

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

**Erősen reguláris gráfok**

*és a véges egységtávolsággráf*

BSc elemző matematikus szakdolgozat



Jászfalusi Borka

Témavezető:

Dr. Sziklai Péter

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Sziklai Péter tanár úrnak, hogy bevezetett a gráfok világába akkor, mikor még csak ismerkedtem a matematikával, illetve köszönöm a témaválasztást, kedves lett számomra az ebben a pár hónapban kutatott terület.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani barátaimnak, tanulótársaimnak, akikkel az évek során rengeteg közös tanulás segítségével jutottunk el idáig.

Köszönöm családomnak és barátomnak a kitartó támogatást, hálás vagyok azért, hogy minden helyzetben mögöttem álltak az elmúlt évek során.

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>1. Véges testek</b>	<b>5</b>
1.1. Lineáris algebrai alapok . . . . .	5
1.2. Testbővítések . . . . .	5
1.3. Sajátértékek . . . . .	6
<b>2. Reguláris gráfok</b>	<b>7</b>
2.1. Gráfelméleti alapok . . . . .	7
2.2. Reguláris gráfokkal kapcsolatos tételek . . . . .	7
<b>3. A gráf megalkotása</b>	<b>8</b>
3.1. A $q^2$ rendű test elemei . . . . .	8
3.2. Motiváció a gráfok kialakításához . . . . .	8
3.3. A gráf kialakítása . . . . .	10
<b>4. A gráf elemzése</b>	<b>12</b>
4.1. A gráf tulajdonságai . . . . .	12
4.2. Sajátértékek kiszámítása . . . . .	14
4.3. A rétegek felépítése . . . . .	18
4.4. Az 1. rétegek által feszített részgráfok . . . . .	19
4.5. A rétegek méretei . . . . .	20
4.6. A rétegek által kifeszített részgráfok fokszámai . . . . .	22
<b>5. Konklúzió</b>	<b>26</b>

# Bevezetés

A szakdolgozati témák között számtalan érdekes kérdéskör került meghirdetésre. Először - a meghirdetett témák közötti választás után - "szép gráfok"-ról terveztem megírni a dolgozatomat, majd az erősen reguláris gráfokra esett a választás. Végül a konkrét irányvonal - amely a véges testeken vizsgált egységtávolsággráfok összehasonlítása volt az erősen reguláris gráfokkal - csak később alakult ki. A témaválasztást egyáltalán nem bántam meg: egy olyan témában, kutatásban vehettem részt, amely végül sokkal érdekesebb és összetettebb lett, mint amelyre korábban számítottam. Az érintett témakör is bővelkedett szép gráfokban - a kiválasztott témánál maradván - amelyek szimmetrikusak voltak, rengeteg automorfizmussal rendelkeztek. A különböző paraméterekkel leírható gráfok ábrázolásához a *sage* programnyelvet hívtam segítségül, amellyel sikerült azokat ábrázolni és beépíteni a szakdolgozatomba.

Az első két fejezetben azokat a lineáris algebrai, csoportelméleti, gráfokkal és sajátértékekkel kapcsolatos definíciókat és tételeket írtam le, amelyek a későbbi részek megértéséhez szükségesek.

A harmadik fejezetben a kutatott gráf megalkotása került a középpontba, ahol leírom, hogyan feleltetem meg a másodfokú bővítéssel létrehozott véges test elemeit a gráf csúcsainak, milyen műveletek szükségesek az egységtávolsággráf kialakításához a halmazon, illetve az egységtávolsággráffal kapcsolatban megemlítek néhány klasszikus problémát.

Dolgozatom harmadik része a gráffal kapcsolatos vizsgálatok kielemezése. Az egységtávolsággráf rengeteg szép tulajdonsággal rendelkezik, hasonlóan az erősen reguláris gráfokhoz, ezért a gráfot különböző automorfizmusai illetve spektruma szerint, majd különböző rétegekre bontás után, ezeknek a rétegeknek a tulajdonságai alapján vizsgáltam meg.

Az utolsó része a szakdolgozatomnak összefoglalja a kutatásom eredményeit, hogy a gráf mennyiben hasonlít az egységtávolsággráfokhoz illetve az erősen reguláris gráfokhoz.

Szeretném kiemelni, hogy dolgozatom főként megfigyeléseket, sejtéseket tartalmaz, többségében kis méretű példákra, illetve a megfelelő táblázatokban a sajátértékeket a korábban már említett *sage* programnyelv segítségével találtam meg.

# 1. Véges testek

## 1.1. Lineáris algebrai alapok

**1.1. Definíció.** Egy  $R$  egységelemes gyűrűt *ferdetestnek* hívunk, ha a szorzásra nézve is van inverz, azaz  $\forall 0 \neq a \in R$ -hez  $\exists a' \in R$ , hogy  $aa' = 1$ . Egy ferdetestet *testnek* nevezünk, ha a szorzás kommutatív.[4]

A következő definíciók és tételek (1.2.-1.10.) leírásához a [2] könyvet vettem alapul.

**1.2. Definíció.** Az 1 szám  $n$ -edik gyökeit  $n$ -edik *egységgyököknek* nevezzük. Ezek  $\mathbb{C}$ -ben a  $\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{2k\pi}{n})$  alakú számok, ahol  $k \in \mathbb{Z}$ . Legfeljebb  $n$  darab  $n$ -edik egységgyök van, egy algebrailag zárt testben pontosan  $n$ .

**1.3. Definíció.** A  $g(x)$  alakú pontok halmazát, ahol  $g$  befutja  $G$  permutációcsoport vagy transzformációcsoport elemeit, az  $x$  *pályájának* (*orbitjának*) nevezzük, és  $G(x)$ -szel jelöljük. A pálya elemszámát a *pálya hosszának* hívjuk.

**1.4. Definíció.** Egy  $g$  csoportelem *rendje* a különböző hatványainak száma. Jele:  $o(g)$ . Az  $n$  jó kitevője  $g$ -nek, ha  $g^n = 1$ .

**1.5. Tétel.** Minden véges test elemszáma prímszám.

**1.6. Definíció.** Ha  $R$  egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az  $R$  multiplikatív csoportja, jele  $R^\times$ .

**1.7. Tétel.** Minden véges test multiplikatív csoportja ciklikus.

**1.8. Tétel.** Minden  $q = p^k$  prímszámra izomorfia erejéig pontosan egy darab  $q$  elemű test létezik. Ebben  $b + b + \dots + b = 0$  ( $p$  darab  $b$ -re), azaz  $p$  a test karakterisztikája. Az  $x \mapsto x^{p^i}$  hatványra emelések,  $i = 0, 1, \dots, (k-1)$ -re az ún. Frobenius-testautomorfizmusokat adják.

## 1.2. Testbővítések

**1.9. Definíció.** Ha  $R$  gyűrű, akkor  $S \subseteq R$  részgyűrű, ha  $S$  gyűrű  $R$  műveleteire, és *résztest*, ha maga is test  $R$  műveleteire nézve.

**1.10. Definíció.** Ha  $K$  részteste  $L$ -nek, akkor *testbővítésről* beszélünk. Ha  $\alpha, \beta, \dots \in L$ , akkor  $N = K(\alpha, \beta, \dots)$  a legszűkebb olyan részteste  $L$ -nek, amely  $K$ -t és az  $\alpha, \beta, \dots$  elemeket tartalmazza.

**1.11. Megfigyelés.** Minden test vektortér minden résztestje felett.

### 1.3. Sajátértékek

**1.12. Definíció.**  $k_A(x) = \det(A - xI)$  az  $A$  mátrix *karakterisztikus* polinomja. [2]

**1.13. Tétel.**  $M \in T^{n \times n}$ , az  $M$  *karakterisztikus polinomja*  $k_M = \det(M - xI)$ , és ennek *gyöktényezős alakja*  $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$ , esetleg  $T$  lezártjában. A  $k_M$  *karakterisztikus polinom gyökei* az  $M$  *sajátértékei*. [3]

**1.14. Definíció.**  $V$  vektortér,  $A \in \text{Hom}V$  és  $v \in V$  (vagy  $A \in T^{n \times n}$  és  $v \in T^n$ ). Ha  $Av = \lambda v$ , ahol  $v \neq 0$  (de  $\lambda$  lehet nulla), akkor  $\lambda$  *sajátértéke*,  $v$  pedig egy  $\lambda$ -hoz tartozó *sajátvektora*  $A$ -nak. [3]

## 2. Reguláris gráfok

### 2.1. Gráfelméleti alapok

A következő három definíció (2.1.-2.3.) a [4] könyvben található meg.

**2.1. Definíció.** Egy  $G$  hurokmentes gráf  $k$  színnel kiszínezhető, hogyha minden csúcsot ki lehet színezni  $k$  szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen.  $G$  kromatikus száma  $\chi(G) = k$ , ha  $G$   $k$  színnel kiszínezhető, de  $k - 1$  színnel nem.

**2.2. Definíció.** Egy  $n$  csúcsú gráfot reprezentálni tudunk egy  $n \times n$ -es  $A(G) = (a_{ij})$  mátrixszal a következő módon:

$$(a_{ij}) = \begin{cases} k, & \text{ha az } i\text{-edik és } j\text{-edik pont között } k \text{ darab párhuzamos él halad} \\ l, & \text{ha } i = j \text{ és az } i\text{-edik ponthoz } l \text{ darab hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

(Irányított gráfokat is megadhatunk ilyen módon, csak ott  $a_{ij}$  az  $i$ -edik pontból a  $j$ -edik pontba vezető élek száma.) Ezt az  $A(G)$  mátrixot a  $G$  gráf *szomszédsági (adjacencia) mátrixának* nevezzük. Egyszerű, irányítatlan gráf esetén ez egy szimmetrikus 0-1 mátrix, a főátlójában 0-kkal.

**2.3. Definíció.**  $k$ -reguláris egy gráf, ha minden pontjának foka  $k$ .

**2.4. Definíció.** A  $G$  gráfot  $(n, k, \lambda, \mu)$  paraméterű *erősen reguláris gráfnak* nevezük, ha a csúcsok száma  $n$ , a gráf  $k$ -adfokú reguláris, két összekötött pont közös szomszédainak száma  $\lambda$ , két összekötetlen ponté pedig  $\mu$ . [1]

A  $\mu = 0$  nem túl érdekes eset, ekkor a gráf néhány diszjunkt  $K_{k+1}$  gráfra bomlik, minden más esetben az erősen reguláris gráf átmérője 2.

### 2.2. Reguláris gráfokkal kapcsolatos tételek

**2.5. Állítás.** Egy  $r$ -reguláris gráfnak  $r$  mindig a legnagyobb sajátértéke, a hozzá tartozó sajátvektor pedig az  $(1, \dots, 1)$ . [1]

**2.6. Állítás.** Legyen  $\Gamma$  egyszerű gráf, legyen  $A$  a szomszédsági mátrixa és legyenek  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ennek sajátértékei. Végül legyen  $\Delta$  a maximális fokszám. Ekkor:

1. A sajátértékei valósak (és  $n$  darab van).
2.  $|\lambda_i| \leq \Delta$
3. Ha  $\Gamma$  összefüggő, akkor a legnagyobb sajátérték egyszeres multiplicitású.
4. Ha  $\Gamma$   $k$ -reguláris, akkor  $k$  sajátérték.
5. Ha  $\Gamma$   $k$ -reguláris páros gráf, akkor  $-k$  is sajátérték. [1]

### 3. A gráf megalkotása

#### 3.1. A $q^2$ rendű test elemei

Nézzünk egy  $q$  elemű véges testet (jelölése:  $\mathbb{F}_q$ ), melynek az elemei adottak. Ha ezt a testet egy másodfokú irreducibilis polinommal bővítjük, akkor létrehozunk egy másodfokú testbővítéssel a  $q^2$  rendű véges testet. A létrehozott véges test elemeinek később a gráf csúcsait feleltetem meg.

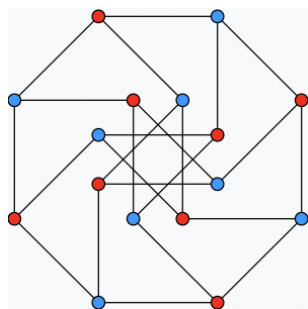
#### 3.2. Motiváció a gráfok kialakításához

A kiindulópontja a kutatásomnak az egységtávolsággráf vizsgálata volt. A gráf klasszikus problémái rengeteg matematikust foglalkoztatnak és foglalkoztattak is már. A következőkben pár érdekességet szeretnék elmondani a gráfról.

Vegyünk az euklideszi sík összes pontját, mint a gráf csúcsait és az összes egységtávolságot ezen csúcsok között, mint éleket: ez az euklideszi egységtávolsággráf.

A célom az volt, hogy az utóbbi gráfnak a véges testek feletti analogonját definiáljam, vizsgáljam.

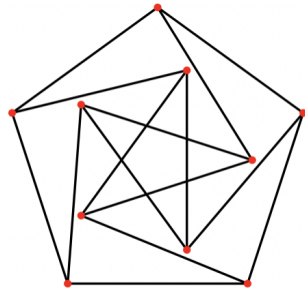
Szokás egységtávolsággráfnak hívni ennek a gráfnak a részgráfjait is (tipikusan véges részgráfjait), azokat a gráfokat, amelyeknek éllel összekötött csúcspárjait el tudjuk helyezni egységtávolságra a síkban, nem foglalkozva azzal, hogy egyes nem szomszédos párok is esetleg egységtávolságban lehetnek. Például a Möbius-Kantor gráf is lerajzolható így módon.



1. ábra: A Möbius-Kantor gráf a síkban



Az előző definíció alapján a Petersen-gráf (sőt, az általánosított Petersen-gráfok is) lerajzolhatók egységtávolsággráfként.



2.ábra: A Petersen-gráf

A következő pár pontban néhány érdekes kérdést soroltam fel, melyeket már vizsgáltak az egységtávolsággráffal kapcsolatban.

- Mennyi a kromatikus száma? [5]
- Mennyire lehet sűrű egy egységtávolsággráf? [6]
- Hogyan terjesszük ki magasabb dimenziójú euklideszi terekre? [7]
- Tartalmaz-e Hamilton-kört vagy sem? [8]
- Hány élük lehet a csúcspontjaik számának arányában?

A kromatikus szám vizsgálata adott csúccsal rendelkező egységtávolsággráfokon történik. Hedwiger és Nelson így találták meg a 7 csúcsú egységtávolsággráfot, mely 4 színnel kiszínezhető, ami ebben az esetben egy alsó korlát, John R. Isbell pedig a hetes felső korlátot fedezte fel.

A második kérdésre, hogy mennyire lehet sűrű egy egységtávolsággráf, megoldásként alsó korlátot sikeresen adtak, a felső korlát kérdése viszont még mindig a matematika egyik megoldatlan kérdése.

A harmadik problémát viszonylag átfogóan tudták kutatni, a negyedik kérdés egy NP-teljes problémára vezet vissza, míg az ötödik egy fontos nyitott kérdés a mai napig.

### 3.3. A gráf kialakítása

Az előző alfejezetben az euklideszi egységtávolsággráfot  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  pontjain definiáltuk.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -et megfeleltethetjük  $\mathbb{C}$ -nek, ami egy kétdimenziós vektortér a valós számok halmaza felett, tehát egy másodfokú testbővítés végrehajtásával jön létre. A pontok maradnak, a vektorokból testelemek lesznek, a távolság a komplex normának feleltethető meg.

Ezek alapján vizsgáltam meg, mi történik, ha egy véges  $\mathbb{F}_q$  testre az  $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$  síkon, vagy még inkább a neki megfeleltetett  $\mathbb{F}_{q^2}$  alaphalmazon definiálom az egységtávolsággráfot.

Elsőként azt fontoltam meg, milyen művelet feleltethető meg a vizsgált testben a konjugálásnak. Ez a leképezés egy másodrendű automorfizmus, amely a kis test elemeit helybenhagyja ( $\mathbb{C}$ -ben az  $\mathbb{R}$  elemeit,  $\mathbb{F}_{q^2}$ -ben az  $\mathbb{F}_q$  elemeit). Ilyen tulajdonsággal rendelkező leképezés a véges testben a  $q$ -adik hatványra emelés.

$\mathbb{C}$ -ben az egységtávolság, mint már fentebb említettem, a komplex normából jött ( $x\bar{x} = 1$ ). Ha a konjugálás a testben a  $q$ -adik hatványra emelésnek feleltethető meg, akkor ebben az esetben legyen az egységtávolság az  $xx^q = x^{q+1} = 1$ .

A következő táblázatban megtalálható összefoglalva a konjugált, a kétszeres konjugált, illetve az egységtávolság  $x, y$  elemek között a komplex és a  $q^2$  rendű véges test felett.

Halmazok	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{C}$	$\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \sim \mathbb{F}_{q^2}$
Konjugált	$\bar{x}$	$x^q$
Konjugált a résztesten	$x \in \mathbb{R} : \bar{x} = x$	$x \in \mathbb{F}_q : x^q = x$
Kétszeres konjugált	$\bar{\bar{x}} = x$	$(x^q)^q = x^{q^2} = x$
Egységtávolság	$(x - y)(\bar{x} - \bar{y}) = 1$	$(x - y)(x - y)^q = 1$

1.táblázat: Konjugált és egységtávolság a két halmazon

Ezen tulajdonságok alapján alakítottam ki  $G_q$ -t, azt az egységtávolsággráfot az  $\mathbb{F}_{q^2}$  halmazon, ahol a csúcsok megfeleltethetőek a véges test elemeinek,  $x$  és  $y$  között pedig akkor vezet él, ha  $(x - y)^{q+1} = 1$ .

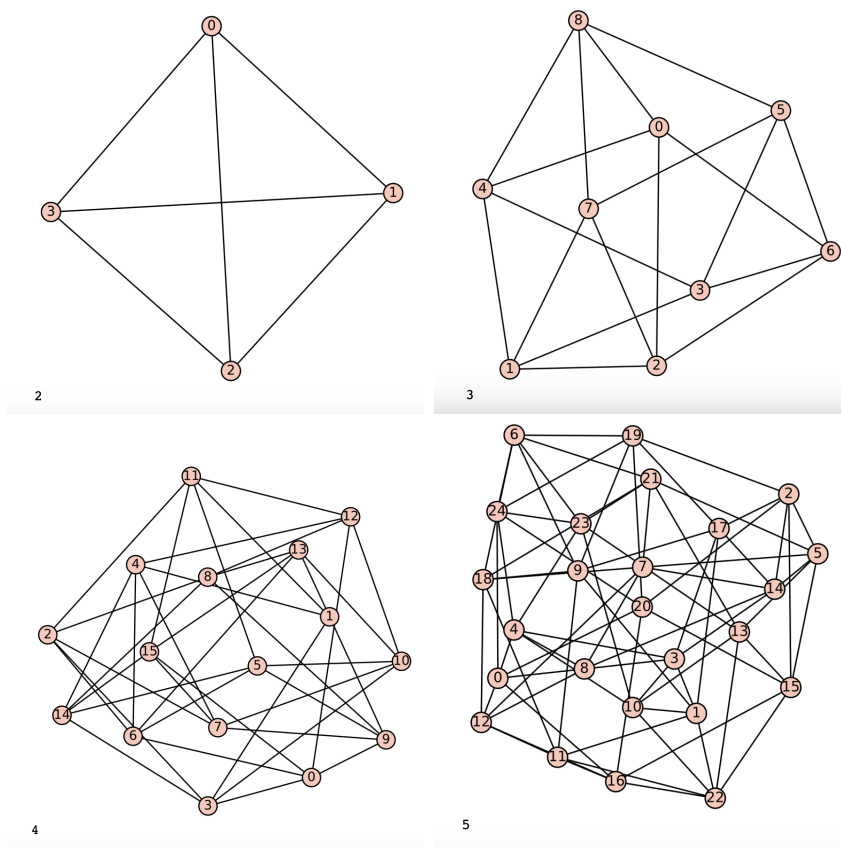
**3.1. Állítás.** A kapott gráf irányítatlan gráf lesz, azaz  $(x - y)^{q+1} = (y - x)^{q+1}$ .

*Bizonyítás.*  $(x - y)^{q+1} = (-1)^{q+1}(y - x)^{q+1}$ .

A bizonyítást két esetre lehet bontani, az első eset ha  $q$  páratlan, a második, ha  $q$  páros.

I. Ha  $q$  páratlan, akkor  $q + 1$  páros lesz, így  $(-1)^{q+1} = 1$ .

II. Ha  $q$  páros, abban az esetben a  $(-1) = 1$ -gyel, tehát a hatvány ugyanazt fogja adni.  $\square$



3.ábra: Különböző  $q$  esetekben a gráf

**3.2. Megjegyzés.** Érdekes észrevétel, hogy  $q = 2$  esetben egy teljes gráfot kapunk, amely erősen reguláris  $(4,3,2,*)$  paraméterrel,  $q = 3$ -ra a 9 csúcsú Paley-gráfot amely egy  $\text{srg}(9,4,0,1)$ ,  $q = 4$ -re pedig a Clebsch-gráfot lehet felfedezni  $(16,5,0,2)$  paraméterrel.

## 4. A gráf elemzése

### 4.1. A gráf tulajdonságai

A következő fejezetekben azt vizsgáltam, milyen tulajdonságokkal rendelkezik a kialakított  $G_q$  gráf az euklideszi sík ponthalmazán definiált egységtávolsággráfiához képest.

Az euklideszi egységtávolsággráfra igaz volt, hogy a sík minden egybevágósága (eltolás, forgatás, tükrözés) automorfizmus a gráfon, tehát a gráf csúcstranzitív. Ha felosztjuk (partíciónáljuk) a ponthalmazt az origótól (azaz a 0-tól) való távolság szerint, akkor az origó stabilizátora minden egyes osztályt saját magán belül permutál. A  $G_q$  gráfon is igaz lesz ennek természetes analogonja.

A következőkben háromfajta egybevágóságot igyekeztem  $G_q$ -n is megtalálni különböző műveletek segítségével.

#### 1. Eltolás

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{F}_{q^2}$
$(x, y) \mapsto (x, y) + \underline{\mathbf{v}}$	$z \mapsto z + \mathbf{v}$	$w \mapsto w + \mathbf{v}$

2.táblázat: Eltolás az  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  és az  $\mathbb{F}_{q^2}$  halmazon

**4.1. Megjegyzés.** Az egyes esetekben  $\mathbf{v}$  és  $\underline{\mathbf{v}}$  rögzített,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  és  $w \in \mathbb{F}_{q^2}$ .

#### 2. Forgatás

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{F}_{q^2}$
$(x, y) \mapsto \mathbf{F}(x, y)$	$z \mapsto z(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$	$w \mapsto w\epsilon$

3.táblázat: Forgatás az  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  és az  $\mathbb{F}_{q^2}$  halmazon,  $\epsilon$  egy  $(q + 1)$ .egységgyök

**4.2. Megjegyzés.** A valós számsíkon az  $\alpha$  szöggel való forgatás egy forgatási mátrixszal adható meg, amit a táblázatban F-fel jelöltem.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Komplex esetben  $z$ -t megszorozzuk egy olyan komplex számmal, amelynek 1 a hossza (hiszen így nem nyújtja illetve zsugorítja  $z$ -t), így megkapjuk az  $\alpha$  szöggel elforgatottját  $z$ -nek.

A véges test halmazán a távolságokat  $(c(x-y))^{q+1}$  képlettel számoltam ki, ahol a komplex eset mintájára olyan  $c$ -vel kell szorozni a rögzített pontot, amelyre teljesül, hogy  $c^{q+1} = 1$ , azaz egy  $(q+1)$ . egységgyökkel.

**4.3. Megfigyelés.** Az  $\mathbb{F}_{q^2}$  testben  $(q+1)$  darab  $(q+1)$ . egységgyök van.

*Bizonyítás.* A véges test multiplikatív csoportja ciklikus. Az általunk vizsgált esetben ennek a csoportnak  $q^2 - 1$  eleme van. Legyen  $\omega$  egy generátor elem, látható, hogy a multiplikatív rendje  $q^2 - 1$ . Mivel  $\omega^{(q-1)(q+1)} = 1$ , ezért  $(\omega^{k(q-1)})^{q+1} = (\omega^{(q-1)(q+1)})^k = 1$  tehát  $\omega^{k(q-1)}$   $(q+1)$ . egységgyök lesz minden  $k = 1, 2, \dots, q+1$  -re. □

### 3. Tükrözés

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{F}_{q^2}$
$(x, y) \mapsto (x, -y)$	$z \mapsto \bar{z}$	$w \mapsto w^q$

4.táblázat: Tükrözés az  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  és az  $\mathbb{F}_{q^2}$  halmazon

A véges test fölött további testautomorfizmusokat kaphatunk, például vehetjük  $p$  karakterisztikával a  $p$ -edik hatványra emelést, vagyis a Frobenius-automorfizmusokat, hiszen ebben az esetben a hatványra emelés összegtartó lesz. Nézzük meg a  $p$ -edik hatványra emelést az  $(x-y)^{q+1} = 1$  egyenleten. Az  $1^p = 1$ ,  $(x-y)^{p(q+1)}$  pedig a karakterisztika miatt egyenlő lesz  $(x^p - y^p)^{q+1}$ , tehát valóban megtartja az 1 távolságot.

További kérdés lehet a gráf regulárisága, ami szintén egy speciális tulajdonsága az egységtávolsággráfnak.

**4.4. Megfigyelés.** Az egységtávolsággráf az  $\mathbb{F}_{q^2}$  halmazon  $(q+1)$ -reguláris lesz.

*Bizonyítás.* A gráfon végrehajtott egybevágóságok automorfizmusok, tehát a gráfot el lehet tolni úgy, hogy a 0-ban legyen a vizsgálandó csúcs.

A 0-tól 1 távolságra pontosan a  $(q+1)$ . egységgyökök találhatóak. □

## 4.2. Sajátértékek kiszámítása

A gráfok elemzésének gyakori eszköze az adjacencia mátrix spektrumának vizsgálata.

Erősen reguláris gráfok esetében az adjacencia mátrix felépítéséből megállapítható, hogy a gráf erősen reguláris-e, illetve a legnagyobb sajátérték a  $k$  lesz, egyszeres multiplicitással, a maradék kétféle sajátérték pedig kifejezhető a gráf paramétereinek segítségével.

A kutatás során (ahogyan azt a bevezetésben is említettem) főképpen kísérleti eredmények születtek, sok megfigyelés szerepel a szakdolgozatomban, viszonylag kevés bizonyítással és kisebb méretű gráfok ( $q \leq 49$ ).

A következő pár megfigyelés azokat a sejtéseket tartalmazza, amelyeket a sajátértékek különböző csoportosítása után fedeztem fel.

**4.5. Megfigyelés.** *A különböző esetekben  $q+1$  lesz a legnagyobb sajátérték, egyszeres multiplicitással, a többi sajátérték multiplicitása pedig  $q+1$ -gyel osztható.*

**4.6. Megfigyelés.** *Ha  $q$  prím, akkor  $q$  különböző sajátértéke lesz a gráfnak,  $q+1$ , mint legnagyobb sajátérték, egyszeres multiplicitással, a maradék  $q-1$  különböző sajátérték pedig  $q+1$ -szeres multiplicitással.*

**4.7. Megjegyzés.** Ha  $q$  prím, illetve az 5 vagy a 7 hatványaival volt egyenlő, a sajátértékek konkrét értékenek vizsgálata nehéz volt, sejtésként gyökös kifejezéseket sikerült felírni, de konkrét megfigyelés nem született velük kapcsolatban.

```
2 ^2 rendű test
[-1.0, 3.0] - sajátértékek
[3, 1] - multiplicitások
[1.0, 0.333333] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva
2 - különbözőféle sajátértékek
```

```
3 ^2 rendű test
[4.0, 1.0, -2.0] - sajátértékek
[1, 4, 4] - multiplicitások
[0.25, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva
3 - különbözőféle sajátértékek
```

```
5 ^2 rendű test
[6.0, -1.236068, 3.236068, -2.618034, -0.381966] - sajátértékek
[1, 6, 6, 6, 6] - multiplicitások
[0.166667, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva
5 - különbözőféle sajátértékek
```

```
7 ^2 rendű test
[8.0, -2.048917, 2.356896, 2.692021, -4.493959, -1.109916, 1.603875] - sajátértékek
[1, 8, 8, 8, 8, 8, 8] - multiplicitások
[0.125, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva
7 - különbözőféle sajátértékek
```

11 <sup>2</sup> rendű test  
[12.0, -3.107688, -0.724724, 0.757587, 2.357872, 5.716953, -4.795755, -3.092401, -2.745571,  
0.176312, 4.457415] - sajátértékek  
[1, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12] - multiplicitások  
[0.083333, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva  
11 - különbözőféle sajátértékek

13 <sup>2</sup> rendű test  
[14.0, -6.29623, 0.239637, 0.870638, 3.029928, 3.335986, 4.82004, -5.259534, -4.082087, -2.159404,  
-0.569006, 0.433294, 4.636737] - sajátértékek  
[1, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14] - multiplicitások  
[0.071429, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-  
gyel leosztva  
13 - különbözőféle sajátértékek

19 <sup>2</sup> rendű test  
[20.0, -5.493703, -3.991659, -2.010895, -0.894771, 1.842432, 2.922376, 4.275015, 4.8424, 7.508805,  
-7.609729, -6.719515, -5.900387, -1.862741, 0.698129, 1.694752, 2.369546, 2.478084, 4.851861] -  
sajátértékek  
[1, 20] - multiplicitások  
[0.05, 1.0] -  
multiplicitások (q+1)-gyel leosztva  
19 - különbözőféle sajátértékek

23 <sup>2</sup> rendű test  
[24.0, -7.275061, -2.37464, -2.145356, -2.046371, -0.834653, -0.252802, 0.085928, 4.477902,  
6.453508, 7.453239, 7.458305, -6.341911, -5.13404, -3.442482, -3.00665, -2.190024, -1.930788,  
1.445716, 3.181794, 5.481067, 7.898005, -7.960687] - sajátértékek  
[1, 24] -  
multiplicitások  
[0.041667, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,  
1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva  
23 - különbözőféle sajátértékek

29 <sup>2</sup> rendű test  
[30.0, -8.279039, -7.439985, -2.758545, -2.32848, -1.748241, -1.620309, -0.164793, 1.366136,  
1.721746, 3.689995, 5.851248, 6.871544, 9.338441, 9.500281, -9.068242, -6.139177, -5.236511,  
-4.875211, -4.823686, -4.182343, -2.560385, 1.925287, 2.014216, 2.368729, 5.150693, 5.899679,  
8.88224, -4.355289] - sajátértékek  
[1, 30,  
30, 30, 30, 30, 30] - multiplicitások  
[0.033333, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,  
1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva  
29 - különbözőféle sajátértékek

31 <sup>2</sup> rendű test  
[32.0, -10.66651, -7.391076, -6.231083, -1.605999, -0.522125, 0.423463, 0.521591, 2.102103,  
3.646016, 3.846749, 4.187207, 5.404939, 5.496713, 6.41625, 9.371766, -9.590369, -7.510143,  
-5.084026, -3.976672, -1.435994, -1.164666, -0.849536, 2.690237, 5.448112, 5.789318, 5.943593,  
9.218306, -6.765518, -6.739052, -1.973588] - sajátértékek  
[1, 32,  
32, 32, 32, 32, 32, 32] - multiplicitások  
[0.03125, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,  
1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel  
leosztva  
31 - különbözőféle sajátértékek

4.ábra: Különböző q prímeekre a sajátértékek

**4.8. Megfigyelés.** Ha  $q = 2^k$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}^+$ , akkor a legnagyobb sajátérték a  $(q + 1)$ , egyszeres multiplicitással, a többi sajátérték pedig  $(4l + 1)$  alakú, és egy  $0$ -ra szimmetrikus intervallumban helyezkednek el.

Hatványok	Sajátértékek	Multiplicitások/ $(q + 1)$
$q = 2^1$	-1,(3)	1;1*
$q = 2^2$	-3,1,(5)	1,2;1*
$q = 2^3$	-3,1,5,(9)	3,3,1;1*
$q = 2^4$	-7,-3,1,5,(17)	2,4,5,4;1*
$q = 2^5$	-11,-7,-3,1,5,9,(33)	1,5,10,5,5,5;1*

5.táblázat: Sajátértékek 2 hatványokra \*nincs leosztva  $(q + 1)$ -gyel

**4.9. Megfigyelés.** Ha  $q = 3^k$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}^+$ , akkor a legnagyobb sajátérték a  $(q + 1)$ , egyszeres multiplicitással, a többi sajátérték pedig  $(-3k + 1) + 3l$ , ahol  $l = 0 \dots (2k - 1)$ , különböző multiplicitással.

Hatványok	Sajátértékek	Multiplicitások/ $(q + 1)$
$q = 3^1$	-2,1,(4)	1,1;1*
$q = 3^2$	-5,-2,1,4,(10)	1,3,2,2;1*
$q = 3^3$	-8,-5,-2,1,4,7,10,(28)	4,3,6,3,6,3,1;1*

6.táblázat: Sajátértékek 3 hatványokra \*nincs leosztva  $(q + 1)$ -gyel

5 ^2 rendű test

[6.0, -1.236068, 3.236068, -2.618034, -0.381966] - sajátértékek  
 [1, 6, 6, 6, 6] - multiplicitások  
 [0.166667, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások  $(q+1)$ -gyel leosztva  
 5 - különbözőféle sajátértékek

25 ^2 rendű test

[26.0, 6.0, -4.0, -8.472136, 0.472136, -9.854102, -3.145898, 2.381966, 4.618034, -5.708204, 7.708204, -1.236068, 3.236068, -4.854102, 1.854102] - sajátértékek  
 [1, 52, 52, 26, 26, 26, 26, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52] - multiplicitások  
 [0.038462, 2.0, 2.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0] - multiplicitások  $(q+1)$ -gyel leosztva  
 15 - különbözőféle sajátértékek

5.ábra: Sajátértékek 5 hatványokra



$7^2$  rendű test  
 [8.0, -2.048917, 2.356896, 2.692021, -4.493959, -1.109916, 1.603875] - sajátértékek  
 [1, 8, 8, 8, 8, 8, 8] - multiplicitások  
 [0.125, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva  
 7 - különbözőféle sajátértékek  
 $49^2$  rendű test  
 [50.0, -12.768086, -11.427583, 6.195669, -9.801938, -8.445042, -6.75302, 0.814019, 4.533188,  
 11.652793, -5.70171, 5.823708, 9.878002, 0.396125, 3.109916, 6.493959, -5.43296, -0.02177,  
 8.454731, -13.305586, 0.933624, 8.371961, -7.878002, -3.823708, 7.70171, -5.24698, -3.554958,  
 -2.198062] - sajátértékek  
 [1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100,  
 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100] - multiplicitások  
 [0.02, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,  
 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,  
 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0] - multiplicitások (q+1)-gyel leosztva  
 28 - különbözőféle sajátértékek

6.ábra: Sajátértékek  $7$  hatványokra

### 4.3. A rétegek felépítése

Az előző alfejezetekben említett tulajdonságok alapján  $G_q$  tranzitív, tehát felépítését tetszőleges pontból tudjuk vizsgálni, például a 0-ból kiindulva.

A gráfelméleti értelemben vett átmérőt szerettem volna megvizsgálni  $G_q$ -n, ezért a gráfot a 0-ba toltam, és onnan számolva kialakítottam az 1., 2. és 3. réteget, amelyek rendre egy, kettő illetve három távolságra vannak 0-tól.

**4.10. Állítás.** *A  $q + 1$  rendű automorfizmus, amely a 0-t helybenhagyja, két tulajdonságot foglal magába:*

1. *A gráfon belül a 0-n kívül nem hagy helyben egy csúcsot sem,  $q + 1$  nagyságú orbitokban permutálja azokat.*
2. *Minden réteget saját magán belül permutál.*

*Bizonyítás.* A gráf elemeit egy rögzített  $(q + 1)$ . egységgyökkel beszorozva minden egyes szorzás után ugyanazt a gráfot kapjuk, és  $q + 1$  rögzített egységgyökkel való beszorzás után minden elem a kiindulópontjába kerül vissza, a  $(q + 1)$ . egységgyökök periodikussága miatt.

Az 1. réteget a  $(q + 1)$ . egységgyökök alkotják, tehát ők triviálisan az első rétegen belül fognak permutálódni.

Ha  $x$  és  $y$  csúcsok 2. rétegbeli szomszédjai egy rögzített  $(q + 1)$ . egységgyöknek, akkor a  $(q + 1)$ -gyel való szorzás megfeleltethető egy forgatásnak. A 2. réteget vizsgálva ez azt jelenti, hogy rétegen belül permutálódnak az elemek, illetve senki nem marad egy helyben.

Ha a 2. rétegen belül minden egyes elemet végigszorozunk  $(q + 1)$ -gyel  $(q + 1)$ -szer, visszakapjuk az eredeti rétegszerkezetet a periodikusság miatt.

Ugyanez igaz lesz a 3. rétegben is. □

**4.11. Következmény.** *Az 1. réteg  $(q + 1)$  méretű, a többi mérete is  $(q + 1)$ -gyel osztható.*

Réteg	Elemek
0. réteg	0
1. réteg	$(q + 1)$ . egységgyökök
2. réteg	2 távolságra levő elemek
3. réteg	3 távolságra levő elemek

7.táblázat: A rétegek elemei

#### 4.4. Az 1. rétegek által feszített részgráfok

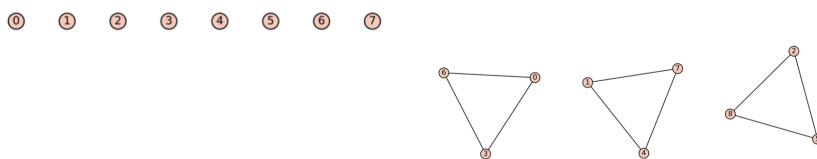
A különböző maradékosztályok szerint el lehetett különíteni az 1. rétegek által ki-feszített részgráfokat, amit a következő táblázatban felsoroltam, a hozzájuk tartozó részgráfokkal.

Az első oszlop  $q$  6-tal való oszthatóságának maradékait mutatja.

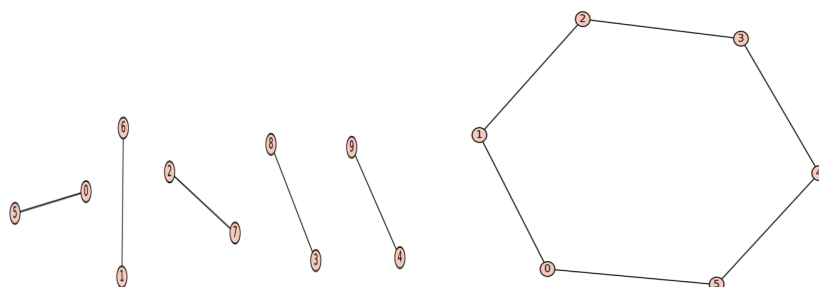
Maradékok	1. réteg mintázata	$q$
$q \equiv 1 \pmod 6$	izolált pontok	7, 13, 19, 25, 37, 43, 49
$q \equiv 2 \pmod 6$	diszjunkt 3 hosszú körök (háromszögek)	2, 8, 32 - a 2 páratlan hatványai
$q \equiv 3 \pmod 6$	teljes párosítás	3, 9, 27 - 3 hatványok
$q \equiv 4 \pmod 6$	izolált pontok	4, 16 - a 2 páros hatványai
$q \equiv 5 \pmod 6$	diszjunkt 6 hosszú körök (hatszögek)	5, 11, 17, 23, 29, 41, 47

8.táblázat: 6-tal való oszthatóság szerinti maradékok és a mintázatok

**4.12. Megjegyzés.** A  $q \equiv 5 \pmod 6$  esetben fedezhető fel a legnagyobb hasonlóság az euklideszi esethez, ahol az első rétege az egységtávolsággráfnak szintén diszjunkt hatszögekre bomlik.



7.ábra:  $q = 7$  és  $q = 8$  esetben az 1. rétegek



8.ábra:  $q = 9$  és  $q = 5$  esetben az 1. rétegek

## 4.5. A rétegek méretei

Emlékezzünk vissza, hogy a 0.-tól különböző rétegek mérete mindig osztható  $(q + 1)$ -gyel. Ez visszavezethető a gráf tranzitivitására, mivel az összes automorfizmus tranzitívan hat a gráfon, tehát minden csúcs egyforma és a szomszédság is ugyanaz lesz.

Az erősen reguláris gráfoknak az átmérője (lényegében) mindig 2. A kialakított  $G_q$  ehhez közeli értéket mutatott, minden esetben az átmérő legfeljebb 3 lett.

**4.13. Megfigyelés.** *A gráf maximális rétegeinek száma 3, tehát az átmérője a gráfnak legfeljebb 3 lesz.*

Miután maradékosztályok szerint vizsgáltam meg a rétegek méreteit, szabályosságot fedeztem fel, és  $(q + 1)$  függvényében fel tudtam írni mindegyik osztályra a hozzá tartozó képletet. Ezt foglaltam össze a 8.táblázatban.

Maradékok	1.réteg	2.réteg	3.réteg	Összesen
$q \equiv 1 \pmod{6}$	$q + 1$	$\left(\frac{(q-1)}{2} + 1\right)(q + 1)$	$\left(\frac{(q-1)}{2} - 2\right)(q + 1)$	$q^2 - 1$
$q \equiv 2 \pmod{6}$	$q + 1$	$\left(\frac{q}{2} - 1\right)(q + 1)$	$\left(\frac{q}{2} - 1\right)(q + 1)$	$q^2 - 1$
$q \equiv 3 \pmod{6}$	$q + 1$	$\frac{(q-1)}{2}(q + 1)$	$\left(\frac{(q-1)}{2} - 1\right)(q + 1)$	$q^2 - 1$
$q \equiv 4 \pmod{6}$	$q + 1$	$\frac{q}{2}(q + 1)$	$\left(\frac{q}{2} - 2\right)(q + 1)$	$q^2 - 1$
$q \equiv 5 \pmod{6}$	$q + 1$	$\frac{(q-1)}{2}(q + 1)$	$\left(\frac{(q-1)}{2} - 1\right)(q + 1)$	$q^2 - 1$

9.táblázat: 6-tal való oszthatóság szerinti rétegméretetek

**4.14. Állítás.** *Az egyes rétegek méretei a táblázatban leírt képletek alapján kiszámolhatóak.*

*Bizonyítás.* Az egyes részesetek bizonyításában segített konzulensem és a kézirat, amelyet ebben a témában írt [9]. Itt csak nagyon röviden vázoljuk az alapötletet.

- $q \equiv 1 \pmod{6}$

Ha  $q \equiv 1 \pmod{6}$ , akkor a gráf nem tartalmaz háromszöget, hiszen  $\mathbb{F}_{q^2}$ -ben nincsen megoldása az  $x^{q-1} + y^{q-1} = z^{q-1}$  egyenletnek. Ebből adódóan, egy 1. rétegben levő elemnek, legyen  $x$ ,  $(q + 1)$  szomszédja van  $((q + 1)$ -reguláris a gráf). Az egyik szomszédja biztosan 0, egy másik az  $x + x$ , a további  $(q - 1)$  szomszéd pedig  $x + y$  alakú ( $x \neq y$ ), amelyek minimum kétszer állnak elő, hiszen  $y + x$  ugyanaz, mint  $x + y$ . Összegezve:  $(q + 1) + \frac{q-1}{2}(q + 1)$ , ami megfelel a táblázatban szereplő képletnek.

- $q \equiv 3 \pmod{6}$

Ebben az esetben az 1. rétegen belüli élek csak  $x$  és  $2x$  között mehetnek. Az 1. rétegben minden csúcsnak  $(q + 1)$  szomszédja van, az egyik a  $0$ , a másik a  $2x$ , amely az 1. réteg eleme, a maradék  $(q - 1)$  elem, amely  $x + y$  alakú, pedig kétszer szerepel, hiszen  $y + x = x + y$ . Tehát a 2. réteg mérete  $(q + 1)^{\frac{q-1}{2}}$ .

□

**4.15. Megfigyelés.** *A rétegek méreteinek képlete megegyezik, ha  $q$  6-tal osztva 3, illetve 5 maradékot ad.*

**4.16. Megfigyelés.** *Ha  $q$  6-tal osztva 2 maradékot ad, akkor a 2. és 3. réteg mérete megegyezik.*

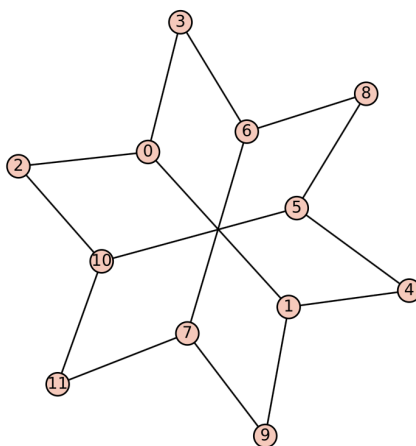
**4.17. Megfigyelés.** *A 3. rétegek mérete 0, ha  $q = 2, 3$  vagy 4. A 3. réteg méreteinek képletét 0-ra rendezve megkapjuk ezeket a  $q$ -kat. Ezekben az esetekben  $G_q$  erősen reguláris lesz.*

## 4.6. A rétegek által kifeszített részgráfok fokszámai

Az egyes rétegek által kifeszített részgráfokat vizsgáltam meg aszerint, milyen fokszámok fordulnak elő egyes rétegekben  $q$  6-os maradékosztálya szerint. Megnéztem, hogy e részgráfokban mely fokszámok hányszor fordulnak elő.

Maradékok	1. réteg fokszámai	Előforduló multiplicitások
$q \equiv 1 \pmod{6}$	0	$(q + 1)$
$q \equiv 2 \pmod{6}$	2	$(q + 1)$
$q \equiv 3 \pmod{6}$	1	$(q + 1)$
$q \equiv 4 \pmod{6}$	0	$(q + 1)$
$q \equiv 5 \pmod{6}$	2	$(q + 1)$

10.táblázat: 1. réteg fokszámai és multiplicitásaik maradékosztályok szerint



9.ábra:  $q = 5$ -re a 2. osztály mintázata

Maradékok	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult
$q \equiv 1$	7	13	19	25	31	37	43
	4-24× 7-8×	6-42× 7-42× 10-14×	7-20× 10-80× 12-80× 13-20×	10-104× 12-104× 13-78× 18-52×	12-192× 13-32× 16-32× 18-128× 19-96× 22-32×	16-76× 18-304× 19-228× 22-38× 24-38× 25-38×	18-176× 19-220× 22-132× 24-220× 25-88× 28-132×
$q \equiv 2$	2	8	32	-	-	-	-
	-	4-27×	10-165× 13-165× 19-165×	-	-	-	-
$q \equiv 3$	3	9	27	-	-	-	-
	2-4x	2-20× 5-20×	8-28× 11-84× 14-168× 17-84×	-	-	-	-
$q \equiv 4$	4	16	-	-	-	-	-
	3-10×	6-68× 9-68×	-	-	-	-	-
$q \equiv 5$	5	11	17	23	29	41	47
	2-6× 3-6×	4-24× 5-12× 6-12× 8-12×	4-18× 5-18× 8-36× 10-54× 11-18×	8-48× 10-96× 11-96× 14-24×	10-30× 11-90× 14-90× 16-120× 17-60× 18-30×	14-42× 16-126× 17-84× 20-210× 22-210× 23-42× 24-42× 26-84×	16-48× 20-144× 22-336× 23-240× 26-192× 28-96× 29-48×

11.táblázat: 2.réteg fokszámai és multiplicitásai maradékosztályok szerint

Maradékok	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult	Fok-Mult
$q \equiv 1$	7	13	19	25	31	37	43
	2 - 8x	4-42× 8-14×	7-20× 8-40× 10-60× 14-20×	8-52× 10-104× 13-52× 14-52×	10-32× 13-128× 14-96× 16-128× 19-32×	13-38× 14-114× 16-114× 19-114× 20-152× 22-76×	16-132× 19-88× 20-308× 22-88× 25-88× 26-132×
$q \equiv 2$	2	8	32	-	-	-	-
	-	6-27×	15-330× 18-165×	-	-	-	-
$q \equiv 3$	3	9	27	-	-	-	-
	-	4-30×	10-84× 16-252×	-	-	-	-
$q \equiv 4$	4	16	-	-	-	-	-
	-	5-34× 8-68×	-	-	-	-	-
$q \equiv 5$	5	11	17	23	29	41	47
	2-6×	5-24× 6-12× 8-12×	5-18× 8-54× 11-36× 12-18×	8-72× 11-24× 12-96× 14-48×	11-30× 12-60× 14-120× 17-30× 18-150×	17-84× 18-168× 20-168× 23-84× 24-252× 26-42×	17-96× 18-48× 20-96× 23-96× 24-336× 26-144× 29-144× 30-96×

12.táblázat: 3. réteg fokszámai és multiplicitásaik maradékosztályok szerint



**4.18. Megfigyelés.** *A fokszámok multiplicitásai minden rétegben és minden maradékosztályban oszthatóak lesznek  $(q + 1)$ -gyel.*

## 5. Konklúzió

Habár a dolgozat főcíme erősen reguláris gráfokra utal, az alcímnek megfelelően az egységtávolsággráf vizsgálatával foglalkoztam különböző véges testek alaphalmazain. A cél az erősen reguláris gráfoknál jól ismert eredményekhez hasonlóan a spektrum meghatározása, fokszámok vizsgálata és az átmérők összehasonlítása.

A  $G_q$  gráf sok szép tulajdonsággal rendelkezik, amik részben hasonlítanak az erősen reguláris gráfok tulajdonságaihoz.

A következő pontokban összeszedtem, milyen hasonlóságokat fedeztem fel a gráfok vizsgálatában.

1. Az erősen reguláris gráfok spektruma meghatározható, legfeljebb 3 különböző sajátértékük van. Ez  $G_q$  spektrumára is jellemző volt,  $q^2$  "helyett" legfeljebb  $q$  (valódi prímszám  $q$  esetén még sokkal kevesebb) különböző sajátértéket találtam.
2. Az átmérő erősen reguláris gráfokra 2,  $G_q$ -ra legfeljebb 3.
3. A  $G_q$  gráf  $(q + 1)$ -reguláris és a legnagyobb sajátérték  $(q + 1)$ , ugyanúgy, mint az erősen reguláris esetben.
4. A legismertebb erősen reguláris gráfokhoz hasonlóan a  $G_q$  gráfnak nagy automorfizmuscsoportja van. Ez a csoport tranzitív a csúcsokon, a 0 stabilizátora az egyes "rétegeket"  $q + 1$  (vagy ennek többszöröse) méretű orbitokban permutálja.

## Hivatkozások

- [1] Szőnyi, T. (2013). Szimmetrikus struktúrák. Typotex.
- [2] Kiss, E. (2017). Bevezetés az algebrába (2nd ed.). Typotex.
- [3] Freud, R. (2007). Lineáris algebra. ELTE Eötvös kiadó.
- [4] Katona, Gy. Y., Recski, A., Szabó, Cs. (2012). A számítástudomány alapjai. Typotex.
- [5] Weisstein, E. W. (2009). Hadwiger-Nelson Problem. link :<https://mathworld.wolfram.com/>.
- [6] Beck, J., Spencer, J. (1984). Unit distances. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 37(3), 231-238.
- [7] Maehara, H., Rödl, V. (1990). On the dimension to represent a graph by a unit distance graph. Graphs and Combinatorics, 6(4), 365-367.
- [8] Itai, A., Papadimitriou, C. H., Szwarcfiter, J. L. (1982). Hamilton paths in grid graphs. SIAM Journal on Computing, 11(4), 676-686.
- [9] Sziklai, P. Some properties of the unit distance graph over a finite field, Kézirat