

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

---

# Matematikai füllesztések a középiskolai fizikaoktatásban

Az analízis néhány gyakorlati alkalmazása

---

**Józsa Kornél**

Osztatlan tanárképzés

matematika tanár - fizika tanár



*Konzulens:*

**Sikolya Eszter, PhD.**

Adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. Fonálinga</b>	<b>3</b>
2.1. Középiskolai helyzet . . . . .	3
2.2. Matematikai valóság . . . . .	4
2.3. Tanári elemzés . . . . .	II
<b>3. Nehézségi gyorsulás</b>	<b>13</b>
3.1. Középiskolai helyzet . . . . .	13
3.2. Matematikai valóság . . . . .	15
3.3. Tanári elemzés . . . . .	19
<b>4. Hőtágulás</b>	<b>22</b>
4.1. Középiskolai helyzet . . . . .	22
4.2. Matematikai valóság . . . . .	27
4.3. Tanári elemzés . . . . .	30
<b>5. Summázat</b>	<b>31</b>
<b>6. Irodalomjegyzék</b>	<b>33</b>
<b>A. Runge - Kutta módszer Python kódja</b>	<b>34</b>
<b>B. Eredetiségi nyilatkozat</b>	<b>37</b>

## I. Bevezetés

*„Fourier úr úgy véli, hogy a matematika alapvető célja annak társadalmi hasznosítása és a természet jelenségeinek elmagyarázása. Azonban egy filozófusnak, mint neki, tudni illene, hogy a tudományok egyedüli célja tiszteletadás az emberi szellem előtt.”*

---

Carl Gustav Jacob Jacobi

Vizsgálatom tárgya olyan fizikai jelenségek matematikai leírása, melyeket annyira alapvetőnek tartunk, hogy a középiskolai fizikaórán alaposan tárgyaljuk őket, azonban kénytelenek vagyunk matematikai egyszerűsítéseket alkalmazni, mivel az egzakt leíráshoz nem áll rendelkezésünkre a szükséges matematikai eszköztár. A hiányzó eszközök gyakorta a differenciálszámításra, integrálszámításra, és az analízis egyéb módszereire épülnek, ezért a diákoknak egy könnyebbség, hogy nincs elvárva ez a tudás tőlük.

Azonban érdemes megvizsgálunk, miben, és hogyan egyszerűsítünk. Tanárként fel kell tudnunk mérni, mit mondjunk el a diákoknak, és milyen mélységig nyúlunk a matematika eszközeihez. Amit vizsgálok: milyen pontatlanságokat engedhetünk meg magunknak anélkül, hogy a végeredményben kapott modell túlságosan messze kerülne a leírni kívánt valóságtól. Ilyen kompromisszumokkal a fizika még tárgyalható, leírható középiskolás szinten a matematikaoktatás jelentős kibővítése nélkül.

Vizsgálni fogom a matematikai, vagy fonálinga lengését, a nehézségi gyorsulást, és a hőtágulás jelenségét.

## 2. Fonálinga

A fonálinga vagy matematikai inga a legegyszerűbb inga: egy nyújthatatlannak definiált szálon lógó tömeg, melyet lengésbe hozunk nehézségi erőterben. Középiskolában azért kedveljük nagyon, azért hasznos eszköz, mert nagyon egyszerűen és olcsón elkészíthető akár tantermi körülmények között, akár otthoni diák-kísérletek során. Dolgozatomban a lengés idejét leíró matematikai formulát fogom alaposabban vizsgálni.

### 2.1. Középiskolai helyzet

Középiskolában a periódusidőt egyszerűen a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.1.1.)$$

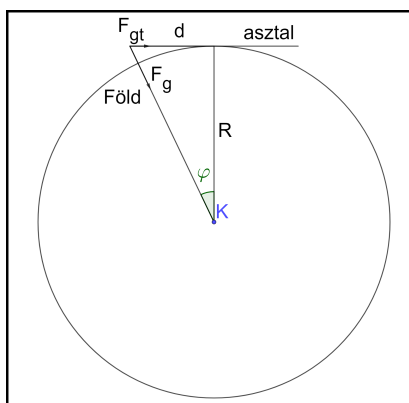
képlettel írjuk le, ahol  $l$  a fonál hossza, és  $g$  a nehézségi gyorsulás értéke. Ezt a képletet alkalmazzuk például a következő feladat megoldása közben is:

[8] 23. oldal:"**89. (1384.)** A vízszintes, sík asztallapra helyezett golyó elvileg rezgőmozgást végezhet, hiszen a Föld középpontjához legközelebb eső pontban lehet csak egyensúlyban. Számítsuk ki a rezgésidőt!"

#### Megoldás:

Értelmezés: A vízszintesen, a feladat megoldása során, a Föld kérgére érintő irányú síkot értem, mert csak ilyen értelmezésben van értelme a Föld középpontjához legközelebb lévő pontról beszélni. Emellett a feladat megoldása során a golyó és az asztallap közötti súrlódást elhanyagolom.

#### Ábra:



I. Ábra. A **89. (1384.)** feladat vázlata

Számolás: Ahogy az 1 ábrán látható, a golyóra ható erő a sugárirányú

$$F_g = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_F}{R^2},$$

Newton féle nehézségi erő [12] 137. oldal alapján. Itt  $\gamma$  a gravitációs állandó,  $m$  a golyó tömege,  $M_F$  a Föld tömege.  $F_g$  erőből a golyót az asztallappal párhuzamos komponens ( $F_{g, \tan}$ ) gyorsítja. Az ilyen irányú gyorsulásnak ( $a_{\tan}$ ) a nagysága:

$$\begin{aligned} F_{g, \tan} &= F_g \cdot \sin(\varphi(t)) \\ m \cdot a_{\tan} &= \gamma \cdot \frac{m \cdot M_F}{R^2} \cdot \sin(\varphi(t)) \\ a_{\tan} &= \gamma \cdot \frac{M_F}{R^2} \cdot \sin(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) &= \frac{d(t)}{\sqrt{R^2 + d(t)^2}} \approx \frac{d(t)}{R} \end{aligned} \quad (2.1.2.)$$

$$\begin{aligned} a_{\tan} &= \gamma \cdot \frac{M_F}{R^2} \cdot \frac{d(t)}{R} \\ a_{\tan} &= \frac{\gamma \cdot \frac{M_F}{R^2}}{R} \cdot d(t) \end{aligned} \quad (2.1.3.)$$

A levezetés közben a 2.1.2. sorban elvégzett közelítés indokolt, mivel  $1 \text{ m} \approx d \ll R = 6371 \text{ km}$ . Dolgoztomban nem részletezem ezt alaposabban, de ez is egy általánosan használt közelítés a középiskolai fizikában, a  $\text{tg}(x) = \sin(x)$ , matematikai háttérét ennek is a később mélyebben tárgyalt Taylor-sor adja.

2.1.3. alapján a golyó úgy viselkedik, mintha a test egy  $R$  hosszúságú fonálingán lengene, vagyis a rezgés-ideje

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad l = R \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{R}{\gamma \cdot \frac{M_F}{R^2}}} = \underline{\underline{5070, 215 \text{ s}}} \end{aligned}$$

## 2.2. Matematikai valóság

A 2.1.1. képlet levezetése közben a  $\sin(x) = x$  egyszerűsítésre támaszkodunk, így ez a képlet kis szögek esetén alig észrevehetően, nagy szögek esetén azonban jelentősen eltér a valóságtól. A közelítés matematikai

alapját az adja, hogy a  $\sin(x)$  0 körüli Taylor-sora az alábbi:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

és ennek az első tagja az  $x$ . A Taylor-sor, vagy Taylor-formula egy alkalmazott természettudományokban gyakran használt közelítésre lehetőséget biztosító matematikai eszköz. A  $\sin(x)$  függvény Taylor-sora pedig előáll a [4] 284. oldalának II.8-as tétele alapján:

**Tétel:** Ha  $f$  egy tetszőlegesen sokszor differenciálható függvény  $I$  intervallumon,

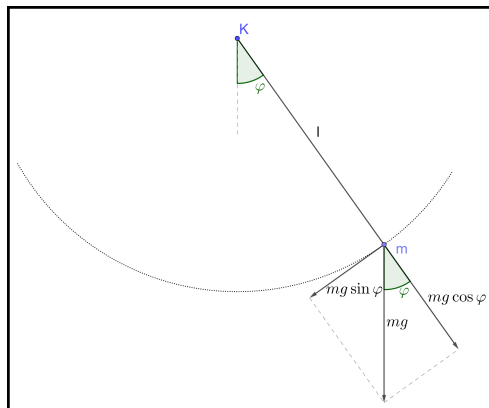
és  $\exists K \in \mathbb{R}$ , amire  $(|f^{(n)}(x)| \leq K) \forall x \in I; \forall n \in \mathbb{N}$ ,

akkor

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \forall a, x \in I. \quad (2.2.1.)$$

Az így előálló sorösszeg az  $f(x)$  függvény Taylor-sora. A  $\sin(x)$  függvény tetszőlegesen sokszor differenciálható, a teljes valós számok halmazán értelmezett, és a  $K = 2$  jó felső korlát a tétel alkalmazásához, így a függvény Taylor-sorba fejthető. Az itt említett közelítés tehát pontosítható lenne a Taylor-sor további tagjainak hozzávételével, ezt dolgozatomban később szintén vizsgálni fogom.

Az inga mozgását le tudjuk írni egy differenciálegyenlettel, melynek a megoldását meg lehet valósítani analitikai eszközökkel, vagy lehet numerikusan közelíteni.



2. Ábra. Fonálinga

Az  $m$  tömegű  $l$  hosszúságú, kezdősebesség nélkül elindított inga mozgásegyenlete így áll elő:

$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$F_{tan} = m \cdot a_{tan} ,$$

ahol az első sor Newton II. egyenlete [12] 127-130. oldalak alapján. A második sor, ahogy az a 2 ábrán látszik, a mozgás érintő irányú komponense.

$$-F_g \cdot \sin(\varphi(t)) = m \cdot l \cdot \beta(t)$$

$$-m \cdot g \cdot \sin(\varphi(t)) = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) ,$$

Mivel  $\beta(t)$ , a szöggyorsulás - idő függvény, a  $\varphi(t)$  függvény második időderiváltja. Vagyis az inga szögkitérés - idő függvényét leíró differenciálegyenlet az alábbi:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t))$$

Ez az egyenlet analitikai eszközökkel megoldható, ám a megoldás menete és eredménye is túlmutat komplexitásban a dolgozatomon, az eredmény az irodalomban jól dokumentált, az interneten elérhető [1] és [14] források alapján:

$$\varphi(t) = 2am \left( \frac{\sqrt{2g + lc_1}(t + c_2)}{2\sqrt{l}}, \frac{4g}{2g + lc_1} \right) ,$$

ahol "am" a Jacobi - féle amplitúdó függvény. Ebből sajnos nem tudunk új periódusidő összefüggést nyerni.

Ehelyett a függvény helyett közelíthetünk:

- Taylor-polinommal nagyobb fokszámig
- numerikusan, Runge - Kutta módszerrel

### **Közelítés Taylor-polinommal**

Ahogy azt már korábban írtam, a fonálinga kitérés - idő függvényét az alábbi differenciálegyenlet adja:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t))$$

Emelett a  $\sin(x)$  Taylor-sorát is felírtam már:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ilyen módon a differenciálegyenlet felírható ilyen alakban is:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\varphi(t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ebből az első taggal való közelítéssel kapjuk a korábban, 2.1.1. egyenletben már említett  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  periódusidőt.

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t)), \quad \text{ahol } \sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t) \\ \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{g}{l} \varphi(t) \end{aligned} \tag{2.2.2.}$$

A 2.2.2. típusú mozgásegyenlettel rendelkező mozgásokat *harmonikus rezgőmozgásoknak* nevezzük a fizikában [12] 146. oldal alapján. Ott azt találjuk, hogy a mozgásokat teljes mértékben leírhatjuk a mozgást 2 jellemzővel, ezeket  $D$ -vel, és  $m$ -mel jelöljük,  $D$  a direkción-, vagy rugóállandó,  $m$  pedig a test tömege. A harmonikus rezgőmozgásra legjellemzőbb példa egy rugóra akasztott, majd nyugalmi helyzetéből kitérített test mozgása.

Matematikailag a keresett függvény második deriváltja arányos a függvény ellentettjével, ilyenek a  $\sin$ , és a  $\cos$  függvények. Ezek szerint  $\varphi(t)$  ennek a két függvénynek valamilyen lineárkombinációja lesz, és más megoldást nem kell keresnünk az unicitás tétel miatt, [11] 2.4. fejezete, 20. Tétel.

$$\varphi(t) \sim c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t),$$

azonban azt is tudjuk, hogy a második derivált és a függvény közötti arányossági tényező a  $\frac{g}{l}$ , ami a kétszer deriváláskor kerül oda, így

$$\varphi(t) = c_3 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_4 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Ez a két tagú összeg szebb, fizikailag jobban átlátható jelentéstartalmú alakra hozható:

$$c_3 := \varphi_0 \cos \delta_0, \quad \text{és } c_4 := \varphi_0 \sin \delta_0$$



ekkor

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \sqrt{c_3^2 + c_4^2}; \text{ és } \delta_0 = \arctg\left(\frac{c_4}{c_3}\right) \\ \varphi(t) &= \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta_0\right)\end{aligned}\quad (2.2.3.)$$

Itt  $\varphi_0$  fizikailag a fonálinga maximális kitérésének mértéke, az *amplitúdója*, matematikailag a  $\varphi(t)$  maximuma,  $\delta_0 \in [0, \pi]$  pedig az úgynevezett *fázisszög*, az inga helye a  $t = 0$  időpillanatban. Mivel én a kezdősebesség nélküli ingával foglalkoztam, a fázisszög biztosan  $\delta_0 = 0$ .

Ennek a 2.2.3. megoldásnak a periódusa valóban a korábban már többször leírt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

mivel a  $\sin(t)$  függvény periódusa  $2\pi$ , és az argumentumban lévő változó együtthatójának reciprokszorosára (jelen esetben  $\sqrt{\frac{l}{g}}$ ) változik a periódus.

Ha a közelítést nem az Taylor-sor első tagjával tesszük meg, a megoldásunk is közelebb lehetne a valósághoz. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha 1 helyett 2 taggal közelítjük  $\sin$  függvényt!

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot \frac{\varphi(t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \approx -\frac{g}{l} \cdot \left(\varphi(t) - \frac{\varphi(t)^3}{3!}\right)$$

tehát a megoldandó differenciálegyenlet egy másodrendű, függvényben harmadfokú differenciálegyenlet:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \left(\varphi(t) - \frac{\varphi(t)^3}{3!}\right)$$

mindkét oldalt  $\dot{\varphi}(t)$ -vel megszorozva

$$\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\dot{\varphi}(t) \cdot \left(\varphi(t) - \frac{\varphi(t)^3}{3!}\right)$$

ezeket idő szerint integrálva elsőrendűre redukáljuk az egyenletünket:

$$\begin{aligned}\int \dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) dt &= -\frac{g}{l} \int \dot{\varphi}(t) \cdot \left(\varphi(t) - \frac{\varphi(t)^3}{3!}\right) dt \\ \frac{1}{2} (\dot{\varphi}(t))^2 &= -\frac{g}{l} \cdot \left(-c_1 + \frac{\varphi(t)^2}{2!} - \frac{\varphi(t)^4}{4!}\right) \\ \dot{\varphi}(t) &= \pm \sqrt{-\frac{g}{l} \cdot \left(-c_1 + \frac{\varphi(t)^2}{2!} - \frac{\varphi(t)^4}{4!}\right)}\end{aligned}$$

Azonban innen a tanulmányaimon túlmutat a megoldás menete, a kapott függvény:

$$\varphi(t) = -\frac{\sqrt{2}\operatorname{sn}(u|v)}{\sqrt{3-\frac{1}{\sqrt{g-3c_1l}}}}, \quad v := \frac{3\sqrt{g}-\sqrt{9g-3c_1l}}{3\sqrt{g}+\sqrt{9g-3c_1l}}$$

$$u := \frac{\sqrt{\sqrt{3}\sqrt{g}t^2\sqrt{3g-c_1l}+2\sqrt{3}c_2\sqrt{g}t\sqrt{3g-c_1l}+\sqrt{3}c_2^2\sqrt{g}\sqrt{3g-c_1l}+3gt^2+6c_2gt+3c_2^2g}}{\sqrt{6}\sqrt{l}}$$

Itt az "sn" egy Jacobi-féle elliptikus integrál, a [9] forrás alapján. A 2 taggal való közelítés tehát *lényegesen* összetettebb eredményre jutott, mint az 1 taggal való. A rokon tulajdonságuk, hogy itt is 2 paraméter kerül az egyenletbe a megoldás során. Ezen matematikailag nem lepődünk meg, mivel a differenciálegyenletünk másodrendű, így 2 dimenziós függvényterre számítunk megoldáshalmazként. Viszont fizikailag a mozgásunk továbbra is leírható 2 jellemzővel, ami szerencsés a permanenciaelv szempontjából. Sajnos az eredményből még a keresett periódusidőt sem tudom meghatározni. Érdemesebb volna átláthatóbb módszer után nézni.

## Numerikus módszerek

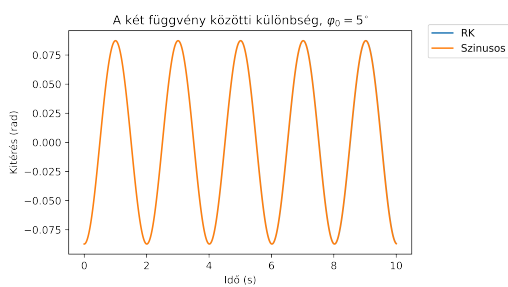
A numerikus módszerek nem csak differenciálegyenletek megoldása során kerülhetnek elő. A napi használatú számológépeink irracionális számok (például  $\pi$ ,  $e$ ) helyett biztosan véges pontosságú tizedestörtekkel számolnak, ez is egyfajta numerikus közelítés.  $\sqrt{2}$  értéke tetszőleges pontossággal meghatározható az alábbi kifejezés kitartó számolásával:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

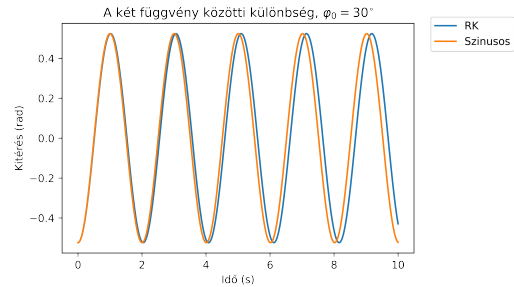
A differenciálegyenletek világában gyakorta találjuk magunkat numerikus közelítésekre hagyatkozva. A numerikus közelítések lényege, hogy a rendelkezésünkre álló számítási kapacitásra hagyatkozunk az analízis mellett - helyett, és ezzel egy adott feladathoz elégséges pontosságú eredményhez jutunk, az egzakt pontosság oltárán. Elcseréljük az analitikus megoldásunkat a körülöttünk lévő technikai eszközök képességeire.

A Runge - Kutta módszer során egy differenciálegyenlet megoldását közelítjük a kiindulási állapotból időlépésenként. Egy időlépésen belül kiszámítjuk az elején, a végén, és köztük is néhány helyen a keresett

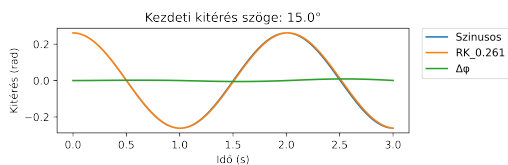
függvény deriváltjának értékét. Ezeket súlyozva átlagoljuk, és így kapjuk a közelítésünket. A szakdolgozatomban a legelterjedtebb, negyedrendű Runge - Kutta módszerrel dolgoztam, a Python kódom megtalálható dolgozatom A Mellékletében. Az algoritmus abban az értelemben negyedrendű, hogy ha az időlépés hosszát  $\frac{1}{\lambda}$ -szorosára változtatjuk, akkor a közelítésünk pontossága  $\lambda^4$ -szeresre nő. Emellett a rend száma speciálisan negyedrendig azzal is egybe esik, hány helyen számolom ki egy időlépésen belül a közelítést. A szakdolgozatom céljait figyelembe véve az így előállt adatok effektíve a valóságot írják le. A módszerrel produkált eredményekről készült grafikonok a 3 ábrámon láthatóak.



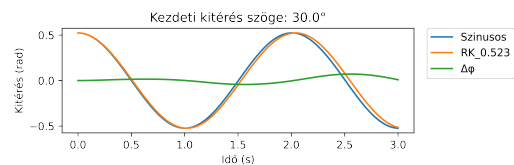
(a) Eltérés  $\frac{\pi}{36}$  kezdeti szög esetén,  $t = 10s$



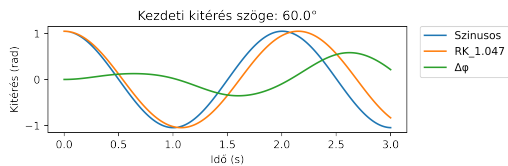
(b) Eltérés  $\frac{\pi}{6}$  kezdeti szög esetén,  $t = 10s$



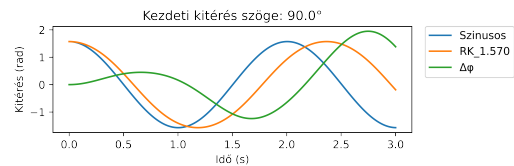
(c) Eltérés  $\frac{\pi}{12}$  kezdeti szög esetén,  $t = 3s$



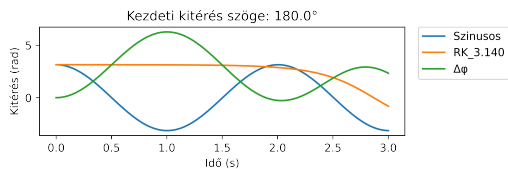
(d) Eltérés  $\frac{\pi}{6}$  kezdeti szög esetén,  $t = 3s$



(e) Eltérés  $\frac{\pi}{3}$  kezdeti szög esetén,  $t = 3s$

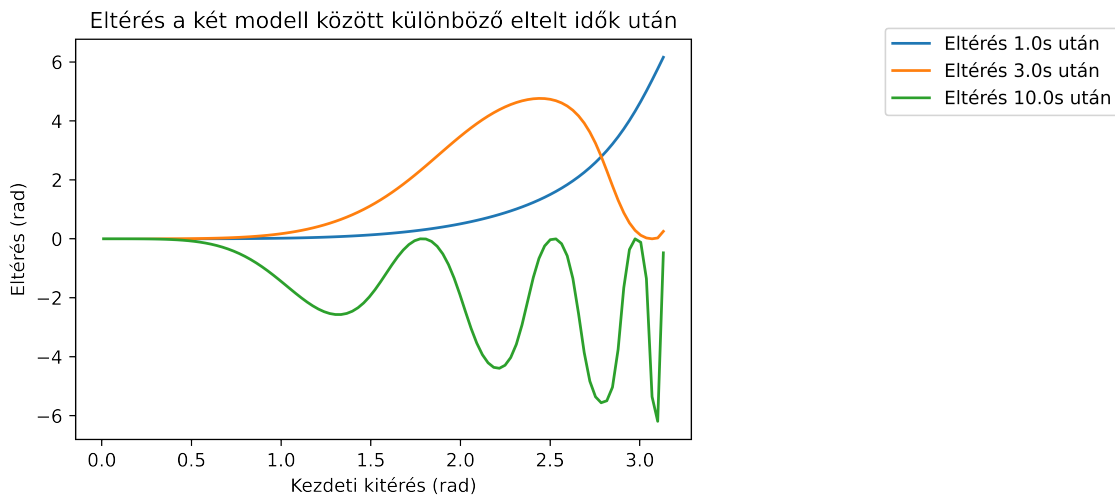


(f) Eltérés  $\frac{\pi}{2}$  kezdeti szög esetén,  $t = 3s$



(g) Eltérés  $\pi$  kezdeti szög esetén,  $t = 3s$

3. Ábra. Eltérések a Runge - Kutta numerikus közelítés, és a 2.1.1. által előrejelzett között



4. Ábra. Eltérés a két modell között, különböző kezdőszögek, és eltelt idő esetén

A 3a ábrám nem hibás, az látszik rajta, mennyire pontos a 2.1.1. előrejelzés kis szögek esetén. Itt a kezdeti kitérés  $5^\circ$ , és a szinuszos és Runge - Kutta grafikonok takarásban vannak. A 3b ábrán viszont már látszik, hogy egy teljesen átlagos kitérés,  $30^\circ$  esetén mekkora eltérés lesz a 2.1.1. és a Runge - Kutta között.

A 3c - 3g ábrákat megvizsgálva láthatjuk, hogy ahogy növekszik a kezdeti kitérés szöge, elképesztően megnövekszik  $\Delta\varphi$ . Kiemelem, hogy a felírt differenciálegyenletünk felteszi, hogy a pendulumot csak érintő irányba mozdul el, tehát nem eshet a felfüggesztés irányába. Természetesen az utolsó, 3g ábrán látható helyzet a tanteremben csak akkor fordulhatna elő, ha a fonalunk nem csak nyújthatatlan, hanem tökéletesen merev is - mondjuk egy hurkapálca, ha nem törik el. A pálca tömege viszont ismét változtatna a mozgást leíró differenciálegyenleten, tömeggel rendelkező felfüggesztés esetében már nem matematikai, hanem *fizikai ingáról* beszélünk. Emellett matematika szempontból itt nem a  $\pi$  radiánnyi kezdeti kitérés van modellezve, hanem a  $\pi - 0.001$ -nyi, mivel matematikailag - és fizikailag is - a függőlegesen felállított inga egyensúlyban van, nem kezd el lengni, amíg valamilyen perturbáció nem éri azt.

### 2.3. Tanári elemzés

A középiskolai levezetés során, ahogy az látható egy középiskolás könyvben, a [7] 27. oldalán is kiemeljük, hogy csak kis szögekre helyes a végeredmény. Azt, hogy kis szögekre a középiskolában tanított képlet pontos, láttuk igazolódni a 3a ábrán. A nagyobb szögekre az eltérések a 4 ábrán láthatóak.

Az egyéb megoldások során sok problémába ütközünk:

- a pontos analitikus megoldás, ahogy a [1] forrás alapján láttuk, elliptikus integrálra vezet. Az elliptikus integrálok tanítása még az egyetemi matematika anyagot is meghaladja, legalábbis középiskolai tanáris hallgatók számára biztosan. Legjobb tudomásom szerint nem foglalkoznak vele behatóbban sem matematikus alapképzésen, sem a különböző mesterképzések nagy részén.
- a sin függvényt, ha Taylor-sora alapján már csak 2 taggal közelítjük, a megoldás ismét elliptikus integrálokra vezet, ráadásul még közelítenünk is kellett az eredmény eléréséhez, így ez a módszer, ez az út meglátásom szerint hanyagolandó.
- az általam numerikus módszerrel meghatározott különbségek nem lépnek fel gimnáziumi körülmények között, vagy elhanyagolhatóak, mert a kezdeti kitéréseket apró szögekre korlátozzuk ( $\varphi_0 < 10^\circ$ ), vagy mert a diákok által a rendszerbe vitt mérési hibák (rossz reakcióidő, pontatlan stopper, nem kellő mennyiségű periódus mérése, ...) jelentősen nagyobbak.

A téma elején bemutatott feladatban a kitérés szöge becsülhető a szöveg alapján:  $\varphi_0 \approx \arctg\left(\frac{1m}{6371km}\right) = 1,570 \cdot 10^{-7} rad = 0,03238''$  (szögmásodperc). Ez alapján a közelítés nem változtatná meg a számolás végén kapott értéket.

Összességében a fonálinga lengésidejének képletét lehetőségeinkhez mérten pontosan mutatjuk be a diákoknak. Érdekesnek tartom azonban hangsúlyozni azt, hogy milyen közelítések esetén alkalmas a modellünk a valóság előrejelzésére. Ezen felül egy szakos, fakultációs osztálynak vagy szakkörön be lehet mutatni esetleg egy szimulációval, vagy merev, nagyjából súlytalan rudas demonstrációval az eltérés mértékét nagyobb szögek esetén. Jó tanulság lehet ez, amivel tapasztalatot szerezhetnek a valóság leírásának összetettségében.

### 3. Nehézségi gyorsulás

A legáltalánosabban megtapasztalt fizikai jelenség a gravitáció. A Földön ha elejtünk egy tárgyat, arra nehézségi erő hat, és ez az elejtett tárgyat gyorsítja. Épp ezért a középiskolában és egyetemen is alapvető természeti törvényként kezeljük, és az elsők között foglalkozunk vele.

#### 3.1. Középiskolai helyzet

Esés közben a Földön a testre ható erők vizsgálatom tárgya, a nehézségi erő, és - amíg a légkör tart - a levegő által kifejtett közegellenállás. Ezek közül dolgozatomban a közegellenállást elhanyagolom. Tipikusan a közegellenállás figyelembevétele nélküli, kizárólag a nehézségi erő hatására történő esést szabadesésnek szoktuk hívni.

Két egymástól  $r$  távolságra lévő test ( $m_1; m_2$ ) közötti nehézségi erő képlete a [12] könyv 137. oldala alapján a Newtoni (klasszikus) mechanikában:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (3.1.1.)$$

Itt  $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$  a gravitációs állandó. 3.1.1. egyenletből középiskolában a nehézségi gyorsulást Newton II. törvényének segítségével kapjuk.

$$\begin{aligned} \Sigma F &= m \cdot a \\ F_g &= m \cdot a \\ \gamma \frac{m \cdot M_F}{r^2} &= m \cdot a \\ \gamma \frac{M_F}{R^2} &= a, \end{aligned}$$

ahol  $M_F$  a Föld tömege, és  $R$  a Föld sugara.

$$\begin{aligned} \gamma \frac{M_F}{r^2} &=: g \quad \text{Ez a szabadon eső test gyorsulása.} \quad (3.1.2.) \\ g &= \gamma \frac{M_F}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24} kg}{(6,371 \cdot 10^6 m)^2} \approx 9,82 \frac{m}{s^2}, \end{aligned}$$

vagyis

$$g \approx 9,82 \frac{m}{s^2}.$$

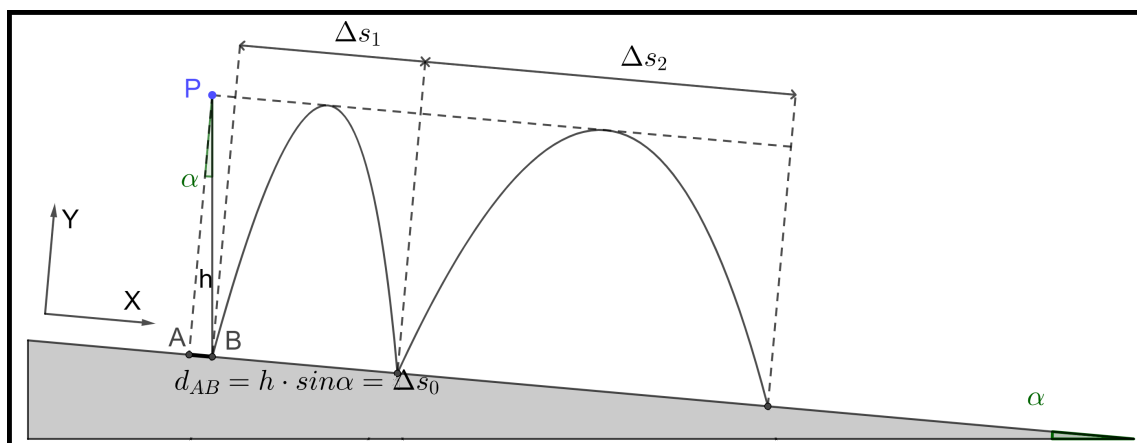
A magasságfüggetlen  $g$ -t alkalmazzuk például az alábbi feladat megoldása közben is.

[3] 18. oldal: "F. 19. Egy hosszú, a vízszinteshez képest  $\alpha$  hajlásszögű lejtőre bizonyos magasságból ráejtünk egy kicsiny, rugalmas labdát. Milyen szabályszerűséget találhatunk a labda egymást követő pattanási helyeinek távolsága között? (Az ütközéseket tekintjük tökéletesen rugalmasnak, és a közegellenállást hanyagoljuk el!)"

**Megoldás:** A megoldásom gondolatmenete a [3] 188. oldalán található veszi alapul.

**Értelmezés:** A feladatot legegyszerűbben úgy lehet elképzelni, mintha egy gumilabdát ejtenénk le a lépcsőn, azzal a nagyon lényeges különbséggel, hogy a lépcső fokaival ellentétben a lejtő nem vízszintes, és a visszaverődés és a becsapódás szöge meg fog egyezni. Emellett a feladat útmutatásai szerint elhanyagolt közegellenállás mellett nem foglalkozom azzal sem, hogy a labda elkezd-e forogni a saját tömegközéppontja körül.

Ábra:



5. Ábra. A F. 19. feladatban leírt helyzet

**Számolás:** Az ábrán látható, hogy a koordinátarendszeremet úgy veszem fel, hogy az  $X$  tengely párhuzamos legyen a lejtővel, az  $Y$  pedig merőleges rá. Ennek oka az, hogy az így felvett koordinátarendszerben vizsgálódva úgy látszódik, mintha a labdának  $a_m = \cos(\alpha) \cdot g$  nagyságú lenne a lejtőre merőleges irányú gyorsulása, emellett pedig van neki egy lejtővel párhuzamos irányú,  $a_p = \sin(\alpha) \cdot g$  nagyságú gyorsulása is.

A leejtett labda  $\Delta t$  idő alatt éri el a lejtőt, ennek meghatározása nem szükséges a feladat megoldása érdekében. Ezen idő alatt a lejtővel párhuzamos elmozdulása a lejtőre merőleges vetületének ( $A$  pont), és a

függőleges vetületének ( $B$  pont) távolsága:

$$d_{AB} = b \cdot \sin \alpha$$

Az első pattanástól kezdve minden pattanás között  $2 \cdot \Delta t$  idő telik el, mivel  $\Delta t$  ideig emelkedik, majd ugyanennyi ideig esik a labda az energiamegmaradás miatt. Ez azt jelenti, hogy a labda akkor pattan, mikor az elengedéstől kezdve a  $\Delta t$  időtartam páratlanszor telt el:  $t_1 = \Delta t, t_2 = 3\Delta t, t_3 = 5\Delta t, \dots, t_i = (2i - 1) \cdot \Delta t$ .

A labda, ahogy azt már leírtam korábban,  $Y$  irányba  $a_p = g \cdot \sin \alpha$  nagyságú gyorsulással fog gyorsulni. A  $2 \cdot \Delta t$  időtartamok alatt így a négyzetes úttörvény alapján meghatározhatók.

$$s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2,$$

ahol  $v_0$  a test kezdősebessége, jelen esetben  $v_0 = 0$ , tehát az  $i$ . másodpercig a lejtővel párhuzamosan megtett  $s_i$  út:

$$s_i = \frac{a}{2} \cdot \Delta^2 t_i$$

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$$

$$\Delta s_i = [(2i + 1)^2 - (2i - 1)^2] \cdot b \sin \alpha$$

$$\Delta s_i = 8i \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Vagyis a pattanások helye a  $B$  ponttól  $8, 16, \dots$ -szor  $b \cdot \sin \alpha$ -nként vannak.

### 3.2. Matematikai valóság

Azonban a 3.1.2. egyenletben a bal oldal láthatóan függ a két tömeg távolságától, vagyis van jelentősége a test felszín feletti magasságának is. Ennek ellenére a középiskolában egyáltalán nem, az egyetemen pedig csak érintőlegesen foglalkozunk ezzel a távolságfüggéssel.

$$g(r) = \frac{\gamma \cdot M_F}{r^2}$$

A nehézségi gyorsulás távolságfüggése hatással kell legyen a nehézségi gyorsulásban érintett feladatok megoldásaira. 3.1.2. mentén a nehézségi gyorsulás forrása a tömegvonzás. A gyorsulás miatt kialakuló sebességváltozás az energiamegmaradás miatt, [12] alapján, valamilyen egyéb energiát kell, hogy mozgási energiává



alakítson. A mozgási energia megváltozása, szintén [12] alapján:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2),$$

ahol  $m$  a mozgó test tömege,  $v_1$ ,  $v_2$  pedig a sebességei a vizsgált pillanatokban. A munkatétel alapján a gyorsulást kialakító nehézségi erő munkája:

$$\sum W = \sum_i F_i \Delta s_i$$

a mozgó test pályáját  $\infty$  sok elemre bontva a szumma integrállá lesz:

$$W = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$W_g = \int \mathbf{F}_g(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$\mathbf{F}_g(\mathbf{r})$  pedig előáll 3.1.1. kiegészítésével, miszerint az erővektor mindig a két tömegközéppontot összekötő  $\mathbf{r}$ -ral egyirányú, az  $m_1$ -re ható erő  $m_2$  irányába, és vice versa, tehát:

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$W_g = \int -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}$$

$$W_g = -\gamma m_1 m_2 \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{r}$$

és mivel a vektormező gömbszimmetrikus, így az integrál csak a távolságoktól függ, az irányoktól nem,

$$V(\mathbf{r}) := -\gamma m_2 \frac{1}{r} \tag{3.2.1.}$$

Itt a negatív előjel fizikai jelentése, hogy a tömeg kötésben van ebben a térben, ezért a potenciálja negatív, rajta munkát kell végezni, hogy szabad legyen. Ellenőrzésképpen az előző sort  $m_1$ -el megszorozva, deriválva

$$(m_1 \cdot V(\mathbf{r}))' = \gamma m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$$

ami pont a 3.1.1.. Ha tehát egy  $m_1$  tömegű test  $A$  pontból  $B$  pontba mozog a térben, akkor a nehézségi erő által rajta végzett munka

$$W_{A \rightarrow B} = m_1 \cdot (V(B) - V(A))$$

Ezek szerint a nehézségi erőterben a vonalintegrál pályafüggetlen, a munka csak a kezdeti és a végponttól függ. Az ilyen tereket [5] 501-502. oldala alapján konzervatívnak nevezzük, a tér primitívfüggvényét potenciálnak. [2] 110. oldala alapján az ilyen alakú potenciálokat "szokás Newton-potenciálnak *nevezni*".

A  $V(\mathbf{r})$  parciális deriváltjaiból álló vektornak, vagyis  $\text{grad} V(\mathbf{r})$ -nek pedig vissza kell adnia az eredeti erőteret, koordinátáinként:

$$\nabla V(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x V(\mathbf{r}) \\ \partial_y V(\mathbf{r}) \\ \partial_z V(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

$$\nabla V(\mathbf{r}) = \gamma m_2 \cdot \begin{pmatrix} x^{-2} \\ y^{-2} \\ z^{-2} \end{pmatrix}$$

Ami a [12] 132. oldalon leírt szuperpozíció elve miatt megfelel a korábban, 3.1.1. egyenletben leírt törvénynek.

Fontos kiemelni, a potenciál gömbszimmetrikus, elég a két test tömegközéppontjának távolságának ismerete  $V(\mathbf{r})$  értékének meghatározásához:  $V(r) = V(\mathbf{r})$ , ha  $|\mathbf{r}| = r$ .

Fizikai szempontból a konzervatív tereknek kiemelt szerepük van. Ezekben a terekben kényelmes alkalmazni az erengiamegmaradás törvényét, nem kell a disszipatív hatásokkal foglalkoznunk, nincs súrlódás, hőveszteség, ... Éppen ezért 3 matematikai definíciót is kötünk ezekhez a terekhez:

**Definíció:**  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  vektortér konzervatív pontosan akkor, ha az alábbi feltételek közül bármelyik teljesül:

1. a térben a vonalintergrál pályafüggetlen, csak a kezdeti és a végponttól függ
2. a tér potenciálos, vagyis  $\exists U(\mathbf{r}) : \nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$
3. a tér örvénymentes, vagyis  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \vec{0}$

Ezeknek a matematikai jelentését szeretném most bővebben kifejteni. Ahogy azt láttuk, a nehézségi tér konzervatív, a vonalintegrál pályafüggetlen, és  $\exists U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$ , ami kielégíti a feltételt, ezt a potenciált találtuk meg a 3.2.1. egyenletben. Vizsgáljuk meg a tér rotációját!

Egy egyszer differenciálható  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  tér rotációja

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) := \begin{pmatrix} \partial_y \mathbf{F}_z - \partial_z \mathbf{F}_y \\ \partial_z \mathbf{F}_x - \partial_x \mathbf{F}_z \\ \partial_x \mathbf{F}_y - \partial_y \mathbf{F}_x \end{pmatrix}$$

Itt  $\mathbf{F}_x$ ;  $\mathbf{F}_y$ ;  $\mathbf{F}_z$  az  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  függvény koordinátafüggvényei. Vizsgáljuk meg a korábban leírt  $\mathbf{F}_g$  rotációját!

$$\mathbf{F}_g = \gamma m_2 \cdot \begin{pmatrix} x^{-2} \\ y^{-2} \\ z^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_g = \nabla \times \gamma m_2 \cdot \begin{pmatrix} x^{-2} \\ y^{-2} \\ z^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \gamma m_2 \cdot \begin{pmatrix} x^{-2} \\ y^{-2} \\ z^{-2} \end{pmatrix} = \gamma m_2 \cdot \begin{pmatrix} \partial_y z^{-2} - \partial_z y^{-2} \\ \partial_z x^{-2} - \partial_x z^{-2} \\ \partial_x y^{-2} - \partial_y x^{-2} \end{pmatrix} = \gamma m_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Vagyis szerencsére azt kaptuk vissza, amit reméltünk, a nehézségi erőter örvénymentes,  $\nabla \times \mathbf{F}_g = \vec{0}$ . Vizsgáljuk meg alaposabban a konzervatív tér definíciójában kimondott feltételek egymásnak megfeleltethetőségét! Ehhez definiálnom kell, mit értek kétszeresen differenciálhatóságon az  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  függvényeken belül.

**Definíció:** Egy  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  függvényről azt mondjuk, hogy *k-szor differenciálható* az  $a \in \text{int } D_f$  ( $3 \leq k$ ) pontban, ha  $k - 1$ -szer differenciálható az  $a$  pont egy környezetében, továbbá minden  $k - 1$ -edrendű parciális deriváltja differenciálható  $a$ -ban. [10] 308. oldal 15.65.

Vegyünk most egy tetszőleges  $\Phi(\mathbf{r})$  skalárteret, amely a tér minden pontjához rendel egy számot! Ez a tér akkor írja le egy konzervatív erőter potenciálját a definíciónk alapján, ha

$$\nabla \times (\nabla \Phi(\mathbf{r})) \equiv \vec{0}$$

Ahhoz hogy ezeknek a műveleteknek legyen értelme, a skalárterünek differenciálhatónak kell lennie, hogy legyen értelme a gradiensének, és a kapott térnek ismét differenciálhatónak kell lennie, hogy legyen értelme a rotációjának. Tegyük fel tehát, hogy  $\Phi(\mathbf{r})$  legalább kétszer differenciálható, a fenti definíciónak megfelelően.

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_y\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_z\Phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \partial_x\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_y\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_z\Phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_y\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_z\Phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{yz}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{zy}\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_{zx}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{xz}\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_{xy}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{yx}\Phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

Mivel korábban a műveletek értelmezésének érdekében feltettük, hogy  $\Phi(\mathbf{r})$  legalább kétszer differenciálható, így tudjuk alkalmazni a *Young-tételt*, a különböző változók szerinti deriválások sorrendje felcserélhető.

**Young-tétel:** Ha  $f$  kétszer differenciálható az  $a \in \mathbb{R}^p$  pontban,

akkor  $\partial_{ij}f(a) = \partial_{ji}f(a) \forall i, j = 1, \dots, p$ -re. [5] 386. oldal 19.84.

$$\begin{pmatrix} \partial_{yz}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{zy}\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_{zx}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{xz}\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_{xy}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{yx}\Phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{yz}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{yz}\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_{zx}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{zx}\Phi(\mathbf{r}) \\ \partial_{xy}\Phi(\mathbf{r}) - \partial_{xy}\Phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Ennek értelmében minden legalább kétszer differenciálható skalárfüggvény leírhat egy konzervatív erőteret, mert minden ilyen  $\Phi(\mathbf{r})$ -re igaz, hogy  $\nabla \times (\nabla\Phi(\mathbf{r})) \equiv \vec{0}$ .

### 3.3. Tanári elemzés

Érthető módon a középiskolai matematikaoktatás nincs felkészülve arra, hogy a diákokkal parciális deriváltakat számoljunk fizikaórán. Ennek ellenére tanulunk egy másik potenciálról. Az elektrosztatika témakörén belül az elektromos térben mozgó töltéseken a tér által végzett munkát a tér potenciáljának kiszámításával végezzük. Mivel a potenciál skalármező, így a diákok számára egyszerű módon számolható a munka, ha ismert a potenciál, valamint egyszerű elrendezésű terekben a potenciálnak a kiszámítását is megtanuljuk: a kezükbe adjuk a képletet, amit integrálással kapnánk.

A nehézségi erőterben, amiről a korábbiakban szó volt, azért nem tanítjuk meg a potenciál fogalmát <sup>1</sup>, mert a számolási feladatokban a különbségek elhanyagolhatóak. A Föld sugara  $R \approx 6371 \text{ km}$ , a számítási feladatokban maximum a *Kármán-vonal* <sup>2</sup> magasságából ejtünk le dolgokat, vagyis  $h_{max} = 100 \text{ km}$ . Ekkora magasságkülönbség esetén a potenciálkülönbség:

A felszíni potenciál

$$V(R) = -\gamma M_F \cdot \frac{1}{R}$$

$$V(R) = -6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,371 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

$$V(R) = -62.532.117,41 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Potenciál a Kármán-vonal magasságában

$$V(R + h_{max}) = -\gamma M_F \cdot \frac{1}{R + h_{max}}$$

$$V(R + h_{max}) = -6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,471 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

$$V(R + h_{max}) = -61.565.773,45 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Vagyis a különbség a kettő között:

$$V(R) - V(R + h_{max}) = 966.343,96 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Ha ezt megszorozzuk egy térben mozgó test tömegével, akkor megkapjuk a Kármán-vonalról eső testen a tér által végzett munkát. Ez a munka a test mozgási energiájává alakul a munkatétel miatt, így:

$$m_1 \cdot (V(R) - V(R + h_{max})) = \frac{1}{2} m_1 (v_2^2 - v_1^2)$$

$m_1$ -el egyszerűsítve,  $v_1 = 0$ -t behelyettesítve, ha a test álló helyzetből indult

$$V(R) - V(R + h_{max}) = \frac{1}{2} v_2^2$$

$$\sqrt{2 \cdot 966.343,96 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = v_2 \approx 1390,211 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

<sup>1</sup>A potenciál szó elhangozhat fizikaórán a nehézségi erő munkája, vagy az annak ellenében végzett emelési munka kapcsán, de annak kiszámítására a  $g$  magasságfüggetlen formáját használjuk:  $W_{emelési} = mgh$ .

<sup>2</sup>A Kármán-vonal Kármán Tódor magyar fizikus által meghatározott magasság. A legmagasabb fizikai értelemmel bíró határ a földi légkör és világűr között.

míg ha magasságfüggetlen  $g$ -vel számoltunk volna ugyanerre a helyzetre:

$$s = \frac{a}{2}(\Delta t)^2 + v_0\Delta t \quad (\text{négyzetes úttörvény}), \quad \Delta v = a\Delta t \quad (\text{sebesség megváltozása})$$

átrendezve, behelyettesítve:

$$v_2 = \sqrt{2sg} \approx 1401,428 \frac{m}{s}$$

Ennek a kettőnek a különbsége, a relatív eltérés:

$$1401,428 \frac{m}{s} - 1390,211 \frac{m}{s} = 11,217 \frac{m}{s}, \quad \frac{11,217 \frac{m}{s}}{1401,428 \frac{m}{s}} \approx 0,800\%$$

Először érdemes belegondolni, azt kaptuk-e amire vártunk: a Föld felszínétől számított  $100 \text{ km}$  magasságban valóban gyengébb a nehézségi erő, és ahogy esik a test, erősödik, ezért a magasságfüggő alakkal számolva tényleg kisebb értéket kellett kapjunk. A számított különbség azonban ebben az extrém helyzetben sem számottevő, nem éri el az 1%-ot sem. Nem vettük figyelembe a légellenállást, az arányos a sebességgel, egy ilyen magasságból leejtett test biztosan eléri emiatt a végsebességét.

Egy érdeklődő osztálynak érdemes lehet megmutatni, hogy nincs számottevő különbség a két érték között semmilyen körülmények között, de a potenciál fogalmával hamarabb megismerkedhetnek, mint az Elektrosztatika témaköre. Emellett nem tekintek el attól a tényről sem, hogy a nehézségi erő ellenében végzett *emelési munka*, vagy éppen a tér által végzett munka gyorsító hatása tárgyalásra kerül az Energetika témakörén belül, valamint még a szökési energiákat is kiszámítjuk egy - egy osztállyal, ha időnk engedi. Ám itt mindig a magasságfüggetlen  $g$ -t használjuk, aminek számtanilag semmi jelentősége, de ha úgyis elmondjuk az Elektrosztatikában, elő lehet esetleg korábban is venni.

Matematikailag a kettő koncepció között jelentős különbség van, a potenciál megelőző bevezetése nélkül egy diákot rácsodálkoztathatunk a *Zénón paradoxon*<sup>3</sup> világára, esetleg felkelthetjük érdeklődését a határérték számítás iránt, ez pedig kifejezetten szép cél.

---

<sup>3</sup>A Zénón paradoxonok között szerepel Akhilleusz és a teknős paradoxonja, amely szerint Akhilleusz nem tudja leelőzni futóverseny közben a teknőst, hiszen ahhoz előbb meg kell tennie a teknősig az út felét, de ennyi idő alatt a teknős előrébb megy, majd újra meg kell tennie a távolság felét Akhilleusznak, ...

## 4. Hőtágulás

A hőtágulás hatásait a mindennapokban is megtapasztaljuk: az útjaink erodálása nagymértékben a téli fagyoknak köszönhető, a vízvezetékeinket fel kell készítenünk rá. Hasznosítjuk is azonban ezt a jelenséget, például gépészetben - alkatrészek összeillesztéséhez, termosztátokban, vagy hordókészíténél.

### 4.1. Középiskolai helyzet

A hőtágulás a tér 3 irányába lineáris külön-külön. Ennél fogva viszont a térfogati hőtágulás nem lineáris, viszont mégis így kezeljük.

A vonalmenti hőtágulás az alábbi törvényt követi, a középiskolában elmondottak szerint, [6]:

$$\begin{aligned}\Delta l &= l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \\ l_1 &= l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)\end{aligned}\tag{4.1.1.}$$

ahol  $l_0$  a kezdeti hossz,  $l_1$  a hőtágulás utáni hossz,  $\Delta T$  a hőmérsékletváltozás  $^{\circ}\text{C}$ -ban, vagy  $\text{K}$ -ben, és  $\alpha$  egy anyagra jellemző állandó.

A térfogati hőtágulásra pedig az alábbi modellt használjuk középiskolában, [6] 26-29. oldal alapján:

$$V_1 = V_0(1 + \beta \cdot \Delta T),\tag{4.1.2.}$$

ahol  $V_0$  a kezdeti térfogat, és  $\beta = 3 \cdot \alpha$ , a vonalmenti anyagi állandó 3-szorosa. A tankönyvek egy része, az általam referenciának használt is, kifejti, hogy itt a harmadik hatványra való emelésnél egyszerűsítést végzünk, vizsgálatom célja, hogy lássuk, mekkora hibával jár ez.

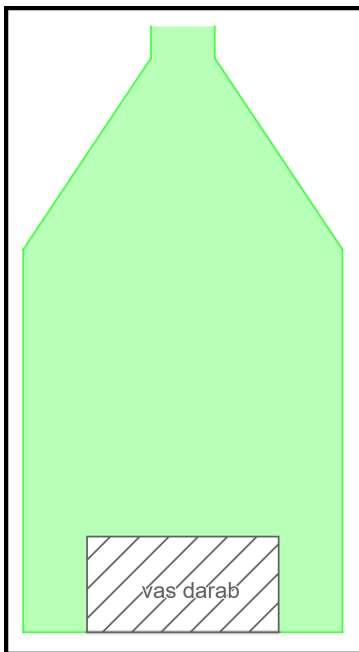
[8] 31. oldal: "135. (2.) Üvegpalack belső térfogata  $80 \text{ cm}^3$ . Az üvegpalackban  $12 \text{ cm}^3$  térfogatú vasdarab fekszik és az üveg pontosan tele van töltve alkohollal. Mindez  $0^{\circ}\text{C}$ -on érvényes. Mennyi alkohol folyik ki az üvegből, ha a hőmérséklet  $65^{\circ}\text{C}$ -ra emelkedik? Az üveg lineáris hőkiterjedési együtthatója  $9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$ , a vas lineáris hőkiterjedési együtthatója  $11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$ , az alkohol köbös hőkiterjedési együtthatója  $1,1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$ ."

#### Megoldás:

Értelmezés: A feladat során a palack, a vasdarab, és az alkohol is tágulni fog, mind a neki megfelelő mértékben. Az üvegpalackban lévő hely úgy fog tágulni, mintha üveg lenne, lásd [6]. Érdekesség, hogy mivel az

üveg kezdeti térfogata jelentősen nagyobb, mint a vasdarabé, és a hőtágulási együtthatójuk nagyjából megegyezik, így a hőmérséklet változás után az üvegben több hely lesz, mint azelőtt volt. Ennek ellenére, mivel az alkohol hőtágulási együtthatója mindkettő másik anyagénál sokkal nagyobb (~ 1000-szeres), ki fog folyni bőven folyadék az üvegből. Emellett az üveg kristályos szerkezete miatt eltérően viselkedik bizonyos formában a fémekhez képest. A feladatban leírt palack valószínűleg amorf üvegből készülne a valóságban, ennek a viselkedése matematikailag nagyon közel áll a fémekéhez.

Ábra:



Számolás:

$$\alpha_{\text{üveg}} = 9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{°C}} \implies \beta_{\text{üveg}} = 2,7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{°C}}$$

$$\alpha_{\text{vas}} = 1,1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{°C}} \implies \beta_{\text{vas}} = 3,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{°C}}$$

$$\beta_{\text{alkohol}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{°C}}$$

ahol  $\alpha, \beta$  a jellemző anyagi állandók, és alkalmazzuk a  $\beta = 3\alpha$  közelítést, amit korábban említettem.

$$V_{0,\text{üveg}} = 80 \text{ cm}^3$$

$$V_{0,\text{vas}} = 12 \text{ cm}^3$$

$$V_{0,\text{alkohol}} = V_{0,\text{üveg}} - V_{0,\text{vas}} = 80 \text{ cm}^3 - 12 \text{ cm}^3$$

$$V_{0,\text{alkohol}} = 68 \text{ cm}^3$$

$$\Delta T = 65 \text{ °C}$$

6. Ábra. Hevítés előtti állapot



4.1.2. alapján tehát:

$$V_{1,\text{üveg}} = V_{0,\text{üveg}}(1 + \beta_{\text{üveg}} \cdot \Delta T) = 80,140\text{cm}^3$$

$$V_{1,\text{vas}} = V_{0,\text{vas}}(1 + \beta_{\text{vas}} \cdot \Delta T) = 12,026\text{cm}^3$$

$$V_{1,\text{hely}} = V_{1,\text{üveg}} - V_{1,\text{vas}} = 68,114\text{cm}^3$$

$$V_{1,\text{alkohol}} = V_{0,\text{alkohol}}(1 + \beta_{\text{alkohol}} \cdot \Delta T) = 72,862\text{cm}^3$$

$$V_{1,\text{kif}} = V_{1,\text{alkohol}} - V_{1,\text{hely}} = 72,862\text{cm}^3 - 68,114\text{cm}^3$$

$$V_{1,\text{kif}} = \underline{\underline{4,748\text{cm}^3}}$$

---

A kifolyt alkohol aránya az eredeti alkoholmennyiséghez képest:

$$\frac{V_{1,\text{kif}}}{V_{0,\text{alkohol}}} = \frac{4,748\text{cm}^3}{68\text{cm}^3} = 0,0698 \approx 7\%$$

Ez utóbbit nem kérdezte a feladat ugyan, de viszonyítási alapnak érdemes kiszámítani.

Az eddigi szerkezettel ellentétben most szeretnék egy második feladatot is bemutatni, szerintem mindkettőből tudunk értékes tanulságokat levonni.

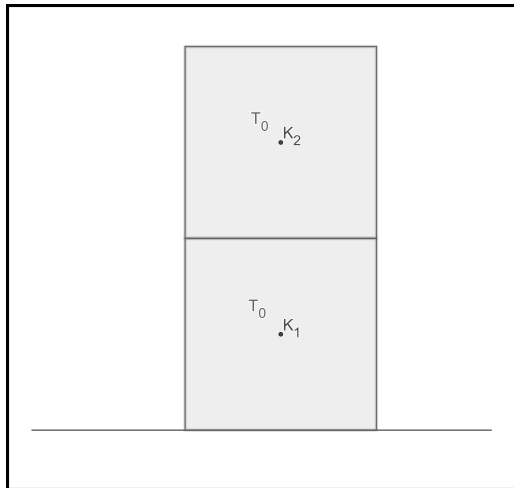
[8] 31. oldal: "140. (2507.) Két egyforma kockát különböző hőmérsékletűre melegítünk. A vízszintes asztallapon álló  $T_1$  hőmérsékletű kockára ráhelyezzük a  $T_2$  hőmérsékletű másik testet. Hogyan változik a kockákból álló rendszer helyzeti energiája, miközben a hőmérsékletek kiegyenlítődnek? (Tételezzük fel, hogy csak a kockák között történik hőcsere!)"

**Megoldás:**

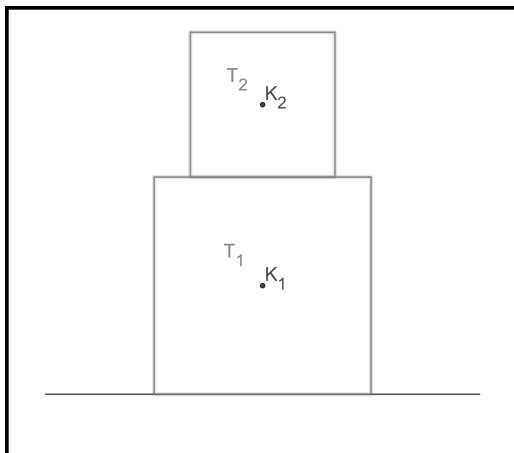
Értelmezés: A feladat során a két kocka egy vízszintes asztallapon nyugszik, a Föld nehézségi erőterében. Ahogy hőt cserélnek, kezdetben a hidegebb melegszik, így tágul, a melegebb pedig hűl, így csökken a térfogata. A térfogati változások során a két kocka tömegközéppontja süllyed, illetve emelkedik, így a helyzeti

energiájuk is változik. *Nem tudjuk, melyik test hőmérséklete nagyobb* a hevítés után, az eredmény nagyban fog ettől függni.

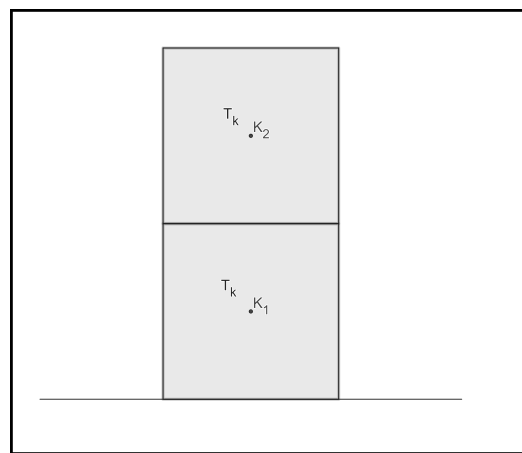
Ábra:



(a) Hevítés előtti állapot



(b) Hevítés utáni állapot



(c) Egyensúlyi állapot

6. Ábra. 140. (2507.)

Számolás: A kockák kezdeti élhossza legyen  $a$ , a kezdeti hőmérsékletük  $T_0$ , ekkor a két kocka hevítés

utáni térfogata 4.1.2. alapján:

$$V_1 = a^3(1 + \beta(T_1 - T_0))$$

$$V_2 = a^3(1 + \beta(T_2 - T_0))$$

A két kocka közötti hőkiegyenlítés végén  $T'_1 = T'_2 = T_k$ , mert ha nem így lenne, a kiegyenlítődés még nem ért volna véget. Ezek alapján a testek térfogata külön-külön  $V_0 = a^3$ -ról  $V_k = a^3(1 + \beta(T_k - T_0))$ -ra változott.

A  $b_1, b_2$  magasságú tömegközéppontok mozgása így alakul:

$$b_{1,\text{kiind}} = \frac{1}{2}a$$

$$b_{2,\text{kiind}} = \frac{3}{2}a$$

---


$$b_{1,T_1} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{V_1} = \frac{1}{2}a\sqrt[3]{(1 + \beta(T_1 - T_0))}$$

$$b_{2,T_2} = \sqrt[3]{V_1} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{V_2} = a\left(\sqrt[3]{(1 + \beta(T_1 - T_0))} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1 + \beta(T_2 - T_0))}\right)$$

---


$$b_{1,T_k} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{V_k} = \frac{1}{2}a\sqrt[3]{(1 + \beta(T_k - T_0))}$$

$$b_{2,T_k} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{V_k} = \frac{3}{2}a\sqrt[3]{(1 + \beta(T_k - T_0))}$$

Vagyis ahogy kiegyenlítődnek a kockák, a tömegközéppontjuk magassága így változik:

$$\Delta b_1 = b_{1,T_k} - b_{1,T_1} = \frac{1}{2}a\left(\sqrt[3]{(1 + \beta(T_1 - T_0))} - \sqrt[3]{(1 + \beta(T_k - T_0))}\right)$$

$$\Delta b_2 = b_{2,T_k} - b_{2,T_2} = a\left(\sqrt[3]{(1 + \beta(T_1 - T_0))} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1 + \beta(T_2 - T_0))} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1 + \beta(T_k - T_0))}\right)$$

Ezeknek a magasságváltozásoknak az előjele fogja eldönteni, hogyan változik a kockák helyzeti energiája külön-külön. Nekünk azonban a teljes rendszer energiaváltozása kell: a 2-es, felső kockát jellemző egyenlet magába foglalja, hogy ha az első kocka tágul (melegszik), vagy zsugorodik (hűl), akkor az emelni, vagy eresztetni fogja a második kockát. A 2-es kocka önállóan nem tud annyit melegedni, hogy ezt korigálja, mert

nincs hőcsere a külvilággal  $\implies (\Delta b_2 - \Delta b_1 \leq \frac{\Delta b_1}{2})$ . Ezért elég csak  $b_1$ -et vizsgálni:

$$\Delta b_1 > 0 \iff \frac{1}{2}a \left( \sqrt[3]{1 + \beta(T_k - T_0)} - \sqrt[3]{1 + \beta(T_1 - T_0)} \right) > 0$$

$a > 0$ , tehát egyszerűsíthetünk vele, és nem változik a reláció  $\implies$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a \left( \sqrt[3]{1 + \beta(T_k - T_0)} - \sqrt[3]{1 + \beta(T_1 - T_0)} \right) > 0 &\iff \\ \iff \left( \sqrt[3]{1 + \beta(T_k - T_0)} - \sqrt[3]{1 + \beta(T_1 - T_0)} \right) > 0 \end{aligned}$$

---


$$\left( \sqrt[3]{1 + \beta(T_k - T_0)} - \sqrt[3]{1 + \beta(T_1 - T_0)} \right) > 0 \iff \sqrt[3]{1 + \beta(T_k - T_0)} > \sqrt[3]{1 + \beta(T_1 - T_0)}$$


---

$$1 + \beta(T_k - T_0) > 1 + \beta(T_1 - T_0)$$

$\beta > 0$ , tehát egyszerűsíthetünk vele, és nem változik a reláció  $\implies$

$$T_k > T_1$$

Ne felejtjük el, hogy a felső kockát az alsó implicit mozgatja! Ezeknek értelmében a rendszer helyzeti energiája nő, ha az alsó kocka melegszik, tehát ha kezdetben az volt a hidegebb, mivel csak a felső kockától kaphatta a hőt. Azt kaptuk tehát, hogy a kockák élhosszától, anyagától, és kezdeti hőmérsékletétől mind független az eredmény, kizárólag az számít, melyik kocka volt a hevítés utáni pillanatban a melegebb.

## 4.2. Matematikai valóság

A középiskolában használt térfogati modellben a  $\beta = 3 \cdot \alpha$  közelítést alkalmazzuk, ennek ellenére a térfogati hőtágulás mindhárom irányba a vonal menti hőtágulást követi. Általános esetben egy téglatestről beszélünk:

$$V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$$

$$V_1 = a_0(1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot b_0(1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot c_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

ahol  $a_0, b_0, c_0$  a kezdeti térbeli kiterjedések.

$$V_1 = a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3$$

$$V_1 = V_0 \left[ 1 + 3(\alpha \cdot \Delta T) + \underline{3(\alpha \cdot \Delta T)^2 + (\alpha \cdot \Delta T)^3} \right]$$

Ebből az aláhúzott részt hagyjuk el a közelítésünk során, azzal indokolva ezt, hogy, ahogy azt korábban a feladatokban láttuk,  $\alpha$  nagyságrendje szilárd anyagok esetén  $\sim 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$  nagyságrendű érték, ha ezt 2.; 3. hatványra emeljük, az elhagyott térfogat az eredetihez képest elhanyagolható ( $\sim 10^{-15} - 10^{-10}$ ). A  $\Delta T$  összehasonlítás képpen  $\sim 10^1 - 10^2$  nagyságrendű,  $10 - 100 \text{ } ^\circ C$ , mivel ezen kívül már nem lenne érvényes a vonalas hőtágulás képlete, a szilárd anyagok egy része elkezdene megolvadni, másik részük is lágyulna.

De honnan is származik a 4.1.1. képlet? [13] 314. oldala alapján tudjuk, hogy  $\alpha(p, T)$  a vonalas hőtágulási együttható. Ez  $p$  nyomásnak, és  $T$  hőmérsékletnek a függvénye, kezeljük most  $p$ -t konstansnak a vizsgálatunk közben. Ezek szerint, valamint továbbra is [13]-t figyelembe véve fel tudjuk írni az alábbi összefüggést. A fizikai leírásban a  $\sigma, p$  jelölések összefolynak, mert a nyomás és a feszültség analóg szerepet töltenek be a jelenségen belül, így én konzisztensen a  $p$  nyomás jelölést fogom használni a könnyebb olvashatóság érdekében.

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T} = \frac{1}{l} \partial_T l$$

vagyis  $l \neq 0$ -lel átszorozva

$$\alpha l = \partial_T l$$

szintén [13] alapján

$$dl = \partial_p l dp + \partial_T l dT,$$

vagyis az elemi hosszváltozás felírható a parciális deriváltak segítségével. Ahogy azt már írtam, legyen  $p$  konstans, ekkor a fenti összeg első tagja 0. Így az első sort a másodikba helyettesítve

$$dl = \alpha l \cdot dT$$

$$\frac{dl}{l} = \alpha \cdot dT$$

A hőmérséklet a  $T \in [T_0; T_1]$ , a vizsgált hossz az  $l \in [l_0; l_1]$  intervallumokon változik, így ezen határok között integrálva

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{1}{l} dl = \int_{T_0}^{T_1} \alpha dT$$

$$\ln \frac{l_1}{l_0} = \alpha(T_1 - T_0)$$

$$l_1 = l_0 \cdot e^{[\alpha(T_1 - T_0)]} \quad (4.2.1.)$$

Ezt az összefüggést a 2.2.1. alapján felírhatjuk így is:

$$l_1 = l_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(\alpha(T_1 - T_0))^n}{n!} \right]$$

Amiből az 1-nél nagyobb fokszámú tagok elhagyásával közelítve, mivel a kitevő igen kicsi ( $e^x \approx 1 + x$ )

$$l_1 = l_0 \cdot (1 + \alpha(T_1 - T_0))$$

Ez megegyezik 4.1.1.-el. A közelítés a fizikailag mérhető valóságot elég pontosan leírja, de ezek szerint a 4.1.2. még több mindent elhagy, ahhoz képest, mint amit korábban leírtam. Vizsgáljuk meg, mi történik egy  $V_0$  térfogatú általános téglatesttel a 4.2.1. alapján! Az átláthatóság okán a  $\Delta T = T_1 - T_0$  jelölést fogom használni.

$$V_0 = a_0 \cdot b_0 \cdot c_0$$

$$V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$$

$$a_1 = a_0 \cdot e^{[\alpha(\Delta T)]} \quad 4.2.1. \text{ alapján, ugyanígy } b_1, c_1 \text{ is, ezért}$$

---


$$V_1 = (a_0 \cdot e^{[\alpha \Delta T]}) (b_0 \cdot e^{[\alpha \Delta T]}) (c_0 \cdot e^{[\alpha \Delta T]})$$

$$V_1 = (a_0 b_0 c_0) \cdot [e^{[\alpha \Delta T]}]^3$$

$$V_1 = V_0 \cdot e^{[3\alpha \Delta T]} \quad (4.2.2)$$

Ez más formába hozható, ismét a 2.2.1.-t alkalmazva

$$V_1 = V_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(3\alpha \Delta T)^n}{n!} \right] = V_0 \cdot \left( 1 + \frac{3\alpha \Delta T}{1!} + \frac{9(\alpha \Delta T)^2}{2!} + \frac{27(\alpha \Delta T)^3}{3!} + \dots \right)$$

Ebből a 4.1.2. az aláhúzott részeket mind elhagyja.

### 4.3. Tanári elemzés

Ha  $\Delta T \approx 100^\circ\text{C}$ , és egy általános fémről beszélünk,  $\alpha \approx 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ , akkor az elhagyott tagoknak mekkora a nagyságrendje?

$$\frac{9(\alpha \Delta T)^2}{2!} + \frac{27(\alpha \Delta T)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{(3\alpha \Delta T)^n}{n!} \right], \quad \alpha \Delta T \approx 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 100^\circ\text{C} = 10^{-3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{(3 \cdot 10^{-3})^n}{n!} \right] = e^{3 \cdot 10^{-3}} - 1 - 3 \cdot 10^{-3} = \frac{1000 \cdot e^{\frac{3}{1000}} - 1003}{1000} \approx$$

$$\approx \underline{4,505 \cdot 10^{-6}}$$

Ennek aránya a *nem elhagyott* tagokhoz képest:

$$\frac{\frac{1000 \cdot e^{\frac{3}{1000}} - 1003}{1000}}{1 + 3 \cdot 10^{-3}} \approx 4,4910 \cdot 10^{-6}$$

Vagyis a figyelembe vett növekedéshez képest annak nagyjából a 45 tízmilliomod része. Ez az arány kézzelfoghatóbb méretekhez viszonyítva azt jelenti, hogy egy olimpiai úszómedencéhez ( $\approx 7,5$  millió liter) képest elhagyunk 1 – 2 vödör vizet ( $\approx 33$  liter). Persze ez a hasonlat kissé félrevezető, mert az olimpiai medencében víz szokott lenni, mi a nagyságrendi becsléshez viszont feltettük, hogy  $\alpha \approx 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ , ami fémekre jellemző.

A folyadékoknak a hőtágulási együtthatója, ahogy az a téma elején megoldott első feladatnál látszott, sokkal nagyobb, mint a fémeké. Ennek oka fizikai, a folyadékokat alkotó részecskék között gyengébb a kötési kölcsönhatás. Emellett természetesen a folyadékokra ritkán értelmezzük a vonalas hőtágulást, mivel a legtöbb folyadékot jellemzően nem 1 irányban tároljuk. Ettől még a folyadékok hőtágulására az  $e^x \approx 1 + x$  közelítés továbbra sem teljes félrevezetés. Ezen anyagokra  $\beta \approx 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ , így  $\beta \Delta T \approx \frac{1}{10}$ ,  $e^{\frac{1}{10}} \approx 1,1052$ . Ehelyett számolnánk a mostani becslőt számok alapján 1,10-del, a különbség tehát  $\frac{1,1052 - 1,10}{1,10} \approx 4,7008 \cdot 10^{-3}$ , ami nagyjából 0,5%.

## 5. Summázat

Dolgozatom végén levonhatom a konklúziót: a feldolgozott 3 példa alapján a címben írt *matematikai füllentések* hasznosabbak, mint amennyi kárt okoznak. Egy átlagos középiskolásnak sem ideje, sem motivációja nincs differenciálegyenletekről, Runge - Kutta algoritmusról, parciális deriválásról, vagy Taylor-sorba fejtésről tanulnia. Társadalomként nem célunk, hogy egy érettségi megszerzéséhez ilyen témákban jártas legyen valaki. A fizikának viszont a vizsgált jelenségek jelenleginél pontosabb tárgyalásához szüksége lenne ezekre a matematikai eszközökre, így az összes diáknak tudunk a *füllentett matek*kal egy stabilabb megértést biztosítani a világ működéséhez. Ha ez azon az áron valósul meg, hogy az egzakt megoldáshoz képest tévedünk 4, 5ppm-et, esetleg 0, 5 – 0, 8%-ot, azt gondolom, ezt minden matematikus lelkületű ember el tudja fogadni.

Az érdeklődő diákok - tapasztalatom szerint - a tanórai levezetés után, vagy az óra utáni szünetben meg fogják kérdezni, miért tehetjük meg az általunk kiemelt közelítést, mi történne, ha nem tennénk meg. Nekik, úgy gondolom, kötelességünk megmutatni a matematikát a jelenségek mögött. Meg fogják érteni, mennyit egyszerűsít a helyzetben, hogy hajlandóak vagyunk ferdíteni egy kicsit a könnyebb feldolgozhatóság érdekében. Az érdekesebb, izgalmasabb részeket lesz lehetőségünk elmondani szakkörön, fakultáción, nyári táborban, versenyfelkészítéskor. Amikor mesélünk nekik az exponenciális függvény közelítéséről, vagy esetleg a potenciálfüggvényekről, bízom benne: soha nem múló szenvedély, kíváncsiság tüzét legyezzük, és örömmel fognak majd nyomdokainkba lépni.



## Köszönetnyilvánítás

Dolgozatom megírása közben hatalmas támogatást kaptam környezetem minden pontjáról. Segítettek a barátaim, a kollégáim, a családom. Természetesen Sikolya Eszter Tanárnő, a konzulensem is. Szeretnék mély köszönetet mondani a támogató, noszogató e-mailekért, mikor lassabban haladtam, mint terveztem, és szorongtam a dolgozatom elkészítésén. Éjt nappallá téve nézte át a kéziratomat, adott tanácsot az ábrák, vagy a matematika kapcsán, és végtelen türelemmel magyarázta a matematikai szarvashibáimat, mikor a kimerültségtől nehezen értettem meg, mit írtam rosszul.

Szeretnék köszönetet mondani kollégáimnak, akik lehetőséget adtak dolgozatom befejezésére, mikor úgy éreztem, nem lesz időm rá. Szeretném külön kiemelni vezetőtanáraimat, Fehérné Barcs Ágit, és Kotekné Szi-eber Marcsit, akik az órák közti szünetben az óráimról való tanácskozás mellett nem felejtették el heti legalább egyszer megkérdezni: "*Hogy állsz a szakdolgozatoddal?*". Emellett természetesen a teljes Vörösmarty Mihály Gimnázium tanári kara pótolhatatlan támogatást nyújtott, kiváltképp a természettudományos munkaközöség.

Szeretnék köszönetet mondani barátaimnak, akik lelki segítség mellett szakmai támogatást is többször nyújtottak. Először buzdítottak a valódi munka elkezdésére. Később szakirodalmat ajánlottak, technikai útmutatást, és a témák mélyebb kifejtésében is segítettek. Kosztyó Péternek, Miskei Ferencnek, és Szigeti Baláznak kiemelten köszönöm.

A családom támogatása nélkül nem tudtam volna megírni a dolgozatomat. Mindenben támogattak, mindennel fordulhattam hozzájuk. Segítséget kaptam fogalmazásban, stilisztikában, formázásban, szerkezetben.

Mindezek mellett szeretném megköszönni a páromnak, Kincses Petrának. Nem tudom, milyen lehet kívülről elviselni ilyenkor engem, de bizonyára kellemetlenebb, mint mikor nem írok szakdolgozatot. Köszönöm!

## 6. Irodalomjegyzék

### Hivatkozások

- [1] A. Beléndez, C. Pascual, D.I. Méndez, T. Beléndez and C. Neipp: *Exact solution for the nonlinear pendulum*, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 4, 645-648. oldal, 2007.
- [2] Besenyei Ádám - Komornik Vilmos - Simon László: *Parciális differenciálegyenletek* - Typotex, 2013.
- [3] Gnädig Péter - Honyek Gyula - Vigh Máté: *333+ furfangos feladat fizikából* - Typotex, 2017.
- [4] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Analízis I.* - Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.
- [5] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Analízis II.* - Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.
- [6] Dr. Mező Tamás - Dr. Farkas Zsuzsanna - Dr. Molnár Miklós: *Fizika 10.* - Maxim, 2009.
- [7] Dr. Mező Tamás - Dr. Molnár Miklós - Dr. Nagy Anett: *Fizika 11.* - Maxim, 2009.
- [8] Poór István - Suszter Ferenc: *Gyöngyszemek a 100 éves KöMaL fizikafeladatokból* - Typotex, 1996.
- [9] Reinhardt, W. P.; Walker, P. L.; Olver Frank W. J.; Lozier, Daniel M.; Boisvert, Ronald F.; Clark, Charles W.: *NIST Handbook of Mathematical Functions* - Cambridge University Press, 2010.
- [10] Sikolya Eszter: *Analízis jegyzet* - ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számítástudományi Tanszék, 2017.
- [11] Simon L. Péter: *Közönséges differenciálegyenletek Jegyzet* - Ludovika, 2013.
- [12] Tasnádi Péter - Skrapits Lajos - Bérces György: *Általános fizika - Mechanika I.* - Ludovika, 2013.
- [13] Tasnádi Péter - Skrapits Lajos - Bérces György - Litz József: *Általános fizika - Mechanika II.* - Hőtan - Dialóg, 2011.
- [14] Weisstein, Eric W.: *"Jacobi Amplitude."* From *MathWorld—A Wolfram Web Resource*

## A. Runge - Kutta módszer Python kódja

```
1 #!/usr/bin/env python
2 # coding: utf-8
3
4 # In[1]:
5
6
7 import numpy as np
8 import matplotlib.pyplot as plt
9
10 g=9.82 #nehezseg gyorsula erteke m/s^2-ben
11 l=1.00 #fonal hossza meterben
12 omega=np.sqrt(g/l)
13 def y_ketpont(x, y):
14     return -(g/l) * np.sin(y)
15
16
17 # In[2]:
18
19
20 def rk(f, y_0, t_0, t_veg, dt):
21     """
22     Runge Kutta kozelites parameterei:
23     f a kozelitendo fv
24     y_0 f erteke t_0-ban (jelen esetben a kezdeti kiteres)
25     t_0 a kezdeti idopillanat
26     t_veg az utolso pillanat (ennyi ideig leng a test)
27     dt az idolepes
28     """
29     t=[t_0] #t a vizsgalt pillanatok listaja lesz, elso eleme az elso
idopillanatunk, t_0
30     y=[y_0] #ezek pedig a kapott ertekeink lesznek
31     y_pont = 0 #kezdeti ertekek f_pontra, vagyis a lenges kezdetekor
```

```

feltelelezett sebesseg
32
33 while t[-1] < t_veg:
34     t_i = t[-1]
35     y_i = y[-1] #a listak utolso elemeibol lepunk tovabb a kovetkezo
elemekre majd
36
37     k_1 = dt * y_pont
38     l_1 = dt * f(t_i, y_i)
39
40     k_2 = dt * (y_pont + l_1/2)
41     l_2 = dt * f(t_i + dt/2, y_i + k_1/2)
42
43     k_3 = dt * (y_pont + l_2/2)
44     l_3 = dt * f(t_i + dt/2, y_i + k_2/2)
45
46     k_4 = dt * (y_pont + l_3)
47     l_4 = dt * f(t_i + dt, y_i + k_3)
48
49     y_kov = y_i + 1/6 * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)
50     y_pont_kov = y_pont + 1/6 * (l_1 + 2 * l_2 + 2 * l_3 + l_4)
51     t_kov = t_i + dt
52
53     y.append(y_kov)
54     y_pont = y_pont_kov
55
56     t.append(t_kov)
57     return t, y
58
59
60 # In[36]:
61
62
63 t_0=0.00

```

```

64 t_veg=1000
65 dt=0.001
66 y_0=-np.pi/36
67 y_pont = 0 #kezdeti ertekek
68 t, y = rk(y_ketpont, y_0, t_0, t_veg, dt)
69
70
71 # In[37]:
72
73
74 A=y_0
75 omega=np.sqrt(g/l)
76 phi_0=t_0*omega
77 phi=[ omega * t_pill for t_pill in t ]
78 y_sinusos=A*np.cos(phi+phi_0) #szinuszos modell

```

## B. Eredetiségi nyilatkozat

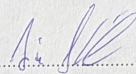
### Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott ZÓRKA KORNÉL..... (név)

ZHUYRC..... (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy az

ELTE matematika - fizika szak..... tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 20 23. június 30.....



a hallgató aláírása