VI. fejezetében.

Az X euklideszi térben vegyünk egy σ síkot és annak a $\bar{\sigma}$ projektív kiterjesztését. A $\bar{\sigma}$ projektív sík koordinátázását az első fejezetben tárgyalt térbeli koordinátázás alkalmazásával végezzük el. Rögzítsünk az $\bar{X}$ projektív térben egy olyan $\mathcal{K}' = \{B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ F\}$ koordináta-alakzatot, amelynek $B_1,\ B_2,\ B_3$ alappontjai rajta vannak a $\bar{\sigma}$ projektív síkon. Világos, hogy amennyiben a $\mathcal{K}'$–ra vonatkozó homogén koordinátákat alkalmazzuk, akkor a $\bar{\sigma}$ síkot az $x_4' = 0$ egyenlet írja le.

2.27. Definíció. Egy $\bar{\sigma}$ síkbeli P pontnak a $\mathcal{K}'$ szerinti térbeli homogén koordinátái legyenek a $(\lambda\, x_1',\ \lambda\, x_2',\ \lambda\, x_3', 0)$ számnégyesek. Ekkor a P pontnak a $\mathcal{K}'$ szerinti síkbeli homogén koordinátáin a $(\lambda\, x_1',\ \lambda\, x_2',\ \lambda\, x_3')$ számhármasokat értjük, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\lambda \neq 0$.

A síkbeli egyenesekhez kézenfekvő módon lehet olyan számhármasokat rendelni, amelyek csak számszorzótól eltekintve egyértelműek.

Tekintsünk egy $\bar{\sigma}$-beli e egyenest. Amennyiben az $(u'_1,\, u'_2,\, u'_3)$ számhármas nem minden eleme 0 és az $u'_1\, x'_1 + u'_2\, x'_2 + u'_3\, x'_3 = 0$ egyenletet csakis az e egyenes pontjainak síkbeli homogén kordinátái elégítik ki, akkor az $(u'_1,\, u'_2,\, u'_3)$ számhármast az e egyik homogén koordináta-hármasának mondjuk.

A $\bar{\sigma}$ síkbeli másodrendű görbe értelmezése pedig evidens. Vegyünk hat valós számot, melyek között legalább egy különbözik 0-tól. Ezen valós számokat jelöljük ezúttal a c_{rs} $(1 \leq r \leq s \leq 3)$ alakban. Ekkor a

$$c_{11}\,(x'_1)^2 + c_{22}\,(x'_2)^2 + c_{33}\,(x'_3)^2 + 2\,c_{12}\,x'_1\,x'_2 + 2\,c_{13}\,x'_1\,x'_3 + 2\,c_{23}\,x'_2\,x'_3 = 0$$

egyenlettel leírt $\bar{\sigma}$-beli $\mathcal{G}$ alakzatot egy másodrendű görbének mondjuk. Világos, hogy az egyenletben szereplő c_{rs} együtthatók meghatároznak egy 3×3-as $\mathbf{C}$ szimmetrikus mátrixot. Ennek elemeit alkalmazva a $\mathcal{G}$ másodrendű görbe egyenlete a $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} c_{rs}\, x'_r\, x'_s = 0$ alakban is megadható.

A másodrendű görbék kapcsán az alább leírtak részletes tárgyalása fellelhető a [3] tankönyv 46. fejezetében. Valójában nem kell tennünk mást, mint követni a dolgozat 2.3. alfejezetének vizsgálatait azzal a módosítással, hogy a térbeli koordináta-négyesek helyett síkbeli koordináta-hármasokat, a negyedrendű négyzetes mátrixok helyett pedig 3×3–as szimmetrikus mátrixokat alkalmazunk.

A síkbeli koordináta-hármasok alapján értelmezhető a pontoknak egy adott másodrendű görbére vonatkozó konjugáltsága a 2.7. Definíciónak megfelelően. Kézenfekvő módon definiálható a görbe szinguláris pontjának a fogalma is. Igazolható, hogy amennyiben egy síkbeli pont nem szinguláris, akkor a hozzá konjugált pontok egy egyenest alkotnak. Ezt az egyenest a pont poláris egyenesének nevezik az adott másodrendű görbére nézve.

Bizonyítható az is, hogy amennyiben a másodrendű görbének vesszük egy nem szinguláris pontját, akkor annak polárisát vagy tartalmazza a másodrendű görbe vagy pedig a polárisnak egyetlen közös pontja van a görbével. Emellett az adott ponton átmenő összes többi egyenesnek pontosan két közös pontja van a másodrendű görbével. Ezen kitüntetett szerepe miatt a görbe adott pontbeli érintőjén a ponthoz tartozó poláris egyenest értjük.

A projektív sík másodrendű görbéinek az osztályozását az alábbi tétel adja meg.

2.28. Tétel. *Megfelelő $\tilde{\mathcal{K}}$ koordináta-alakzatot alkalmazva a projektív sík koordinátázásához mindig elérhető, hogy abban egy adott másodrendű görbe egyenlete megegyezzen az alábbi speciális egyenletek egyikével:*

- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 - (\tilde{x}_3)^2 = 0$ *: projektív kör,*
- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_3)^2 = 0$ *: üres halmaz,*
- $(\tilde{x}_1)^2 - (\tilde{x}_2)^2 = 0$ *: két egyenes (más szóval egy egyenespár),*

- $(\tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_2)^2 = 0$ *: egyetlen pont,*
- $(\tilde{x}_1)^2 = 0$ *: egyetlen egyenes.*

Megjegyzés. Tekintsünk egy σ euklideszi síkot és annak a $\bar{\sigma}$ projektív kibővítését. Amennyiben a $\bar{\sigma}$ síkon veszünk egy úgynevezett projektív kört, akkor az vagy egy σ-beli ellipszisnek, vagy egy σ-beli hiperbolának, vagy pedig egy σ-beli parabolának a projektív kibővítésével jön létre.

Az osztályozási tételből már következnek az alábbi kijelentések.

2.29. Következmény. *(1) Ha egy másodrendű görbének van olyan pontja, amely nem szinguláris, akkor az a görbe vagy egy projektív kör, vagy pedig egy egyenespár.*
(2) A projektív körnek nincs szinguláris pontja.
(3) Az egyenespárnak egyetlen szinguláris pontja van, konkrétan a két egyenes metszéspontja.

Ismeretes, hogy a projektív síkon vett projektív kört öt pontja már egyértelműen meghatározza. Ennek egy részletes bizonyítása megtalálható a [3] tankönyv 48. fejezetében. A következő tétel bizonyítására nem térünk ki a dolgozatban, de megjegyezzük, hogy a [3] tankönyv 508–510. oldalain tárgyalt Pascal-tétel alkalmazásával is igazolható.

2.30. Tétel. *Ha a $\bar{\sigma}$ projektív síkon vett másodrendű görbe egy projektív kör, akkor azt három pontja és azok közül kettőben az érintőegyenes már egyértelműen meghatározzák.*

Megjegyzés. Azt már könnyű belátni, hogy igaz az alábbi kijelentés. Legyen adva a $\bar{\sigma}$ projektív síkon egy olyan másodrendű görbe, amely megegyezik két egyenes uniójával (azaz egy egyenespárral). Ha D_1 és D_2 ennek olyan nem szinguláris pontjai, melyekben a poláris egyenesek különbözőek, akkor a két pont és a két poláris (vagyis a két érintő) már egyérteműen meghatározzák ezt a másodrendű görbét.

A továbbiakban a másodrendű felületek síkmetszeteit tárgyaljuk. A következő állítás már könnyen igazolható.

2.31. Állítás. *Legyen adva a $\bar{X}$ térben egy $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület, amelyet a $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzatra nézve a $\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} a'_{rs}\, x'_r\, x'_s = 0$ egyenlet ír le. Ekkor a felületnek az $x'_4 = 0$ egyenletű $\bar{\sigma}$ síkkal vett metszete egy másodrendű görbe, amelynek a síkbeli koordináták szerinti egyenlete $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a'_{rs}\, x'_r\, x'_s = 0$.*

Az alábbi tétel bizonyítására nem térünk ki a dolgozatban. Annyit megjegyzünk, hogy amennyiben a $\mathcal{K}'$ koordináta-alakzat B_1 alappontjaként a P pontot választjuk, akkor a tétel már egyszerűbb számolással igazolható a polársíkkal kapcsolatos 2.9. Állítás alapján.

2.32. Tétel. *A $\bar{X}$ projektív térben legyen adva egy $\bar{\mathcal{F}}$ másodrendű felület és azon egy P pont, amely nem szinguláris. Ha egy a P-t tartalmazó $\bar{\sigma}$ sík különbözik a P-beli polársíktól, akkor a metszetként kapott $\mathcal{G} = \bar{\sigma} \cap \bar{\mathcal{F}}$ másodrendű görbének sem szinguláris pontja a P, továbbá a metszetgörbe P-beli érintője megegyezik a polársík és a $\bar{\sigma}$ sík metszésvonalával.*

3. fejezet

Másodrendű felületsorok a projektív térben

A két másodrendű felület által meghatározott felületsor fogalma és alapvető tulajdonságainak összefoglalása megtalálható a [6] tankönyv 172–173. oldalain. Ebben a fejezetben részletesen kifejtjük a másodrendű felületsorok azon jellemzőit, amelyeket majd felhasználunk a széteső áthatás tételének a bizonyításánál.

A továbbiakban feltesszük, hogy a projektív térben a $\mathcal{K} = \{I_x,\ I_y,\ I_z,\ O,\ E\}$ koordinátaalakzatra vonatkozó homogén koordinátákat alkalmazzuk. A homogén koordináta-négyesekre továbbra is az $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ jelölést használjuk.

Legyen adva két olyan 4×4–es szimmetrikus mátrix, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$, melyeknek van 0–tól különböző elemük és bármely $b \in \mathbb{R}$ szám esetén fennáll $\mathbf{A} \neq b \cdot \mathbf{C}$. Eszerint az $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ mátrixok nem számszorosai egymásnak. A szimmetrikus mátrixok elemeit jelölje a_{rs} és c_{rs} $(r,\ s = 1, 2, 3, 4)$.

Tekintsük a

$$\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} a_{rs}\, x_r\, x_s = 0, \qquad \sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} c_{rs}\, x_r\, x_s = 0$$

egyenletekkel leírt másodrendű felületeket, melyeket jelöljön $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$. Természetesen a két felület egyenletét megadhatjuk az $\mathbf{x}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}^T = 0$ és $\mathbf{x}\,\mathbf{C}\,\mathbf{x}^T = 0$ mátrixos formában is.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ olyan másodrendű felületek, amelyeknek vannak közös pontjaik. Kézenfekvő, hogy a két másodrendű felület metszetén azon pontok halmazát értjük, amelyek mindkét felületen rajta vannak.

3.1. Definíció. Az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ másodrendű felületek metszetgörbéjén (vagy más szóval a két felület áthatási görbéjén) a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ ponthalmazt értjük.

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{G}$ metszetgörbét le lehet írni a

$$\left(\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} a_{rs}\, x_r\, x_s\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} c_{rs}\, x_r\, x_s\right)^2 = 0$$

negyedfokú egyenlettel. Ennek következtében szokás azt mondani, hogy két másodrendű felület egy negyedrendű alakzatban metszi egymást.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ másodrendű felületek közül a $\mathcal{H}$ egy síkpár, azaz megegyezik valamely $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkok uniójával. A 2.31. Állításnak megfelelően a $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkok egy-egy másodrendű görbében metszik el az $\mathcal{F}$ felületet. Tehát ebben az esetben a negyedrendű $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbe előáll két másodrendű síkgörbe uniójaként. Szokás ilyenkor úgy fogalmazni, hogy a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ metszet szétesik két másodrendű görbére.

Ezt követően azt is feltesszük, hogy az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületeknek vannak nem szinguláris pontjaik. Emlékezzünk rá, hogy a másodrendű felület egy nem szinguláris pontjában a 2.18. Definíció alapján a polársík adja az érintősíkot.

3.2. Definíció. Legyen D egy olyan pontja az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ másodrendű felületek $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbéjének, amely egyik felületnek sem szinguláris pontja. A D pontot a metszet duplapontjának mondjuk, ha a két felület D pontbeli érintősíkja egybeesik.

Megjegyzés. Legyen a $D\,[y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4]$ egy közös pontja az $\mathbf{A},\ \mathbf{C}$ szimmetrikus mátrixokkal meghatározott $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületeknek. Vegyük az $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ számnégyest, mint egy sormátrixot. A 2.9. Állítást felhasználva könnyen belátható, hogy D akkor lesz duplapontja a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ metszetnek, ha a mátrixok szorzatára teljesül az $\mathbf{y}\,\mathbf{A} = b \cdot \mathbf{y}\,\mathbf{C}$ egyenlőség valamely $b \in \mathbb{R}$ szám esetén.

A két felület egyenletéből egy felületsort nyerünk az alábbi definíció alapján.

3.3. Definíció. Az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ felületek által meghatározott másodrendű felületsoron az

$$\lambda \cdot \mathbf{x}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}^T + \mu \cdot \mathbf{x}\,\mathbf{C}\,\mathbf{x}^T = 0 \qquad \text{(MFSE)}$$

$(\lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \lambda^2 + \mu^2 > 0)$ másodfokú egyenletekkel leírt felületek összességét értjük.

Megjegyzés. Világos, hogy a felületsornak azok a másodrendű felületek a tagjai, amelyek egyenletei felírhatóak a

$$\textstyle\sum_{r=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} (\lambda\, a_{rs} + \mu\, c_{rs})\, x_r\, x_s = 0$$

alakban valamely $\lambda,\ \mu\ (\lambda^2 + \mu^2 > 0)$ valós számokkal.

Megjegyzés. Ha a $\lambda,\ \mu$ értékek befutják a valós számok halmazát, akkor a fenti (MFSE) egyenletből megkapjuk a másodrendű felületsor minden elemét. Ha adott $\lambda,\ \mu\ (\lambda^2 + \mu^2 > 0)$ számpár esetén az (MFSE) egyenlet a $\mathcal{J}$ felületet írja le, akkor a $b\,\lambda,\ b\,\mu\ (b \neq 0)$ számpárhoz ugyanaz a $\mathcal{J}$ felület tartozik. Nyilvánvaló, hogy az (MFSE) egyenlet $\lambda = 0\ (\mu \neq 0)$ esetben a $\mathcal{H}$ felületet, $\mu = 0\ (\lambda \neq 0)$ esetben pedig az $\mathcal{F}$ felületet írja le.

Megjegyzés. Legyenek $\lambda_1,\ \mu_1$ és $\lambda_2,\ \mu_2$ olyan rögzített valós számpárok, hogy egyikük sem számszorosa a másiknak. Ezen rögzített értékek mellett az (MFSE) egyenlettel leírt másodrendű felületek legyenek $\mathcal{J}_1$ és $\mathcal{J}_2$. Ekkor ezeket a $\mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_2$ felületeket a felületsor két különböző elemének mondjuk.

Az alábbi kijelentés igazolása kézenfekvőnek tűnik, emiatt nem is térünk ki rá.

3.4. Állítás. *Tekintsük az $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ felületek $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ metszetgörbéjét és az általuk meghatározott másodrendű felületsort. Ekkor a felületsor bármely $\mathcal{J}$ eleme tartalmazza a $\mathcal{G}$ áthatási görbét.*

Az alábbi állítás szerint a felületsor elemei az áthatási görbe pontjaitól eltekintve egyrétegűen kitöltik a teljes projektív teret.

3.5. Állítás. *Legyen Q egy olyan pont az $\bar{X}$ projektív térben, amely nincs rajta a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbén. Ez esetben a felületsornak pontosan egy olyan eleme van, amely tartalmazza a Q pontot.*

Bizonyítás. Vegyük a Q pont valamely $\mathbf{y} = (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)$ koordináta-négyesét és az abból adódó

$$\alpha = \mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}^T = \textstyle\sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 a_{rs}\, y_r\, y_s, \qquad \gamma \;=\; \mathbf{y}\,\mathbf{C}\,\mathbf{y}^T = \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 c_{rs}\, y_r\, y_s$$

valós számokat. Mivel az $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ felületek közül legalább az egyiken nincs rajta a Q pont, az α, γ számok közül legalább az egyik nem 0.

Helyettesítsük be a Q pont $\mathbf{y}$ homogén koordinátáit a felületsort leíró (MFSE) egyenletbe. Ily módon láthatjuk, hogy egy λ, μ számpárhoz tartozó felület akkor tartalmazza a Q pontot, ha a $\lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \gamma = 0$ egyenlőség teljesül. Ennek a λ-ra és μ-re vonatkozó homogén lineáris egyenletnek pedig csak a $b\,\gamma,\ -b\,\alpha\ (b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$ számpárok képezik a (nemtriviális) megoldásait. Azt kaptuk tehát, hogy a felületsornak csupán a $\gamma \cdot \mathbf{A} - \alpha \cdot \mathbf{C}$ mátrix által meghatározott eleme tartalmazza a Q pontot. $\square$

A fenti megállapításokból már következik az alábbi kijelentés.

3.6. Állítás. *Legyenek $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ különböző elemei az $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ felületek által definiált felületsornak. Ekkor a $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ másodrendű felületek áthatási görbéje egybeesik a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ metszettel.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ felületek $\mathcal{G}$ áthatási görbéjét a felületsor összes tagja tartalmazza. Emiatt $\mathcal{G}$ részhalmaza a $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ metszetnek.

Vegyünk a térben egy olyan Q pontot, amely nincs rajta a $\mathcal{G}$ metszetgörbén. Mivel $\mathcal{J}_1$ és $\mathcal{J}_2$ a felületsor különböző tagjai, a 3.5. Állítás szerint a Q pontot mindkettő nem tartalmazhatja, vagyis a Q pont nem lehet eleme a $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ metszetnek. Ezek alapján adódik, hogy teljesül a $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = \mathcal{G}$ összefüggés. $\square$

Megjegyzés. Mivel a felületsor bármely két különböző elemének ugyanaz a metszetgörbéje, a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbét szokás a felületsor alapgörbéjének is nevezni.

4. fejezet

A szétes̋ő áthatás tétele másodrendű felületekre

4.1. A tétel kimondása és igazolása

Ebben a fejezetben egy elégséges feltételt tárgyalunk arra vonatkozóan, hogy két másodrendű felület metszete két másodrendű síkgörbe uniója legyen. Ahogyan azt az Előszóban már említettük, az itt tárgyalásra kerülő széteső áthatás tételének egy tömör igazolása megtalálható Kárteszi Ferenc [6] könyvének a 30. paragrafusában. Annak alapján egy részletes bizonyítást adunk a tételre. Ennek során alkalmazni fogjuk az előző fejezetekben bevezetett fogalmakat (az áthatási görbe duplapontja, felületsor) és a velük kapcsolatos állításokat.

Vezessünk be még néhány jelölési megállapodást. Adott $P,\ Q$ pontok esetén a rajtuk áthaladó egyenest jelölje $\langle P, Q\rangle$. Ha adva van egy e egyenes és egy hozzá nem illeszkedő P pont, akkor az őket tartalmazó síkot jelölje $\langle e, P\rangle$.

Legyenek adva az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ egymástól különböző másodrendű felületek, melyekről feltesszük, hogy metszik egymást, azaz $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ és egyikük sem síkpár. Az előző fejezet eredményeiből már következik, hogy amennyiben az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által definiált felületsor egyik tagja egy síkpár (vagyis két sík uniója), akkor a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ metszetgörbe szétesik két másodrendű görbére. A következő tétel egy elégséges (de nem szükséges) feltételt ad arra, hogy a felületsor egyik tagja egy síkpár legyen.

4.1. Tétel. *Legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ olyan másodrendű felületek, ahol a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbének van két olyan duplapontja D_1 és D_2, melyekhez tartozó felületi érintősíkok nem tartalmazzák a $d = \langle D_1, D_2\rangle$ összekötő egyenest. Ha a $\mathcal{G}$ metszetnek vannak olyan további P_1 és P_2 pontjai, hogy azok nincsenek rajta d-n és a $\sigma_1 = \langle d,\ P_1\rangle,\ \sigma_2 = \langle d, P_2\rangle$ síkok különbözőek, akkor a $\mathcal{J} = \sigma_1 \cup \sigma_2$ síkpár az egyik tagja az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által meghatározott felületsornak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy teljesülnek a fenti kijelentésben szereplő feltételek. A $D_1,\ D_2$ pontokban legyenek τ_1 és τ_2 az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületek közös érintősíkjai. Mint ismeretes, τ_1 és τ_2 megegyeznek az

$\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületek D_1 és D_2 pontokhoz tartozó polársíkjaival. Világos, hogy a $\tau_1,\ \tau_2$ érintősíkok nem eshetnek egybe, mivel nem tartalmazzák a d egyenest.

Mivel a $D_1,\ D_2$ pontok nem konjugáltak egymáshoz az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületekre nézve, a 2.13. Állítás szerint a d egyenes nincs rajta egyik felületen sem. Emiatt a 2.19. Állításból az következik, hogy a d egyenesnek csak a $D_1,\ D_2$ pontjai vannak rajta az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületeken. Ily módon megállapítható, hogy a d egyenesnek a $D_1,\ D_2$ pontokon kívül már nincs további közös pontja a $\mathcal{G}$ áthatási görbével.

A d egyenest és a P_1 pontot tartalmazó σ_1 sík az $\mathcal{F}$ felületet a $\sigma_1 \cap \mathcal{F}$ másodrendű görbében metszi. Világos, hogy a $\sigma_1 \cap \mathcal{F}$ metszetgörbe vagy egy projektív kör, vagy pedig egyenespár, mivel van három nem kollineáris pontja. Ezen rajta vannak a $D_1,\ D_2,\ P_1$ pontok és 2.32. Tétel alapján adódik, hogy a duplapontokban az $e_1 = \sigma_1 \cap \tau_1,\ e_2 = \sigma_1 \cap \tau_2$ metszésvonalak adják a kimetszett görbe érintőit. Vegyük észre, hogy ugyanezt lehet elmondani a σ_1 által a $\mathcal{H}$ felületből kimetszett $\sigma_1 \cap \mathcal{H}$ másodrendű görbéről is. Alkalmazva 2.30. Tételt és az azt követő megjegyzést, miszerint három pont és közülük kettőben az érintő már egyértelműen meghatározzák a másodrendű görbét, azt kapjuk, hogy a $\sigma_1 \cap \mathcal{F}$ és $\sigma_1 \cap \mathcal{H}$ metszetgörbék egybeesnek. Hasonlóan igazolható, hogy teljesül a $\sigma_2 \cap \mathcal{F} = \sigma_2 \cap \mathcal{H}$ egyenlőség is.

Célszerű itt megjegyeznünk, hogy a fentiek szerint a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbe tartalmazza a $\sigma_1 \cap \mathcal{F},\ \sigma_2 \cap \mathcal{F}$ másodrendű síkgörbéket, amelyek projektív körök vagy egyenespárok lehetnek.

Tekintsük a $D_1,\ D_2$ duplapontok összekötésével nyert d egyenes egy további Q pontját. Mivel Q nincs rajta a $\mathcal{G}$ áthatási görbén, sőt az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületek egyikén sem, a 3.5. Állítás következtében az általuk definiált felületsorban egyetlen olyan $\mathcal{J}$ másodrendű felület van, amely tartalmazza ezt a Q pontot. A Q pont benne van a σ_1 síkban, így a Q ponton át tetszőleges sok olyan σ_1-beli egyenes húzható, amely két pontban is elmetszi a $\sigma_1 \cap \mathcal{F}$ síkgörbét. Mivel a $\mathcal{G}$ metszetgörbe a $\mathcal{J}$ felületen is rajta van és a $\sigma_1 \cap \mathcal{F}$ görbe részhalmaza $\mathcal{G}$-nek, azt kapjuk, hogy ezen metsző egyeneseknek van legalább három közös pontjuk a $\mathcal{J}$-vel. A 2.19. Állítás szerint ezek a Q ponton áthaladó metsző egyenesek mind rajta vannak a $\mathcal{J}$ felületen. Ennek alapján már adódik, hogy a σ_1 síkot tartalmazza a $\mathcal{J}$ másodrendű felület.

Analóg módon belátható, hogy a $\mathcal{J}$ felület a σ_2 síkot is tartalmazza. Mivel σ_1 és σ_2 különbözőek, a $\mathcal{J}$ másodrendű felület nem lehet más, mint az általuk alkotott síkpár, vagyis $\mathcal{J} = \sigma_1 \cup \sigma_2$ teljesül. $\square$

Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ másodrendű felületekre teljesülnek az előbbi 4.1. Tételben felsorolt feltételek. A tétel bizonyítása alapján a felületsorhoz tartozó $\mathcal{J} = \sigma_1 \cup \sigma_2$ síkpárt, illetve annak egyenletét konkrétan is meg tudjuk határozni az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületek egyenleteiből nyert $\mathbf{A},\ \mathbf{C}$ szimmetrikus mátrixok alapján. Konkrétan, igaz az alábbi kijelentés.

4.2. Következmény. *Legyen Q a $d = \langle D_1, D_2 \rangle$ egyenesnek egy a duplapontoktól különböző pontja. Tekintsük az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által definiált felületsornak azt a $\mathcal{J}$ elemét, amely tartalmazza a Q pontot. Ekkor a $\mathcal{J}$ másodrendű felület egy olyan síkpár, amely nem függ a d-re eső Q pont megválasztásától.*

Az alábbi kijelentést szokás a szétesső áthatás tételének nevezni, mondván, hogy ilyenkor az áthatási görbe szétesik két másodrendű síkgörbére.

4.3. Tétel. *Legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ olyan másodrendű felületek, ahol a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbének van két olyan D_1 és D_2 duplapontja, melyekhez tartozó érintősíkok nem tartalmazzák a $d = \langle D_1, D_2 \rangle$ egyenest. Ha $\mathcal{G}$ metszetgörbének vannak olyan további P_1 és P_2 pontjai, hogy a $\sigma_1 = \langle d, P_1 \rangle$, $\sigma_2 = \langle d, P_2 \rangle$ síkok különbözőek, akkor a $\mathcal{G}$ áthatási görbe megegyezik két másodrendű síkgörbe uniójával.*

Bizonyítás. Az előbb igazolt 4.1. Tétel kimondja, hogy a $\mathcal{J} = \sigma_1 \cup \sigma_2$ síkpár az egyik eleme az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által meghatározott felületsornak. A 3.6. Állítás szerint a felületsor bármely két különböző elemének ugyanaz a metszetgörbéje, tehát fennáll a $\mathcal{G} = \mathcal{J} \cap \mathcal{F} = \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$ összefüggés. Ebből adódóan a $\mathcal{G}$ áthatási görbe megegyezik a $\sigma_1 \cap \mathcal{F} = \sigma_1 \cap \mathcal{H}$ és $\sigma_2 \cap \mathcal{F} = \sigma_2 \cap \mathcal{H}$ másodrendű görbék uniójával. $\square$

4.2. Példák másodrendű felületek szétesső áthatására

4.2.1. Gömb és henger áthatása

Az X euklideszi térben vegyük az O középpontú és $r = 2$ sugarú $\mathcal{F}$ gömböt, amelynek egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Alkalmazzuk az $\bar{X}$ projektív térbeli homogén koordinátákat. Nyilvánvaló, hogy homogén koordinátákban az $\mathcal{F}$ gömböt az

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - 4(x_4)^2 = 0$$

másodfokú egyenlet írja le.

Tekintsük továbbá azt a $\mathcal{H}$ ferde körhengert, amelynek vezérköre a $z = 0,\ x^2 + y^2 = 4$ egyenletekkel meghatározott kör, az alkotóegyenesek irányát meghatározó vektor pedig $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Igazolható, hogy ennek a $\mathcal{H}$ hengernek az egyenlete az X térbeli koordináta-rendszerben
$x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz - 4 = 0$. Ismét áttérve homogén koordinátákra az

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_2x_3 - 4(x_4)^2 = 0$$

egyenletet nyerjük a $\mathcal{H}$ henger projektív kibővítésére, amely már az $I\,[0, 2, 1, 0]$ ideális pontot is tartalmazza. Vizsgáljuk meg az $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ felületek metszetét.

Az egyenletek szerint az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ másodrendű felületeket meghatározó szimmetrikus mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Egyszerűen belátható, hogy a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbének van két duplapontja, melyek homogén koordinátái $[2, 0, 0, 1]$ és $[-2, 0, 0, 1]$. Ezen $D_1,\ D_2$ duplapontokban a felületek közös érintősíkjainak az egyenlete $x_1 - 2x_4 = 0$, illetve $x_1 + 2x_4 = 0$. Világos, hogy ezen polársíkok nem tartalmazzák a $d = \langle D_1, D_2 \rangle$ egyenest. A $\mathcal{G}$ metszeten rajta vannak még a $P_1\,[0, 2, 0, 1],\ P_2[0, 6/5, 8/5, 1]$ pontok is, és a $D_1,\ D_2,\ P_1,\ P_2$ pontok nincsenek egy síkon. Emiatt a $\mathcal{G}$ metszetgörbe megegyezik két másodrendű síkgörbe uniójával a 4.3. Tétel szerint.

A másodrendű görbék síkjait az alábbiak szerint kaphatjuk meg. A 4.2. Következménynek megfelelően a $d = \langle D_1, D_2 \rangle$ egyenesen tekintsük a $Q = O$ pontot, melynek homogén koordinátái $\mathbf{y} = (0, 0, 0, 1)$. A 3.5. Állítás bizonyítását követve vegyük az $\alpha = \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = -4,\ \ \gamma = \mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y} = -4$ számokat. Az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által definiált felületsornak azon $\mathcal{J}$ eleme tartalmazza a Q pontot, amelyet a $\gamma\mathbf{A} - \alpha\mathbf{C}$ mátrix vagy annak egy számszorosa ír le. Azt kapjuk, hogy ez esetben a $\mathbf{J} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$ mátrix határozza meg a $\mathcal{J}$ felületet, melynek egyenlete

$$-4x_2\,x_3 + 3\,(x_3)^2 = 0, \quad \text{illetve} \quad x_3(3x_3 - 4x_2) = 0\,.$$

Világos, hogy az $x_3 = 0$ és $3x_3 - 4x_2 = 0$ egyenletű $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkok uniója képezi a $\mathcal{J}$ felületet.

A $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \mathcal{F} \cap \mathcal{J}$ összefüggésből adódik, hogy az áthatási görbe ezúttal két körre esik szét, ahogyan az a 4.1 ábrán is látható. Ezeket az $r = 2$ sugarú köröket a $z = 0,\ 3z - 4y = 0$ egyenletű síkok metszik ki az $\mathcal{F}$ gömbfelületből és a $\mathcal{H}$ hengerből.

4.2.2. Két henger áthatása

Az X euklideszi térben tekintsük az $r = 1$ sugarú és z tengelyű $\mathcal{F}$, illetve az $r = 1$ sugarú és x tengelyű $\mathcal{H}$ forgáshengert. Ezen hengereket az $x^2 + y^2 - 1 = 0,\ y^2 + z^2 - 1 = 0$ egyenletek írják le a derékszögű koordináta-rendszerben.

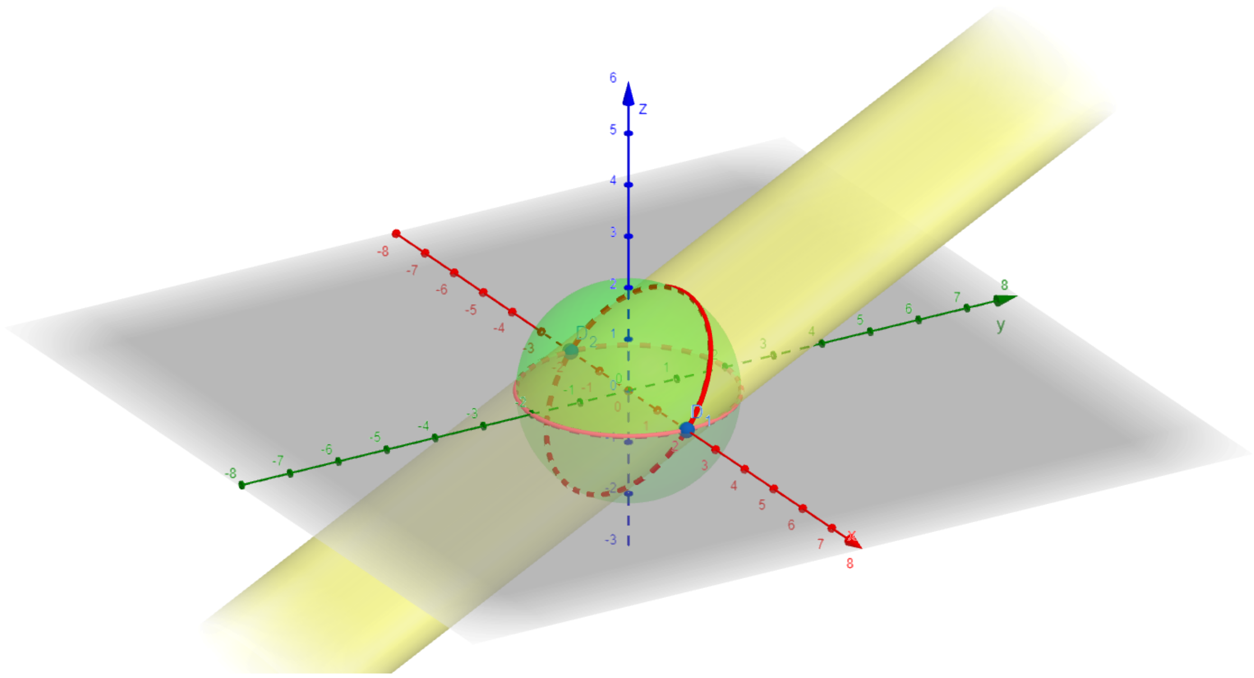
Ha áttérünk a $\bar{X}$ projektív térbeli homogén koordinátákra, az

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_4)^2 = 0, \quad (x_2)^2 + (x_3)^2 - (x_4)^2 = 0$$

összefüggések határozzák meg a két felületet. Célszerű itt megjegyeznünk, hogy az X térnek a végtelen távoli pontokkal való bővítése miatt a hengerekből $\bar{X}$-beli projektív kúpokat nyerünk. Közvetlen számolással igazolható, hogy a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbének duplapontjai a $[0, 1, 0, 1]$, illetve $[0, -1, 0, 1]$ homogén koordinátájú $D_1,\ D_2$ pontok, mivel ezekben a felületi érintősíkok egybeesnek. Ezek mellett a $P_1\,[1, 0, -1, 1]$ és $P_2\,[1, 0, 1, 1]$ pontok is rajta vannak a $\mathcal{G}$ metszeten. Belátható, hogy a $D_1,\ D_2,\ P_1,\ P_2$ pontok nincsenek egy síkon. A 4.3. Tételből adódik, hogy a $\mathcal{G}$ metszetgörbe ez esetben is két másodrendű síkgörbe uniója.

Az előbbi példánál alkalmazott eljárás alapján könnyen meghatározható az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által definiált felületsor azon $\mathcal{J}$ tagjának egyenlete, amely a d egyenes $Q\,[0, 0, 0, 1]$ pontját tartalmazza. Konkrétan az

$$(x_1)^2 - (x_3)^2 = 0, \quad \text{illetve} \quad (x_1 + x_3)(x_1 - x_3) = 0$$



4.1. ábra. Az $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ egyenletű gömb és az $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz - 4 = 0$ egyenletű henger metszete. Piros színnel van feltüntetve az a két másodrendű görbe, melyekre a negyedrendű metszetgörbe szétesik.

egyenlet írja le ezt a $\mathcal{J}$ másodrendű felületet. Látható, hogy $\mathcal{J}$ az a síkpár, amely megegyezik az $x_1 + x_3 = 0$ és $x_1 - x_3 = 0$ egyenletű $\sigma_1 = \langle d,\ P_1 \rangle$, $\sigma_2 = \langle d, P_2 \rangle$ síkoknak az uniójával.

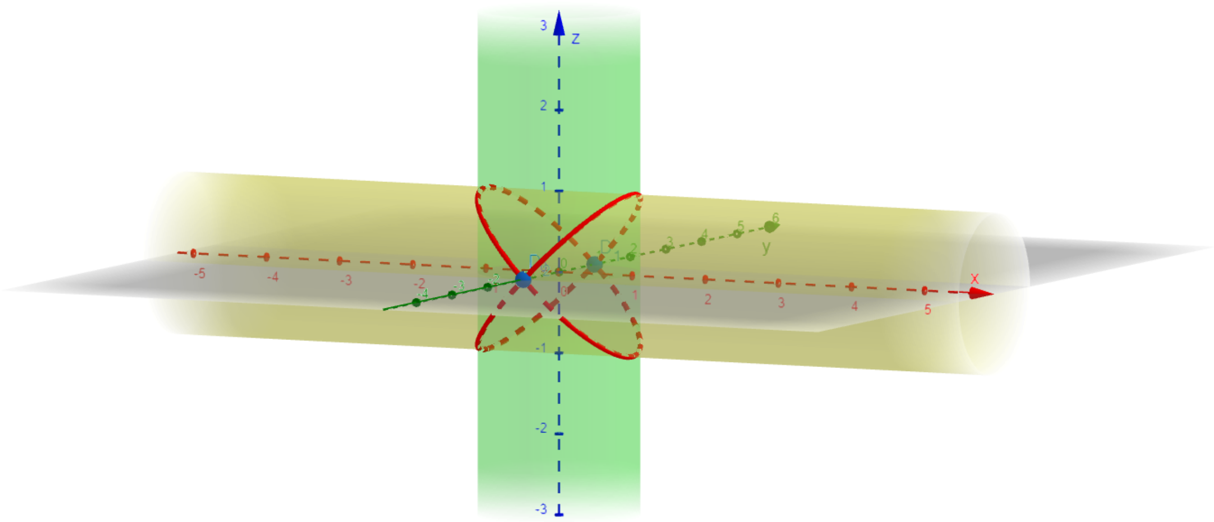
Az X euklideszi térre vonatkozóan azt mondhatjuk, hogy a $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ áthatási görbe szétesik két ellipszisre, ahogyan azt a 4.2 ábra is szemlélteti. Ezt a két ellipszist az $x + z = 0$, $x - z = 0$ egyenletű síkok metszik ki a hengerekből.

4.2.3. Henger és kúp áthatása

Az X euklideszi térben tekintsük az $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ egyenlettel leírt $\mathcal{F}$ forgáskúpot, továbbá az $x^2 + (z-2)^2 - 2 = 0$ egyenletű $\mathcal{H}$ körhengert. Vizsgáljuk meg a két másodrendű felület $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ metszetét.

Áttérve a $\bar{X}$ térbeli homogén koordinátákra az $(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0$ és $(x_1)^2 + (x_3)^2 - 4x_3\,x_4 + 2(x_4)^2 = 0$ másodfokú egyenletekhez jutunk. Az ezekhez tartozó szimmetrikus mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$



4.2. ábra. Az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ és $y^2 + z^2 - 1 = 0$ egyenletű forgáshengerek metszete. Piros színnel van feltüntetve az a két ellipszis, melyekre a negyedrendű metszetgörbe szétesik.

Igazolható, hogy a homogén koordinátáikkal megadott $D_1\,[1, 0, 1, 1]$ és $D_2\,[-1, 0, 1, 1]$ pontok az áthatási görbének duplapontjai. A közös polársíkok, amelyek ebben a két duplapontban érintik az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ felületeket, pedig az $x_1 - x_3 = 0$ és $x_1 + x_3 = 0$ egyenletű síkok. Ezek nem tartalmazzák a $d = \langle D_1, D_2 \rangle$ egyenest. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy mindkét felületen rajta vannak a $P_1\,[0, 2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 1]$, $P_2\,[0, \sqrt{2}-2, 2-\sqrt{2}, 1]$ pontok is. Mivel a $\sigma_1 = \langle d, P_1 \rangle$ és $\sigma_2 = \langle d, P_2 \rangle$ síkok különbözőek, a $\mathcal{G}$ metszetgörbe megegyezik annak a két másodrendű görbének az uniójával, melyeket a $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkok metszenek ki a felületekből.

A $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkok egyenletét a 4.2. Következmény alkalmazásával is meghatározhatjuk, vagyis kiszámíthatjuk az általuk alkotott $\mathcal{J}$ síkpár egyenletét. A $d = \langle D_1, D_2 \rangle$ egyenesen válasszuk ki a $Q\,[0, 0, 1, 1]$ pontot. Ennek $\mathbf{y} = (0, 0, 1, 1)$ koordinátáiból az $\alpha = \mathbf{y}^T \mathbf{A}\,\mathbf{y} = -1$, $\gamma = \mathbf{y}^T \mathbf{C}\,\mathbf{y} = -1$ együtthatókat kapjuk. A 3.5. Állítás bizonyításában leírtak szerint az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által meghatározott felületsorban a $\mathbf{C} - \mathbf{A}$ mátrix adja meg azt a $\mathcal{J}$ másodrendű felületet, amely tartalmazza a Q pontot. Eszerint a $\mathcal{J}$ síkpárt az alábbi egyenlet írja le:

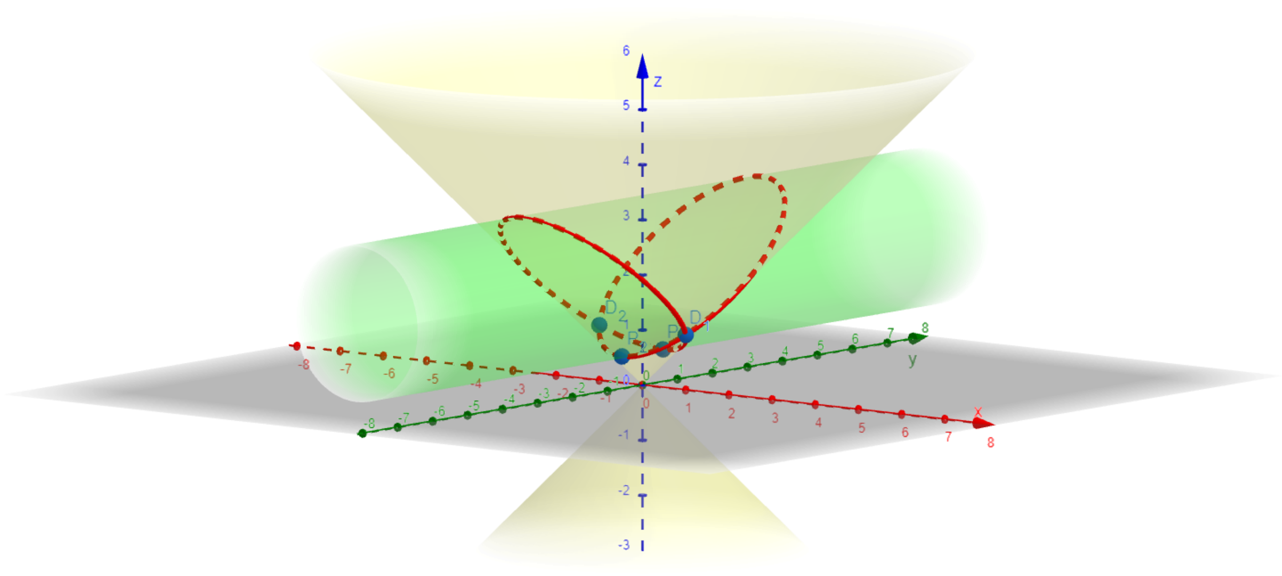
$$2(x_3 - x_4)^2 - (x_2)^2 = 0$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható. Ily módon azt kapjuk, hogy a

$$\sqrt{2}\,(x_3 - x_4) + x_2 = 0, \quad \sqrt{2}\,(x_3 - x_4) - x_2 = 0$$

egyenletek adják meg a $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkokat.

Megállapíthatjuk, hogy a $\mathcal{G}$ áthatási görbe szétesik két ellipszisre, melyeket a $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkok metszenek ki a két felületből. A konkrét áthatás a 4.3 ábrán van feltüntetve.



4.3. ábra. Az $x^2+y^2-z^2=0$ egyenletű kúp és az $x^2+(z-2)^2-2=0$ egyenletű henger metszete. Piros színnel van feltüntetve az a két másodrendű görbe, melyekre a negyedrendű metszetgörbe szétesik.

4.2.4. Két hiperboloid áthatása

Végül egy példát mutatunk arra, miszerint lehet két egyenespár is az a két másodrendű görbe, melyekre a negyedrendű metszetgörbe szétesik az előírt feltételek teljesülése esetén.

Az euklideszi térben vegyük az $x^2+y^2-z^2-1=0$ egyenletű $\mathcal{F}$ egyköpenyű hiperboloidot, illetve az $x^2-y^2+z^2-1=0$ egyenlettel leírt $\mathcal{H}$ hiperboloidot.

Ezen másodrendű felületeknek a projektív kibővítéseit az $(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2-(x_4)^2=0$ és az $(x_1)^2-(x_2)^2+(x_3)^2-(x_4)^2=0$ egyenletek írják le a homogén koordinátákban.

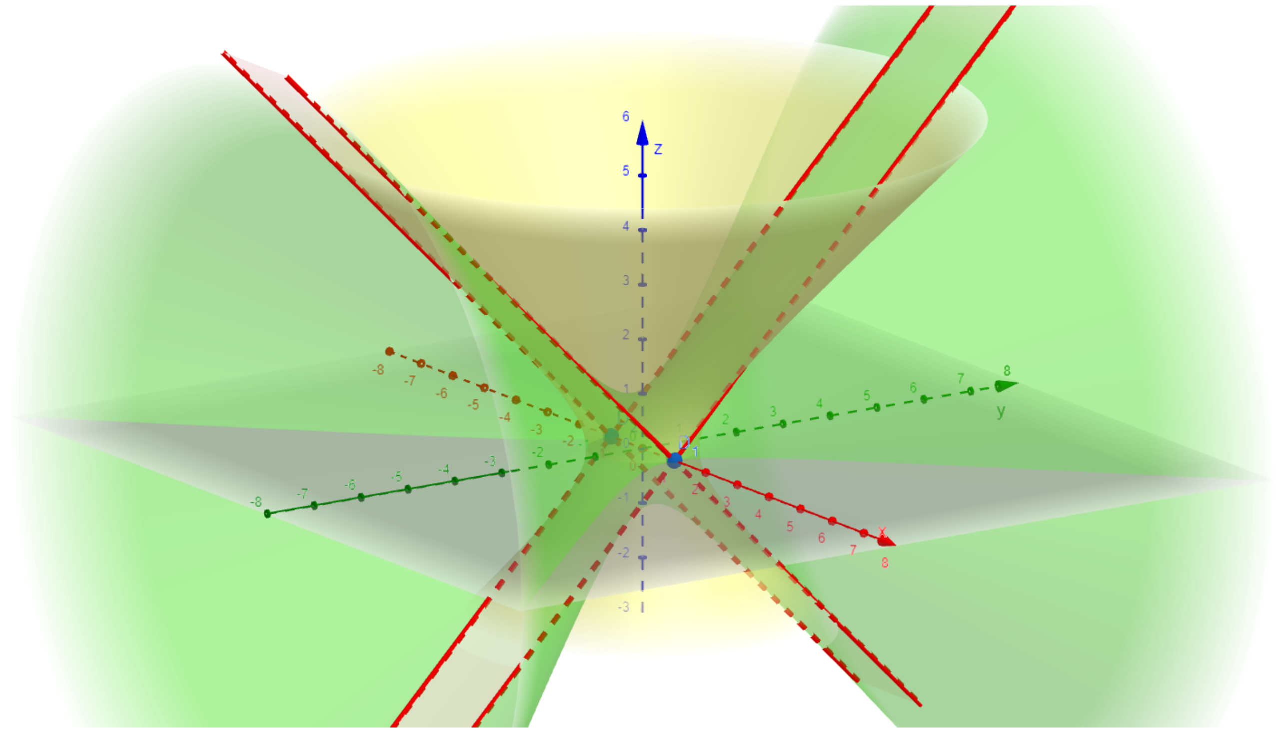
Az egyenleteket meghatározó szimmetrikus mátrixokat alkalmazva könnyen ellenőrizhető, hogy a két felület $\mathcal{G}=\mathcal{F}\cap\mathcal{H}$ metszetének duplapontjai az $[1,0,0,1]$ és $[-1,0,0,1]$ koordinátájú pontok, melyeket jelöljön D_1 és D_2. Ezen duplapontokban a felületek közös érintősíkjainak az egyenlete $x_1-x_4=0$, illetve $x_1+x_4=0$, és ezek nem tartalmazzák a $d=\langle D_1,D_2\rangle$ egyenest. A két felületnek további közös pontjai még $P_1\,[1,1,1,1]$ és $P_1\,[1,-1,1,1]$. Mivel a $D_1,\ D_2,\ P_1,\ P_2$ pontok nincsenek egy síkon, $\mathcal{G}$ áthatási görbe előáll két síkgörbe uniójaként.

Vegyük az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{H}$ által meghatározott felületsor azon $\mathcal{J}$ tagját, amelynek egyenletét úgy nyerjük, hogy az $\mathcal{F}$ fenti egyenletéből kivonjuk a $\mathcal{H}$ egyenletét. Azt kapjuk, hogy a $\mathcal{J}$ másodrendű felületet az

$$(x_2)^2 - (x_3)^2 = 0, \quad \text{illetve} \quad (x_2 - x_3)(x_2 + x_3) = 0$$

egyenlet írja le. Eszerint $\mathcal{J}$ éppen az $x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 = 0$ egyenletű $\sigma_1 = \langle d, P_1 \rangle$ és $\sigma_2 = \langle d, P_2 \rangle$ síkoknak az uniója. Látható, hogy ezen $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkoknak az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ felületekkel vett metszete megegyezik az $(x_1)^2 - (x_4)^2 = 0$ egyenletű síkpárral vett metszetükkel, ami mindkét sík esetében egy egyenespár. Ily módon azt kaptuk, hogy a $\mathcal{G}$ metszetgörbe két egyenespárnak az uniója.

Az X euklideszi térben a $\sigma_1,\ \sigma_2$ síkok egyenlete $y - z = 0$, illetve $y + z = 0$. Belátható, hogy ez a két egymásra merőleges sík az $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ hiperboloidokból ugyanazt a két párhuzamos egyenespárt metszi ki. Ezt szemlélteti a mellékelt 4.4 ábra.



4.4. ábra. Az $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ és az $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$ egyenletű egyköpenyű hiperboloidok metszete. Piros színnel van feltüntetve az a két egyenespár, melyekre a negyedrendű metszetgörbe szétesik.

Irodalomjegyzék

[1] Csikós Balázs, Kiss György: *Projektív geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2011.

[2] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

[3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[4] Horvay Katalin, Reiman István: *Projektív geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[5] Juhász Imre: *Számítógépi geometria és grafika*, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1993.

[6] Kárteszi Ferenc: *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.

[7] Reiman István: *A geometria és határterületei*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.

[8] Verhóczki László: *Projektív geometria*, előadásjegyzet, 2021.
`http://verhoczkil.web.elte.hu/ProGeoJegyzetVL.pdf`