Szakdolgozat

Vitéz Kata
matematika – kémiatanár
osztatlan tanári mesterszak

Budapest, 2023

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Térgeometria oktatása digitális eszközök használatával

Témavezető:

Koren Balázs

mestertanár

Készítette:

Vitéz Kata

matematika – kémiatanár

osztatlan tanári mesterszak

Budapest, 2023

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott ....VITÉZ KATA.. (név)

.......LPMJWU................... (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE .........TTK.....OSZTATLAN.. tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 20 23.....04...22..................

Vitéz Kata

a hallgató aláírása

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm témavezetőmnek, Koren Balázsnak, hogy konzultációkkal és sok hasznos ötlettel segítette szakdolgozatom elkészítését. Köszönöm a Budapest XIV. Kerületi Teleki Blanka Gimnázium matematikatanárainak, akik a felmerülő kérdéseimre szívesen válaszoltak. Továbbá a többi, számomra részben ismeretlen matematikatanárnak, akik számos más iskolából, illetve az internetes felkérésemre, részt vettek a kérdőívem kitöltésében. Köszönöm a gimnázium 12. osztályos tanulóinak, hogy a tanulói kérdőív kitöltésével hozzájárultak a szakdolgozatom megírásához. Illetve köszönöm a családomnak és a barátaimnak a bíztatást és a támogatást, amit a dolgozatom elkészítése során nyújtottak.

Tartalomjegyzék

Bevezetés 6

1. GeoGebra 3D használata 8

1.1. Röviden a GeoGebra Classic programról 8

1.2. A háromdimenziós funkció használata 8

1.3. Kiterjesztett valóság (Augmented reality – AR) 9

2. Térgeometria a középiskolában 11

2.1. Térelemek 11

2.2. Szabályos testek 14

2.3. Síkidomok kerülete, területe 18

2.4. A kör és részeinek területe 21

2.5. A kocka és a téglatest 21

2.6. A hasáb és a henger 24

2.7. A gúla és a kúp 28

2.8. A csonkagúla és a csonkakúp 35

2.9. A gömb 38

2.10. Egymásba írt testek 41

3. Tanítási segédlet 44

3.1. A digitális segédlet ötlete 44

3.2. Megvalósítás 45

3.3. Szemléltetés egy példán keresztül 45

4. Alkalmazás 47

4.1. A vizsgálat terve 47

4.2. Hipotézis 48

4.3. Eredmények 49

4.4. Eredmények értelmezése 53

5. Összegzés 56

Felhasznált irodalom 58

Mellékletek 61

BEVEZETÉS

A mindennapjaink során számos alkalommal tapasztaljuk, hogy az emberek gyakran rossz élményeket kötnek a matematikához, vagy a korábbi matematika tanulmányaikhoz. Ennek számos különböző, egyéntől függő oka lehet. Már a középiskolai matematika tanulása is rendkívül absztrakt, és más területektől eltérő gondolkodásmódot igényel, amely megnehezíti a megértést, vagy már az érdeklődés felkeltését is. A 21. századi digitális technológiában tapasztalható fejlődés ezt a tudományágat sem kerülte el. Könnyen elérhető és használható alkalmazások, illetve tananyagok jelentek meg az interneten a matematika valamennyi témaköréhez kapcsolódóan. A tanulók a digitális eszközök, illetve alkalmazások használatában rendkívül jártasok a hétköznapokban. A matematikával kapcsolatos segédanyagok bevonása az oktatásba segítségként szolgálhat a diákoknak közelebb kerülni a tantárgyhoz.

Ahogy a többi témakörben, úgy a térgeometria esetében is lehetőség nyílik erre. Annak érdekében, hogy a síkból a térbe kilépve, könnyebbé válhasson a tanulók számára elképzelni a különféle térbeli ábrákat és testeket, számos modellező program alkalmazhatóvá vált, amelyekre rövid keresgélés után könnyen rátalálhatunk az interneten. Az alábbiakban az általam ismert és kipróbált, erre a célra megfelelő programokat mutatom be a tapasztalataim alapján. Az egyik ilyen a Cabri 3D néven futó, interaktív matematikai szoftver, amely a térgeometriai feladatok szemléltetéséhez nyújthat segítséget [1]. Ennek hátránya, hogy csak angolul és spanyolul elérhető, illetve az 1 hónapos próbaverzió ingyenes elérésen kívül, ha tovább szeretnénk használni, akkor előfizetést igényel. Egy másik, tervezéshez használható program a Tinkercad nevet viseli [2], ahol a tanulók a háromdimenziós tervezést próbálhatják ki, amelynek használata egy kreativitást fejlesztő feladat lehet számukra. Ellenben, itt a testek alapvető adatainak, részeinek berajzolására és kiemelésére nincs lehetőség, amely a tanórai környezetben a megértéshez fontos szempont.

A többféle, háromdimenziós szemléltetésre alkalmas lehetőség közül számomra a GeoGebra 3D alkalmazás több szempontból is a legideálisabb [3].

Az említett GeoGebra 3D ingyenes, bárki számára könnyen hozzáférhető alkalmazás, amely magyar nyelven áll rendelkezésére a használóinak. Emellett mind online, mind pedig letölthető verzióban, valamint telefonos alkalmazásként is lehetőség van a használatára. Ezért döntöttem úgy, hogy ezt veszem igénybe a matematikaórán alkalmazható térgeometriai szemléltetőábrák készítésére, amelyek központi szerepet játszanak a szakdolgozatomban.

A GeoGebra programmal először középiskolában találkoztam, függvények ábrázolásához alkalmaztuk matematikaórán. Később, az egyetemen többször is előkerült, például azon a kurzuson, ahol az okostelefon matematikaórán való alkalmazási lehetőségeiről tanultunk. Ezután részt vettem olyan egyetemi órán is, ahol részletesen foglalkoztunk az alkalmazással. Akkor fogalmazódott meg bennem, hogy később, majd a tanítás során, milyen hasznos lesz számomra, hogy elsajátíthattam a részletes felhasználási módját és lehetőségeit. Azonban, ekkor még csak a síkbeli lehetőségekkel foglalkoztunk. Így felmerült bennem, hogy mivel a program rendelkezik térbeli modellezési funkcióval is, vajon ezt hogyan lehetne hasznosítani a matematikaórákon. Adódott, hogy a térgeometria témakörénél előkerülő fogalmak és problémák bemutatásánál segítség lehet. Azt tűztem ki célul, hogy készítsek olyan digitális anyagokat, amelyeket később én is, illetve más matematikatanárok is hasznosítani tudnak a térgeometria oktatása során. Ezen elkészített segédanyagok összegyűjtésével hoztam létre egy olyan felületet, ahol bárki számára (akár tanár, akár tanuló) könnyen hozzáférhető, a GeoGebra háromdimenziós változatával készített szemléltetőábrák találhatóak. Itt szerepelnek általánosan a különböző testek háromdimenziós ábrái, illetve konkrét feladatokra szabott ábrák is.

A következőkben először röviden ismertetem a GeoGebra 3D programot, amellyel a szakdolgozatomban, illetve az említett digitális segédletben szereplő ábrákat készítettem.

Az ezt követő fejezetben részletesen tárgyalom a középiskolai matematikaórán tanult, a térgeometria témakörébe tartozó ismereteket, kibővítve az egyetemi tanulmányaim során szerzett, a témához kapcsolódó állításokkal, tételekkel. Ezek kiválasztásában szerepet játszott, hogy melyek azok a tételek, illetve bizonyítások, amelyekhez a dolgozatom középpontjában álló GeoGebra 3D programmal készített szemléltetőábra releváns segítségül szolgálhat.

Egy külön fejezetben bemutatom az általam készített tanítási segédletet, illetve alkalmazási lehetőségeit.

Fontos szempont volt, hogy visszajelzést kérjek elsősorban matematikatanároktól, hogy mi a véleményük a segédletről, milyen lehetőséget látnak annak matematikaórán való alkalmazásában. Emellett a másik szemszög, vagyis a tanulók visszajelzésére is szükségem volt. Arról kérdeztem őket, hogy milyen tapasztalataik vannak, és mi a benyomásuk, egyrészt általánosan a digitális tananyagok használatáról, illetve az ismertetés után speciálisan az én segédletem alkalmazásáról.

1. GEOGEBRA 3D HASZNÁLATA

A szakdolgozatom kiindulópontja a GeoGebra 3D rajzoló alkalmazás felhasználási lehetősége a matematikaórákon. Minden ábrát ezzel a céllal, ezen alkalmazás segítségével készítettem. Először egy rövid áttekintést teszek arról, hogy mit kell tudni erről a programról.

1.1. Röviden a GeoGebra Classic programról

A GeoGebra Classic (klasszikus GeoGebra) eredetileg egy matematika oktatásban használt segédeszköz volt, amelyet a geometria és az algebra területén alkalmaztak dinamikus ábrázolás céljából [4]. Az elnevezés is innen eredeztethető. A programot Markus Hohenwarter fejlesztette ki, aki a salzburgi egyetemen dolgozott. A program előnye többek között, hogy rendkívül széles korosztályban alkalmazható, az általános iskolától az egyetemig egyaránt. Online, illetve letölthető változatban is elérhető. A program ingyenes, és számos digitális eszközön, többek között számítógépen és okostelefonon is használható. Az alkalmazásban megjelenő alapvető parancsok használatához maga a program is segítséget nyújt az interneten könnyen elérhető kézikönyv formájában [5]. Mára az első változathoz képest számos további funkcióval bővült az elérhető programok tárháza.

1.2. A háromdimenziós funkció használata

Az egyik ilyen fejlesztés a GeoGebra 3D rajzoló (3D Calculator) nevet viseli [6]. A GeoGebra ezen változata szintén egy dinamikus matematikai alkalmazás a geometria és az algebra összekapcsolásával, amely a síkbeli ábrakészítés lehetőségét a térbeli megvalósítással egészíti ki. Ahogy az eredeti program esetében, a háromdimenziós változat is elérhető online és letölthető verzióban is. Android és iOS eszközön is használható.

A programmal az eredeti funkciókon kívül lehetőség van kétismeretlenes függvények, illetve paraméteres felületek ábrázolására, testek és különféle háromdimenziós objektumok szemléltetésére, illetve az objektumok metszeteinek megjelenítésére. Sokat hozzáad a program sikerességéhez, hogy a létrehozott alakzatok nagyítására, kicsinyítésére és forgatására is lehetőség van. Az alkalmazás a testek térfogatának meghatározására is alkalmas, amely fogalommal, illetve számítására vonatkozó képletekkel a középiskolai térgeometria tanulmányok alatt sokat foglalkozunk.

A dolgozatomban szereplő ábrák elkészítése során a program sok hasznos lehetőségét kihasználtam. A különböző felületek színének, átlátszóságának beállítása sokat számít az ábra értelmezhetőségében. Az objektumok jelöléseinek alkalmazása, a metszéspontok és vonalak megadása szinte minden esetben szükséges volt. A különböző testek megjelenítése néhány parancs ismeretével könnyen megvalósítható.

Ezen ábrák a GeoGebra programmal készített, háromdimenziós szemléltetőábrák kép formátumba alakított változatai. Az eredeti, 3D-s verziók a később bemutatott tanári segédletben érhetők el.

A 2020-as Nemzeti alaptantervhez tartozó 9-12. osztályos tanulókra vonatkozó kerettantervben szerepel, hogy „A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg.” [7][8]. Ezen kompetencia elsajátításához járul hozzá, ha a diákok ismerik, és a térgeometria témakörében használni is tudják a tanulás folyamatában a GeoGebra 3D alkalmazást.

1.3. Kiterjesztett valóság (Augmented reality – AR)

A kiterjesztett valóság nem összekeverendő a virtuális valóság fogalmával. A kiterjesztett valóság a valódi, fizikai környezetünk kombinációja a digitális eszközünk által összegyűjtött virtuális információkkal, de a felhasználó nincs teljes mértékben elszigetelve a valóságtól [9].

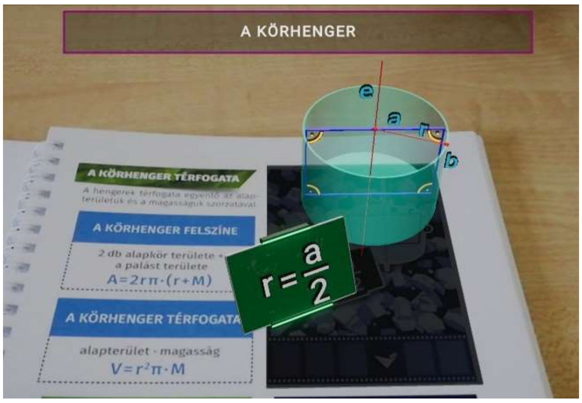
Ezt használja ki a GeoGebra AR funkciója is [10]. Ez az eredeti program egy másik fejlesztési területe. Az alkalmazás Android és iOS eszközökön szintén használható. A program segítségével háromdimenziós objektumokat tudunk megjeleníteni a minket körülvevő, valóságos környezetünkben.

A használatához először az okoseszközünkre telepíteni kell a GeoGebra 3D Calculator elnevezésű alkalmazást. A telepítés után az alkalmazást megnyitva hozzunk létre egy általunk választott bármilyen testet, amelyet el akarunk helyezni a környezetünkben. Ekkor megjelenik a képernyőn az AR felirat, amelyre kattintva a program átvált, és a képernyőn a telefonunk kameraképe jelenik meg. Ekkor úgy kell mozgatni a telefonunkat, hogy egy sima felületre irányítsuk a kamerát, mert ekkor tudja létrehozni a program azt a síkot, amelyhez illeszti az ábránkat. Ha ez megvan, a képernyő bármelyik részére kattintva megjelenik a korábban létrehozott objektum a környezetünkhöz illesztve. Ekkor akár a testet belülről is megvizsgálhatjuk a telefonunk megfelelő irányú mozgatásával.

A kiterjesztett valóság matematikaórán való alkalmazását támogatja a nemrégen megjelent AR könyvsorozat [11] Geometria című kiadványa is. A könyvben a geometria tananyagrészeihez tartoznak két- és háromdimenziós kiterjesztett valóság tartalmak, amelyek érdekesebbé és könnyebben megjegyezhetővé teszik az ismeretanyagot. Erre egy példa az 1. ábrán látható tartalom, amely a körhengerrel kapcsolatos információk bemutatására szolgál.

Ezen tartalmak eléréséhez le kell tölteni egy ingyenes applikációt Android vagy iOS mobileszközünkre, amelyen keresztül megjeleníthetők.

A könyv tanórán is alkalmazható a tanulás támogatásaként. A weboldalon javaslatokat is adnak ezzel kapcsolatban. Használható csoportmunka során, vagy ki is vetíthetők a tartalmak a MultiLearn online rendszer segítségével a könyv megvásárlása után.



1. ábra: A körhengerhez használható háromdimenziós tananyag egy része

2. TÉRGEOMETRIA A KÖZÉPISKOLÁBAN

A geometria görög eredetű szó, magyarul földmérést jelent. Kialakulása onnan eredeztethető, hogy már az ókorban szükségessé vált a képzőművészetekben, illetve építészetben a különböző térbeli alakzatok jellemzése. A geometriát a térbeli alakzatok tulajdonságaival foglalkozó tudományként értelmezik a közhasználatban.

A középiskolai tanulmányok során először a síkgeometriai alapfogalmakkal ismerkednek meg a tanulók. Megtanulják a háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismereteket, foglalkoznak a területszámítás problémájával. Elsajátítják a körrel, és a kör részeivel kapcsolatos összefüggéseket, jelöléseket. Ezen előzetes ismeret mind szükséges ahhoz, hogy 12. osztályban, a térgeometria témakörénél értelmezni tudják a testek definícióit és tulajdonságait. Ekkor kilépünk a síkból, és a térbeli gondolkodás válik szükségessé, ami sok esetben nehézséget okoz a diákoknak. Így fontos kérdés, hogy milyen módszert alkalmaz a tanár ezen témakör felépítése során.

A 2023 nyarán, illetve őszén érettségiző diákokra még a 2012-es Nemzeti alaptantervre épülő érettségi követelmények vonatkoznak, míg a 2024 nyarán érettségizőknek már az új, 2020-as szabályozás szerinti követelményeket kell figyelembe venni [7][12][13].

A továbbiakban a térgeometria középiskolai oktatásban való felépítését tekintem át. Mivel a testek felépítéséhez, felszínének, térfogatának értelmezéséhez a korábbi, síkgeometriai ismeretekre van szükség, így a témakört ezen ismeretek tárgyalásával kezdem.

Az alábbi fejezetben megjelenő definíciók a Sokszínű matematika 12. tankönyvből származnak [14].

2.1. Térelemek

A 2020-as Nemzeti alaptantervhez tartozó kerettanterv [8] szerint a térelemek tárgyalása a középiskolában 10. osztályban szerepel először a síkgeometria témakörben. 12. osztályban a térgeometria tanulásakor ezen fogalmak átismétlésére van szükség, mert ezen alapokra épülnek a további ismeretek.

*Térelemek*nek nevezzük a következő egyszerű objektumokat: a pont, az egyenes és a sík. Ezek a térgeometria alapfogalmai, nem definiáljuk őket. Szintén nem definiáljuk az illeszkedés fogalmát.

A térgeometria témakör bevezetését a térelemek kölcsönös helyzetének, hajlásszögének és távolságának definiálásával tesszük meg.

2.1.1. Térelemek kölcsönös helyzete

Először az egyenesek és síkok egymáshoz való viszonyának eseteit vizsgálom.

Definíció:

Két egyenes:

- metsző, ha pontosan egy közös pontjuk van.
- párhuzamos, ha egy síkban vannak, és nincs közös pontjuk, azaz nem metszik egymást.
- kitérő, ha nincsenek egy síkban.
- egybeeső, ha egynél több közös pontjuk van.

Két sík:

- metsző, ha pontosan egy közös egyenesük van.
- párhuzamos, ha nem metszik egymást.
- azonos, ha van legalább három, nem egy egyenesre illeszkedő közös pontjuk.

Egy egyenes és egy sík kölcsönös helyzetének esetei:

- az egyenes illeszkedik a síkra, ha az egyenes minden pontja a síknak is pontja.
- az egyenes a síkot egy pontban metszheti.
- az egyenes és a sík párhuzamos, vagyis az egyenesnek és a síknak nincs közös pontja.

2.1.2. Térelemek hajlásszöge

Adott pontból kiinduló két félegyenes által létrehozott két síkrészt *szögtartományok*nak, vagy röviden *szögek*nek nevezzük.

Két kitérő egyenes hajlásszögének fogalma az emelt szintű matematikaérettségi követelményének része. [13]

Definíció: Két kitérő egyenes hajlásszöge az a szög, amelyet egy tetszőleges ponton átmenő, velük párhuzamos egyenesek alkotnak.

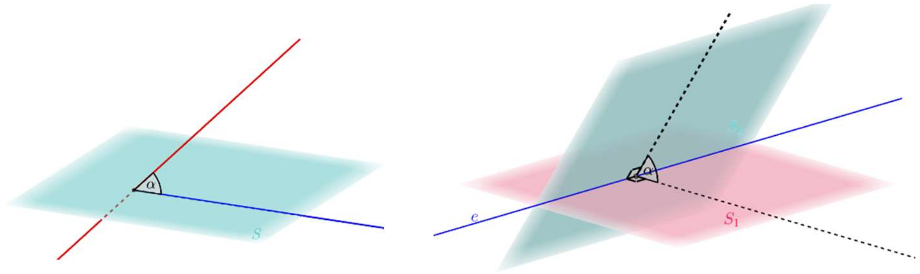
Vizsgáljuk meg, hogy milyen lehet *egy egyenes és egy sík hajlásszöge*.

Egy egyenes és egy sík akkor merőleges egymásra, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére. Egy egyenes és egy sík merőlegestől különböző hajlásszögének értelmezéséhez be kell vezetnünk a *merőleges vetület* kifejezést. Egy pont egy adott síkon lévő merőleges vetülete az a pont, amelyet a pontból a síkra állított merőleges és a sík metszéspontjaként kapunk.

Definíció: Egy síkot metsző egyenes és a sík hajlásszöge az a szög, amelyet az egyenes a síkon lévő merőleges vetületével zár be (2. ábra). Ha a sík párhuzamos az egyenessel, akkor a hajlásszögük 0°.

Értelmezhető *két metsző sík hajlásszöge* is.

Definíció: A két metsző sík metszésvonalán kiválasztunk egy tetszőleges pontot.
A pontból mindkét síkon merőlegest állítunk a metszésvonalra. Az így keletkezett két egyenes által bezárt szöget nevezzük a két sík hajlásszögének (2. ábra). Két párhuzamos sík hajlásszöge 0°.



2. ábra: Két metsző egyenes és két metsző sík hajlásszöge

2.1.3. Térelemek távolsága

Vizsgáljuk meg, hogy mit értünk a különböző térelemek távolsága alatt. Általánosan azt mondhatjuk, hogy ha a két térelem pontjait minden lehetséges módon összekötjük, és kiválasztjuk az összekötő szakaszok közül a legrövidebbet, akkor azt a szakaszt nevezzük a *távolság*uknak. Jele: $d(\mathrm{ponthalmaz}_1, \mathrm{ponthalmaz}_2)$

Definíció:
Pont és sík távolsága a pont és a síkon lévő merőleges vetületének távolsága.
Sík és vele párhuzamos egyenes távolsága a sík és az egyenes egy pontjának a távolsága.
Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egy pontjának a másiktól vett távolsága.

2.2. Szabályos testek

A középiskolai matematikaórán megfogalmazzuk, hogy mit jelent a poliéder kifejezés. Az olyan testeket, amelyeket csak sokszögek határolnak, *poliéderek*nek nevezzük. A poliédereken belül külön csoportot alkotnak a *konvex poliéderek*.

Definíció: A konvex poliéder olyan poliéder, amelynek bármely lapsíkja által meghatározott egyik félteret tekintve a poliéder minden pontja ebben a féltérben van.

Euler tétele konvex poliéderekre

Leonhard Euler svájci matematikus nevéhez fűződik a konvex poliéderek lapjainak, éleinek és csúcsainak száma közötti kapcsolatot megfogalmazó tétel. A tétel előkerülhet említés szintjén már az általános iskolában is, de részletesen középiskolában foglalkozunk vele. A bizonyítása itt is csak fakultáción kerül elő. A tétel első bizonyítását Euler alkotta meg, de ezen kívül számos más igazolás is született azóta a tétel teljesülésére. Most azt a bizonyítást alkalmazom, ahogy mi tettük ezt az egyetemi tanulmányaim során. A bizonyításban szereplő ábra felrajzolásához a GeoGebra háromdimenziós funkcióját használtam Verhóczki László előadásjegyzete alapján [15]. A tétel a következőképpen hangzik:

Tétel: Legyen adva egy konvex poliéder, ahol a lapok számát *l*, az élek számát *e*, a csúcsok számát *c* jelöli. Ekkor teljesül a következő összefüggés:

$$l + c = e + 2$$

A tétel bizonyításában használt gráfelméleti fogalmak értelmezéséhez a Diszkrét matematika című könyvet használtam fel [16].

Bizonyítás: Vegyünk egy P konvex poliédert, amelynek teljes felülete kék színű. Lépésenként átszínezzük a poliéder lapjainak belsejét és egyes éleit pirosra (3. ábra).

1. Kiválasztunk egy lapot (L_1), és annak belsejét átszínezzük piros színűre.
2. Veszünk egy olyan élt (e_1), amely az L_1 piros, és egy kék (L_2) lapokat határolja. Átszínezzük az e_1 élt (végpontjain kívül) és az L_2 lap belsejét is piros színűre.
3. Minden további lépésben kiválasztunk egy olyan élt, amely egy piros és egy kék lapot határol. Ezt követően átszínezzük a kiválasztott élt és a kék lapot piros színűre.

Így l lépésben az összes lap belseje át lesz színezve, illetve $l-1$ piros éle lesz a poliédernek.

Megállapítható, hogy az i-edik ($i \geq 2$) lépés után azon lapok lesznek pirosak, amelyek egyik éle már piros. Az átszínezés során a piros lapok uniója mindig olyan, hogy bármelyik pontból el lehet jutni bármelyik pontba egy töröttvonal mentén úgy, hogy a töröttvonal a poliéderfelületen van, illetve minden pontja piros (*poligonálisan összefüggő*).

Könnyen belátható, hogy a kék élek és a poliéder csúcsai egy körmentes, összefüggő gráfot adnak (*fagráf*):

- bármely csúcsból bármely másik csúcsba el lehet jutni kék élek mentén, a gráf **összefüggő**
  (Indukcióval belátható: A 2. lépés után teljesül. Tegyük fel, hogy az i-edik lépés után is teljesül B_1 és B_2 csúcsokra. Ha az $i+1$-edik lépésben átszínezett e_i él a B_1 és B_2 csúcsokat összekötő kék töröttvonal egy oldala, akkor a két csúcs összekötésében e_i él helyett vehetjük az L_i lap többi oldala által alkotott töröttvonalat, amely élek biztosan kék színűek. Így teljesül az $i+1$-edik átszínezés után is.)
- a kék élek uniója nem tartalmazhat kört, a gráf **körmentes**
  (Indirekt belátható: Az átszínezés után minden lap piros színű, és a lapok uniója poligonálisan összefüggő. Ha lenne kék színű kör a gráfban, akkor az általa létrehozott két tartomány között nem létezne piros színű töröttvonal, ami ellent mondd az előbbi megállapításnak.)

Belátható, hogy egy c csúcsú fagráf éleinek száma $c-1$. Ehhez először kell a következő megállapítás:

Tétel: Minden ($2 \geq$ csúcsú) fa tartalmaz olyan csúcsot, amelynek foka 1.

Bizonyítás: Nullafokú (izolált) csúcs nem lehet, mert a gráf összefüggő. Ha minden csúcs legalább kétfokú lenne, akkor a gráfban lenne kör.

Ennek felhasználásával, teljes indukciót alkalmazva adódik az előbbi állítás:

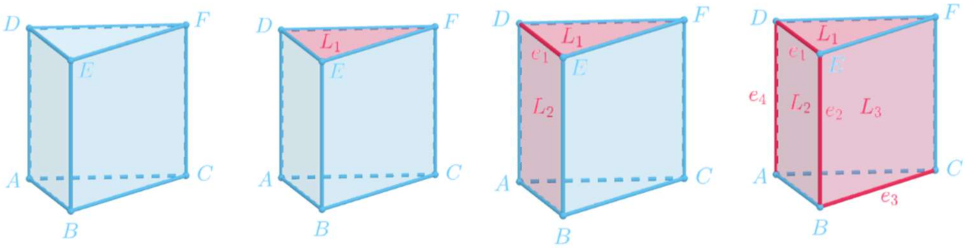
1. c = 1-re, c = 2-re teljesül.
2. Indukciós feltétel: $c-1$ csúcsú fa éleinek száma $c-2$.
3. Vegyünk egy c csúcsú fát. Az előző tétel miatt ez biztosan tartalmaz 1-fokú csúcsot. Hagyjuk el ezt a csúcsot a hozzá tartozó éllel együtt. Így kapunk egy $c-1$ csúcsú,

körmentes és összefüggő gráfot, aminek az indukciós feltétel miatt $c-2$ éle van. Ebből az következik, hogy a c csúcsú, eredeti fának $c-1$ éle van.

Tehát az iménti, c csúcsú fagráf éleinek száma, azaz a kék élek száma $c-1$. A piros élek száma a korábbiak alapján $l-1$.

Így a poliéder éleinek száma:

$e=(c-1)+(l-1)$, amiből átrendezéssel következik a tétel, azaz $e+2=c+l$.



3. ábra: Euler tételének bizonyítása

Mielőtt általánosan beszélnénk a térbeli testek típusairól, nézzük meg azokat az eseteket, amikor valamilyen szabályosság fedezhető fel a felépítésükben. Ezen szabályos testekkel már általános iskolában is foglalkozunk.

Szabályos konvex poliéderek

Fogalmazzuk meg, hogy mikor tekintünk egy konvex poliédert szabályosnak.

Definíció: Egy konvex poliédert szabályosnak mondunk, ha bármely két élének hossza egyenlő, bármely két élszöge egyenlő és bármely két éléhez tartozó lapszög egyenlő.

A szabályos konvex poliéderekkel kapcsolatban a következő tétel fogalmazható meg [14]:

Tétel: Hasonlóság erejéig öt szabályos konvex poliéder létezik.

Bizonyítás: Legyenek a poliéder határolólapjai n-oldalú szabályos sokszögek. Jelölje a poliéder lapjainak számát *l*, éleinek számát *e*, csúcsainak számát *c*.

Mivel egy élhez két oldal kapcsolódik, ezért teljesül, hogy $l \cdot n = 2 \cdot e$, amiből $l = \frac{2 \cdot e}{n}$.

Jelölje *k* az egy csúcsba befutó élek számát, ekkor $k \cdot c = 2 \cdot e$, amiből $c = \frac{2 \cdot e}{k}$.

Euler-tétele alapján: $\frac{2 \cdot e}{n} + \frac{2 \cdot e}{k} = e + 2$, ebből e-vel való osztással adódik: $\frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{e}$.

Ebből következik, hogy $\frac{2}{n} + \frac{2}{k} > 1$, vagyis $2k + 2n > nk$.

További átalakításokkal: $nk - 2k - 2n < 0$, azaz $(n-2)(k-2) - 4 < 0$.

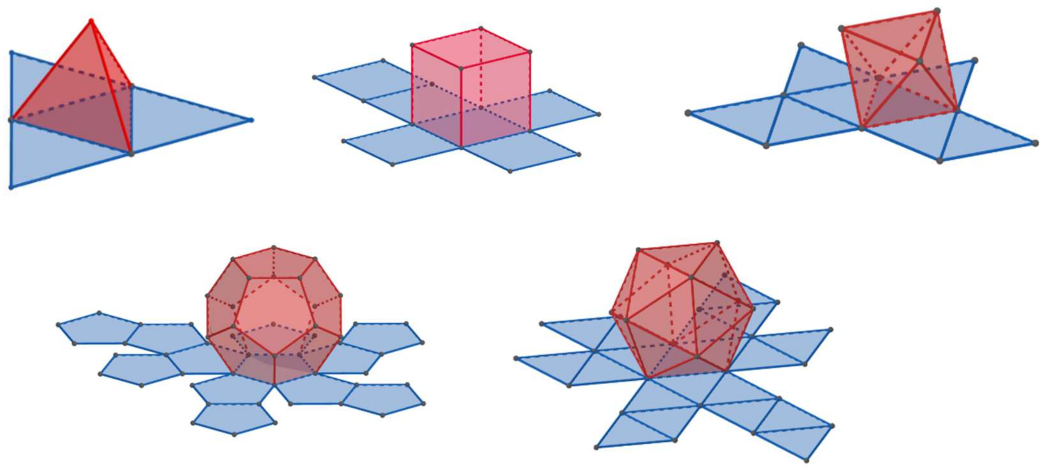
Tehát $(n-2)(k-2) < 4$.

$(n-2)$ és $(k-2)$ lehetséges értékei: 1, 2 vagy 3. Ebből az következik, hogy n és k értékei 3, 4 vagy 5 lehetnek. Ez azt jelenti, hogy a lapjait csak három-, négy- és ötszögek alkothatják. Az élek számát a korábbi összefüggések segítségével fejezhetjük ki.

Így a lehetséges 5 szabályos konvex poliéder adatait az 1. táblázat tartalmazza. A 4. ábrán pedig a testeket és a térhálójukat jelenítettem meg.

Név	n	k	l	c	e
tetraéder	3	3	4	4	6
hexaéder	4	3	6	8	12
oktaéder	3	4	8	6	12
dodekaéder	5	3	12	20	30
ikozaéder	3	5	20	12	30

1. táblázat: Az öt szabályos konvex poliéder neve és adatai



4. ábra: Az öt szabályos konvex poliéder és térhálója

2.3. Síkidomok kerülete, területe

A konvex poliéderek határolólapjainak adatait ismernünk kell ahhoz, hogy a poliéderekkel részletesen foglalkozni tudjunk. Ezért először a síkidomok tulajdonságait vesszük át.

A területfogalommal mindenekelőtt általánosan foglalkozok. Vizsgáljuk meg, hogy mit várunk el a terület fogalmától.

Legyen t egy olyan függvény, ahol a területtel rendelkező alakzatok halmazához rendelünk hozzá valós számokat. Ekkor teljesülnek a következő tulajdonságok:

1) $t \geq 0$
2) $t(A \cup B) = t(A) + t(B)$, ahol A és B egymásba nem nyúló ponthalmazok, azaz belső pontjaik metszete üreshalmaz. Egy halmaz x belső pontjára teljesül, hogy létezik olyan $r > 0$, amelyre $B(x, r)$ gömb részhalmaza a halmaznak.
3) Eltolásra nézve invariáns, tehát egy A halmaz, és annak v vektorral vett eltoltjának területe egyenlő. Azaz $t(A + v) = t(A)$.
4) t normált, azaz az egységnégyzet területe 1.

Az általános területfogalom megalkotását az egyetemi tanulmányai során a Jordan-mérhetőség bevezetésével tettük meg [17]. Ehhez csak korlátos halmazokkal foglalkozunk, azaz olyan halmazokkal, amelyek gömbbel (vagy téglával) lefedhetők.

Definíció: $T = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ tégla. Ekkor $t(T) = (b - a)(d - c)$

$H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, $t(H)$-t úgy próbáljuk definiálni, hogy H-t kívülről és belülről téglákkal közelítjük.

H halmaz külső területe,

$$k(H) = \inf \{\sum_{j=1}^{n} t(T_j) : T_1, \dots, T_n \text{ tégla}, n \in \mathbb{N} \text{ tetszőleges és } H \subset \bigcup_1^n T_j\}$$

H halmaz belső területe,

$$b(H) = \sup \{\sum_{j=1}^{n} t(T_j) : T_1, \dots, T_n \text{ egymásba nem nyúló tégla, } n \in \mathbb{N} \text{ tetszőleges és } \bigcup_1^n T_j \subset intH\}$$

Definíció: $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz Jordan-mérhető, ha $b(H) = k(H)$.

Ekkor a H halmaz területe, más szóval Jordan-mértéke: $t(H) \coloneqq b(H) = k(H)$.

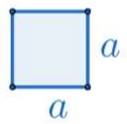
A Jordan-területre teljesülnek a fenti terület tulajdonságok.

Idézzük fel néhány közismert síkidom kerületének és területének számítási módját. A síkidomok mellett szereplő ábrák a képletekben használt jelölések azonosítását és a szemléltetést szolgálják.

1) **Négyzet**

$K = 4a$

$T = a^2$

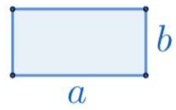


5. ábra: Négyzet

2) **Téglalap**

$K = 2(a + b)$

$T = ab$

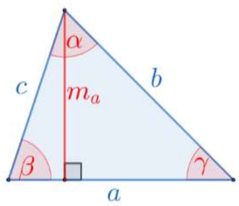


6. ábra: Téglalap

3) **Háromszög**

$K = a + b + c$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot sin\beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot sin\alpha}{2}$$

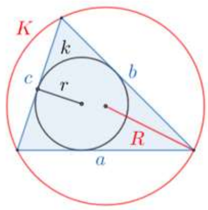


7. ábra: Általános háromszög adatokkal

Héron-képlet: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$T = r \cdot s = \frac{abc}{4R}$$

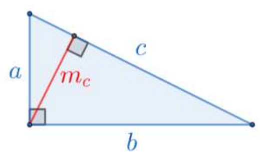


8. ábra: Általános háromszög nevezetes körei

Speciális esetek

Derékszögű háromszög:

$$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

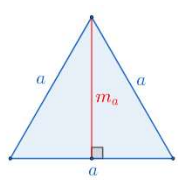


9. ábra: Derékszögű háromszög

Szabályos háromszög:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



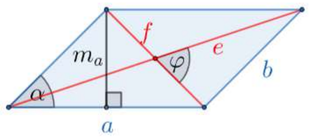
10. ábra: Szabályos háromszög

4) **Paralelogramma**

$$K = 2(a + b)$$

$$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b =$$

$$= a \cdot b \cdot sin\alpha = \frac{e \cdot f \cdot sin\varphi}{2}$$

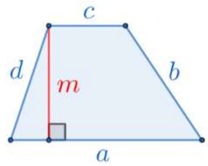


11. ábra: Paralelogramma

5) **Trapéz**

$$K = a + b + c + d$$

$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$$

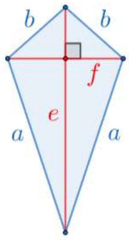


12. ábra: Trapéz

6) **Deltoid**

$$K = 2(a + b)$$

$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

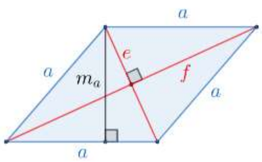


13. ábra: Deltoid

7) **Rombusz**

$$K = 4a$$

$$T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2}$$

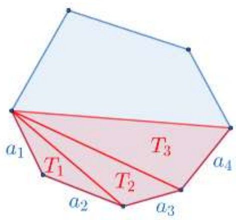


14. ábra: Rombusz

8) **Sokszögek**

$$K = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$



15. ábra: Sokszög

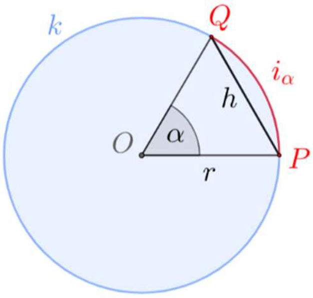
2.4. A kör és részeinek területe

A testek közül vannak olyanok, amelyek alaplapja, fedőlapja egy kör. Idézzük fel a körrel kapcsolatos ismereteket is.

Tétel: Az r sugarú k kör kerülete és területe:

$$\boldsymbol{K = 2r\pi}$$

$$\boldsymbol{T = r^2\pi}$$



16. ábra: A kör és részei

Az r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó i_α ív hossza:

$$\boldsymbol{i_\alpha = \frac{2r\pi}{360°} \cdot \alpha^{\circ} = r \cdot \hat{\alpha}}$$

Az r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körcikk területe:

$$\boldsymbol{T_{körcikk} = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot \alpha^{\circ} = \frac{r^2 \cdot \hat{\alpha}}{2} = \frac{i_\alpha \cdot r}{2}}$$

Megjegyzés: α° a szög fokban, $\hat{\alpha}$ a szög radiánban megadott értéke.

Érettségi feladatokban szerepelhet olyan kérdés, ami egy adott körszelet területére vonatkozik. A h húr és az i_α ív által határolt körszelet területét a megfelelő körcikk és az OPQ háromszög területének különbségeként számolhatjuk ki (16. ábra), azaz:

$$\boldsymbol{T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{\text{OPQ háromszög}}}$$

2.5. A kocka és a téglatest

Az előzetes ismeretek birtokában már meg tudjuk konstruálni a térbeli testeket. A térbeli jellemzés fő szempontjai a felszín és a térfogat megvizsgálása lesz. Ehhez először értelmezzük ezen fogalmakat.

A *poliéder felszíne* a poliédert határoló lapok területösszege.
A *poliéder térfogata* a poliéderre jellemző nemnegatív szám, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) Az egységkocka térfogata 1.
(2) Az egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.
(3) Ha egy poliédert részpoliéderekre vágunk szét, akkor a részek térfogatának összege egyenlő az egész poliéder térfogatával.

Már az 5-8. osztályosokra vonatkozó kerettantervben szerepel, hogy a tanuló az általános iskolai tanulmányainak végére képes értelmezni a kocka, és a téglatest hálóját, ismeri ezek alkotóelemeinek nevét, ki tudja számolni a felszínüket és a térfogatukat [18].

Jordan-mérték háromdimenzióban

Az általános területfogalom mintájára beszélhetünk Jordan-mértékről háromdimenzióban is.

Definíció: tengelypárhuzamos tégla $\mathbb{R}^3$-ban:

$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, ahol $\forall$ j-re $a_j, b_j \in R$ és $a_j < b_j$.

Definíció: $t_3(T) \coloneqq (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$

Megjegyzés:
$H \subset \mathbb{R}^3$ halmaz korlátos, külső és belső mértéke hasonlóan értelmezhető, mint a kétdimenziós esetben. Mérhető, ha $k(H) = b(H)$, és ekkor a Jordan-mértéke $t(H) \coloneqq k(H) = b(H)$. A kétdimenziós esetben megismert 4 tulajdonság itt, a háromdimenziós esetben ugyanúgy érvényes. Ebben az esetben $t_3([0,1] \times [0,1] \times [0,1]) = 1$ és ha *A, B* mérhető halmazok, akkor $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ is mérhető.

Definíció: $H \subset \mathbb{R}^3$ halmaz *z*-magasságú szekciója: $H^z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in H\}$

Megjegyzés: A többi irányú szekció is hasonlóan értelmezhető.

Tétel: Legyen $H \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ mérhető. Ekkor

$$t_3(H) = \int_{a_3}^{b_3} b_2(H^z)\, dz = \int_{a_3}^{b_3} k_2(H^z)\, dz$$

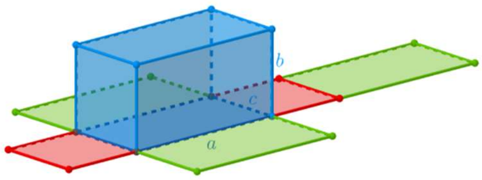
Azaz: a háromdimenziós Jordan-mérték egyenlő a *z*-magasságú szekció kétdimenziós belső mértékének, illetve ezen szekció külső mértékének megfelelő határok között vett integráljával.

Megjegyzés: Tulajdonképpen a halmazt „felvágjuk nagyon vékony szeletekre”, és a szeletek külső, illetve belső területeit kiintegráljuk. Ezt úgy képzelhetjük el, mint ahogy egy kártyapakli szeletei a kártyalapok.

A testek megvizsgálását a kocka és a téglatest felszínének és térfogatának értelmezésével kezdjük.

Tétel: Jelölje a, b és c egy **téglatest** három élének hosszát (17. ábra).
A téglatest térfogata az egy csúcsból kiinduló élek hosszainak szorzata, azaz

$$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$$



17. ábra: A téglatest és térhálója

A téglatest felszíne a határoló téglalapok területeinek összege, azaz

$$\boldsymbol{A = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$$

Minden térbeli test tárgyalása után megnézek egy, az adott ismeretek felhasználását igénylő feladatot.

A következő feladat a téglatesttel kapcsolatos.

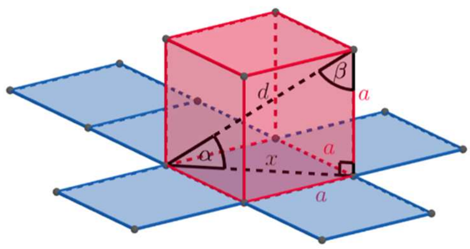
Feladat: (Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I. [19] 1933. feladat)
Egy téglatest éleinek aránya 1 : 3 : 5.
A felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik. Mekkorák az élei?

Megoldás:
Jelölje az élek hosszát x, 3x és 5x.
Ekkor a téglatest térfogatára teljesül, hogy $V = \mathrm{x} \cdot 3\mathrm{x} \cdot 5\mathrm{x} = 15\mathrm{x}^2$, felszínére pedig
$A = 2 \cdot (\mathrm{x} \cdot 3\mathrm{x} + \mathrm{x} \cdot 5\mathrm{x} + 3\mathrm{x} \cdot 5\mathrm{x}) = 46\mathrm{x}^2$
Mivel ezek mérőszáma egyenlő, így $15\mathrm{x}^2 = 46\mathrm{x}^2$, amiből $x \approx 3{,}07$ egység.
Tehát a téglatest éleinek hossza: $a \approx 3{,}07$ egység, $b \approx 9{,}21$ egység, $c \approx 15{,}35$ egység.

A **kocka** a téglatest speciális esete, amikor $a = b = c$.

A kocka alkotóelemeit és térhálóját a 18. ábra szemlélteti, a hozzátartozó feladathoz segítségül a 19. ábra szolgál.

Tétel: Legyen egy kocka élhossza *a*.
A kocka térfogata $\boldsymbol{V = a^3}$, felszíne $\boldsymbol{A = 6 \cdot a^2}$**.**



18. ábra: A kocka és térhálója

A lapátló hossza:

$a^2 + a^2 = x^2$, azaz $\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{a}$

A testátló hossza:

$a^2 + x^2 = d^2$, azaz $\boldsymbol{d} = \sqrt{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{a}$

A testátló és a lapátló szöge: $sin\alpha = \frac{a}{d}$, azaz $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{35,26}$°, így $\beta = 54{,}74°$.

Feladat: (Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I. [19] 1928. feladat) Milyen hosszú annak a kockának az éle, amelynek a csúcsai a rájuk nem illeszkedő testátlótól 3 cm távolságra vannak?

Megoldás:

Legyen a keresett él *a* hosszú. Ekkor AP = 3 cm.

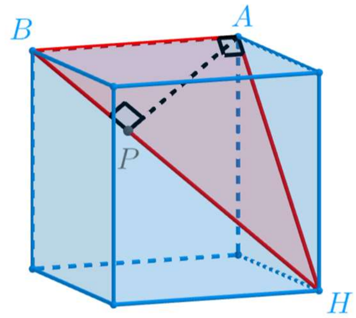
Az ABH derékszögű háromszög területét kétféleképpen is kiszámíthatjuk:

1) $T_{ABH} = \frac{AB \cdot AH}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}a}{2}$

2) $T_{ABH} = \frac{BH \cdot m_{BH}}{2} = \frac{\sqrt{3}a \cdot 3}{2}$

A két mérőszám egyenlő, azaz $\frac{a \cdot \sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a \cdot 3}{2}$.

Ebbből átrendezéssel kapjuk, hogy $a = 3\sqrt{6}$ cm.



19. ábra: A kockával kapcsolatos feladat ábrája

2.6. A hasáb és a henger

A 2020-as Nemzeti alaptantervhez tartozó középszintű érettségi követelmények szerint [13] a tanulónak ismernie kell a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp részeit és alkotóelemeit, illetve tudja az ismereteit alkalmazni egyszerű feladatokban. Emellett felszínük és térfogatuk számítását is el tudja végezni. Ezen testek tárgyalására kerül sor a következőkben.

A hasábot és hengert együttesen *hengerszerű testeknek* nevezzük. Először nézzük a **hasáb**bal kapcsolatos középiskolai ismereteket.

Egy zárt, síkbeli sokszögvonal pontjain keresztül párhuzamosokat húzunk egy, a sokszög síkjával nem párhuzamos egyenessel, így egy *végtelen hasábfelületet* kapunk. Ezt elvágjuk a sokszög síkjával, és egy vele párhuzamos síkkal. Az így kapott véges test a *hasáb*.

Definíció: Ha a metszősíkok merőlegesek az adott egyenesre, *egyenes hasábot* kapunk. A szabályos hasáb olyan egyenes hasáb, amelynél a zárt sokszögvonal szabályos sokszög.

Speciális hasábok:

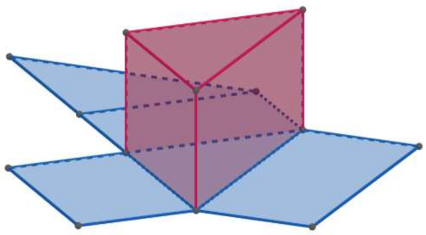
1) Téglatest: téglalap alapú egyenes hasáb.
2) Kocka: olyan téglatest, amelynek minden éle egyenlő.
3) Paralelepipedon: olyan hasáb, ahol a kiinduló sokszögvonal paralelogramma.

A 20. ábra a hasáb, míg a 21. ábra a hasábhoz kapcsolódó feladat szemléltetéseként szolgál.

Tétel:

A T alapterületű, m magasságú hasáb térfogata

$\boldsymbol{V = T \cdot m}$, felszíne $\boldsymbol{A = 2T + T_{palást}}$.



20. ábra: A hasáb és térhálója

Feladat: (Sokszínű matematika 12. [14] 97. oldal 5. b) feladat)

Egy egyenes hasáb alapéle 10 cm, magassága 20 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata, ha az alapja egy szabályos ötszög?

Megoldás:

Az ábrán α-val jelölt szög mértéke: $\frac{360°}{5} = 72°$.

Az ABO háromszög egyenlőszárú, így $\frac{\alpha}{2} = 36°$.

Ekkor $\sin 36° = \frac{5}{x}$, amiből $x = 8{,}5$ cm.

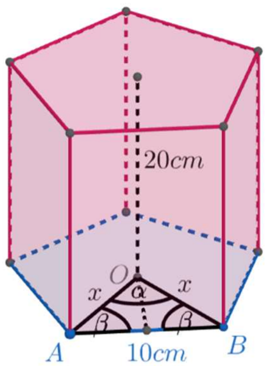
Így a szabályos ötszög területe:

$T_{\text{alaplap}} = 5 \cdot \frac{8{,}5^2 \cdot \sin 72°}{2} = 171{,}28\ \text{cm}^2$.

$T_{\text{palást}} = 5 \cdot 10\ \text{cm}\ \cdot 20\ \text{cm} = 1000\ \text{cm}^2$

$A_{\text{hasáb}} = 2 \cdot 171{,}79\ \text{cm}^2 + 1000\ \text{cm}^2 = 1343{,}56\ \text{cm}^2$

$V_{\text{hasáb}} = 171{,}28\ \text{cm}^2\ \cdot 20\ \text{cm} = 3435{,}69\ \text{cm}^3$



21. ábra: A hasábbal kapcsolatos feladat ábrája

A **henger**rel kapcsolatos ismeretekkel folytatom a testek ismertetésének sorát.

Adott a síkon egy zárt görbe vonal. A görbe vonal pontjain keresztül párhuzamosokat húzunk egy adott, a síkkal nem párhuzamos egyenessel, így egy *végtelen hengerfelületet* kapunk. Ezt elmetsszük a görbe vonal síkjával, és egy vele párhuzamos síkkal. Az így kapott véges test a *henger*. A párhuzamosoknak azt a darabját, amely a síkok közé esik *alkotók*nak nevezzük.

Definíció: Ha az adott egyenes merőleges a görbe vonal síkjára, akkor *egyenes hengert* kapunk. Ha a görbe vonal egy kör, akkor a henger *körhenger*.

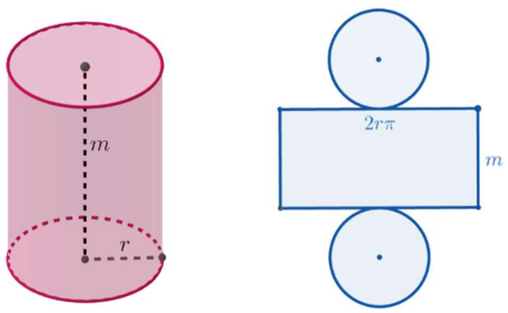
Speciális hengerek:

1) Egyenes körhenger (22. ábra)

   Legyen az alapkör sugara *r*, a henger magassága *m*. Ekkor:

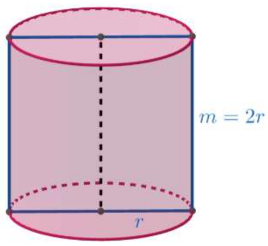
$$\boldsymbol{V = r^2\pi \cdot m}$$

$$\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alapkör} + T_{palást}} = 2 \cdot r^2\pi + 2 \cdot r\pi \cdot m = \boldsymbol{2r\pi \cdot (r + m)}$$



22. ábra: Az egyenes körhenger és térhálója

2) Egyenlő oldalú egyenes körhenger (23. ábra): a tengelymetszete egy négyzet.



23. ábra: Egyenlő oldalú egyenes körhenger

A kerettanterv előírása szerint [8] a témakör tanulása eredményeként a tanuló képes a térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben megadni a választ. Erre példa egy olyan feladat, ahol a számolás alapján kapott mértékegységet tovább kell alakítania a helyes válaszadás érdekében. A feladatot a 24. ábra szemlélteti.

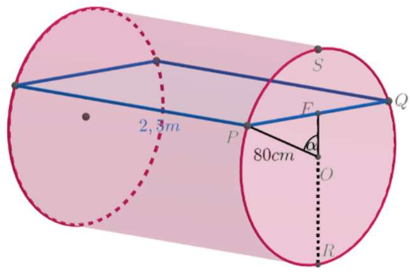
Feladat: (Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából [20] 2350. feladat)
Egy vízszintesen fekvő, henger alakú tartályban 1,25 m magasan áll a víz. Hány liter víz van a hengerben, ha alapkörének sugara 80 cm, hossza pedig 2,5 m.

Megoldás:

FO = FR – OR = 125 cm – 80 cm = 45 cm.

Az FPO derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{45}{80} \rightarrow \alpha = 55{,}77° \rightarrow 2\alpha = 111{,}54°$$



24. ábra: Egyenes körhengerrel kapcsolatos feladat ábrája

$$T_{\text{PSQ körszelet}} = T_{\text{OPSQ körcikk}} - T_{\text{OPQ háromszög}} =$$

$$= \left(\frac{r^2\pi}{360°} \cdot 2\alpha\right) - \left(\frac{\text{OP} \cdot \text{OQ} \cdot \sin 2\alpha}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{80^2\pi}{360°} \cdot 111{,}54°\right) - \left(\frac{80 \cdot 80 \cdot \sin 111{,}54°}{2}\right)$$

$$T_{\text{PSQ körszelet}} = 3253\ \text{cm}^2.$$

$$T_{\text{PRQ körszelet}} = T_{\text{alapkör}} - T_{\text{PSQ körszelet}} = 16853\ \text{cm}^2 = 1{,}685\ \text{m}^2$$

$$V = T_{\text{PRQ körszelet}} \cdot m = 1{,}685\ \text{m}^2 \cdot 2{,}5\ \text{m} = 4{,}21\ \text{m}^3 \rightarrow \boldsymbol{4213\ l}$$

Nézzük a háromdimenziós Jordan-mérték egyik alkalmazását, a **forgáshenger térfogatának bizonyítása** során (25. ábra). Az alábbi bizonyítási módszerrel (integrálás) az emelt szintű középiskolai tanulmányok során is találkozhatunk, de a *z*-magasságú szekció fogalmának értelmezése az egyetemi analízis kurzus során valósul meg [17].

Legyen a *H* halmaz a következő:

$H \coloneqq \overline{B_r}(0,0) \times [0, m]$, ahol $\overline{B_r}(0,0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ zárt körlap, a henger alapja.

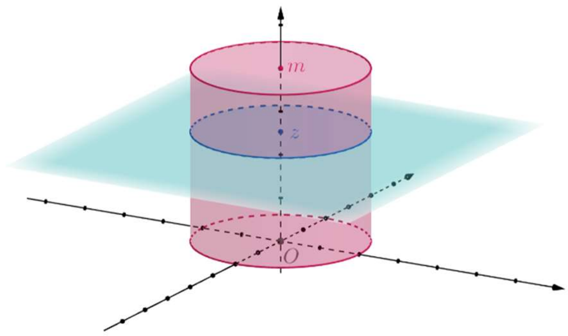
Ahhoz, hogy az előző tételt alkalmazzuk, szükség van a *H* halmaz mérhetőségére. Ehhez nézzük a következő tételt.

Tétel: Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos, konvex halmaz, ahol $p = 1,2,3$, akkor *H* mérhető.

A forgáshenger esetében $H^z = \overline{B_r}(0,0)$ $\forall\, z \in [0, \text{m}]$-re.

Ha elfogadjuk a *H* halmaz mérhetőségét, akkor felírható a következő összefüggés, amivel bizonyítjuk a korábban már megismert térfogatképletet:

$$\boldsymbol{t_3(H)} = \int_0^m t_2\left(\overline{B_r}(0,0)\right) dz = \int_0^m r^2\pi\ dz = \boldsymbol{m \cdot r^2\pi}$$



25. ábra: A forgáshenger térfogatának bizonyítása

2.7. A gúla és a kúp

A gúlát és a kúpot együttesen *kúpszerű testeknek* nevezzük. Ilyen testet úgy kapunk, ha egy síkidom kerületén úgy vezetünk körül egy egyenest, hogy az állandóan illeszkedjen egy adott, a síkidom síkján kívüli pontra.

A gúla fogalmával először általános iskolában találkoznak a diákok. Már ekkor megtanulják a gúla alkotóelemeit, ezek tulajdonságait, illetve le tudják rajzolni a hálóját [18].

Vizsgáljuk meg először a **gúlá**val kapcsolatos középiskolai ismereteket.

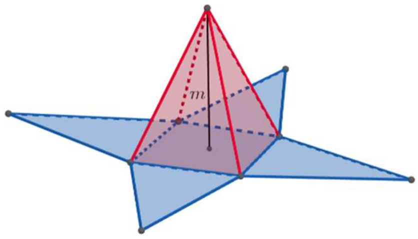
Ha egy zárt síkbeli sokszögvonal pontjain keresztül egy, a sokszögvonal síkjára nem illeszkedő, rögzített ponton áthaladó egyeneseket húzunk, akkor egy *végtelen, kettős kúpszerű felületet* kapunk. A rögzített pont és a sokszögvonal síkja által kapott véges térrész a *gúla*.

Definíció: Ha a gúla oldalélei egyenlők, akkor *egyenes gúlának* nevezzük. Ha a gúla oldallapjai egybevágó, egyenlő szárú háromszögek, akkor szabályos sokszög alapú egyenes gúláról, röviden *szabályos gúláról* beszélünk (26. ábra).

Speciális gúlák:

1) Tetraéder: három oldalú gúla.
2) Szabályos tetraéder: lapjai egybevágó szabályos háromszögek.

Tétel: A T alapterületű, m magasságú gúla térfogata $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{T}_{\text{alap}} \cdot \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{3}}$, felszíne $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}_{\textbf{alap}} + \boldsymbol{T}_{\textbf{palást}}$.



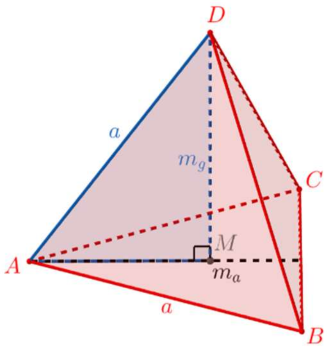
26. ábra: A gúla és térhálója

Speciális eset:

Szabályos tetraéder (27. ábra): a határolólapjai négy egybevágó szabályos háromszög.

$$T_{\text{alap}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \rightarrow \boldsymbol{A} = 4 \cdot T_{\text{alap}} = \boldsymbol{\sqrt{3} \cdot a^2}$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



27. ábra: Speciális gúla: szabályos tetraéder

Mivel a szabályos háromszög magasságpontja a magasság csúcstól távolabbi harmadolópontjában található, így AM = $\frac{2}{3} m_a$

$$\frac{2}{3} m_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

Az AMD háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right)^2 + m_g = a^2$, ebből $m_g = \sqrt{\frac{2}{3}} a$.

Az általános térfogatképletbe helyettesítve: $\boldsymbol{V} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{12}} \boldsymbol{a^3}$

Feladat: (Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából [20] 2271. feladat)

Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle 9 cm, magassága 15 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

Megoldás:

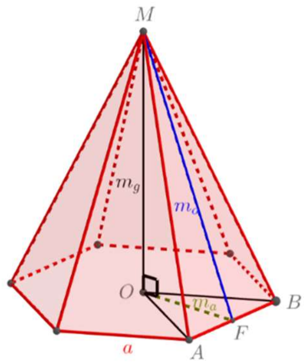
A gúla alaplapja egy szabályos hatszög, ami felosztható hat, egybevágó szabályos háromszögre, ilyen például az ABO háromszög (28. ábra).

A szabályos háromszög területe az oldalhosszának $\frac{\sqrt{3}}{4}$-szerese:

$T_{\text{ABO háromszög}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 9^2 = 35{,}07 \text{ cm}^2$.

Ebből $T_{alap} = 6 \cdot T_{\text{ABO háromszög}} = 210{,}44 \text{ cm}^2$.

$$V = \frac{210{,}44\ \text{cm}^2 \cdot 15\ \text{cm}}{3} = \mathbf{1052{,}2\ cm^3}$$



28. ábra: A gúlával kapcsolatos feladat ábrája

Az ABO szabályos háromszög a alapéléhez tartozó magassága $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$, azaz $m_\text{a} = 7{,}79\ \text{cm}$. Ez alapján, a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámolható az OFM derékszögű háromszög FM oldalának hossza, ami a gúla oldallapját alkotót, egyenlőszárú háromszög magassága.

$15^2 + 7{,}79^2 = m_\text{o}^2$, amiből $m_o = 16{,}9\ \text{cm}$.

Így kiszámítható a gúla felszíne:

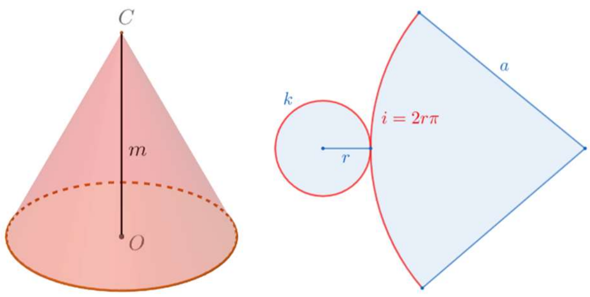
$$\boldsymbol{A} = T_\text{alaplap} + 6 \cdot T_\text{oldallap} = 210{,}44\ \text{cm}^2 + 6 \cdot \frac{9\ \text{cm}\ \cdot 16{,}9\ \text{cm}}{2} = \mathbf{666{,}74\ cm^2}$$

Nézzük meg a másik kúpszerű test, a **kúp** jellemzését.

Ha egy zárt síkbeli görbe vonal pontjain keresztül egy rögzített ponton áthaladó egyeneseket húzunk, akkor egy *végtelen kettős kúpfelületet* kapunk. A rögzített pont és a görbe vonal síkja által határolt véges térrész a *kúp*. Az egyeneseknek azt a darabját, amely a rögzített pont és a sík közé esik, *alkotók*nak nevezzük.

Speciális kúpok:

1) Körkúp: az alaplap kör.
2) Egyenes körkúp (29. ábra): a tengely merőleges a kör síkjára



29. ábra: Az egyenes körkúp és térhálója

Tétel: A T alapterületű, m magasságú, a alkotójú egyenes körkúp térfogata

$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{T}_\textbf{alap} \cdot \boldsymbol{m}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{r^2\pi \cdot m}}{\mathbf{3}}$, felszíne $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}_\textbf{alap} + \boldsymbol{T}_\textbf{palást} = \boldsymbol{r^2\pi + \pi r a = \pi r(r+a)}$

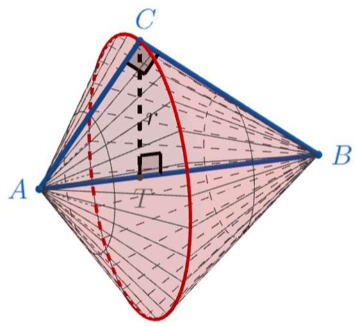
Megjegyzés: $T_\text{palást} = \frac{i \cdot a}{2} = \frac{2r\ \ \cdot a}{2} = \pi r a$

3) Egyenlő oldalú kúp: a tengelymetszete szabályos háromszög

Feladat: (Sokszínű matematika 12. [14] 102. oldal 9. feladat)

Egy háromszög három oldala 3 cm, 4 cm és 5 cm. Megforgatjuk a leghosszabb oldala mentén (30. ábra). Mekkora a keletkezett test felszíne és térfogata?

Megoldás:



30. ábra: Az egyenes körkúppal kapcsolatos feladat ábrája

Mivel a 3, 4, 5 pitagoraszi-számhármas, így tudjuk, hogy a kiindulási háromszög derékszögű.

Az ABC háromszög területét kétféleképpen kiszámolhatjuk:

$T = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}$, illetve $T = \frac{AB \cdot m_{\mathrm{AB}}}{2} = \frac{5 \cdot r}{2}$

A kétféle eredményt egyenlővé téve kapjuk, hogy $r = 2{,}4$ cm.

Osszuk fel az AB szakaszt két részre, AT = M_1 és TB = $M_2 = 5 - M_1$.

Az ATC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$\mathrm{M}_1^2 + \mathrm{r}^2 = \mathrm{AC}^2$, ebből $M_1 = 1{,}8$ cm. Ez alapján $M_2 = 3{,}2$ cm.

A keletkezett test térfogata a két kúp térfogatának összegeként adódik:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2{,}4^2\pi \cdot 1{,}8}{3} + \frac{2{,}4^2\pi \cdot 3{,}2}{3} = 30{,}16 \text{ cm}^3$$

Hasonlóan számolható a keletkezett test felszíne is:

$$A = T_{palást1} + T_{palást} = \pi \cdot 2{,}4 \cdot 3 + \pi \cdot 2{,}4 \cdot 4 = 52{,}78 \text{ cm}^2$$

A háromdimenziós Jordan-mérték egy másik alkalmazásaként a **körkúp térfogatának bizonyítását** nyerjük [17]. A GeoGebra 3D ennek szemléltetéséhez is alkalmazható.

Legyen a *H* halmaz most maga a körkúp, ami egy konvex idom, így mérhető. Legyen *C* a körkúp csúcsa, az *O* pont az alaplap középpontja, *u* pedig az alaplapjának egy pontja. Ekkor [C, u] a C és *u* pontokat összekötő szakasz. Ekkor a H halmaz felírható a következő összefüggéssel:

$$H = \bigcup_{u \in \overline{B_r}(O)} [C, u]$$

$\overline{B_r}(O) \subset$ xy sík, legyen a H^z körlap sugara ρ_z. A TT_1 távolságot jelölje *z*, a körkúp magasságát pedig *m*.

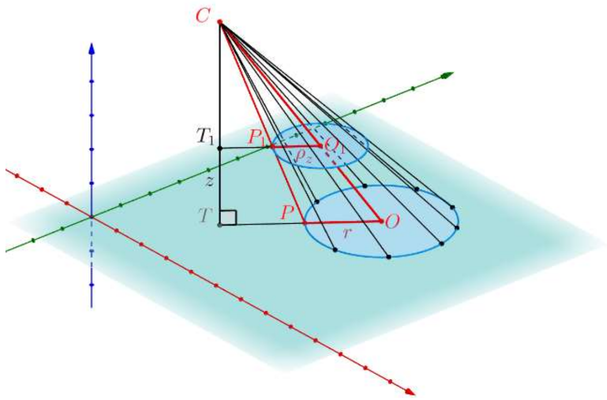
A 31. ábra alapján a CP_1O_1 és a CPO háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlők.

Így felírható az alábbi összefüggés:

$$\frac{\rho_z}{r} = \frac{m-z}{m}$$

Innen kifejezhető:

$$\rho_z = r \cdot \frac{m-z}{m}$$



31. ábra: A körkúp térfogatának bizonyítása

Mivel megállapítottuk a bizonyítás elején, hogy a *H* halmaz mérhető, ezért alkalmazzuk rá a szekciókra vonatkozó tételt:

$$\boldsymbol{t_3(H)} = \int_0^m \rho_z^2 \cdot \pi \, dz = \int_0^m \left(\frac{m-z}{m} \cdot r\right)^2 \cdot \pi = \frac{r^2\pi}{m^2} \cdot \left[\frac{-(m-z)^3}{3}\right]_0^m = \boldsymbol{\frac{r^2\pi \cdot m}{3}}$$

Az egyetemi ismereteim alapján további fogalmak is köthetők az eddig említett kúppal kapcsolatos ismeretekhez. Verhóczki László előadásjegyzete alapján fogalmazom meg a következő definíciókat és tételt [22]. Ezek szemléltetéséhez szintén használtam a GeoGebra 3D funkcióját (32. és 33. ábra).

Definíció: Adott a térben egy *t* egyenes és azon egy *C* pont, illetve egy φ $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ szög. *Forgáskúpnak* nevezzük a *C* ponton áthaladó, *t* egyenessel φ szöget bezáró egyenesek unióját. Tengelye a *t* egyenes, csúcsa a *C* pont, félnyílásszöge a φ szög. *Alkotóknak* nevezzük azokat az egyeneseket, amelyeket a forgáskúp tartalmaz.

Definíció: Legyen adott egy gömbfelület a térben. A gömbfelület *érintőkúpja* az a forgáskúp, amely összes alkotóegyenese érinti a gömböt.

Legyen adott a térben egy K forgáskúpfelület és egy, K csúcspontján át nem menő σ sík. Ennek ismeretében értelmezzük a következő, speciális gömbfelületet, amely Germinal Pierre Dandelin francia matematikus nevéhez fűződik.

A K forgáskúp és a σ sík metszetéhez tartozó **Dandelin-féle gömbön** egy olyan gömbfelületet értünk, amelyet érint a σ sík, és amelynek a K forgáskúp az érintőkúpja.

A forgáskúp és a sík metszete többféle geometriai alakzatot is meghatározhat. Ezzel kapcsolatosan a következő tétel fogalmazható meg:

Tétel: Adott egy *t* tengelyű, C csúcspontú és φ félnyílásszögű forgáskúp, és egy sík, amely metszi a t tengelyt, de nem merőleges rá, illetve nem halad át a C csúcson. Jelölje β a t tengely és a σ sík által bezárt szöget. Ekkor igazak a következők:

1) Ha $\beta > \varphi$, akkor $\sigma \cap K$ egy ellipszis a σ síkban.
2) Ha $\beta < \varphi$, akkor $\sigma \cap K$ egy hiperbola.
3) Ha $\beta = \varphi$, akkor $\sigma \cap K$ egy parabola.

Ezen tétel bizonyításához a korábban definiált Dandelin-gömbre lesz szükség. A tétel 1) pontját bizonyítom, amelyhez egy kétdimenziós és egy háromdimenziós ábrát is készítettem szemléltetésként.

Bizonyítás (1) eset):

Nézzük azt az esetet, amikor $\beta > \varphi$. Legyen μ az a sík, amely merőleges a σ síkra és tartalmazza a *t* tengelyt. A μ sík és a forgáskúp metszeteként kapott alkotóegyeneseket jelölje e_1 és e_2. Legyen $\mu \cap \sigma = s$ egyenes. Ebben az esetben a β, azaz a σ sík és a *t* tengely által bezárt szög éppen a *t* és az *s* egyenes hajlásszögével egyenlő.

A kúpalkotók merőleges vetületei a μ síkon egy olyan csúcsszögtartományt képeznek, amelyet az e_1 és e_2 egyenesek határolnak.

A σ síknak minden alkotóval van metszéspontja, és a $\sigma \cap K$ síkmetszet az egyik félkúpon helyezkedik el.

Legyen $s \cap e_1 = A_1$ és $s \cap e_2 = A_2$. Az A_1A_2C háromszög beírt köre k_1, középpontja O_1 rajta van a *t* tengelyen. A háromszög A_1A_2 oldalát érintse F_1 pontban. Az A_1A_2C háromszög hozzáírt köre k_2, középpontja O_2 rajta van a *t* tengelyen. A háromszög A_1A_2 oldalát érintse F_2 pontban.

Forgassuk meg az e_1 alkotót a *t* tengely körül. Ekkor a K forgáskúpot kapjuk. Vegyük azt a két gömböt, amelyek centrumai O_1 és O_2, és amelyek μ-beli főkörei k_1 és k_2. Jelölje ezeket G_1 és G_2.

G_1 és G_2 egy érintőkúpja *K,* illetve ezeket a gömböket a σ sík az F_1 és F_2 pontokban érinti. Tehát definíció szerint ezek a *K* forgáskúp a σ sík metszetéhez tartozó Dandelin-gömbök.

Legyen h_1 és h_2 az a két gömbi kör, amelyek mentén *K* a két gömböt érinti. Ezek μ-re eső merőleges vetületei h_1' és h_2' szakaszok. A h_1 és h_2 körök által, az alkotókból kimetszett szakaszok hosszának felét jelölje a. Ezen szakaszok egyenlő hosszúak.

Legyen az egyik alkotóegyenes g, és $g \cap \sigma = P$, $g \cap G_1 = E_1$, $g \cap G_2 = E_2$.

Ekkor bármely g-re: $E_1E_2 = 2a$.

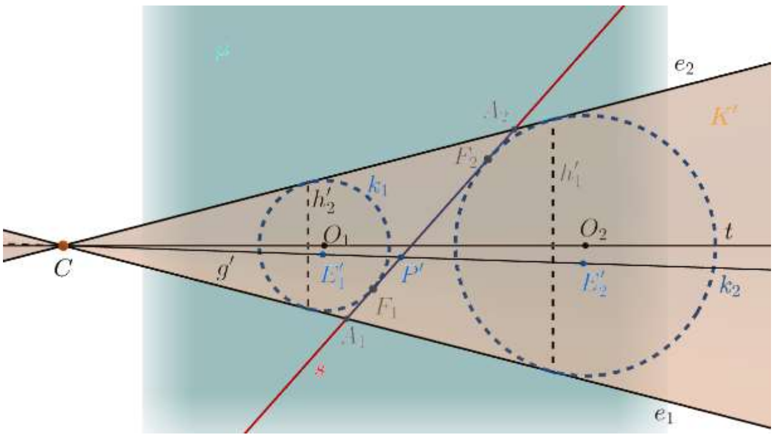
Egy külső pontból egy adott gömbköz húzott érintőszakaszok hossza állandó, ezért:
$PF_1 = PE_1$, illetve hasonlóan $PF_2 = PE_2$.

Teljesül a következő:

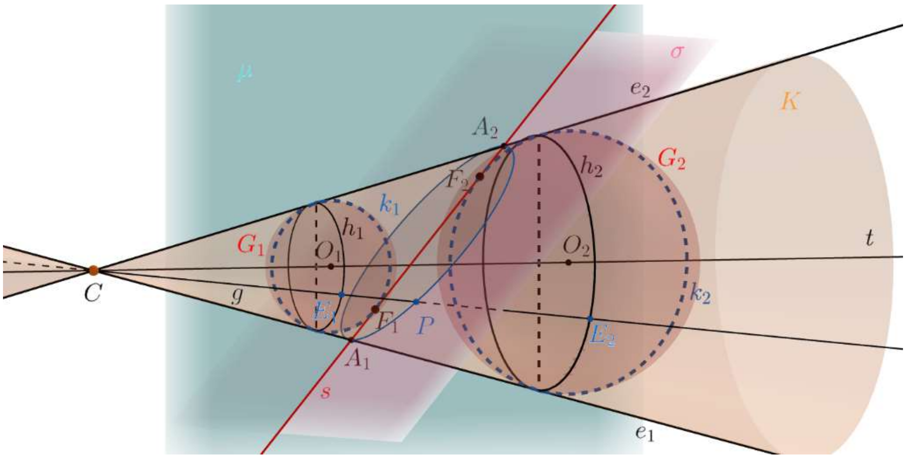
$$PF_1 + PF_2 = PE_1 + PE_2 = E_1P + PE_2 = E_1E_2 = 2a$$

Azaz $\sigma \cap K$ pontjai a σ sík azon pontjai, amelyek F_1-től és F_2-től mért távolságösszege megegyezik 2a-val. Definíció szerint ezek a pontok egy F_1 és F_2 fókuszpontú ellipszist adnak.

Megjegyzés: A síkbeli ábrán (32. ábra) egy adott alakzat μ síkon vett merőleges vetületét vesszővel jelölöm, például *P* merőleges vetülete *P'*.



32. ábra: A K forgáskúp és a σ sík metszete ellipszis (szemléltetés az alakzatok merőleges vetületeivel)



33. ábra: A K forgáskúp és a σ sík metszete ellipszis (szemléltetés háromdimenzióban)

(A 2) és 3) eset is hasonló módszerrel igazolható.)

2.8. A csonkagúla és a csonkakúp

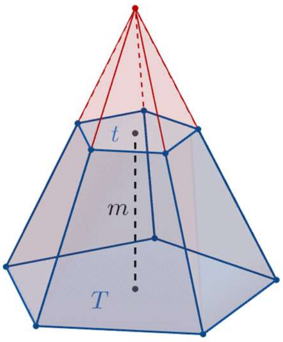
Az előbbiekben tárgyalt gúlából és kúpból származtatva újabb testeket nyerhetünk. Ezen testek tárgyalására és tulajdonságaik megvizsgálására a középiskolában kerül sor.

A gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal elvágjuk. Az alaplap és a vágósík közötti test a **csonkagúla.**

Tétel: Ha egy csonkagúla (34. ábra) magassága m, alaplapjának területe T, fedőlapjának területe t, akkor térfogata és felszíne:

$$\boldsymbol{V_{\text{csonkagúla}} = \frac{m}{3}\left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right)}$$

$$\boldsymbol{A_{\text{csonkagúla}} = T + t + T_{\text{palást}}}$$



34. ábra: A csonkagúla

Megjegyzés: Ezen térfogatképlet bizonyítása csak az emelt szintű érettségi követelményeiben szerepel [13].

Feladat: (Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. [21] 1902. feladata alapján)

Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő csonkagúla alakú (35. ábra). Felső lapja 14 m, alsó lapja 10 m oldalú négyzet, mélysége 6 m. Mennyi víz fér bele? Mekkora a medence felszíne?

Megoldás:

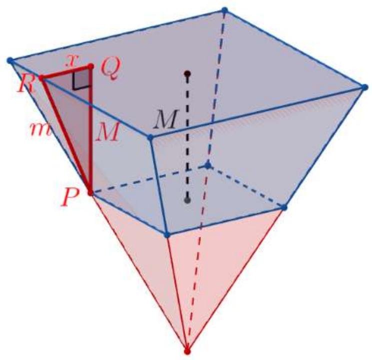
Először a medence térfogatára vagyunk kíváncsiak.

Ezt a fenti képlet segítségével, a megfelelő adatok behelyettesítésével tudjuk kiszámolni.

$T_{\text{felső lap}} = 196\ \text{m}^2$ és $T_{\text{alsó lap}} = 100\ \text{m}^2$

$V = \frac{6}{3} \cdot (196 \cdot \sqrt{196 \cdot 100} \cdot 100 = 872\ \text{m}^3$, ami $872\,000\ \text{dm}^3 = 872\,000$ liter.

Ennyi víz fér a vízgyűjtő medencébe.



35. ábra: A csonkagúlához tartozó feladat ábrája

Ezután a felszínhez szükséges hiányzó adatokat határozzuk meg. A csonkagúla palástjának meghatározásához szükségünk van az oldallapjának területére. Az oldallapjai egybevágó trapézok. A trapézok magasságát a Pitagorasz-tétel segítségével a PQR derékszögű háromszögből fejezhetjük ki:

$x = \frac{14-10}{2} = 2$ m, így $2^2 + 6^2 = \text{m}^2$, ahonnan $m = 6{,}3$ m

Így a csonkagúla palástjának területe:

$$T_{\text{palást}} = 4 \cdot T_{\text{trapéz}} = 4 \cdot \left(\frac{14+10}{2} \cdot 6{,}3\right) = 302{,}4\ \text{m}^2$$

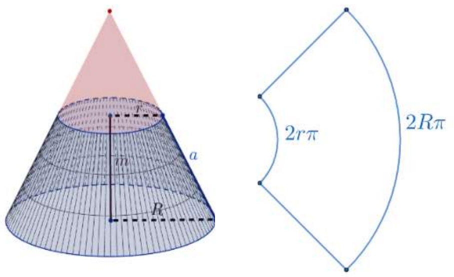
Mivel most a csonkagúla felső lapjának területével nem kell számolnunk:

$A = 100\ \text{m}^2 + 302{,}4\ \text{m}^2 = 402{,}4\ \text{m}^2$

Tehát a vízgyűjtő medence felszíne $402{,}4\ \text{m}^2$.

A csonkagúlához hasonlóan, kúpból származtatott testet is tudunk konstruálni.

Egy kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal elmetsszük. Így egy kisebb kúpot, illetve egy **csonkakúp**ot kapunk (36. ábra).



36. ábra: A csonkakúp és palástja

Tétel: Ha a csonkakúp alaplapjának sugara *R*, a fedőlapjának sugara *r*, és az alkotója a, akkor a térfogata és felszíne:

$$\boldsymbol{V_{\text{csonkakúp}} = \frac{m \cdot \pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)}$$

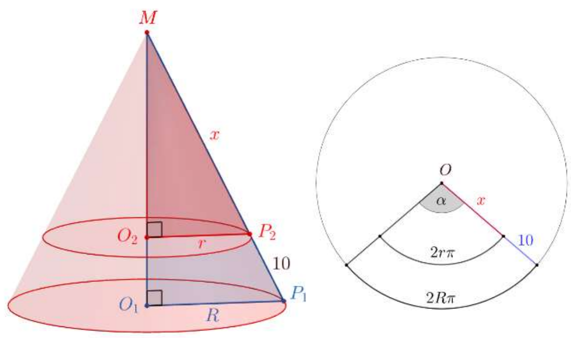
$$\boldsymbol{A_{\text{csonkakúp}} = R^2\pi + r^2\pi + (R + r) \cdot \pi a}, \text{ ahol } T_{palást} = (R + r) \cdot \pi a$$

Megjegyzés: A csonkagúlához hasonlóan ezen térfogatképlet bizonyítása is csak emelt szintű tananyag a középiskolában.

Feladat: (Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I. [19] 2026. feladat)
Csonkakúp alakú lámpaernyőt készítünk ajándékba (37. ábra).
Az adatok: *R* = 7,5 cm, *r* = 5 cm, az alkotó *a* = 10 cm.
Mekkorára kell választani a körlap sugarát, amelyből kivágható a lámpaernyő? Elég-e egy negyed körlap az elkészítéshez?

Megoldás:
Az O_1P_1M háromszög hasonló az O_2P_2M háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. Ezért a megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $\frac{r}{R} = \frac{x}{x+10}$. A megfelelő adatokat behelyettesítve:
$\frac{5}{7,5} = \frac{x}{x+10}$, ahonnan *x* = 20 cm.

Tehát 10 cm + 20 cm, azaz 30 cm sugarú körlapból lehet kivágni a lámpaernyőt.
Még meg kell vizsgálnunk a 37. ábrán α-val jelölt középponti szöget. Legyen α a szög radiánban kifejezett értéke. Ekkor $2r\pi = i_\alpha = x \cdot \alpha$. Átrendezéssel, és a megfelelő adatokat behelyettesítve: $\alpha = \frac{2 \cdot 5 \cdot \pi}{20} = \frac{\pi}{2}$.
Ez pont 90°-kal egyenlő, tehát elég egy negyed körlap a lámpaernyő elkészítéséhez.



37. ábra: A csonkakúphoz tartozó feladat ábrái

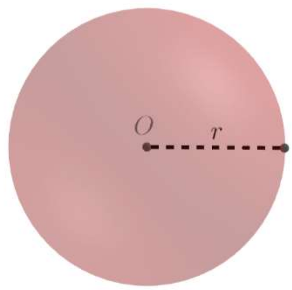
2.9. A gömb

Definíció: Adott egy O pont és egy r pozitív valós szám. A tér pontjait jelölje X. Az O középponttal és r sugárral meghatározott gömbfelület a következő alakzat:

$$G(O,r) = \{P \in X \mid OP = r\}.$$

Azaz: azon pontok mértani helye a térben, amelyek távolsága egy adott ponttól egyenlő (38. ábra).

Tétel: Az r sugarú gömb felszíne $\boldsymbol{V = 4r^2\pi}$, térfogata $\boldsymbol{A = \frac{4r^3\pi}{3}}$.



38. ábra: A gömb

Megjegyzés:

Az O centrumú, r sugarú zárt gömbtest a következő alakzat:

$$B(O,r) = \{P \in X \mid OP \leq r\}.$$

Az O centrumú, r sugarú nyílt gömbtest pedig az alábbi alakzat:

$$N(O,r) = \{P \in X \mid OP < r\}.$$

Nézzünk néhány, a gömb részeivel kapcsolatos fogalmat. A *gömb főköre* a középponton átmenő síkmetszetet jelenti. A gömbfelületet egy metsző sík két *gömbsüvegre*, a gömbtestet két *gömbszeletre* vágja szét. Ha egy gömbsüveg (gömbszelet) alapkörének minden pontját összekötjük a gömb középpontjával, akkor a kapott két résztestet *gömbcikknek* nevezzük. A gömbfelületből két párhuzamos metsző sík *gömbövet*, a gömbtestből pedig *gömbréteget* metsz ki.

Feladat: (Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I. [19] 2036. feladat)

Egy gömböt két párhuzamos, egymástól 6 cm távolságra lévő sík metsz. A síkmetszetek sugara 24, illetve 32 cm. Mekkora a gömb sugara?

Megoldás:

Két eset lehetséges: A két síkmetszet a gömb középpontjára nézve egyező irányban helyezkedik el, vagy ellentétes irányban (39. ábra). Jelölje R a gömb sugarát.

1. *eset: egyező irányban*

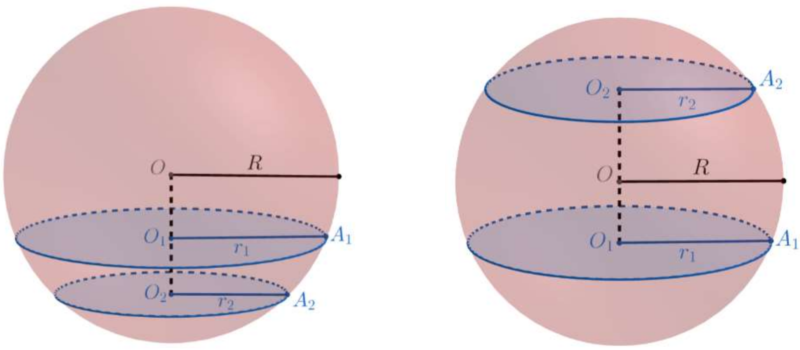
   Ekkor $r_1 = 32$ cm, $r_2 = 24$ cm, $O_1O_2 = 6$ cm, $OO_1 = x$ cm

   Az OO_1A_1 és az OO_2A_2 derékszögű háromszögekből a Pitagorasz-tétel segítségével egyaránt kifejezhető az R^2. A kétféleképpen kifejezett értékét egyenlővé téve adódik: $(x+6)^2 + 24^2 = x^2 + 32^2$, amiből $x \approx 34{,}3$ cm. Az egyik Pitagorasz-tétellel felírt összefüggésbe visszahelyettesítve $R \approx 46{,}9$ cm.

2. *eset: különböző irányban*

   Ekkor $r_1 = 32$ cm, $r_2 = 24$ cm, $OO_2 = 6 - x$ cm, $OO_1 = x$ cm

   Ismét két pitagoraszi összefüggés írható fel, szintén az OO_1A_1 és az OO_2A_2 derékszögű háromszögekből, ahol az előző esethez hasonlóan most a következőt kapjuk: $(6-x)^2 + 24^2 = x^2 + 32^2$, amiből $x \approx -34{,}3$ cm. Így ez az eset nem lehetséges.



39. ábra: A gömbbel kapcsolatos feladat ábrái

A középiskolában is említésre kerülő Cavalieri-elv egyik alkalmazását használtuk ki az analízis tanulmányaim során a félgömb, majd ebből következve a gömb térfogatának bizonyításához [17].

Cavalieri-elv:

$A, B \subset \mathbb{R}^3$ mérhetőek és tegyük fel, hogy minden z-re $t_2(A^z) = t_2(B^z)$. Ekkor $t_3(A) = t_3(B)$.

Alkalmazás: félgömb térfogatára vonatkozó képlet bizonyítása

Vegyünk 2 mérhető testet, A-t és B-t (40. ábra).

A test: R sugarú félgömb

B test: R magasságú, R sugarú kör alapú hengerből kivágunk egy ugyanilyen kör alapú, és szintén R magasságú kúpot.

Vizsgáljuk meg mindkét esetben a *z-magasságú szekciók* területét!

Az A test esetében ez a szekció egy r_z sugarú kör, ahol a sugárra teljesül a Pitagorasz-tételt alkalmazva: $r_z = \sqrt{R^2 - z^2}$

A sugár segítségével felírható a keresett szekció területe: $t(A^z) = (R^2 - z^2)\pi$

A B test esetén a szekció egy körgyűrű, ahol a belső kör sugara z, a külső kör sugara R.

Így a z-magasságú szekcióra teljesül: $R^2\pi - z^2\pi = (R^2 - z^2)\pi$

Mivel a félgömb konvex alakzat, ezért mérhető. Hasonlóan mérhető a B alakzat is, mivel a henger és a kúp mérhetőek. Emellett az imént megállapítottuk, hogy bármely z esetén a z-magasságú szekcióik egyező területűek. Ekkor alkalmazható a Cavalieri-elv:

$$t_3(\text{félgömb}) = t_3(\text{A}) = t_3(\text{B}) = t_3(\text{henger}) - t_3(\text{kúp})$$

A térfogat additivitása miatt igaz az alábbi összefüggés:

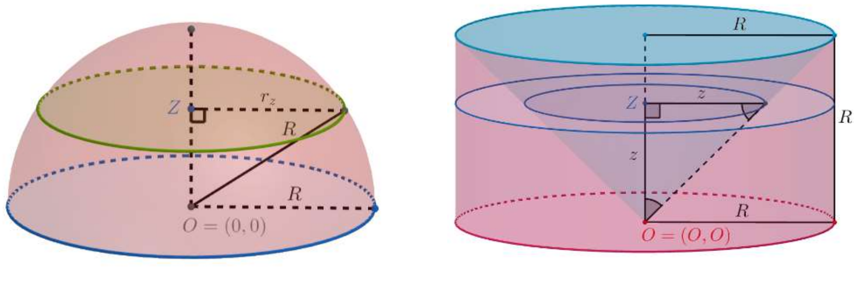
$$t_3(\text{B}) = t_3(\text{henger}) - t_3(\text{kúp}) = R^2\pi \cdot R - \frac{R^2\pi \cdot R}{3}$$

Tehát a félgömb térfogatára felírható:

$$t_3(\text{félgömb}) = R^3\pi - \frac{R^3\pi}{3} = \frac{2R^3\pi}{3}$$

Ebből az következik, hogy az R sugarú gömb térfogata:

$$\mathrm{t}_3(\text{gömb}) = \frac{4\mathrm{R}^3\pi}{3}$$



40. ábra: Cavalieri-elv alkalmazásának bizonyítása

2.10. Egymásba írt testek

Legyen adva egy nem üres *H* ponthalmaz. Ezen alakzat *konvex burkán* a *H*-t tartalmazó összes konvex alakzat metszetét értjük [15]. Jelölése: *Konv(H).*
Ha *H* egy konvex ponthalmaz, akkor a konvex burka önmaga. Ekkor Konv(H) a legszűkebb konvex alakzat, amely tartalmazza *H*-t.

A már korábban definiált konvex poliédert a konvex burka segítségével is definiálhatjuk.

Definíció: A *konvex poliédernek* nevezzük a térben véges sok, nem egysíkú pont konvex burkát.

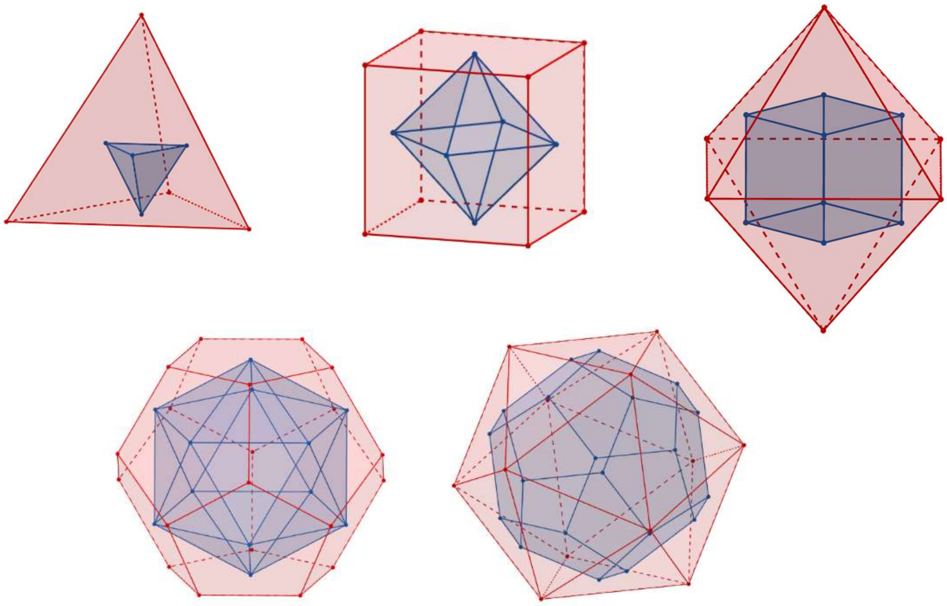
Konstruáljunk szabályos poliéderekből újabb szabályos poliédert. Ehhez vizsgáljuk meg a hexaédert. Vegyük azt a ponthalmazt, amelyet a kocka lapközéppontjai alkotnak. Ezen halmaz $H = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Ezen halmaz konvex burka az a konvex poliéder, amelynek lapjai szabályos háromszögek. Az is belátható, hogy az élekhez tartozó lapszögek is egyenlőek. Az élek, lapok és csúcsok számát megvizsgálva adódik, hogy a konvex burka egy szabályos poliéder, az oktaéder.

Az is megfigyelhető, hogyha azt a ponthalmazt vizsgáljuk, amelynek elemei egy oktaéder lapközéppontjai, akkor ezen halmaz konvex burka egy kocka.

Definíció: A *P* és a *Q* konvex poliédert egymás *duálisának* mondjuk, ha élszámuk közös, és az egyik poliéder lapjainak száma megegyezik a másik poliéder csúcsainak számával és fordítva.

Vizsgáljuk meg az öt szabályos test duálisát (41. ábra).
A tetraéder duálisa önmaga. A hexaéder és az oktaéder egymás duálisa, illetve a dodekaéder és az ikozaéder is szintén egymás duálisa.

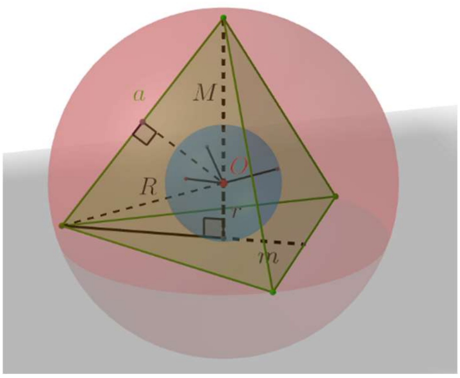
Az emelt szintű matematikaérettségi követelményeihez tartozik a testek beírt és köréírt gömbjének ismerete és az ehhez kapcsolódó feladatok megoldási módjának elsajátítása [13]. Ezen fogalmak elképzelése szintén nehézséget jelent a tanulók számára. Vannak olyan feladatok, ahol az adott gömb sugarának, vagy a tetraéder egyéb adatának kiszámítása a kérdés. Ehhez segítségül szolgál egy háromdimenziós ábra, ahol az adatok jelölésével könnyebben leolvashatók a számoláshoz szükséges összefüggések.



41. ábra: Az öt szabályos poliéder és duálisa

Definíció: Léteznek olyan testek, amelyekbe írható a test mindegyik lapját érintő gömb. Ezt a gömböt a test *beírható gömbjének* nevezzük. Illetve léteznek olyan testek, amelyek köré írható gömb a test minden csúcsán átmegy. Ezt a gömböt a test *köré írható gömbjének* nevezzük (42. ábra).

Megjegyzés: Nem minden testbe írtható gömb. Például, ha egy téglatestnek van két különböző hosszú éle, akkor ebbe a testbe nem írható. Ez a köré írható gömbre is igaz, például a paralelepipedon köré nem lehet gömböt írni.



42. ábra: A tetraéder beírt és köréírt gömbje

Feladat: (Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I. [19] 2030. feladat)
Egy kocka alakú fadarabból kifaragunk egy lehető legnagyobb sugarú gömböt (43. ábra).
A fadarab hány százaléka lesz hulladék?

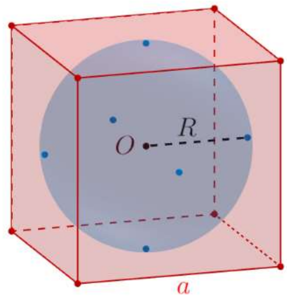
Megoldás:

Legyen a kocka éle a.

Ekkor a gömb sugara a kocka élének a felével egyenlő, azaz $R = \frac{a}{2}$

$V_{\text{kocka}} = a^3$ és $V_{\text{gömb}} = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = \frac{4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{8}}{3} = \frac{a^3 \cdot \pi}{6}$

$V_{\text{hulladék}} = V_{\text{kocka}} - V_{\text{gömb}} = a^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$



43. ábra: Egymásba írt testekkel kapcsolatos feladat ábrája

Ezek alapján a hulladék aránya a kocka alakú fadarabhoz viszonyítva:

$$\frac{V_{hulladék}}{V_{kocka}} = \frac{a^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)}{a^3} = 1 - \frac{\pi}{6} = 0{,}476$$

Tehát a hulladék a fadarab 47,6 %-a.

3. TANÍTÁSI SEGÉDLET

3.1. A digitális segédlet ötlete

A középiskolai matematikaórákon számos különböző szemléltetőeszközt használunk. Ezek célja egyrészt, hogy segítsék a tanulás folyamatát, másrészt, hogy felkeltsék a diákok érdeklődését a tananyag iránt. Ez többféleképpen valósulhat meg. Az egyik lehetőség, hogy készítünk egy ábrát a füzetbe egy feladat értelmezésekor, vagy például beviszünk dobókockákat a valószínűségszámítás témakörénél. A térgeometria tanulásakor általában műanyagból vagy fából készült testeket használunk a térgeometriai fogalmak és testek elképzelhetőségének segítéseként, az iskola eszköztárától függően. Összefoglalva, fizikai eszközökkel modellezzük a matematikai összefüggéseket, szituációkat. Egy másik lehetőség a digitális szemléltetőeszközök alkalmazása. Ide tartozik az órán lejátszott videótól kezdve, a matematikai szimulációkon keresztül, a különböző ábrázoló- és modellezőprogramok használata.

Sok tanulmány foglalkozik azzal a ténnyel, hogy a tanulás-tanítás folyamatában egyre nagyobb szerepet kap a digitális eszközök használata. Számos elnevezése létezik ennek a jelenségnek, az egyik ilyen a digitális pedagógia. Egy megfogalmazás szerint a digitális pedagógia „olyan eszközök, technológiák, szervezési tevékenységek, innovatív folyamatok összessége, amelyek az információ-, és kommunikációközlést, feldolgozást, áramlást, tárolást, kódolást elősegítik, gyorsabbá, könnyebbé és hatékonyabbá teszik” [23].

A digitális segédanyagok közül a tanárok számára már nagyon sok elérhető az interneten, amit felhasználhatunk, a saját igényünk szerint formálhatunk a felhasználási szándéktól függően. Azonban ez sok időt és befektetett munkát igényel. Emellett a mindennapokban érezhető probléma, hogy a tanárok egy része kevéssé nyitott, ha a digitális eszközök és programok használatáról, illetve a tanítás folyamatába való integrálásáról van szó. Ezzel ellentétben, a gyerekek nagyfokú jártassága e téren úgy gondolom, hogy nagy előnyt jelenthet a tanulás megkönnyítése szempontjából.

Célom az volt, hogy létrehozzak egy, a térgeometria témakörét felölelő tanári (és egyben tanulói) segédletet. A GeoGebra háromdimenziós funkcióját egy mindenki számára könnyen kezelhető, elérhető és alkalmazható programnak tartom, így ezért választottam ezt az alkalmazást a megvalósításhoz. Fontos azonban kiemelni, és a tanulók felé is közvetíteni a tanár részéről, hogy a GeoGebra ábrái nem bizonyító jellegűek, azaz nem szabad a szemléltetőábrát semmilyen állításunk bizonyításaként értelmezni, hanem mindig matematikai összefüggésekkel is alá kell támasztani az állításainkat.

3.2. Megvalósítás

A segédlet (1. melléklet) felépítését az alábbiak szerint gondoltam végig. Kiválasztottam egy internetes felületet, ami az általam készített segédanyagok rendszerezésére szolgál. A választásom a *Padlet* alkalmazásra esett, amelyet regisztráció után, ingyenesen korlátozott mértékben ugyan, de bárki használhat [24]. Ez tulajdonképpen egy „faliújság", amely az információk többféle csoportosítási módjára ad lehetőséget, ki lehet választani a célunknak megfelelőt. Én az úgynevezett „polc" típusú módot választottam. Egymás mellett, vízszintesen szerepelnek azok a térgeometriai fogalmak, amelyek mentén épül fel a térgeometria témaköre a középiskolai tananyagban. Minden ilyen fogalom alatt külön bejegyzés formájában szerepel egyrészt, a GeoGebra 3D alkalmazással készített segédanyag linkje az adott fogalom szemléltetése céljából. Másrészt, a különböző testek esetén található egy-egy feladat is az oszlopokban, amelyek az adott poliéderrel kapcsolatos számításokat igényelnek. A feladatok szövege, illetve a megoldáshoz alkalmazható segédábra is szerepel a fogalomhoz tartozó oszlopban. Az itt megtalálható összes két- és háromdimenziós ábrát én készítettem a segédanyaghoz. Az egyes oszlopok jobb szélén található csúszka lefelé mozgatásával, illetve a felület alján lévő csúszka jobbra mozgatásával válik láthatóvá a felületen fellelhető összes tananyagrész.

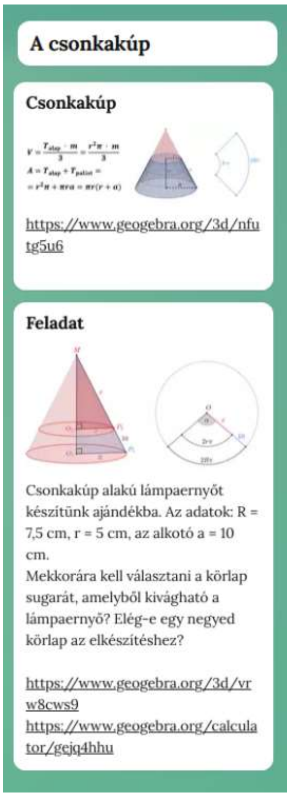
A segédanyag felhasználási módja többrétű. A tanár a tananyag minden egyes részénél szemléltetésként, kivetítve használhatja a tanórán. Ehhez hasonlóan a mellékelt feladat megoldásához is megmutatható az ahhoz tartozó ábra, amely segít a feladat szövegének értelmezésében, illetve a térbeli test lerajzolásában. Másrészt a gyerekek számára egy rendszerezett, összesített információforrás a térgeometria témakörében.

3.3. Szemléltetés egy példán keresztül

A szakdolgozatom korábbi fejezetében tárgyalt felépítés szerint hoztam létre a segédletet. A korábban, a dolgozatomban részletezett és megoldásokkal együtt szereplő feladatokat illesztettem be az egyes résztémakörökhöz példafeladatként.

Ahhoz, hogy a tanári segédlet használata egyértelmű legyen, részletezek egy konkrét esetet a segédlet pontjai közül. Az alábbi példa a csonkakúppal kapcsolatos ismeretek tanulásakor használható fel.

A középiskolai tananyagban, a csonkakúp tárgyalásához érve az alábbi módon használható. A segédlethez tartozó linkre kattintva (1. melléklet) meg kell keresni azt az oszlopot, amelyben a csonkakúphoz tartozó információk találhatóak. Ehhez jobbra kell mozdítani az alul található csúszkát. Ezt ebben a konkrét esetben a 12. oszlopban találjuk. A 44. ábrán látható ez az oszlop a két bejegyzéssel. Az első bejegyzésben látható egy kép, amelyre, ha rákattintunk, akkor kinagyítva is megjelenik ugyanez. Ezen a képen a csonkakúp térfogatának és felszínének képlete, valamint a csonkakúp és a palástjának rajza található. Ugyanebben a bejegyzésben szerepel egy link, amely a GeoGebra 3D alkalmazásra irányít minket. A linkre kattintva a csonkakúp térbeli ábráját láthatjuk, amelyet körbe is tudunk forgatni, így a test részletes tanulmányozására is lehetőséget ad a GeoGebra 3D program.



44. ábra: A csonkakúppal kapcsolatos segédanyagok

Az oszlop második bejegyzésében találunk egy olyan feladatot, amelyben egy csonkakúp alakú testet kell elképzelnünk, annak megfelelő adataival dolgoznunk és számolnunk. A bejegyzésben szintén található a felhasználandó ábráról egy kép, a feladat szövege, illetve két link. A linkek közül az első a térbeli ábrához irányít minket, a második pedig a palást ábrájához. Ezeket tehát a feladat szövegének értelmezéséhez, elképzeléséhez használhatjuk fel.

4. ALKALMAZÁS

Vizsgálatom célja az előző fejezetben bemutatott digitális segédanyag érvényességének kérdése a tanulás-tanítás folyamatában. Elsősorban a tanárok hozzáállására és véleményére voltam kíváncsi azzal kapcsolatosan, hogy milyen mértékben használnak digitális eszközöket, illetve szívesen alkalmaznák-e a térgeometria tanításakor az általam készített segédanyagot.

A tanárokon kívül másik szemszögből is érdemes megvizsgálni a kérdést, hiszen a cél valójában a tanulók változó igényeihez való alkalmazkodás. Így azt is megfigyeltem, hogy mennyire nyitottak a diákok a digitális tananyag használatára, illetve milyen mértékben szolgál számukra segítségként egy ilyen típusú segédlet.

4.1. A vizsgálat terve

A vizsgálatom két részből áll. Az egyik része egy, matematikatanárok által kitöltött kérdőív (2. melléklet), ahol azt kérdeztem meg tőlük, hogy mennyire nyitottak a digitális tananyagok tanítás folyamatába való integrálásával kapcsolatban. A kérdőívet próbáltam minél többféle iskola matematikatanáraihoz eljuttatni. Kitöltötték a budapesti Teleki Blanka Gimnázium, a paksi, régi középiskolám matematikatanárai, illetve az egyetemi csoporttársaim a saját gyakorlóiskoláikban is megosztották. Emellett a közösségi médiában, matematikatanárok alkotta Facebook csoportban is kitöltésre kértem a csoporttagokat. A kitöltők között általános-, illetve középiskolában tanító tanárok is szerepelnek. Fővárosi és vidéki iskolákból is érkeztek válaszok. Így korosztály és elhelyezkedés szempontjából is többféle réteget ölel fel a válaszadók csoportja.

A vizsgálat másik részét a hosszúgyakorlatom helyszínéül szolgáló, Budapest XIV. Kerületi Teleki Blanka Gimnázium egyik 12. osztályával végeztem el. Az osztály egyik fele történelem tagozatos, a másik fele biológia-kémia tagozatos, így ők alapvetően a középszintű érettségi követelményei szerint tanulták a matematikát a középiskolában. Egy általam tartott matematikaórán vettek részt, amely a térgeometria témakör ismétléséről szólt. Bemutattam nekik a digitális segédletet, illetve a kijelölt feladatok közül oldottunk meg példákat a digitális anyagok használatával. Az óra utolsó részében egy kérdőívet töltöttek ki (3. melléklet), ahol a véleményüket kérdeztem többek között a hagyományos, illetve a digitális eszközökkel támogatott térgeometria tanulás előnyeivel és hátrányaival kapcsolatban.

4.2. Hipotézis

A vizsgálatom első részében matematikatanárok véleményére voltam kíváncsi a térgeometria oktatással kapcsolatban. A kérdőív kérdéseinek összeválogatása során a hipotézisemből indultam ki. Alapvetően úgy gondolom, hogy a matematika az egyik olyan tantárgy, ahol nem könnyű a digitális alkalmazások integrálása a matematika tananyagba. Főként akkor, ha a tanár kevéssé jártas ezen programok ismeretében. Azt feltételeztem, hogy az idősebb korosztály kevésbé él ezen lehetőségekkel, a nyitottság hiánya, vagy éppen a tájékozottság hiánya miatt. Az egyik legelterjedtebb alkalmazás a GeoGebra program a matematika terén alkalmazott digitális lehetőségek közül, ezért arra számítottam, hogy a legtöbb tanár ismeri és találkozott már vele. Azonban a GeoGebra 3D funkcióját már kevésbé elterjedtnek, és kezelését nehezebben elsajátíthatónak érzem, ezért ennek ismertségére kevesebb tanártól számítottam. Az egyik kérdés a tanórán az okostelefon használatára vonatkozik. Úgy gondoltam, hogy akik alkalmaznak különféle digitális tananyagokat, játékokat az órán, azok az okostelefon használatát is jobban preferálják a feladatok elvégzéséhez. Ennek ellenére a telefon órán való alkalmazása még mindig megosztó téma, így arra számítottam, hogy a tanárok nagy része még kevéssé nyitott ezen a téren.

A vizsgálat második része a diákok szemszögére vonatkozik. A térgeometria témakörét összefoglaló, digitális segédletet bemutató órám, illetve a kérdőív kitöltésének időpontjában az osztály már a térgeometria témakörének tanulását befejezte. Ezért olyan kérdéseket is belefoglaltam a kérdőívbe, amellyel felmérem, hogy milyen szemléltetési módszerekkel találkoztak ennek során. Arra számítottam, hogy főként fizikai modelleket használtak erre a célra. Mivel a szakdolgozatom fő hipotézise, hogy a térbeli gondolkodás, térbeli ábrázolás nehézségeket okoz a tanulás során, így ezen kérdőív válaszaiban is erre számítottam. Úgy gondolom, hogy ennek a generációnak természetes az internetes alkalmazások használata, valamint a használatuk elsajátítása egyszerű feladat számukra, és nem érzik kihívásnak. Ebből adódóan nagyrészt pozitív értékelésekre számítottam a tanulóktól a segédlettel kapcsolatosan.

4.3. Eredmények

4.3.1. Tanári kérdőív eredményei

A kérdőívet 29 matematikatanár töltötte ki. A kitöltők 80%-a nő, és 20%-a férfi. Az életkort tekintve a legnagyobb mennyiségű válasz a 46-55 év közöttiektől érkezett. A tanárok nagyrésze középiskolás korosztályt tanít, de voltak általános iskolásokat tanító pedagógusok is, illetve olyan is volt, aki mindkét lehetőséget bejelölte.

A kérdőív alapján a tanárok 70%-ára igaz, hogy matematikaórán használ valamilyen tanítást segítő alkalmazást vagy játékot. 20 tanár meg is jelölte az általa használt alkalmazásokat. Az ilyen digitális programok közül a legtöbben a GeoGebra alapfunkcióját nevezték meg. De ezen kívül még számos alkalmazást megemlítettek. Ilyen például a GeoGebra 3D, amellyel a szakdolgozatomban alapvetően foglalkozom. Az NKP (Nemzeti Köznevelési Portál) tankönyveiben található digitális feladatok, a LearningApps és az Okosdoboz feladatai, a Kahoot alkalmazása is előkerült. A Wordwall, a Phet Interaktív Szimulációk oldala, a WolframAlpha és a Robocompass digitális szerkesztőfelület, illetve a Genially széles felhasználási körrel rendelkező oldala is a felsoroltak között szerepelt. Ezek mellett az EduBase oktatási platform használata, a Redmenta alkalmazása, a Desmos függvényábrázoló funkciója szintén megjelent. Az egyik tanár a Cabri 2D és 3D felületét nevezte meg a geometria tanításhoz segítségül szolgáló programként. Néhányan a Zanza.tv és YouTube videók integrálását is alkalmazzák a tanórákon.

A tanárok 60%-a azt jelölte be a kérdőívben, hogy az általa alkalmazott digitális alkalmazásokhoz a diákok használják az okostelefonjukat is.

A térgeometria témakörének tanításakor használt szemléltetőeszközök is többfélék a tanárok válaszai alapján. Általánosan a táblarajz mellett a különféle fizikai modelleket alkalmazzák. Ezek sokrétűek, vannak műanyagból, fémből, fából, vagy éppen papírból hajtogatott modellek a testek szemléltetésére. Emellett élvázak, geometriai építőkészletek, Geomag építőjáték, gyurmából és hurkapálcikából épített modellek, papírból készített testhálók, illetve a környezetből vett tárgyak segítik a diákok térbeli gondolkodását ezen témakörben.

A kézzel fogható, legtöbbször szertári vagy otthoni eszközök mellett kevesebb számban, de említették a digitális alkalmazásokat is. A GeoGebra 3D alkalmazás került elő, illetve a már említett Cabri 3D változata, amely szintén testek szemléltetésére alkalmas.

A klasszikus GeoGebra alkalmazást a kitöltő tanárok 80%-a használta már. Az alábbi témakörök tanítása során alkalmazták: függvények, síkgeometria, térgeometria, geometriai transzformációk, koordinátageometria, trigonometria, analízis, grafikus egyenletmegoldás, egyenlőtlenségek, gráfok szemléltetése, kombinatorika, sorozatok, statisztika.

Az egyik kérdés arra irányult, hogy a GeoGebra 3D alkalmazást használták-e már a matematikaórán. Erre a kitöltő tanárok kicsit kevesebb, mint 40%-a válaszolt csak igennel. Azok közül, akik már találkoztak az alkalmazással, egyesek bonyolultnak találták a használatát, míg mások könnyen megtanulhatónak gondolják, ha már valaki előtte a GeoGebra Classic eredeti változat alkalmazásában jártas volt. Abban egyetértést tapasztaltam a válaszadók között, hogy nagyon szép és szemléletes ábrákat lehet készíteni vele, gyorsítja az órai magyarázatot és segíti a szemléltetést. A program telefonon való alkalmazási lehetőségét is kiemelte pozitívumként egy válaszadó tanár a visszajelzések között. Emellett könnyebbséget jelent, hogy aki nem sajátította el a program kezelését maximálisan, lehetőség van arra, hogy a mások által már elkészített fájlok között keresgéljünk, így azok között lehet találni általunk felhasználható segédanyagot.

A matematikatanárok szerint különös nehézséget okoz a diákok számára a térbeli alakzatok elképzelése. Ezen problémának orvoslásáról azonban megoszlanak a vélemények. A kérdőívben megkérdeztem, hogy szívesen használnak-e digitális tananyagokat matematikaórán, amire vegyesen érkeztek pozitív, illetve negatív eredmények, de összességében a pozitív felé dől el a mérleg nyelve. A visszajelzések alapján a legtöbb helyen van lehetősége a pedagógusoknak a különböző digitális programok és alkalmazások használatára az iskolákban. Összességében sokan jártasnak is érzik magukat ezek kezelésében, bár néhányan még bizonytalanok ezen a téren. Az 55-65 éves korosztály esetén jött a legtöbb arra irányuló visszajelzés, hogy nem olyan szívesen alkalmaznak digitális anyagokat a tanításhoz, és nem is ismernek ilyen alkalmazásokat (így legtöbb esetben a GeoGebrát sem), ebből kifolyólag nem is jártasok ebben a témában.

A döntő többség relevánsnak tartja a GeoGebra 3D funkciójának alkalmazását a térgeometria tanításakor. Abban a kérdésben, hogy ez az alkalmazás helyettesíteni tudja-e a fizikai szemléltetőeszközöket, megoszlottak a vélemények. A válaszadók többsége úgy gondolja, hogy inkább a kézzel fogható szemléltetőeszközök és a digitális eszközök együttes alkalmazása a legoptimálisabb a tanítás során.

A tanárokat az általam készített tanári segédletről is kérdeztem. Érthetőnek találták a segédlet elkészülésének célját és relevánsnak vélték az alkalmazási ötletet. A tanulók térlátásának fejlesztésére is alkalmasnak találta a kitöltők többsége. Otthoni tanulásra alkalmazhatónak ítélték, a térgeometriai fogalmak elképzelésének és megértésének megkönnyítését szolgálja a tanárok szerint.

A digitális segédletben találhatóak az adott témakörhöz kapcsolódóan feladatok is, amelyekhez szintén tartoznak háromdimenziós GeoGebra ábrák. A szöveges feladatok értelmezéséhez való felhasználásra vonatkozó kérdésnél egy kissé megoszlottak a vélemények, de összességében itt is igenlő a válasz erre a kérdésre.

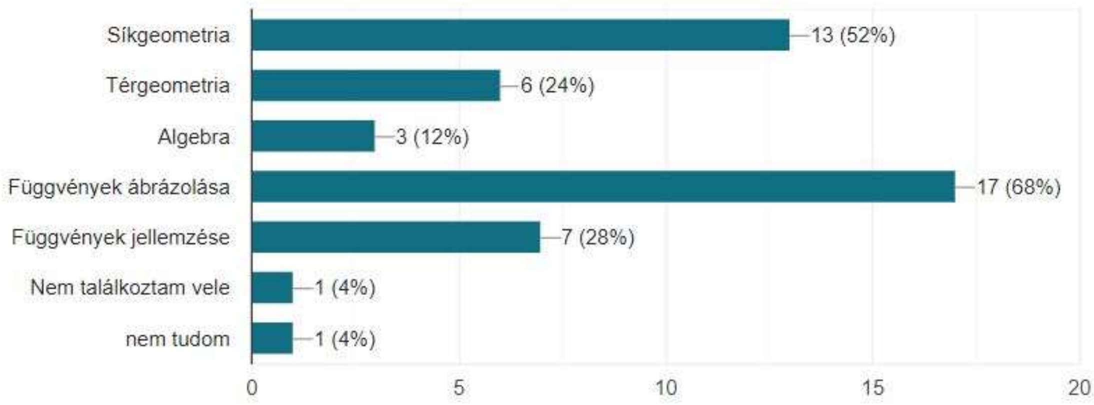
A tanárok a felületet könnyen kezelhetőnek találták, és a legtöbben szívesen alkalmaznák a térgeometria témakörének tanításakor.

Kértem a kitöltőket, hogy osszák meg velem, ha van bármilyen javaslatuk az általam készített digitális segédanyaggal kapcsolatosan, vagy mi az, amit változtatnának rajta a könnyebb, illetve hatékonyabb alkalmazhatóság érdekében. A tanárok egy része azt jelezte vissza, hogy megfelelőnek találja, nincs ötlete vagy nem szükséges a további kiegészítés. Mások tartalmilag egészítenék ki, felsoroltak egyéb, matematikaórán előkerülő eseteket, például egyéb egymásba írt testek esetét, amelyek tanításakor hasznos lenne hasonló digitális ábra, ami hiányzik a megadott digitális segédletből. Emellett további, összetettebb feladatok megjelenítését is javasolták. Mások azt jelezték vissza, hogy az adott csoporttól függ, hogy mivel kellene még kiegészíteni. Van olyan, aki a gyakorlati alkalmazást követően tudna csak javaslatot tenni, hogy mire lenne még szükség a segédletben.

4.3.2. Tanulói kérdőív eredményei

A tanulói kérdőívet 25 diák töltötte ki. A kérdőívet kitöltő osztálynak 12. osztályban heti 3 matematikaórája van. A kérdőívben adott válaszaikból kiderült, hogy a matematikaóráikon alkalmazott digitális programok száma elég csekély. A tanulók a GeoGebra alkalmazáson kívül a Photomath alkalmazást írták még, mint a tanulás során használt program. A GeoGebra alkalmazással valaki már általános iskolában találkozott, de a többség középiskolában, matematikaórán ismerte meg. Akad olyan, aki különórán használta a matematikatanárával, illetve olyan is, aki az interneten talált rá. A GeoGebra telefonos alkalmazásának használatát is említették.

A válaszadók többsége a függvényábrázolás és jellemzés, illetve a síkgeometria témakörénél találkozott a GeoGebrával. A 45. ábrán látható az ezzel kapcsolatos kérdésre adott válaszok eloszlása. Több válaszlehetőség bejelölésére is volt lehetőség, illetve saját választ is írhattak a diákok.



45. ábra: A diákok válaszai a GeoGebra alkalamzásának témaköréről

A térgeometria tanulásakor a testek szemléltetéseként táblarajzot készítettek, illetve fizikai modellek segítették számukra a térbeli testek elképzelését.

A tanulók nagy része nehéznek tartja a térgeometria témakörét. A térbeli testek lerajzolásának nehézsége kapcsán megoszlottak a vélemények, körülbelül ugyanannyian találják ezt a feladatot nehéznek, mint könnyűnek.

A válaszokból az derült ki, hogy szívesen használ digitális eszközöket a tanuláshoz a diákok többsége, ahogy az iskolában, szintúgy az otthoni tanulás során is. Ám ennek ellenre matematikaórán kevés alkalom adódik, amikor az okostelefonjuk használatba kerül.

A kérdőív kitöltése előtt megmutattam a digitális segédletet a tanulóknak, illetve alkalmaztuk néhány feladat megoldása során. Így ezzel kapcsolatban is tettem fel kérdéseket nekik, és jórészt pozitív visszajelzés érkezett. Hasznosnak érezték a térgeometria összefoglalásához, és a többség szívesen használná a segédletet egy térgeometria feladat megoldása során. Abban megoszlottak a vélemények, hogy a digitális, vagy a kézzel fogható modell hasznosabb a szemléltetés céljából, körülbelül azonos arányban szavaztak az egyik, illetve a másik opcióra a diákok. A kitöltők nagy része az otthoni és az iskolai tanuláshoz is felhasználhatónak tartja a segédletet. A segédlet átláthatóságára és könnyen kezelhetőségére is jórészt pozitív visszajelzés érkezett.

A tanulók véleményét arról is megkérdeztem, hogy mit gondolnak összességében a GeoGebra 3D oktatásban való alkalmazásáról. Úgy gondolják, hogy a térlátás javítását szolgálja, hasznos és jó alkalmazásnak tartják, a matematika tanulás megkönnyítésére alkalmasnak érzik. Néhányan kissé bonyolultnak találták.

Írtak javaslatokat is azzal kapcsolatosan, hogy miben érzik hiányosnak a segédletet. Többen említették a különböző testekhez tartozó feladatok megoldásának hiányát, ami segítség lehet az ellenőrzésben számukra. Illetve további, más típusú számolási módszereket igénylő feladatok megjelenését hiányolták a segédletből.

4.4. Eredmények értelmezése

A hipotézisemet és a kérdőívek eredményeit összevetve négy szempontot vizsgálok meg az eredmények értelmezése során. Az első a kérdőívet kitöltő tanárok és diákok által használt alkalmazásokra vonatkozik általánosan a matematikaórákon, majd a következő pontban, konkrétan a térgeometria témakörére szűkítve, hogyan alakul mindez. A harmadik szempont az általam készített segédanyagra érkezett vélemények megvizsgálása, majd végül ezt követi az ezzel kapcsolatos javaslatok értelmezése és átgondolása.

4.4.1. Matematikaórán használt alkalmazások

Számos könyv és tanulmány, például Kiszelák Zsófia tanulmánya [25] szól arról, hogy a rohamosan fejlődő információs társadalomhoz képest az oktatási módszerek nem fejlődnek megfelelő mértékben. A mai iskolásokra sokszor használják a digitális bennszülött kifejezést. Ez azt jelenti, hogy bár nem tekinthető velük született tudásnak, de az őket körülvevő digitális eszközök használatára és kezelésére jóval fogékonyabbak, mint az idősebb generáció.

Tóth-Mózer Szilvia és Misley Helga írásában foglaltak szerint megfogalmazhatók alapszabályok, amelyek szerint eldönthető, hogy mikor indokolt a digitális eszközök integrálása az oktatásba [26]. Az egyik ilyen szabály, hogy ne jutalmazásként használjuk fel ezeket az eszközöket, hanem legyen megszokott, hogy ezek a tanulás kellékei. Másrészt, mindig találjuk ki, hogy mi a tanulási célunk, és aszerint használjunk digitális eszközöket, de feleslegesen ne erőltessük rá a tananyagra. Emellett ne csak otthoni munkára tűzzünk ki olyan feladatokat, amelyek ezen eszközök használatát igénylik. Végül ne informatikai feladatokként adjunk ki egy-egy példát, hanem próbáljuk gondolkodást igénylő, szaktárgyi problémákkal foglalkoztatni a tanulókat.

A kérdőívben adott válaszokból az derült ki számomra, hogy a tanárok nagyrésze nyitott a különböző, tanulást segítő, digitális alkalmazások használatára a tanórán. Hipotézisemmel ellentétben meglepően sokan, és sokféle ilyen alkalmazást neveztek meg. Viszont beigazolódott a kitöltők válaszaiból, hogy valóban az idősebb korosztály az, aki kevéssé foglalkozik ezekkel a fejlesztésekkel, és inkább a megszokott, hagyományos óratartási módszereket preferálja.

Az Érintő – Elektronikus Matematikai Lapok egyik számában olvasható, miszerint általános tévhit, hogy a mai generáció tagjai kifogástalan telefonhasználók [27]. A gyerekeket ugyanis meg kell tanítani az okostelefonjukat megfelelően kezelni. Ennek első lépése a telefonhasználat illemszabályainak ismerete. Ezután a következő fokozat, hogy valamilyen gyűjtőmunkát adunk feladatként a tanulóknak, például egy adott témával kapcsolatos információk interneten való keresése. Majd, ha ezt a feladatot is biztonsággal oldja meg a diák, akkor érdemes továbblépni a telefon órai használatára, például valamilyen kvíz (pl. Kahoot) alkalmazása során.

Mivel több, mint a matematikatanárok fele azt jelölte a kérdőívben, hogy az óráin az okostelefonok használatára sor szokott kerülni, így arra következtetek, hogy aki digitális tananyagokat alkalmaz az órákon, az nem zárkózik el a telefonok órai használatától sem.

4.4.2. Térgeometria oktatása

A térgeometria tanításakor használt szemléltetési eszközök közül a kitöltők véleménye alapján a legelterjedtebb a fizikai eszközökkel való modellezés. Ennek minősége és milyensége elsősorban az adott iskola szertárállományától függ.

A GeoGebra Classic a matematikában használt alkalmazások közül az egyik legelterjedtebb. Ezzel ellentétben, a háromdimenziós változatát már jóval kevesebben ismerik. Egy korábbi kutatás szerint [28], amelyben szintén matematikatanárok véleményét vizsgálták a GeoGebra 3D alkalmazásával kapcsolatban, megállapították, hogy a szoftver megkönnyíti a háromdimenziós objektumok ismertetését. Felkelti a tanulók érdeklődését a matematika iránt, illetve magasabb tudásszintre tesznek szert, mint a használata nélkül. Megállapították, hogy a legtöbb dinamikus szoftverből hiányzik a háromdimenziós objektumok ábrázolásának képessége, a GeoGebra alkalmazás ezért is hiánypótló.

4.4.3. Az általam készített segédlet használata

Az eredményekből az látható, hogy a tanárok nagyrésze nyitott és befogadó a digitális tananyagok használatára. Ellenkező esetben, sokszor az akadályozó tényező egyrészt, hogy nem kap elég információt a tanár a digitális lehetőségekről, vagy azok megfelelő alkalmazásának módjáról. Másrészt, ha ismertek is ezek a felületek, a tananyagok elkészítése sok időt vesz igénybe. Ezért rendkívül hasznos, ha a már elkészült, és jól használható digitális segédletek más matematikatanárok számára is elérhetővé válnak, hogy az előzőkben felsoroltak ne jelentsenek akadályt.

A kérdőív kitöltése előtt a saját telefonjáról minden tanuló megnyitotta a padlet felületét. A felület gyorsan betöltött, jól kezelhető volt okostelefonról is. A GeoGebra 3D alkalmazással készített ábrák közül is megnyitottak néhányat a gyerekek. Nagyrészt ezek is könnyen betöltöttek a telefonokról, de volt, akinél kissé akadozott az ábrák forgatási, mozgatási lehetősége. Az okostelefon minősége, gyorsasága is befolyásolta, hogy mennyire könnyen töltött be az alkalmazás.

A diákok válaszaiból, és az órán velük folytatott beszélgetés alapján az derült ki számomra, hogy szükségesnek érzik az ilyen típusú összefoglaló segédanyagokat. A középiskolai tanulmányok alatt az ismeretanyag minden tantárgyból, így matematikából is hatalmas mennyiségű. Az érettségire való készülés során nagy könnyebbséget jelent, és az információhalmaz átláthatóságát könnyíti meg egy ilyen típusú, rendszerezett összefoglaló segédanyag.

4.4.4. Javaslatok

A diákok közül legtöbben a segédletben szereplő feladatok megoldásával való kiegészítést említették meg javaslatként. Az eredeti elképzelésemben azért nem szerepelnek a megoldások, mert a tanulói alkalmazás során az volt a célom, hogy ne egyből a megoldást tudja megnézni a diák, hanem az elméleti ismeretek átismétlése után a feladathoz csak egy kiindulási ábrát, egy kis segítséget kapjon, és a további megoldási lépésekre magától jöjjön rá. Ellenben, a diák és a tanári oldalról is megvizsgálva, a tanuló saját munkája ellenőrzéseként, illetve a tanár munkájának megkönnyítése végett szintén hasznos, ha könnyen elérhető az adott feladat megoldása is.

A tanári visszajelzések a segédlet további kiegészítésének szükségességét főként attól tették függővé, hogy milyen csoportnál alkalmazzuk. Erre megoldást jelenthet, ha például valamilyen módon elkülönítjük a segédletben (pl. bejegyzések adott színnel való elkülönítése) a különböző nehézségű szintű elméleti részeket, illetve feladattípusokat.

A térgeometria feladatok típusainak tárháza hatalmas, a segédletbe ezek közül csak néhány típus kapott helyet. A későbbiekben célom további feladatokkal, és a javaslatok tükrében megoldásokkal kiegészíteni.

5. ÖSSZEGZÉS

A társadalom számos tagját valamilyen formában érintő kérdés, hogy az egyre gyorsabban változó világ szereplői, szemben az alig változó iskolarendszerrel hogyan tudnak mégis alkalmazkodni egymáshoz. Ezen rendkívül összetett kérdés egyik aspektusa, hogy próbáljuk meg integrálni az új lehetőségeket az iskola falai közé az igényeknek és lehetőségeknek megfelelően. A Nemzeti alaptantervben is megjelenik, hogy a tanulók az iskolai tanulmányaik alatt tanulják meg a digitális eszközöket a tanulást segítő célokra használni.

A szakdolgozatom témájának vizsgálata során is ezen célok vezéreltek. A matematika megannyi témakörét leszűkítve a térgeometriára, arra voltam kíváncsi, hogy miként lehetne a tanárok és diákok által is könnyen alkalmazható segítséget létrehozni a tanításhoz és a tanuláshoz, mindezt az online világ bevonásával.

A legalkalmasabbnak és legkézenfekvőbbnek erre a célra a GeoGebra program bizonyult. Számos más alkalmazással is találkozhatunk az interneten, amely hasonló funkciókat lát el, de a kezelhetőség, elérhetőség és alkalmazási lehetőségek szempontjából a GeoGebra a legoptimálisabb. A program alapfunkciója széles körben elterjedt, viszont a térgeometriai fogalmak és feladatok szemléltetéséhez a háromdimenziós továbbfejlesztésére van szükség. A dolgozatom elején egy rövid összefoglalást tettem ezek használatáról.

A középiskolai térgeometriaoktatás elemeit végiggondolva, számos olyan meghatározásba ütközünk, amelynek megértése a diákok számára nehézséget okozhat. Például nem olyan egyértelmű, hogy hogyan képzeljünk el egy csonkagúlát, vagy milyen síkidomokból tevődik össze egy test palástja.

A hosszúgyakorlatom alatt egyre erősebben tapasztalhattam, hogy minden tanuló más és más. Vannak, akik rögtön tudják értelmezni az átadott információt, és már tovább is gondolják, illetve még újabb kérdéseket is felvetnek. Persze a tanulók nagy része nem ilyen. Az ábrák készítése sokat segít egy-egy fogalom megértésében, de vannak, akiknek ez sem oldja meg a problémát. A sokféle módszer kipróbálásával (például digitális eszközök integrálása) lehetősége nyílik a tanulóknak felfedezni, hogy mi az, ami számukra a legjobban hozzájárul a tanulás megkönnyítéséhez.

Sok iskolából olyan visszajelzéseket hallani, hogy a tanárok ragaszkodnak a régi, megszokott módszerekhez, és kevéssé nyitottak az új lehetőségek alkalmazására. Az általam, a kérdőívben megkérdezett matematikatanárok visszajelzésük alapján megcáfolták ezt az elképzelést. Ebből azt a következtetést tudom levonni, hogy alapvetően nyitottak a digitális alkalmazások használatára, csak kevés lehetőségük adódik új programok megismerésére, illetve a konkrét témákhoz megfelelően illeszkedő alkalmazások megtalálására.

A diákokkal kapcsolatosan az általános elképzelés, hogy mivel a telefonjuk folyton a kezük ügyében van, biztosan könnyen eligazodnak bármiféle digitális tananyag használatában is. Az valóban igaz, hogy rendkívül nyitottak és érdeklődőek, ha tanulási célra is, de az órán legálisan elővehetik a telefonjukat, de a helyes használatra meg kell tanítani őket, csak akkor lehet hatékony a tanulási folyamat.

Az általam végzett, rövid vizsgálatot követően, az elkészített tanítási segédletet – a javaslatok átgondolása után kissé továbbfejlesztve – ki fogom próbálni élesben is. A térgeometria témakörének tanítása során a tananyagrészeket a digitális szemléltetéssel alátámasztva megvizsgálom, hogy milyen hatást gyakorol a tanulók tanulási folyamatára. A diákok visszajelzései alapján más témakörökkel kapcsolatosan is hasznos lenne számukra hasonló összefoglaló felület használata, így ennek megvalósítása is a jövőbeli terveim között szerepel.

Összefoglalva, a cél az lenne véleményem szerint, hogy a matematikatanárok közössége megossza egymással a digitális alkalmazásokkal kapcsolatos tapasztalatait és tudását, az elkészült és jól bevált tananyagaikat, hogy minél inkább segítsék egymást ezen a téren. Ilyen típusú párbeszédek és ötletmegosztások útján juthatunk legegyszerűbben könnyen és jól használható alkalmazási lehetőségekhez, leküzdve ezzel az ismeretlentől való félelmet.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Cabri (2023): Cabri 3D dinamikus matematikai szoftver. https://cabri.com/en/instructor/cabri-3d/index.html (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[2] Tinkercad (2023): Tinkercad 3D tervező és modellező program. https://www.tinkercad.com/3d-design (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[3] GeoGebra (2023): GeoGebra 3D Calculator. https://www.geogebra.org/3d (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[4] GeoGebra (2023): GeoGebra Classic. https://www.geogebra.org/classic (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[5] GeoGebra (2023): GeoGebra kézikönyv https://wiki.geogebra.org/hu/K%C3%A9zik%C3%B6nyv (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[6] GeoGebra (2023): Learn GeoGebra 3D Calculator. https://www.geogebra.org/m/aWhYSpvy (Utolsó letöltés: 2022. 04. 30.)

[7] Magyarország Kormánya (2020): A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. Rendelet módosításáról. *Magyar Közlöny*, (17.), 290-446. https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/megtekintes (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[8] Oktatási Hivatal (2020): Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára. https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[9] Nemeslaki, A. (2012): *Vállalati internetstratégia*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

[10] GeoGebra (2023): GeoGebra 3D with AR: Quick Setup Instructions. https://www.geogebra.org/m/bcdafv8s (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[11] AR Books (2023): Könyvsorozat kiterjesztett valóság tartalmakkal. https://shop.arbookslibrary.com/ismerd_meg (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[12] Magyarország Kormánya (2012): A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról. *Magyar Közlöny*, 2012 (66.), 10635-10847. http://www.magyarkozlony.hu/pdf/13006 (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[13] Oktatási Hivatal (2023): Részletes matematika érettségi vizsgakövetelmények https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/erettsegi_vizsgatargyak (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[14] Kosztolányi, J. és munkatársai (2011): *Sokszínű matematika 12.* Mozaik Kiadó, Szeged.

[15] Verhóczki, L. (2021): *Bevezetés a geometriába előadásjegyzet matematikatanári szakos hallgatóknak*. ELTE TTK Matematikai Intézet, Geometriai Tanszék, Budapest.

[16] Lovász, L., Pelikán, J., – Vesztergombi, K. (2006): *Diszkrét matematika.* Typotex Kiadó, Budapest.

[17] Laczkovich, M. – T. Sós, V. (2012): *Valós analízis I-II.* Typotex Kiadó, Budapest.

[18] Oktatási Hivatal (2020): Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyama számára. https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_5_8 (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[19] Hortobágyi, I. és munkatársai (2013): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I.* Konsept-H Kiadó, Budapest.

[20] Gábor Endréné és munkatársai (1992): *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*. Tankönyvkiadó, Budapest.

[21] Czapáry Endre és munkatársai (2018): *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

[22] Verhóczki, L. (2021): *Projektív geometria előadásjegyzet matematikatanári szakos hallgatóknak.* 19-26. old. ELTE TTK Matematikai Intézet, Geometriai Tanszék, Budapest.

[23] Lengyelné Molnár, T. és munkatársai (2015): *IKT innováció.* 11. old. Eszterházy Károly Főiskola, Eger.

http://p2014-25.palyazat.ektf.hu/public/uploads/5-ikt-innovacio-lengyelne-kis-toth-antal-racsko-isbn_565d5553721a1.pdf (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[24] Padlet (2023): Virtuális faliújság
www.padlet.com (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[25] Kiszelák Zsófia, „Modern vagy hagyományos oktatás?”, *Információs Társadalom*, XVI. évf. (2016) 2. szám, 69-79. old.
http://real.mtak.hu/47312/1/it_2016_02_5_kiszelak.pdf
(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[26] Tóth-Mózer, Sz., – Misley, H. (2019): *Digitális eszközök integrálása az oktatásba.* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest.
https://www.researchgate.net/profile/Szilvia-Toth-Mozer-2/publication/337733247_Digitalis_eszkozok_integralasa_az_oktatasba_Jo_gyakorlatokkal_tantargyi_peldakkal_modern_eszkozlistaval/links/5de79ff892851c83646053cf/Digitalis-eszkoezoek-integralasa-az-oktatasba-Jo-gyakorlatokkal-tantargyi-peldakkal-modern-eszkoezlistaval.pdf
(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[27] Koren, B. (2018): Okostelefonok a matematikaórán – 1. rész. *Érintő – Elektronikus Matematikai Lapok,* 8. szám 2018. június.
https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2018-06/742-okostelefonok-a-matematikaoran-1-resz
(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

[28] Baltaci, S. – Yildiz, A. (2015): GeoGebra 3D from the perspectives of elementary pre-service mathematics teachers who are familiar with a number of software programs. *Cypriot Journal of Educational Sciences, 10(1), 12-17.*
https://www.researchgate.net/publication/330737723_GeoGebra_3D_from_the_perspectives_of_elementary_pre_service_mathematics_teachers_who_are_familiar_with_a_number_of_software_programs
(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

MELLÉKLETEK

1. ***melléklet: Tanári segédlet***

   Elérhetősége: https://padlet.com/vitezkata05/t-rgeometria-62pqoo1kavp02zjr

   Rövid bemutatása videó formájában (hossza: 2:53 perc):

   https://watch.screencastify.com/v/SUqDBhr0TZPKvbIIiEYp

   (Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

   A segédlet tartalmának megjelenítése pdf formátumban (következő oldaltól):

   (Megjegyzés: az ábrákra és linkekre kattintva megjelennek a háromdimenziós GeoGebra ábrák)

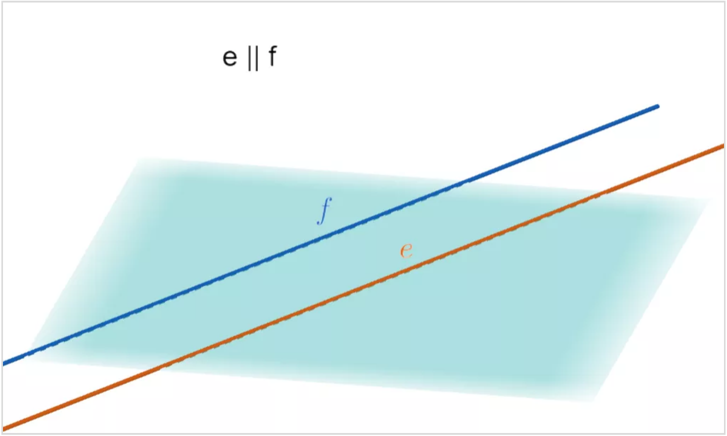
Térgeometria

KATA VITÉZ 2022. NOVEMBER 20., 17:15 UTC

Térelemek

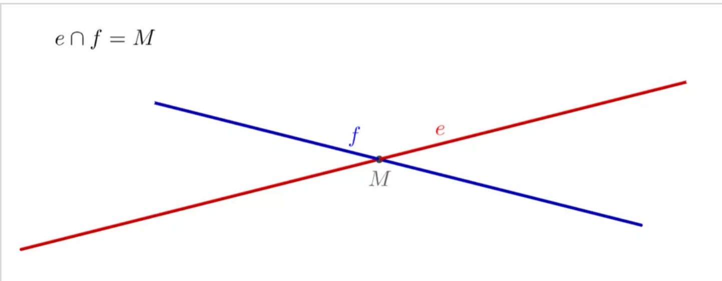
Párhuzamos egyenesek

https://www.geogebra.org/3d/cypgwu3v



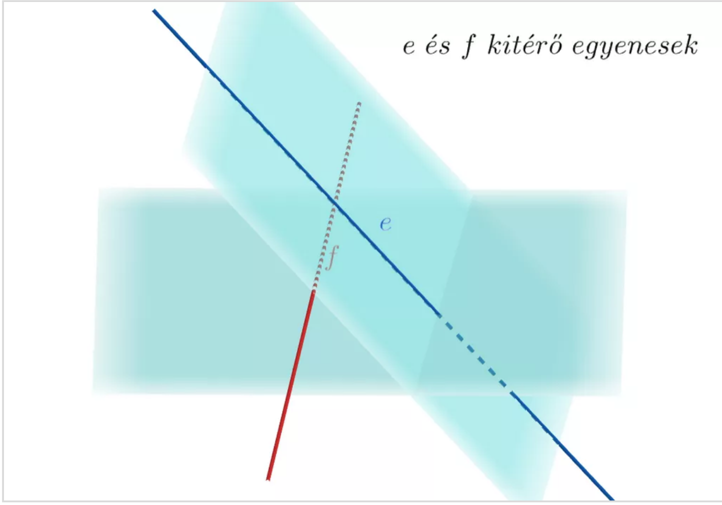
Metsző egyenesek

https://www.geogebra.org/3d/suas9he6



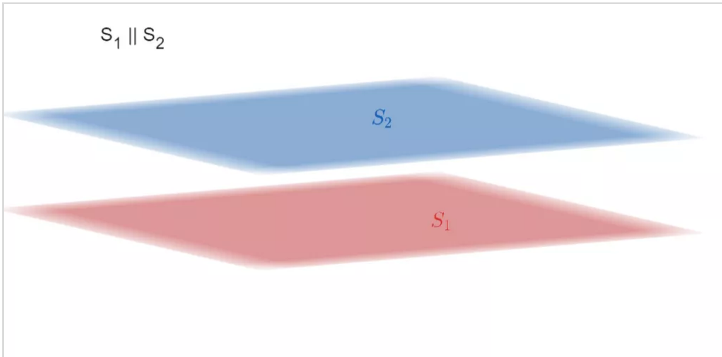
Kitérő egyenesek

https://www.geogebra.org/3d/ykb5hbuv



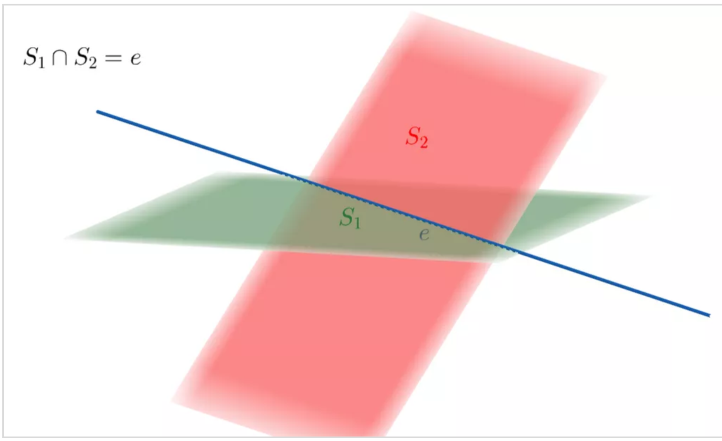
Párhuzamos síkok

https://www.geogebra.org/3d/yzhnd4zz



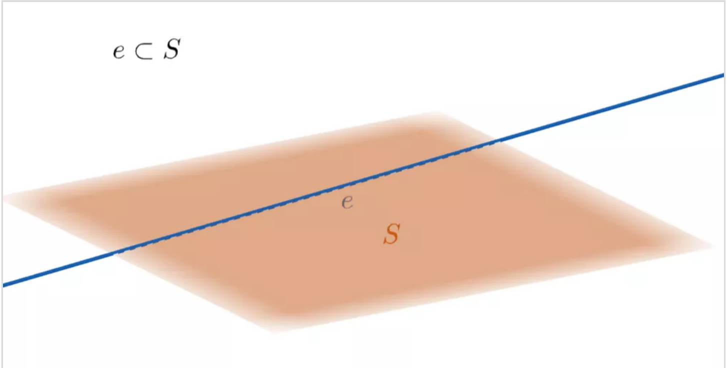
Metsző síkok

https://www.geogebra.org/3d/pfbedezx



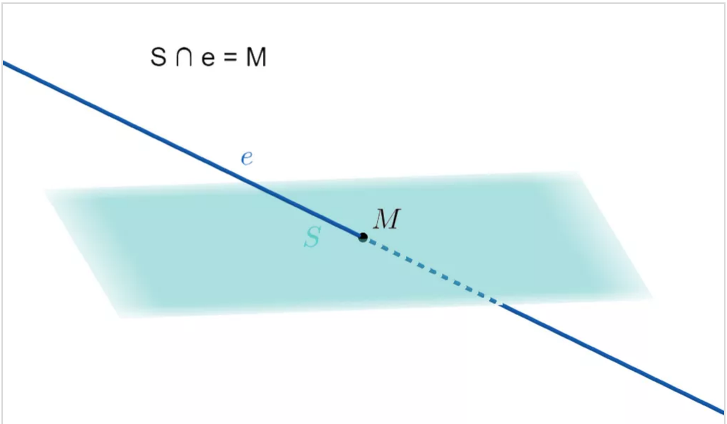
Egyenes illeszkedik a síkra

https://www.geogebra.org/3d/qcvfexv9



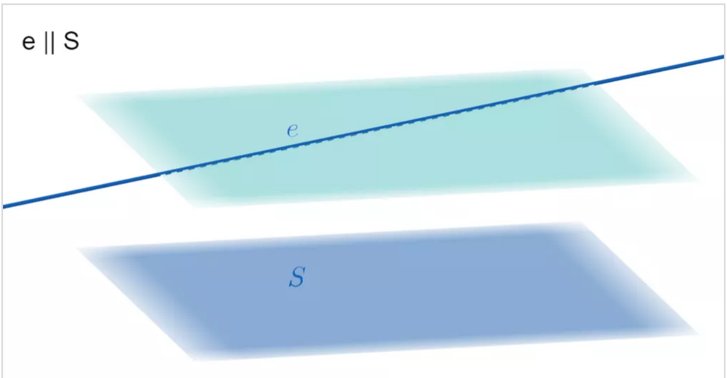
A síkot egy pontban metsző egyenes

https://www.geogebra.org/3d/fctpqmzq



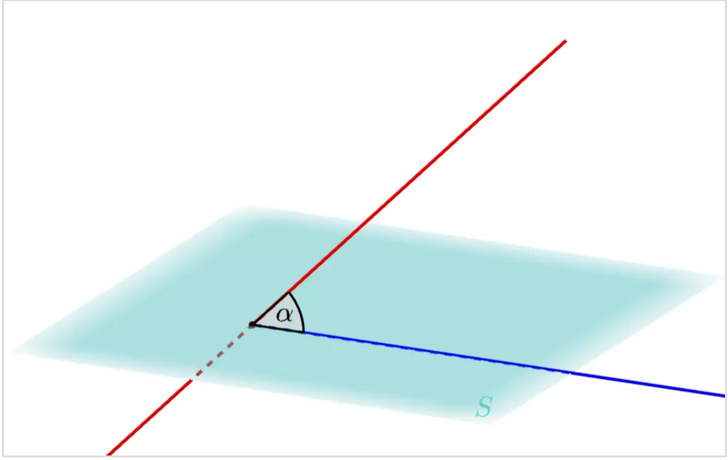
Az egyenes párhuzamos a síkkal

https://www.geogebra.org/3d/jh8wtakk



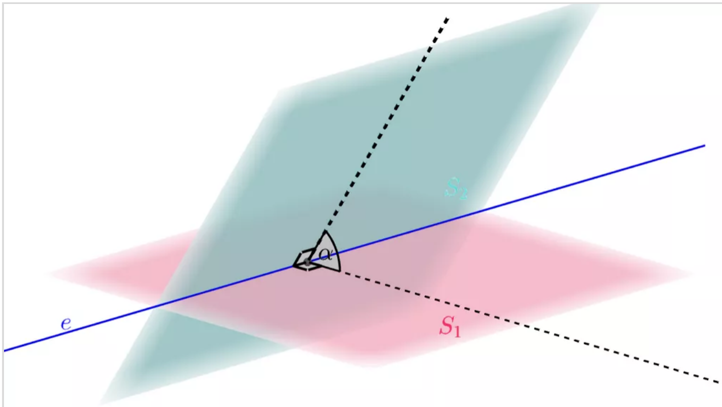
Egyenes és sík hajlásszöge

https://www.geogebra.org/3d/cfqkjq2x



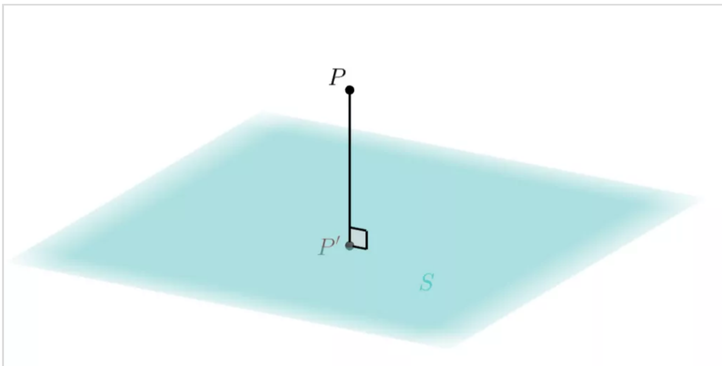
Két sík hajlásszöge

https://www.geogebra.org/3d/hkjwdudp



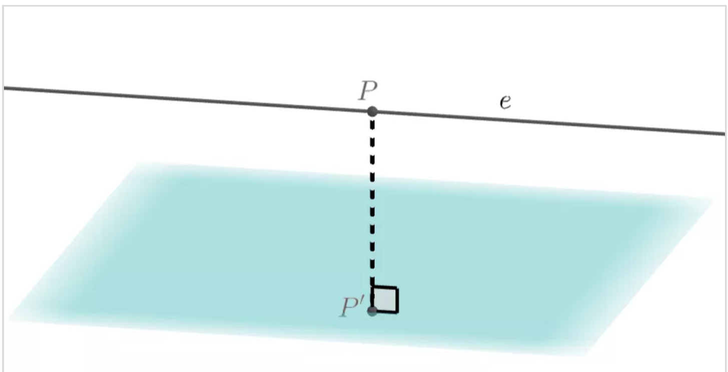
Pont és sík távolsága

https://www.geogebra.org/3d/hyqxmqp8



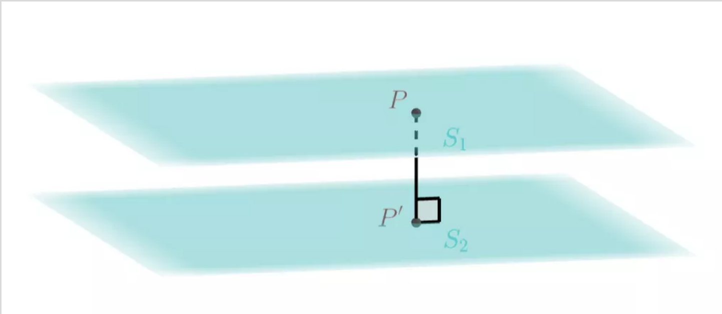
Sík és vele párhuzamos egyenes távolsága

https://www.geogebra.org/3d/tkv7nxc6



Két párhuzamos sík távolsága

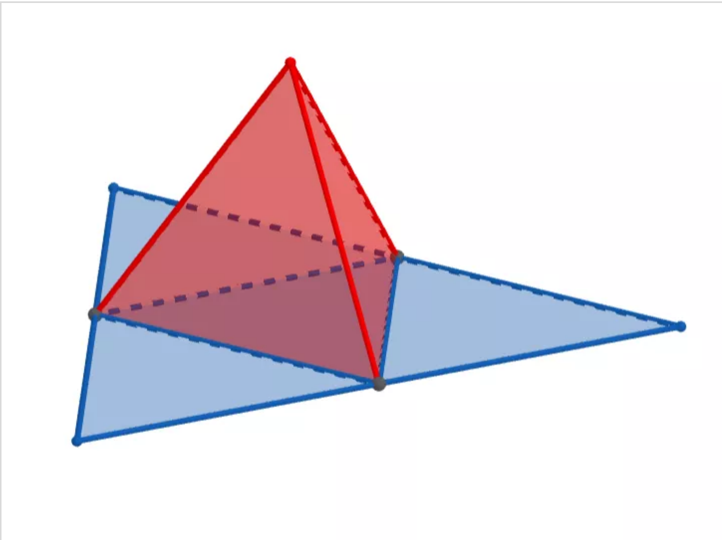
https://www.geogebra.org/3d/q8smjez9



Szabályos testek

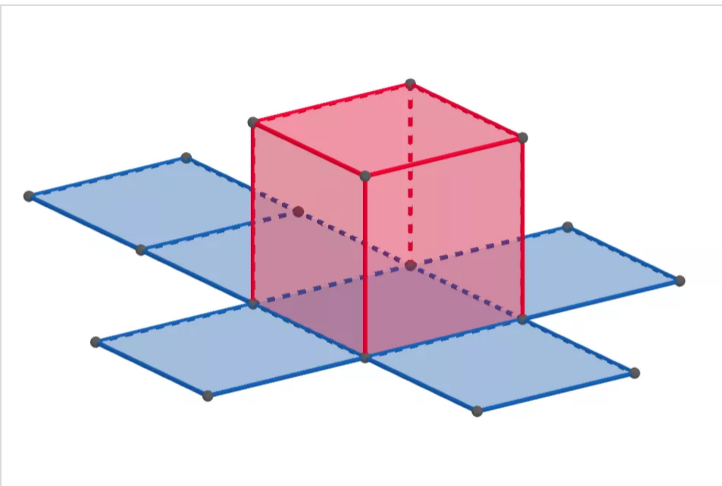
Tetraéder

https://www.geogebra.org/3d/ezjxx6nw



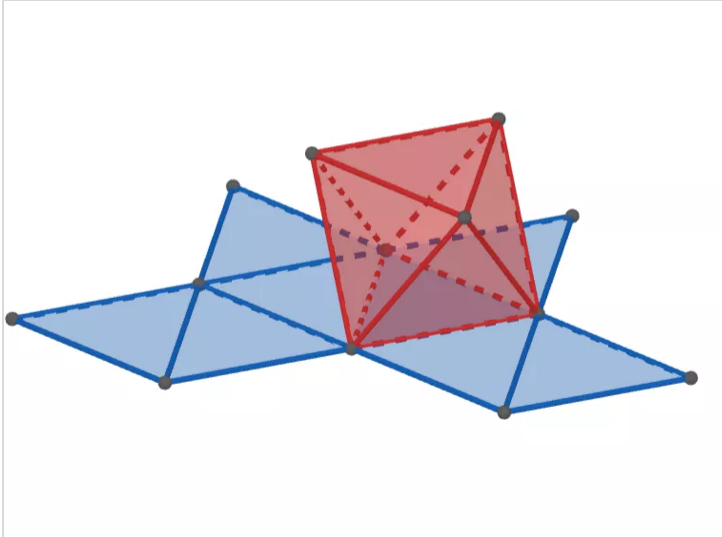
Hexaéder

https://www.geogebra.org/3d/yhy9ppyv



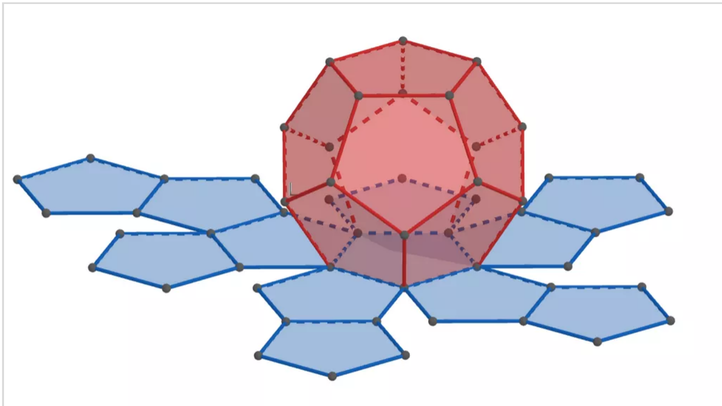
Oktaéder

https://www.geogebra.org/3d/x6qyy9pq



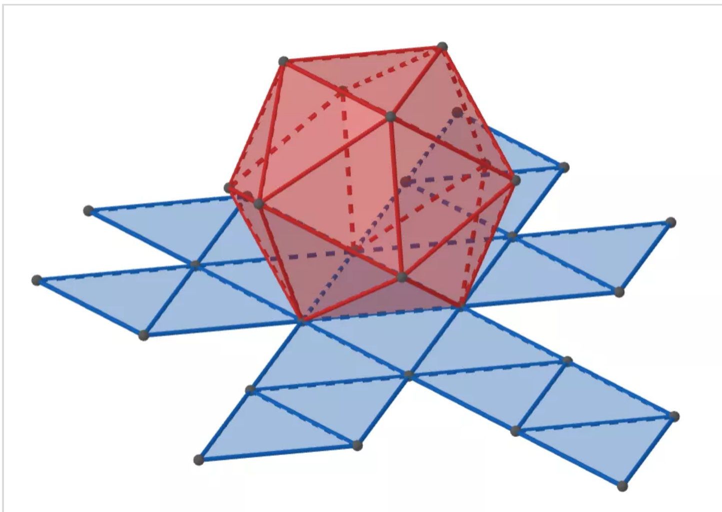
Dodekaéder

https://www.geogebra.org/3d/a9jm5gde



Ikozaéder

https://www.geogebra.org/3d/b6r6qsyg

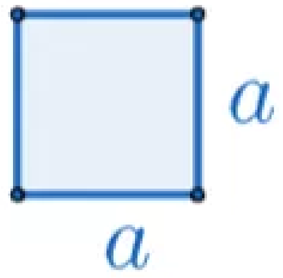


Síkidomok kerülete, területe

Négyzet

$$K = 4a$$

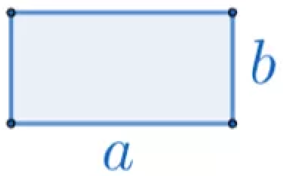
$$T = a^2$$



Téglalap

$$K = 2(a + b)$$

$$T = ab$$

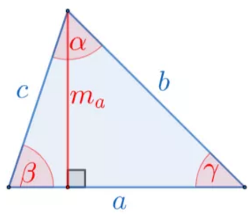


Háromszög

$$K = a + b + c$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} =$$

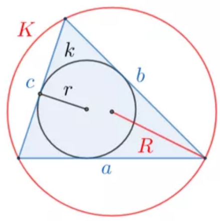
$$= \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$$



Héron-képlet:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

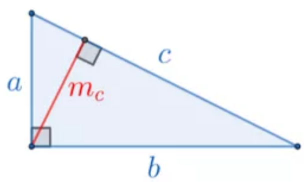
$$T = r \cdot s = \frac{abc}{4R}$$



Speciális háromszögek

Derékszögű háromszög:

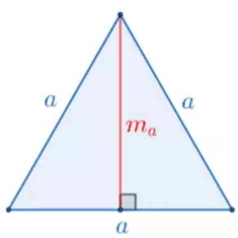
$$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$



Szabályos háromszög:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

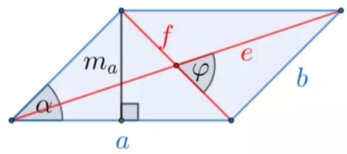


Paralelogramma

$$K = 2(a + b)$$

$$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b =$$

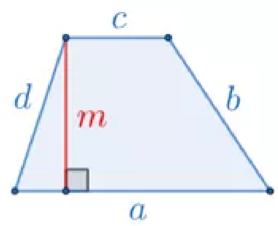
$$= a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$$



Trapéz

$$K = a + b + c + d$$

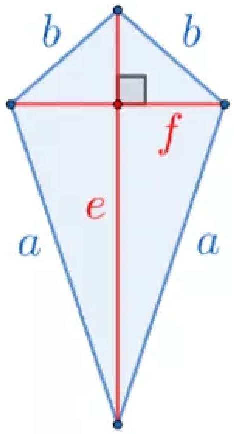
$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$$



Deltoid

$$K = 2(a + b)$$

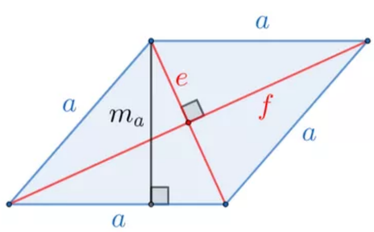
$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$



Rombusz

$$K = 4a$$

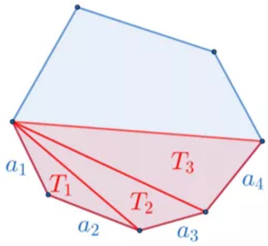
$$T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2}$$



Sokszögek

$$K = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$



A kör és részeinek területe

A kör és részei

$K = 2r\pi$

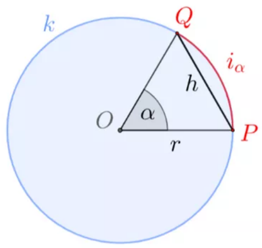
$T = r^2\pi$

$i_\alpha = \frac{2r\pi}{360°} \cdot \alpha^\circ = r \cdot \hat{\alpha}$

$T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot \alpha^\circ = \frac{r^2 \cdot \hat{\alpha}}{2} = \frac{i_\alpha \cdot r}{2}$

α° a szög fogban, $\hat{\alpha}$ a szög radiánban megadott értéke

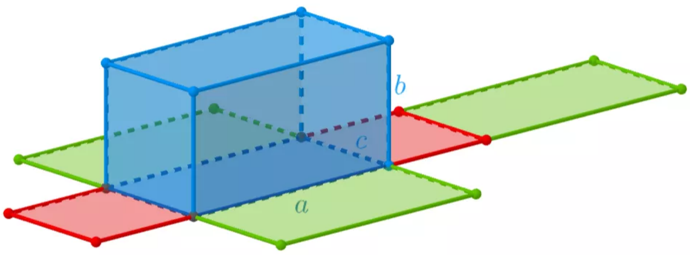
$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{\text{OPQ háromszög}}$



A téglatest

A téglatest

https://www.geogebra.org/m/emt3hkvc



$V = a \cdot b \cdot c$

$A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

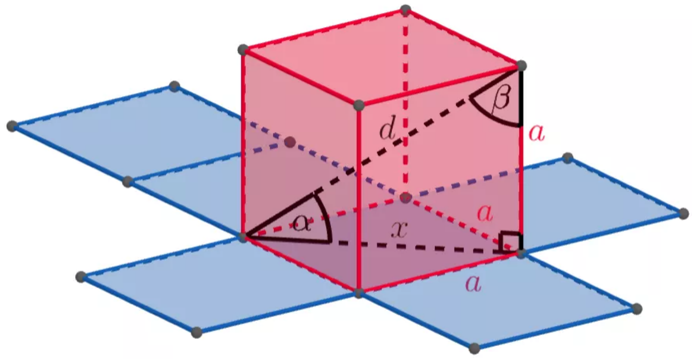
Feladat

Egy téglatest éleinek aránya 1 : 3 : 5. A felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik. Mekkorák az élei?

A kocka

A kocka

https://www.geogebra.org/3d/hqekqk7g



$V = a^3$

$A = 6 \cdot a^2$

A lapátló: $x = \sqrt{2} \cdot a$

A testátló: $d = \sqrt{3} \cdot a$

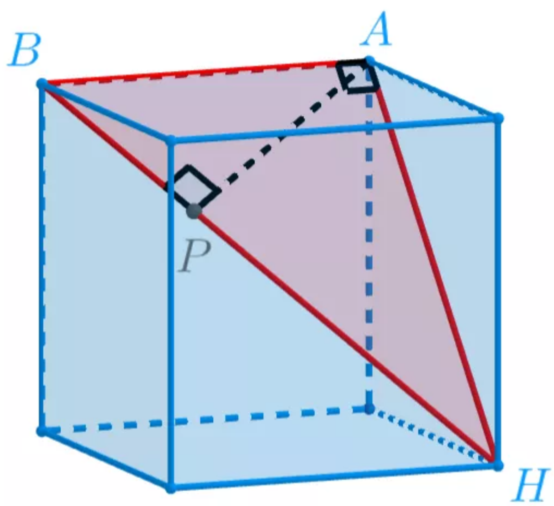
A testátló és a lapátló szöge: $\alpha = 35,26°$

Feladat

Milyen hosszú annak a kockának az éle, amelynek a csúcsai a rájuk nem illeszkedő testátlótól 3 cm távolságra vannak?

https://www.geogebra.org/3d/prqwquyy

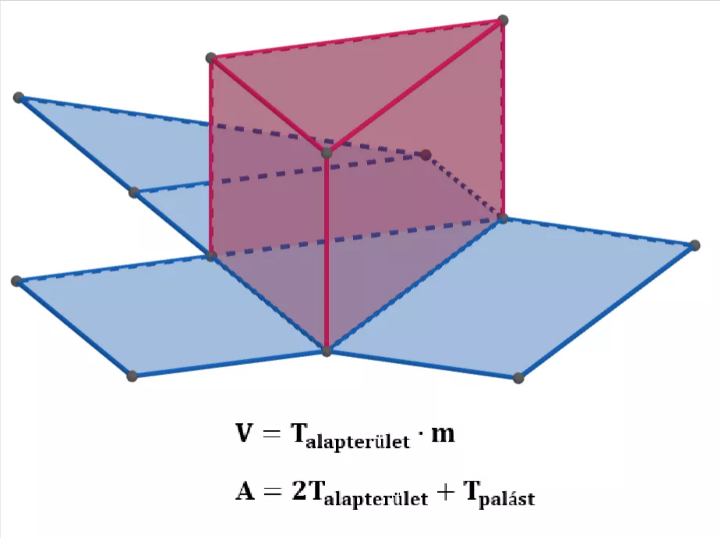
AP = 3 cm



A hasáb

A hasáb

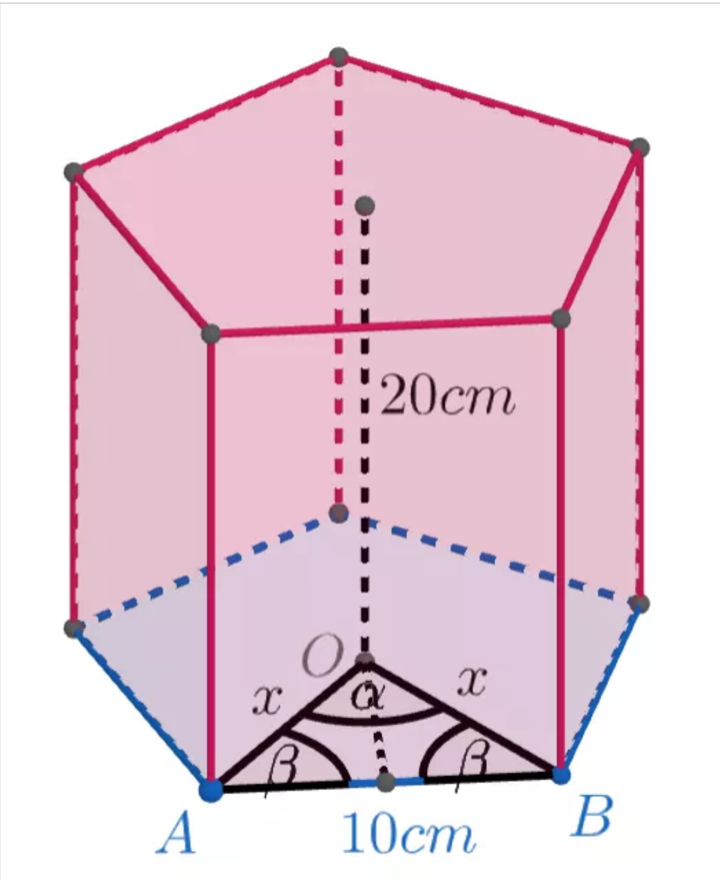
https://www.geogebra.org/3d/kqjrjwvv



Feladat

Egy egyenes hasáb alapéle 10 cm, magassága 20 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata, ha az alapja egy szabályos ötszög?

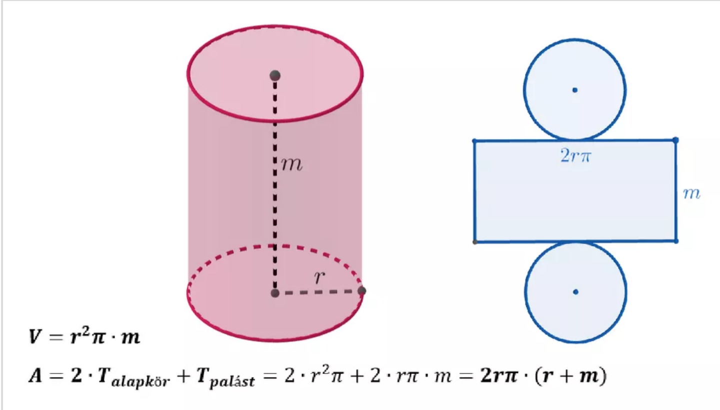
https://www.geogebra.org/3d/fzvmvhbq



A henger

Egyenes körhenger

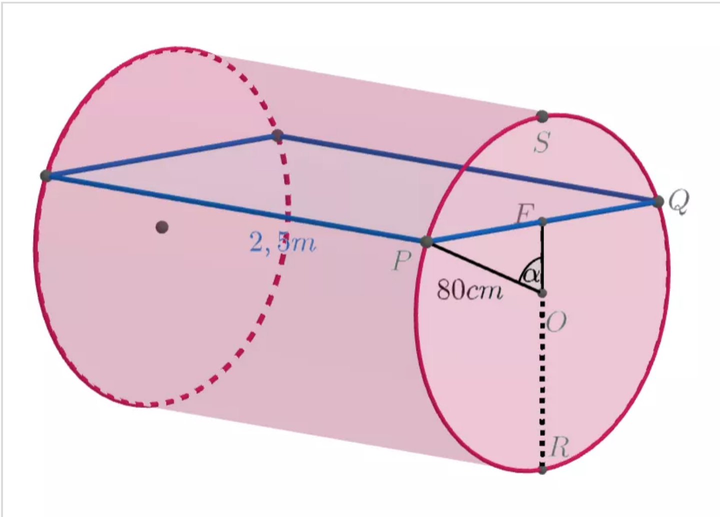
https://www.geogebra.org/3d/hketuugw
https://www.geogebra.org/3d/m5wgfx7k



Feladat

Egy vízszintesen fekvő, henger alakú tartályban 1,25 m magasan áll a víz. Hány liter víz van a hengerben, ha alapkörének sugara 80 cm, hossza pedig 2,5 m.

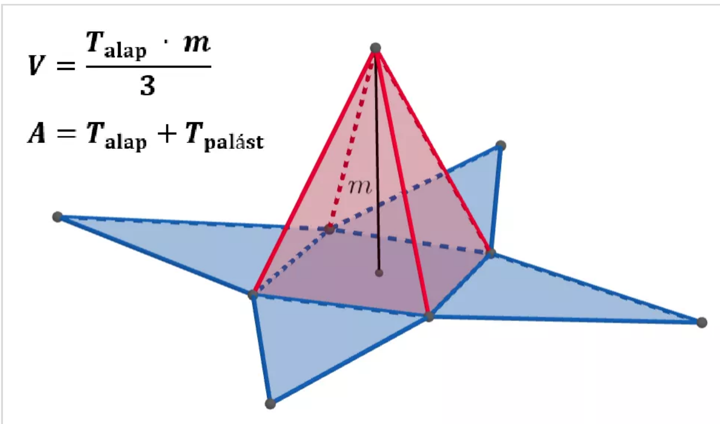
https://www.geogebra.org/3d/dbgkxqg9



A gúla

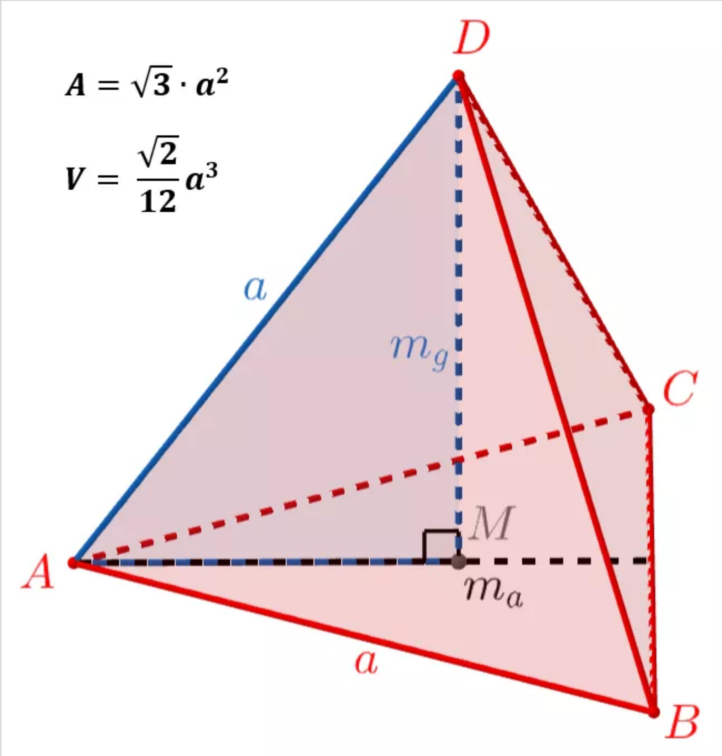
Gúla

https://www.geogebra.org/3d/yvdzqbfr



Speciális gúla: szabályos tetraéder

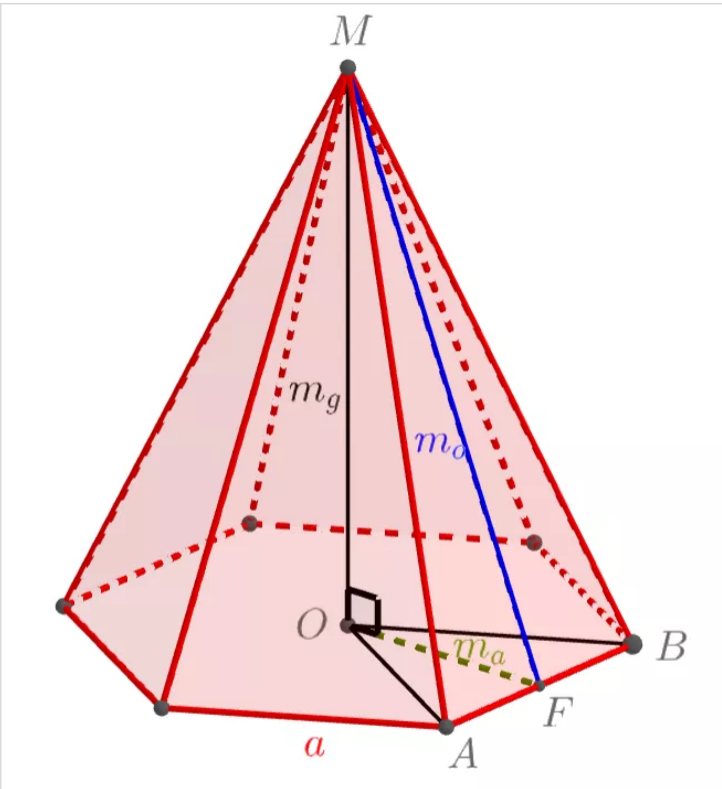
https://www.geogebra.org/3d/dk862hyv



Feladat

Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle 9 cm, magassága 15 cm. mekkora a felszíne és a térfogata?

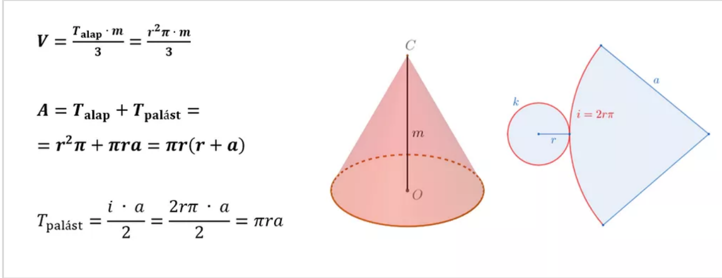
https://www.geogebra.org/3d/wrjufnxn



A kúp

Egyenes körkúp

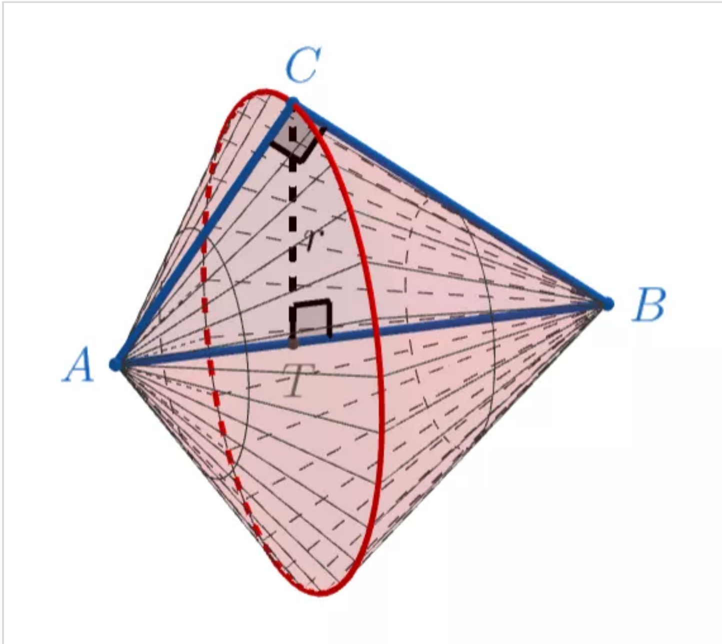
https://www.geogebra.org/3d/r2knrnrx



Feladat

Egy háromszög három oldala 3 cm, 4 cm és 5 cm. Megforgatjuk a leghosszabb oldala mentén. Mekkora a keletkezett test felszíne és térfogata?

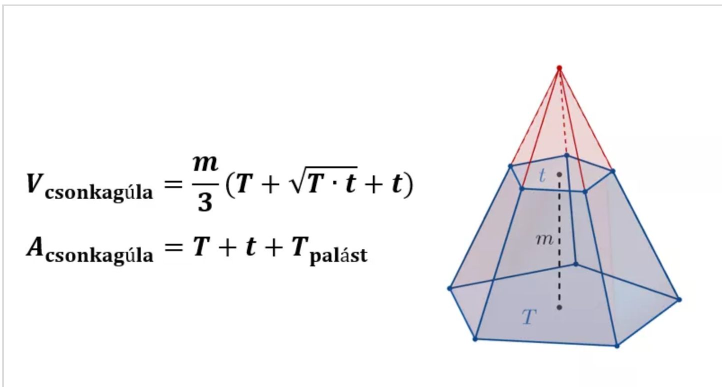
https://www.geogebra.org/3d/b6qfmguv



A csonkagúla

Csonkagúla

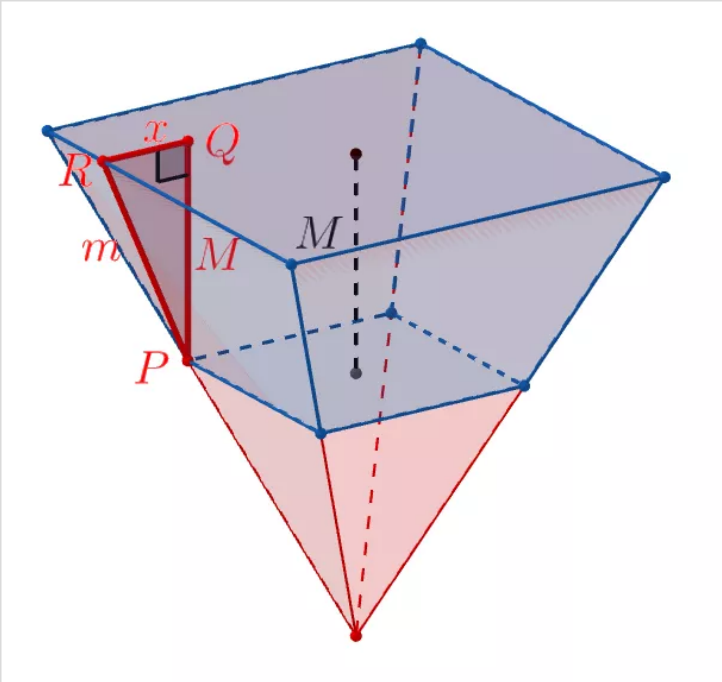
https://www.geogebra.org/3d/rsewwvaf



Feladat

Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő csonkagúla alakú. Felső lapja 14 m, alsó lapja 10 m oldalú négyzet, mélysége 6 m. Mennyi víz fér bele? Mekkora a medence felszíne?

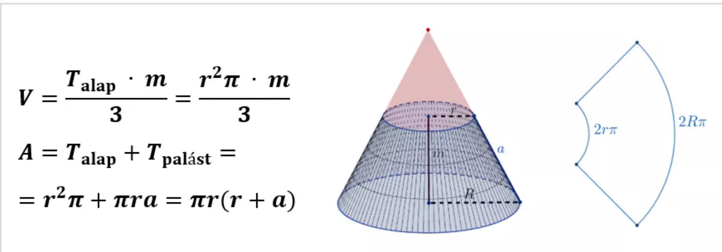
https://www.geogebra.org/3d/eqtwf8ex



A csonkakúp

Csonkakúp

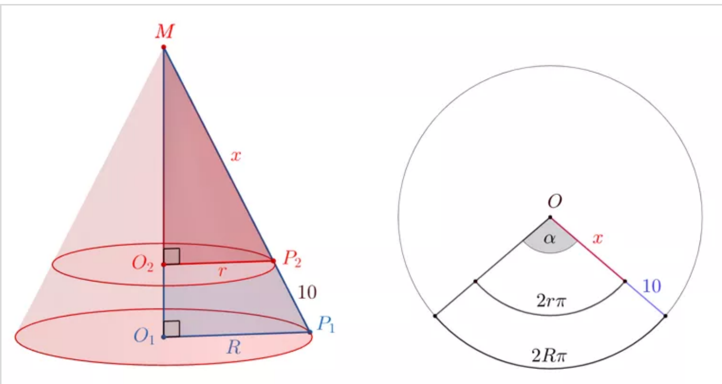
https://www.geogebra.org/3d/nfutg5u6



Feladat

Csonkakúp alakú lámpaernyőt készítünk ajándékba. Az adatok: R = 7,5 cm, r = 5 cm, az alkotó a = 10 cm.
Mekkorára kell választani a körlap sugarát, amelyből kivágható a lámpaernyő? Elég-e egy negyed körlap az elkészítéshez?

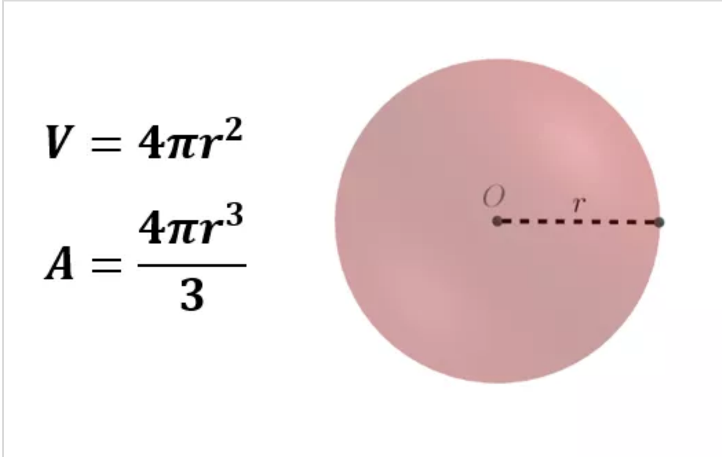
https://www.geogebra.org/3d/vrw8cws9
https://www.geogebra.org/calculator/gejq4hhu



A gömb

A gömb

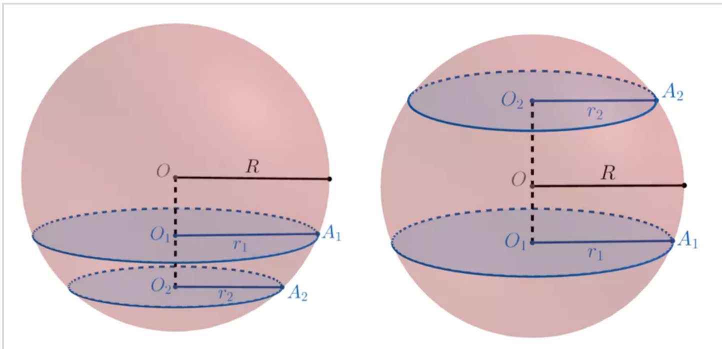
https://www.geogebra.org/3d/uqjffram



Feladat

Egy gömböt két párhuzamos, egymástól 6 cm távolságra lévő sík metsz. A síkmetszetek sugara 24, illetve 32 cm. Mekkora a gömb sugara?

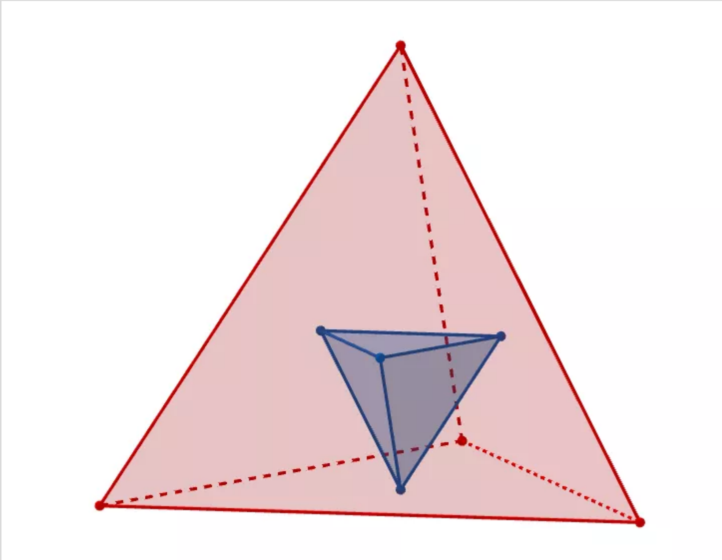
https://www.geogebra.org/3d/epwhscrq
https://www.geogebra.org/3d/b2bmpbra



Egymásba írt testek

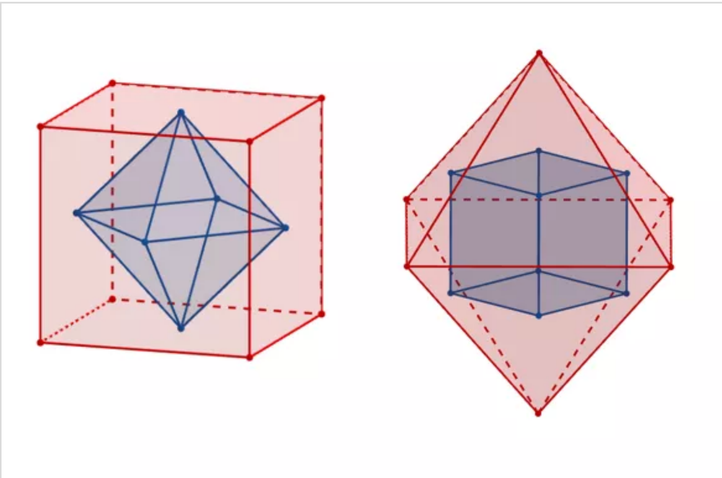
Tetraéder duálisa tetraéder

https://www.geogebra.org/3d/spf74ycq



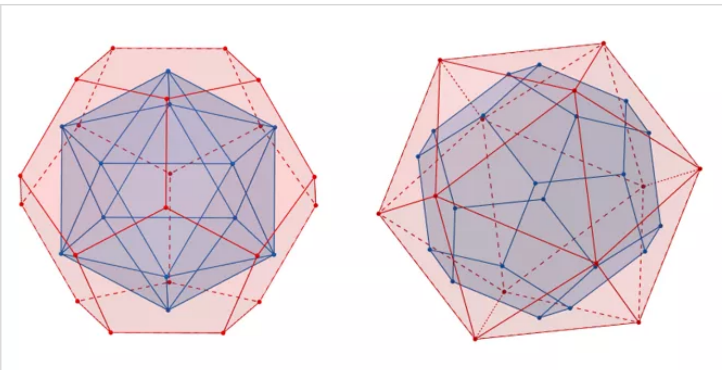
Kocka és oktaéder egymás duálisa

https://www.geogebra.org/3d/b2enmada
https://www.geogebra.org/3d/v7tcfqr5



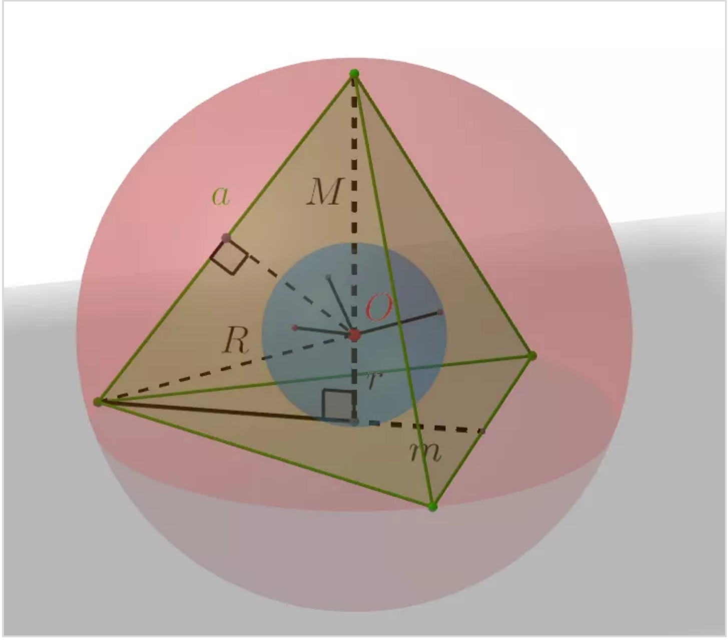
Dodekaéder és ikozaéder egymás duálisa

https://www.geogebra.org/3d/j3ewgf3u
https://www.geogebra.org/3d/xjrshhf7



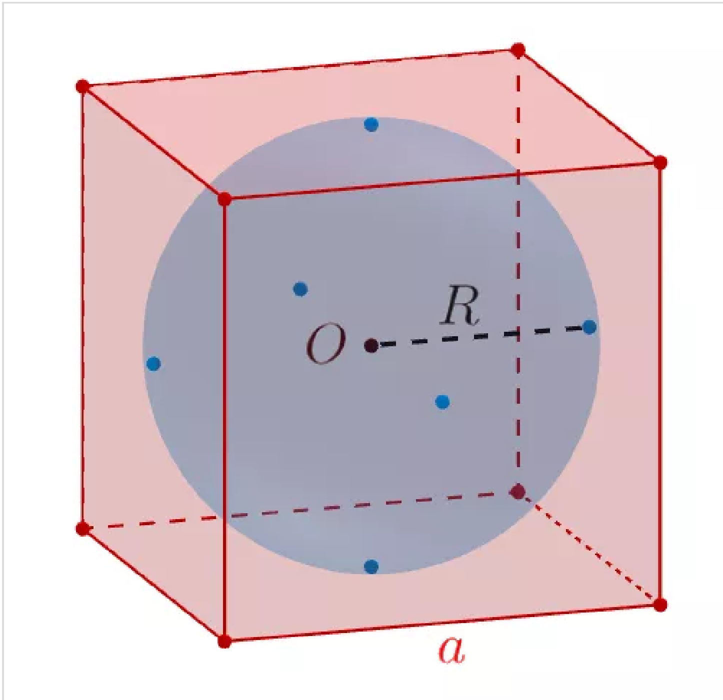
Tetraéder beírt és köréírt köre

https://www.geogebra.org/3d/umwgwybb



Feladat

Egy kocka alakú fadarabból kifaragunk egy lehető legnagyobb sugarú gömböt. A fadarab hány százaléka lesz hulladék?
https://www.geogebra.org/3d/w3fdwsgm



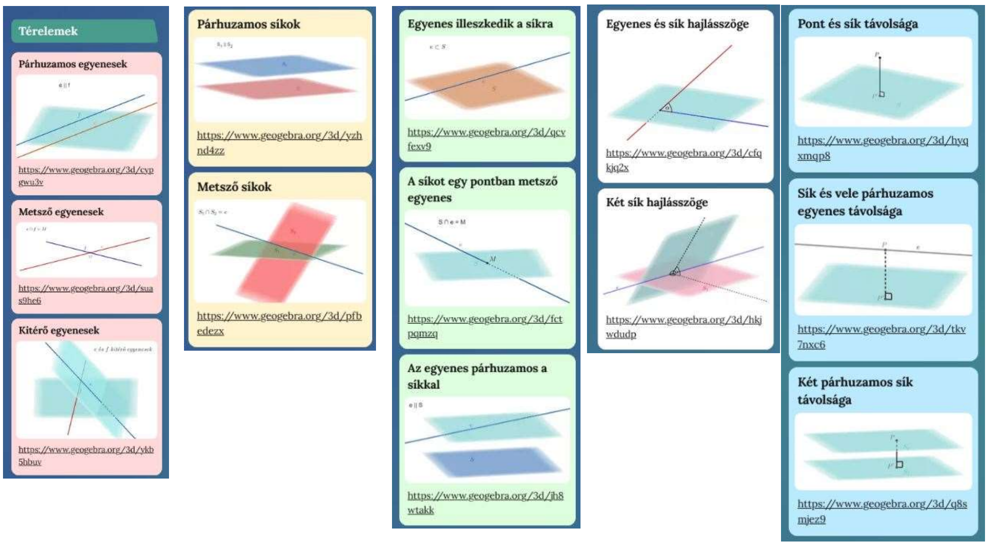
******

A segédlet bejegyzéseiben található linkek elérhetőségei:

Térelemek GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- párhuzamos egyenesek: https://www.geogebra.org/3d/cypgwu3v
- metsző egyenesek: https://www.geogebra.org/3d/suas9he6
- kitérő egyenesek: https://www.geogebra.org/3d/ykb5hbuv
- párhuzamos síkok: https://www.geogebra.org/3d/yzhnd4zz
- metsző síkok: https://www.geogebra.org/3d/pfbedezx
- egyenes illeszkedik a síkra: https://www.geogebra.org/3d/qcvfexv9
- a síkot egy pontban metsző egyenes: https://www.geogebra.org/3d/fctpqmzq
- az egyenes párhuzamos a síkkal: https://www.geogebra.org/3d/jh8wtakk
- egyenes és sík hajlásszöge: https://www.geogebra.org/3d/cfqkjq2x
- két sík hajlásszöge: https://www.geogebra.org/3d/hkjwdudp
- pont és sík távolsága: https://www.geogebra.org/3d/hyqxmqp8
- sík és vele párhuzamos egyenes távolsága: https://www.geogebra.org/3d/tkv7nxc6
- két párhuzamos sík távolsága: https://www.geogebra.org/3d/q8smjez9

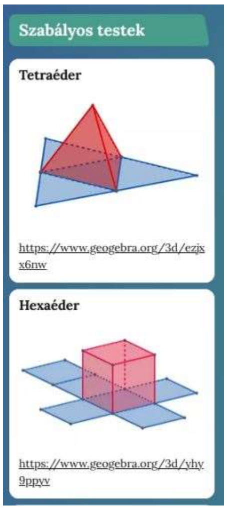


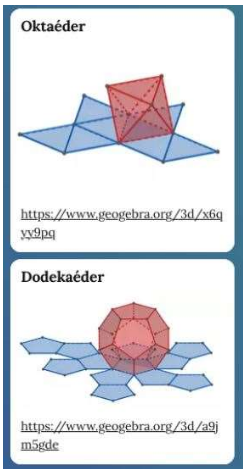
Szabályos testek GeoGebra ábrák elérhetősége:

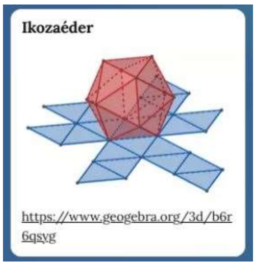
(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- tetraéder: https://www.geogebra.org/3d/ezjxx6nw
- hexaéder: https://www.geogebra.org/3d/yhy9ppyv
- oktaéder: https://www.geogebra.org/3d/x6qyy9pq

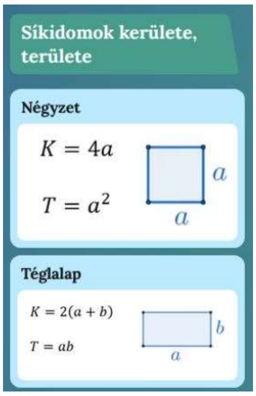
- dodekaéder: https://www.geogebra.org/3d/a9jm5gde
- ikozaéder: https://www.geogebra.org/3d/b6r6qsyg

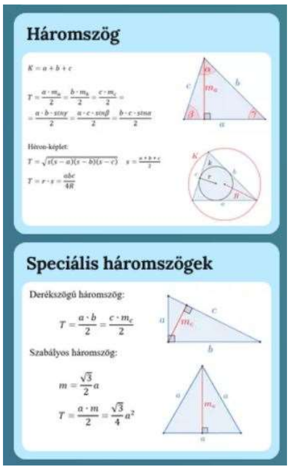


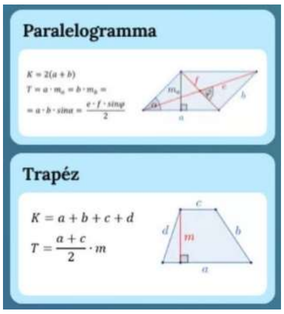


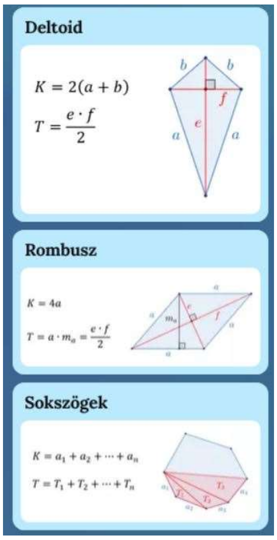


Síkidomok kerülete, területe:

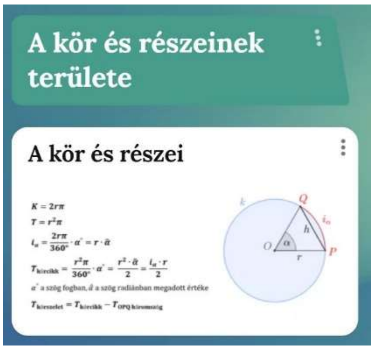








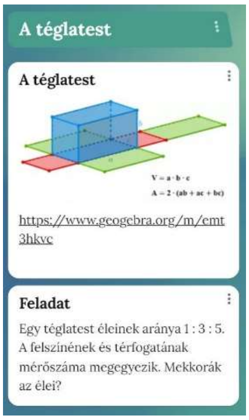
A kör és részeinek területe:



A téglatest GeoGebra ábra elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

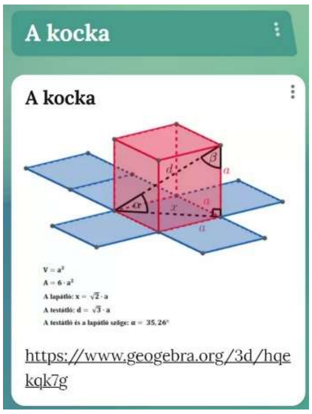
- a téglatest: https://www.geogebra.org/m/emt3hkvc

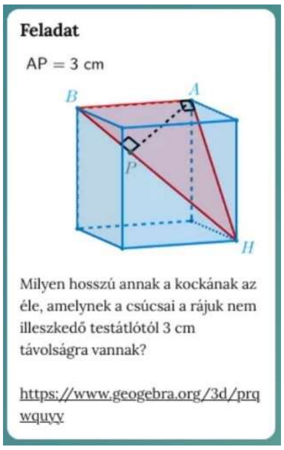


A kocka GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- a kocka: https://www.geogebra.org/3d/hqekqk7g
- feladat: https://www.geogebra.org/3d/prqwquyy

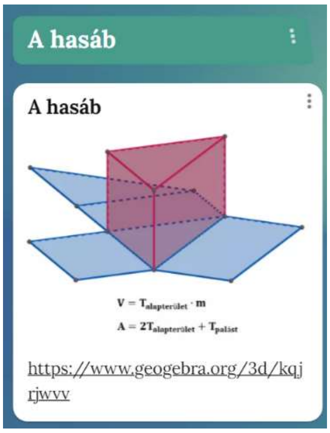


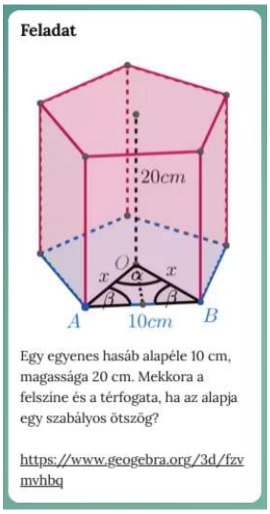


A hasáb GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- a hasáb: https://www.geogebra.org/3d/kqjrjwvv
- feladat: https://www.geogebra.org/3d/fzvmvhbq





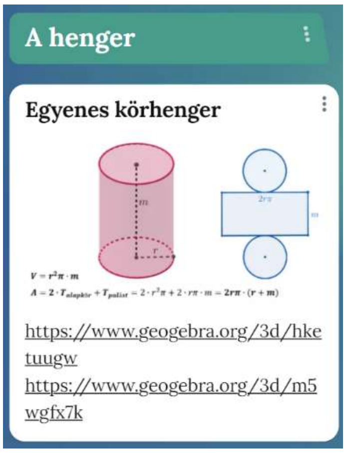
A henger GeoGebra ábrák elérhetősége:

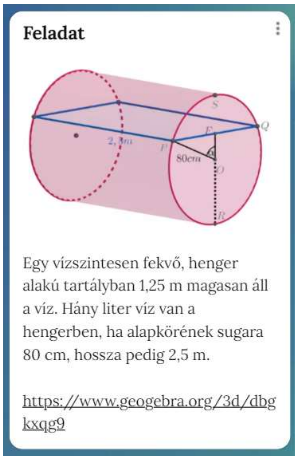
(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- egyenes körhenger:

  https://www.geogebra.org/3d/hketuugw

  https://www.geogebra.org/3d/m5wgfx7k
- feladat: https://www.geogebra.org/3d/dbgkxqg9

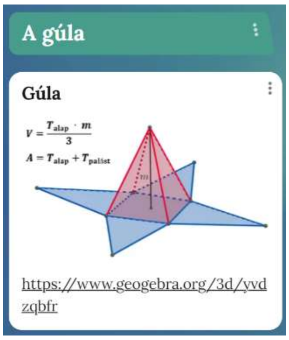


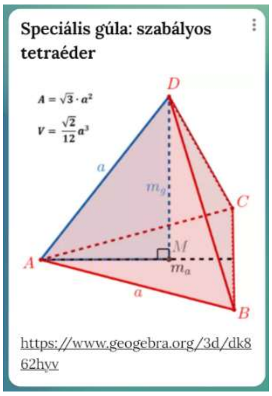


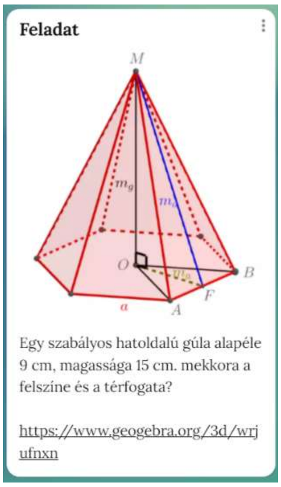
A gúla GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- gúla: https://www.geogebra.org/3d/yvdzqbfr
- speciális gúla: szabályos tetraéder: https://www.geogebra.org/3d/dk862hyv
- feladat: https://www.geogebra.org/3d/wrjufnxn



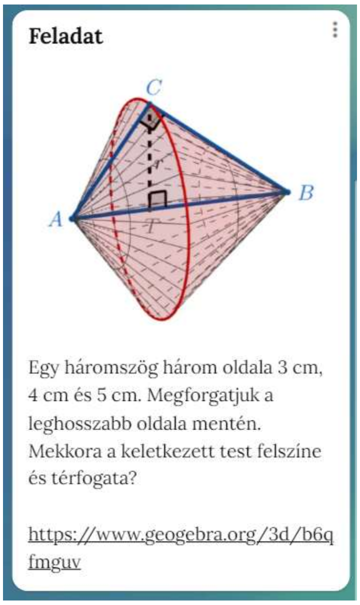




A kúp GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

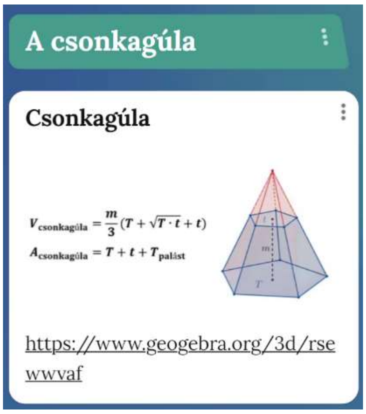
- egyenes körkúp: https://www.geogebra.org/3d/r2knrnrx
- feladat: https://www.geogebra.org/3d/b6qfmguv

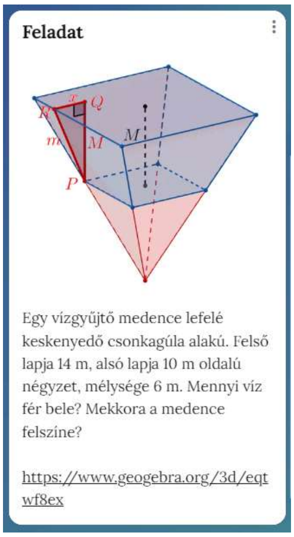


A csonkagúla GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- csonkagúla: https://www.geogebra.org/3d/rsewwvaf
- feladat: https://www.geogebra.org/3d/eqtwf8ex





A csonkakúp GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- csonkakúp: https://www.geogebra.org/3d/nfutg5u6
- feladat:

  https://www.geogebra.org/3d/vrw8cws9

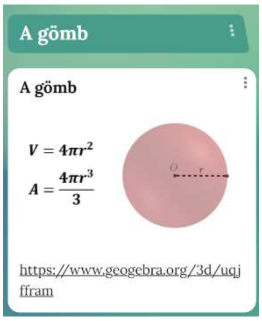
  https://www.geogebra.org/calculator/gejq4hhu

A gömb GeoGebra ábrák elérhetősége:

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

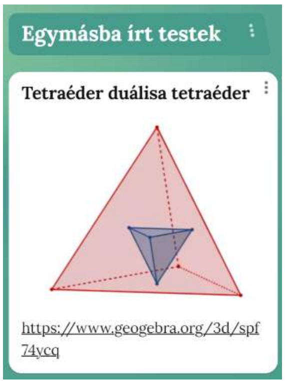
- a gömb: https://www.geogebra.org/3d/uqjffram

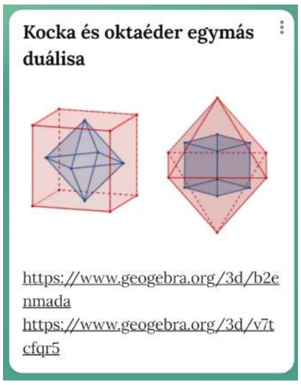
- feladat:
  https://www.geogebra.org/3d/epwhscrq
  https://www.geogebra.org/3d/b2bmpbra



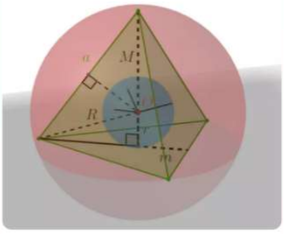
Egymásba írt testek GeoGebra ábrák elérhetősége:
(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

- tetraéder duálisa tetraéder: https://www.geogebra.org/3d/spf74ycq
- kocka és oktaéder egymás duálisa:
  https://www.geogebra.org/3d/b2enmada
  https://www.geogebra.org/3d/v7tcfqr5
- dodekaéder és ikozaéder egymás duálisa:
  https://www.geogebra.org/3d/j3ewgf3u
  https://www.geogebra.org/3d/xjrshhf7
- tetraéder beírt és köréírt köre: https://www.geogebra.org/3d/umwgwybb
- feladat: https://www.geogebra.org/3d/w3fdwsgm



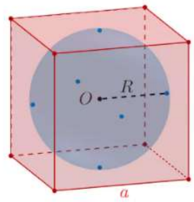


Tetraéder beírt és köréírt köre



https://www.geogebra.org/3d/umwgwybb

Feladat

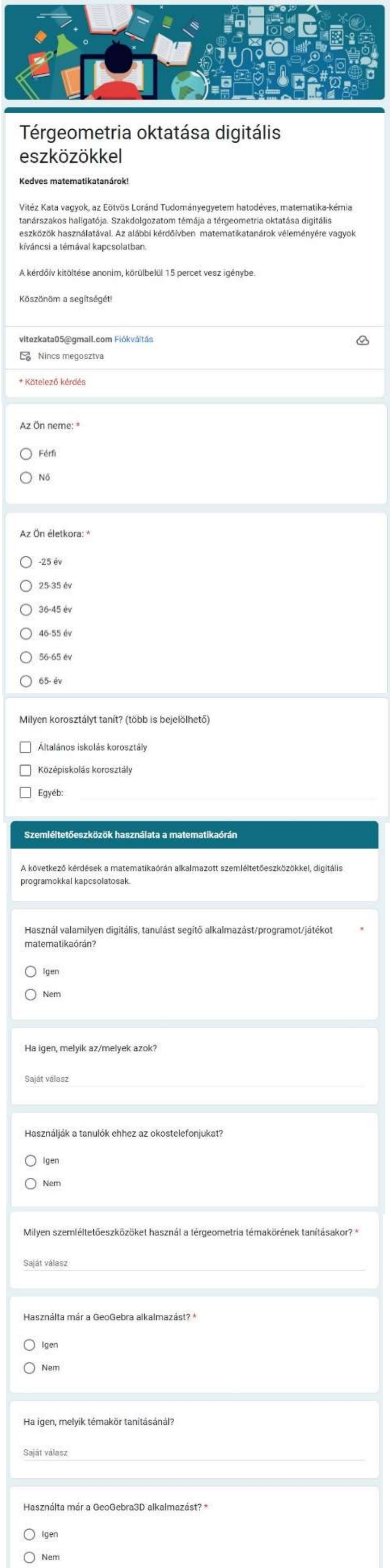


Egy kocka alakú fadarabból kifaragunk egy lehető legnagyobb sugarú gömböt. A fadarab hány százaléka lesz hulladék?
https://www.geogebra.org/3d/w3fdwsgm

2. *melléklet: Tanári kérdőív*

Elérhetősége: https://forms.gle/pv4wcetUYxDQgUzU6

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)



Térgeometria oktatása digitális eszközökkel

Kedves matematikatanárok!

Vitéz Kata vagyok, az Eötvös Loránd Tudományegyetem hatodéves, matematika-kémia tanárszakos hallgatója. Szakdolgozatom témája a térgeometria oktatása digitális eszközök használatával. Az alábbi kérdőívben matematikatanárok véleményére vagyok kíváncsi a témával kapcsolatban.

A kérdőív kitöltése anonim, körülbelül 15 percet vesz igénybe.

Köszönöm a segítségét!

vitezkata05@gmail.com Fiókváltás

Nincs megosztva

* Kötelező kérdés

Az Ön neme: *

- Férfi
- Nő

Az Ön életkora: *

- -25 év
- 25-35 év
- 36-45 év
- 46-55 év
- 56-65 év
- 65- év

Milyen korosztályt tanít? (több is bejelölhető)

- Általános iskolás korosztály
- Középiskolás korosztály
- Egyéb:

Szemléltetőeszközök használata a matematikaórán

A következő kérdések a matematikaórán alkalmazott szemléltetőeszközökkel, digitális programokkal kapcsolatosak.

Használ valamilyen digitális, tanulást segítő alkalmazást/programot/játékot matematikaórán? *

- Igen
- Nem

Ha igen, melyik az/melyek azok?

Saját válasz

Használják a tanulók ehhez az okostelefonjukat?

- Igen
- Nem

Milyen szemléltetőeszközöket használ a térgeometria témakörének tanításakor? *

Saját válasz

Használta már a GeoGebra alkalmazást? *

- Igen
- Nem

Ha igen, melyik témakör tanításánál?

Saját válasz

Használta már a GeoGebra3D alkalmazást? *

- Igen
- Nem

Ha igen, mik a tapasztalatai?

Saját válasz

Tanítási segédlet a térgeometria témaköréhez

A következő kérdések az alábbi, térgeometria témaköréhez tartozó segédanyaggal kapcsolatosak:
https://padlet.com/vitezkata05/t-rgeometria-62pqoo1kavp02zjr

Ennek célja a térgeometria tanításához használt szemléltetőeszközök és szemléltetési lehetőségek kiegészítése.

A linkre kattintva megjelenő felületen egy összefoglaló segédanyaggyűjtemény található, ami a középiskolai térgeometriaoktatás egyes fejezetei mentén halad végig.

Segítség az értelmezéshez:
A linkre kattintva megnyíló felület jobbra mozdítható a további bejegyzések eléréséhez. Az oszlopokban találhatóak a térgeometria tananyag egységei. Az egyes bejegyzésekben szerepelnek képek, illetve linkek, amelyekre kattintva megjelenik a GeoGebra3D alkalmazással készített háromdimenziós ábra, ahol az ábrák mozgathatók, körbe forgathatók. Emellett egyes oszlopokban láthatók feladatok is, amelyekhez tartozó linkek szemléltetőábrákhoz vezetnek.

Az alábbi kérdések a digitális segédlet matekórán való alkalmazására vonatkoznak.

Minél inkább igaznak érzi az állítást, annál nagyobb számot jelöljön be!

	1	2	3	4
Tapasztalataim alapján különös nehézséget okoz a tanulóknak a térbeli alakzatok elképzelése.				
Van lehetőségem a matematikaórán digitális eszközök bevonására a tanulási folyamatba.				
Relevánsnak tartom a GeoGebra3D alkalmazás térgeometria tanításakor való használatát.				
Nem igazán ismerek matekórán alkalmazható digitális alkalmazásokat.				
Szívesen használok digitális tananyagokat.				
Nehezen ismerem ki magam a digitális alkalmazások használatában.				
A GeoGebra3D alkalmazással való szemléltetés helyettesíteni tudja a fizikai szemléltetőeszközöket.				
A szemléltetés digitális módja könnyen kivitelezhető a tanórán.				
A fenti digitális segédlet felépítése és célja érthető és releváns.				
A fenti digitális segédlet alkalmas a tanulók térlátásának fejlesztésére.				
A fenti digitális segédlet megkönnyítheti a tanulók otthoni tanulását.				
A fenti digitális segédlet megkönnyítheti az térgeometriai fogalmak elképzelését és megértését.				
A fenti digitális segédlet megkönnyítheti egyes szöveges feladatok értelmezését.				
A fenti digitális segédlet könnyen kezelhető.				
A fenti digitális segédletet szívesen alkalmaznám a térgeometria tanításakor.				

Mi az, amivel kiegészítené még a fenti tanári segédletet? Mit változtatna rajta? *

Saját válasz

3. *melléklet: Tanulói kérdőív*

Elérhetősége: https://forms.gle/krDzrVpgvceWd8YD8

(Utolsó letöltés: 2023. 04. 30.)

Térgeometria tanulása digitális eszközökkel

Kedves 12. osztályos Tanulók!

Az alábbi kérdőív a középiskolai térgeometria tanulmányaiddal kapcsolatos. A kitöltés anonim, a válaszokat a szakdolgozatomban végzett vizsgálathoz használom fel. Kérlek, válaszolj az alábbi kérdésekre!

vitezkata05@gmail.com Fiókváltás

Nincs megosztva

* Kötelező kérdés

Heti hány matematikaórád van 12. osztályban? *

- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Használtok valamilyen digitális, tanulást segítő alkalmazást/programot/játékot matematikaórán? Ha igen, melyek azok? *

Saját válasz

Találkoztál már ezelőtt a GeoGebra alkalmazással? *

- Igen
- Nem

Ha igen, hol találkoztál vele? (több válaszlehetőséget is bejelölhetsz) *

- Matematikaórán használtuk.
- Külön tanárnál használtuk.
- Rátaláltam az interneten.
- Nem találkoztam vele.
- Egyéb:

Milyen témakörnél találkoztál vele? (több válaszlehetőséget is bejelölhetsz) *

- Síkgeometria
- Térgeometria
- Algebra
- Függvények ábrázolása
- Függvények jellemzése
- Nem találkoztam vele
- Egyéb:

Milyen szemléltetőeszközöket használtatok matematikaórán a térgeometria tanulásakor? Mi segítette a térbeli testek elképzelését? *

Saját válasz

Az alábbiakban pozitív állításokat látsz felsorolva. Minél inkább igaznak érzed magadra az állítást, annál nagyobb számot jelölj be! *

	1	2	3	4
Könnyűnek tartom a térgeometria témakörét.	○	○	○	○
Könnyű számomra lerajzolni egy térbeli testet.	○	○	○	○
Könnyen el tudok képzelni egy térbeli feladatot.	○	○	○	○
Szívesen használok az iskolában a tanuláshoz digitális eszközöket.	○	○	○	○
Szívesen használok az otthoni tanuláshoz digitális eszközöket.	○	○	○	○
Matematikaórán vannak olyan feladatok, amelyekhez használjuk a telefonunkat.	○	○	○	○

A következő állítások a mai óránkra és az összefoglaló segédletre vonatkoznak. Minél inkább igaznak érzed az állítást, annál nagyobb számot jelölj be! *

	1	2	3	4
Hasznosnak érzem a térgeometria összefoglalásához.	○	○	○	○
Nagyobb segítség egy kézzel fogható modell, mint a GeoGebra3D alkalmazásban látott modellezés.	○	○	○	○
Szívesen használnám a segédletet, ha találkozok egy térgeometria feladattal.	○	○	○	○
Matematikaórán felhasználhatónak tartom a segédletet.	○	○	○	○
Az otthoni tanuláshoz felhasználhatónak tartom a segédletet.	○	○	○	○
A segédletet átláthatónak, könnyen kezelhetőnek tartom.	○	○	○	○

Mi a véleményed a GeoGebra3D alkalmazásáról a térgeometria témakörében a látottak/tapasztalataid alapján? *

Saját válasz