

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

---

Porupsánszki István

# KAMATCSERE OPCIÓK ÁRAZÁSA A BLACK-, ÉS A SABR-MODELLEK SEGÍTSÉGÉVEL

Szakdolgozat

Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak

Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezető: Dr. Száz János



Budapest, 2023

# Tartalomjegyzék

<b>1. Alapfogalmak, jelölések</b>	<b>6</b>
<b>2. Kamatcsere opciók modellezése</b>	<b>13</b>
2.1. A kamatcsere opciók piaca . . . . .	13
2.2. A Black-modell . . . . .	15
2.3. A normál modell . . . . .	17
2.4. Lokális volatilitás modellek . . . . .	17
2.5. A SABR-modell . . . . .	18
2.6. A volatilitásmosoly a SABR-modellben . . . . .	21
<b>3. Az eredeti SABR-modell</b>	<b>23</b>
3.1. Az árazó formula . . . . .	24
3.2. A normál implikált volatilitás . . . . .	33
3.3. Black-féle implikált volatilitás . . . . .	35
<b>4. Az arbitrázatmentes SABR-modell</b>	<b>38</b>
4.1. Arbitrázs a SABR-modellben . . . . .	38
4.2. Az előre haladó forward egyenlet . . . . .	40

4.3. Diszkretizálás . . . . .	43
<b>5. Hogyan árazzuk kamatcsere opciókat?</b>	<b>49</b>
<b>6. Összefoglaló</b>	<b>54</b>
<b>A. A Crank-Nicholson séma implementálása Python használatával</b>	<b>56</b>

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Száz Jánosnak, hogy vállalta a témavezetői feladatokat, és egy igen érdekes téma kiválasztása mellett segédanyagokkal és szakmai tanácsokkal segítette a szakdolgozatom elkészültét.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani Michaletzky Györgynek az építő jellegű megjegyzésekért és tanácsokért, amelyek nélkül ez a diplomamunka nem készülhetett volna el ilyen színvonalon.

# Bevezetés

A kamatcsere ügyleteket az 1980-as évek elején kezdték el alkalmazni a nemzetközi pénzügyi piacokon, azóta pedig óriási növekedésen ment át ezeknek a termékeknek a piaca, mára már központi szerepet töltenek be a derivatív ügyletek között. Nem meglepő módon elterjedtek azok az opciók, amelyek kamatcsere ügyletbe való belépésre jogosítanak fel. Ezek az opciók nagyon hasonlítanak a részvény piacok opciós szerződéseire, ezért az árazásuk is analóg módon történik. Erre egy példa a jól ismert Black–Scholes-modell[3] és a kamatcsere ügyletekre vonatkozó európai opciók árazására is szolgáló Black-modell[4]. Mindkét modell a hozam szórását állandónak tekinti, azonban ennek kiszámítása nem egyértelmű. Ha a historikus adatokból becsülünk, akkor a kapott eredményt erősen befolyásolja az időtáv hossza, ráadásul a volatilitás hosszú távon semmiképpen sem tekinthető állandónak. A másik gyengesége a modelleknek, hogy a historikus adatokból látható, hogy az implikált volatilitás nő az ATM pozícióból az OTM és az ITM pozíciók irányába egyaránt. Ez a jelenség az 1980-as évek végétől figyelhető meg, a kialakulásának a fő oka az lehet, hogy a befektetők ITM és ATM pozíciókban tartanak a hirtelen árfolyam változástól és emiatt az opciós árak nőnek, ami magasabb implikált volatilitást eredményez. Szakdolgozatom központi kérdése, hogy hogyan határozható meg az implikált volatilitás, amellyel a Black-modell visszaadja a piacon megfigyelt árakat. A Black-modell javítható a SABR-modell segítségével, amely a szórást is sztochasztikusnak kezeli. Zárt képlet nem ismert az implikált volatilitásra, viszont létezik aszimptotikusan pontos közelítő formula. Az 1. és 2. fejezetben bemutatjuk a kamatcsere opciókat, a piacot, a fontosabb fogalmakat és jelöléseket, valamint a SABR-modell előtti jelentősebb modelleket. A 3. fejezetben részletesen is tárgyaljuk az eredeti SABR-modellt[13], majd a 4. fejezetben az arbitrázsmentes SABR-modellt[14]. Végezetül a két SABR-modell segítségével bemutatjuk az európai típusú kamatcsere opciók árazását az 5. fejezetben.

# 1. fejezet

## Alapfogalmak, jelölések

Az első fejezetben bevezetjük a fontosabb definíciókat és sztenderd jelöléseket, amiket a dolgozatban használni fogunk. A bevezető fejezet Brigo és Mercurio könyve [7] alapján készült el.

**1.0.1. Definíció.** *A bankbetét értékét egy adott  $t \geq 0$  időpontban jelölje  $B(t)$ . Feltesszük, hogy  $B(0) = 1$  és a dinamikáját az alábbi differenciálegyenlet írja le:*

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad (1.1)$$

ahol  $r(t)$  az időnek pozitív függvénye. Ekkor persze

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right). \quad (1.2)$$

**1.0.2. Definíció.** *A  $D(t, T)$  diszkontfaktor értéke azt jelenti, hogy a  $T$ -beli pénz értékét mennyivel kell megszorozni, hogy a  $t$ -beli jelenértékét kapjuk meg. Tehát a betét értékével kifejezve*

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right). \quad (1.3)$$

**1.0.3. Definíció.** *Jelölje  $p(t, T)$  a  $T$  időpillanatban 1 egységet fizető elemi kötvény árfolyamát  $t$ -ben. Speciálisan  $P(T, T) = 1$ . A magyar terminológiában használatos a kamattömeg, amely az  $Y(t, T) = -\ln P(t, T)$  mennyiséggel egyezik meg.*

Bár általában nem igaz, de ha az  $r$  kamatláb időben állandó, akkor tetszőleges  $t < T$  időpontokra fennáll, hogy  $P(t, T) = D(t, T)$ .

**1.0.4. Definíció.** A lejáratig hátralevő  $T - t$  időt években kifejezve jelölje  $\tau(t, T)$ . Helyzettől és pénzügyi terméktől függ, hogy értékét milyen idő konvencióval számítjuk ki.

**1.0.5. Definíció.** Legyen  $R(t, T)$  a  $T$  lejáratához tartozó folytonos spot kamatláb értéke  $t$ -ben. Ekkor  $T$ -ben lejárató elemi kötvény  $t$ -beli értékét kétféleképpen is fel tudjuk írni:

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T)\tau(t, T)) = \exp(-Y(t, T)), \quad (1.4)$$

ebből pedig a folytonos spot kamatláb értéke

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)} = -\frac{Y(t, T)}{\tau(t, T)}. \quad (1.5)$$

**1.0.6. Definíció.** Legyen  $L(t, T)$  a  $T$  lejáratához tartozó egyszerű spot kamatláb értéke  $t$ -ben. Ekkor  $T$ -ben lejárató elemi kötvény  $t$ -beli értékét ismét kétféleképpen tudjuk felírni:

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)}, \quad (1.6)$$

ebből pedig az egyszerű spot kamatláb értéke

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}. \quad (1.7)$$

**1.0.7. Definíció.** A határidős hitelügylet (forward rate agreement, FRA) három időpontot különböztet meg: a  $t$  kötési időpont, az elszámolás  $T$  időpontja és  $S$  a határidős kamatperiódus vége. A long és short elnevezéseket itt a változó  $L(T, S)$  kamatláb szempontjából definiáljuk: a long kapja a változó kamatlábat és cserébe a fix  $K$  kamatlábat fizeti  $S$ -ben. A határidős hitelügyletek általában rövid futamidejűek, éven belüliek, ezért egyszerű kamatozást használunk. Ha a névérték  $N$ , akkor a határidős hitelügylet értéke a kötés időpontjában

$$FRA(T, T, S, \tau(T, S), N, K) = N(P(t, T) - P(t, S) - P(t, S)\tau(T, S)K) \quad (1.8)$$

Legyen az egyszerű határidős kamatláb

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right). \quad (1.9)$$

Ekkor az FRA  $t$ -beli értéke

$$FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = NP(t, S)\tau(T, S)(F(t, T, S) - K). \quad (1.10)$$

**1.0.8. Példa.** Nézzünk meg egy példát határidős hitelügyletre. Tegyük fel, hogy  $A$  vállalatnak 2022. november 1-jén köt egy határidős hitelügyletet, amiben 1 millió euró névértéken vesz egy 6 hónapos Euribor+0,3% változó kamatozású kamatfizetést 3% fix kamatért cserébe, az elszámolás időpontja 2023. február 1.

Tehát  $T = 2023.02.01.$ ,  $S = 2023.08.01.$  és a kötés időpontjában ismert  $L(T, S)$  értéke. Ekkor ugyanis a hat hónapos Euribor értéke 3,009% volt ([11]), ezért  $L(T, S) = 3,309\%$ . Határidős hitelügyleteknél általában  $ACT/360$  időkonvenciót alkalmazunk. Az elszámolás és a kamatperiódus vége között hat hónap, összesen 181 nap telik el, tehát  $\tau(T, S) = 181/360 = 0,5028$ . Ezek alapján a határidős hitelügylet értéke az  $A$  vállalatnak a határidős kamatperiódus végén, azaz 2023.08.01-jén

$$N\tau(T, S)(L(T, S) - K) = 1000000 \times 0,5028 \times 0,309\% = 1553 \text{ euró.}$$

Első lépésben megvizsgáljuk a kamatcsereügyleteket mindenféle opció nélkül. A határidős hitelügylet egy lehetséges általánosítása a kamatcsereügylet (interest rate swap, IRS). Ebben a megállapodásban a long egy lebegő kamatozású hitel kamatfizetési sorozatát kapja egy fix kamatozású hitel kamatfizetési sorozatért cserébe, vagyis long veszi a lebegő kamatozású hitel kamatfizetési sorozatát, a short pedig eladja. Formálisan a  $T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}$  időpontokban történnek kamatcserek. A  $T_i$  időpontban a long fix,  $N\tau_i K$  mennyiségű összeget fizet és  $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$  összeget kap cserébe. Itt  $N$  a szerződés névértéke,  $\tau_i$  a  $T_{i-1}$  és  $T_i$  időpontok között eltelt idő években kifejezve, továbbá legyen  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha}, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}\}$  és  $\tau = \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_{\beta}\}$ . Az van long IRS pozícióban, aki a fix kamatot fizeti, hiszen a lebegő kamatozású pénzáramlás a termék, ezért ő érdekelt a változó kamat növekedésében. Az ő szemszögéből a kamatcsereügylet értéke tetszőleges  $t < T_{\alpha}$  időpontban

$$PFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N\tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K), \quad (1.11)$$

A határidős hitelügylet jelöléseivel is ki tudjuk fejezni a long IRS pozíció értékét, ugyanis az felfogható egy határidős hitelügyletekből álló portfólióként:

$$PFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} FRA(t, T_{i-1}, T_i, \tau_i, N, K). \quad (1.12)$$



**1.0.9. Példa.** A kamatcsere ügylet felfogható úgy, mint két pénzáramlás összjelenértéke, így árazásukra két lehetőségünk is van [21].

Egyrészt, mint két pénzáramlás jelenértékeinek különbsége, azaz a kötvény-módszer, másrészt pedig mint határidős hitelügyletek összege (ld. 1.12 egyenlet), vagyis a forward-módszer. Az utóbbi módszert most részletesen is bemutatjuk, de a kötvény-módszer is megtalálható [21]-ben.

Tegyük fel, hogy öt éves IRS ügyletet félévvel ezelőtt kötöttünk meg 3% fix kamatlábbal. Az egyszerűség kedvéért a hozamgörbe 2%-on vízszintes. Forward-módszer esetén öt FRA árazását kell végrehajtanunk, a határidős kamatlábak minden futamidőre 2%, hiszen a hozamgörbe vízszintes. Továbbá tételezzük fel, hogy a változó kamatláb az alábbi szerint alakul: 2,5%, 4%, 2,5%, 3%, 3,5% (1.1 ábra)

$T_i$ -t	pénzáramlás		jelenérték		
	fix	változó	fix	változó	FRA
0,5	3%	2,50%	2,97%	2,48%	-0,50%
1,5	3%	4,00%	2,91%	3,88%	0,97%
2,5	3%	2,50%	2,86%	2,38%	-0,48%
3,5	3%	3,00%	2,80%	2,80%	0,00%
4,5	103%	103,50%	94,22%	94,68%	0,46%
				<b>összesen</b>	<b>0,46%</b>

1.1. ábra. Kamatcsere ügylet árazása forward-módszerrel

Azt kaptuk tehát, hogy kamatcsere ügylet jelenértéke a névérték 0,46%-a, például 1 millió euró névérték esetén 4600 euró.

**1.0.10. Definíció.** Swap rátának nevezzük azt a  $S_{\alpha,\beta}(t)$  fix kamatot, amellyel a kamatcsereügylet  $t$ -beli értéke 0. A definícióból könnyen adódik, hogy

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}. \quad (1.13)$$

Az első kamatcsere opció, amit megvizsgálunk, a kamatcsereügyletre vonatkozó cap. A cap tulajdonosának minden kamatfizetési periódusban joga van eldönteni, hogy megveszi-e a változó kamatozású hitel kamatfizetését a fix kamatozású hitel kamatfizetéseire. Tehát

a kifizetésfüggvény  $t$ -beli jelenértéke

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)_+. \quad (1.14)$$

Jól látható, hogy a cap opció további opciók összegére bonthatóak fel. Ezek a caplet opciók, amik kifizetésfüggvényei nagyon hasonlítanak európai vételi opciók kifizetésfüggvényeihez. Éppen ezért az a piaci gyakorlat, hogy a Black-modell segítségével árazzuk be ezeket a kamatsere opciókat. Tehát a cap opció fair ára

$$\text{Cap}^{\text{Black}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \text{Bl}(K, F(0, T_{i-1}, T_i), \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}), \quad (1.15)$$

ahol a  $\sigma_{\alpha, \beta}$  volatilitást a piaci adatokból nyerik ki.

A cap opció párja a floor opció, amelynek tulajdonosának joga van eldönteni, hogy megveszi-e a fix kamatozású hitel kamatfizetését a változó kamatozású hitel kamatfizetéseire. Ennek az opciónak a kifizetésfüggvények  $t$ -beli jelenértéke

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))_+. \quad (1.16)$$

A floor opció floorlet opciók összegére bontható fel, amik pedig nagyon hasonlítanak európai eladási opciókhoz, ezért az árazásukhoz ismét alkalmazható a Black-modell.

A következő fejezetben részletesen tárgyaljuk majd a Black-modell, illetve annak legnagyobb hátrányát, hogy a  $\sigma_{\alpha, \beta}$  volatilitást konstansnak feltételezi nem csak az idő, hanem a  $K$  fix kamat függvényében is.

Végezetül pedig bemutatjuk a második kamatsere opciót, a dolgozat központi objektumát, a swaption (swap option) opciót. Az európai típusú swaption jogosultjának joga van long IRS pozícióba lépni egy adott jövőbeli  $T_\alpha$  időpontban, a swaption lejáratkor. A swaption opcióhoz tartozó kamatsereügyletben a  $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$  időpontokban hajtjuk végre a kamatcseréket. A  $T_\beta - T_\alpha$  különbséget a swaption tenorjának szokás nevezni. A long IRS pozíció lejáratkori értéke

$$N \sum_{\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K), \quad (1.17)$$

ebből pedig a swaption  $t$ -beli értéke

$$ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \quad (1.18)$$

A cap opcióval ellentétben, a swaption nem bontható fel egyszerűbb opciók összegére. Azonban a swap ráta segítségével mégis alkalmazni tudjuk a Black-modellt, hiszen

$$\begin{aligned}
& ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ = \\
& ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i \right) \left( \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i} - K \right)^+ = \\
& ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i \right) \left( \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_{i-1}) - P(T_\alpha, T_i)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i} - K \right)^+ = \quad (1.19) \\
& ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i \right) \left( \frac{P(T_\alpha, T_\alpha) - P(T_\alpha, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i} - K \right)^+ = \\
& ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i \right) (S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - K)^+,
\end{aligned}$$

ahol a  $\sigma_{\alpha, \beta}$  volatilitást ismét a piaci adatokból nyerik ki, de nem egyenlő a cap opcióknál használt  $\sigma_{\alpha, \beta}$  volatilitással. Ebből tehát a swaption paritásos ára a Black-modell szerint

$$\text{SWPT}^{\text{Black}}(0, \mathcal{T}, \tau, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = \text{NBI}(K, S_{\alpha, \beta}(T_\alpha), \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_\alpha}) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i \right). \quad (1.20)$$

Ismét azt tapasztaljuk, hogy a Black-modell használható az árazásra, ugyanakkor ennek is megvannak a korlátjai, hiszen az itt használt  $\sigma_{\alpha, \beta}$  volatilitás sem tekinthető állandónak.

**1.0.11. Példa.** *Térjünk vissza az 1.0.9 Példában bemutatott kamatcsereügyletre. Tételezzük fel, hogy kötöttünk egy cap és egy swaption opciót és nézzük meg, hogy az ottani változó kamatláb alakulása mellett mekkora hozamot realizálnánk a jelenben. (1.2 ábra) A swaption esetében ez attól függ, hogy éltünk-e az opciós joggal félévvel ezelőtt. Ha igen, akkor ismét a névérték 0,46%-át, azaz 4600 eurót érünk el, ellenkező esetben nincs pénzáramlás. Ugyanakkor a cap esetében minden egyes kamatfizetési periódusnál eldönthetjük, hogy élünk-e az opciós jogunkkal. Ez természetesen pontosan akkor történik meg, amikor a lebegő kamat nagyobb a fix kamatnál, a példánkban 1,5 és 4,5 év múlva. A cap tehát a névérték 1,43%-át, azaz 14300 euró profitot hoz.*

T <sub>i</sub> -t	pénzáramlás		jelenérték			cap
	fix	változó	fix	változó	FRA	
0,5	3%	2,50%	2,97%	2,48%	-0,50%	0,97%
1,5	3%	4,00%	2,91%	3,88%	0,97%	
2,5	3%	2,50%	2,86%	2,38%	-0,48%	
3,5	3%	3,00%	2,80%	2,80%	0,00%	
4,5	103%	103,50%	94,22%	94,68%	0,46%	0,46%
				<b>swaption</b>	<b>0,46%</b>	<b>1,43%</b>

1.2. ábra. Kamatcsereopciók értéke

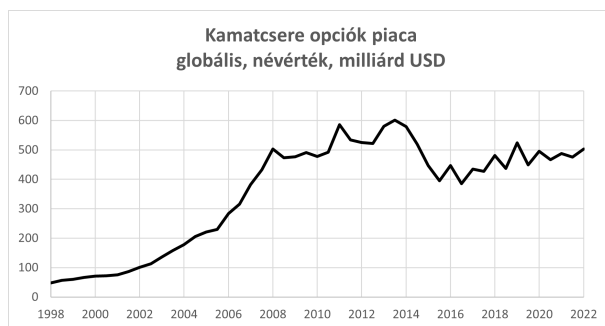
Fontos látni, hogy a cap és swaption opciók nagyon különböznek jellegüket tekintve: míg előbbit minden kamatfizetésnél lehívhatjuk, addig utóbbinál lejáratig el kell döntenünk, hogy élünk-e az opciós jogunkkal. Ennek ellenére az árazásuk mégis hasonló, hiszen a swap-ráta lehetővé teszi, hogy egy komplex kifizetés struktúra helyett egyetlen képzeletbeli pénzáramlással számoljunk.

## 2. fejezet

# Kamatcsere opciók modellezése

### 2.1. A kamatcsere opciók piaca

A kamatcsere opciók piacának résztvevői olyan szerződésekkel kereskednek, amelyek jogot adnak kötelezettség nélkül egy kamatcsereügyletbe való belépésre egy jövőbeli időpontban, egy előre meghatározott fix kamatlábon. Ennek a piacnak viszonylag rövid a történelme, hiszen az 1980-as években jelentek meg a különféle kamatcsere ügyletek elterjedésének köszönhetően. Eleinte tőzsdén kívül kereskedtek velük, de ahogy a piac résztvevői rájöttek azok előnyeire, elsősorban a kockázatkezelésben, úgy jelentek meg szabványosított szerződések is. Ez pedig nagyobb likviditást jelentett, ami tovább növelte a piac méretét. Manapság a swaption piac a globális pénzügyi piac egy jelentős szegmense, évente mintegy 500 milliárd dollár névértékben kereskednek ilyen opciókkal[2]:



2.1. ábra. Kamatcsere opciók piaca

A piac legfontosabb résztvevői különböző pénzügyi intézetek: bankok, eszközekezelők, hedge fundok. A kamatcsere opció alkalmas a változó kamatozású és a fix kamatozású hitel elcserélésére, éppen ezért a kamatlábak egyik irányú megváltozásából eredő kockázat ellen is védelmet képes nyújtani. A bankok körében ezért is ennyire elterjedt ez az opció, ami pedig pozitív hatással van a piac likviditására. A kamatcsere opciók piacának résztvevői a különféle kormányzati szervek, például a központi bankok és az állami vagyonalapok is. Ők a deviza tartalékjaikhoz kapcsolódó kamatkockázat kezelésére vagy kedvezőtlen piaci mozgások elleni fedezetként használhatják a kamatcsere opciókat. Az eszközekezelők, például a nyugdíjalapok és biztosítótársaságok is kockázatkezelésre használják ezt a piacot.

Ugyanakkor a különböző hedge fundok ezeket az eszközöket arra használják, hogy összetett kereskedési stratégiákkal hozamot érjenek el.

A swaption piac növekedését több tényező együttesen segítette. Egyrészt a kamatcsereügyletek elterjedése, másrészt egyre több elérhető pénzügyi modell jelent meg a piacon, mint például a Black-Scholes-modell. Ezek a modellek az opciók fair árának meghatározását segítettek a befektetőknek, ami tovább növelte a piac likviditását. A technológiai fejlődés is közrejátszott, hiszen az elektronikus, illetve online felületeken a kereskedés könnyebbé, gyorsabbá és olcsóbbá vált.

A két leggyakrabban kereskedett swaption az európai és az amerikai típusú. Míg előbbit egy előre rögzített fix időpontban hívhatjuk le, addig utóbbit előre rögzített időpontokban bármikor. Éppen ezért az amerikai típusú swaption nagyobb szabadságot ad a tulajdonosának, tehát az ára is magasabb az európai típusúnál. Adott opció árazásánál több paraméter is szerepet játszik, mint például a jelenlegi piaci kamatlábak, azok volatilitása és az opció lehívásáig hátralévő idő. Különböző matematikai modellek segítik a befektetőket, hogy meghatározzák az opció fair árát, ez pedig tovább növeli a piac likviditását. Az 1980-as években a Black-modellt alkalmazták, ennek pedig az a hozadéka, hogy a mai napig feltűntetik a Black-féle implikált volatilitást, vagyis azt a volatilitást, amellyel a Black-modell visszaadja a piacon megfigyelt árakat.

Azonban az 1980-as évek végén megjelent a pénzügyi piacon a volatilitásmosoly jelensége, ami azt ragadja meg, hogy Black-féle implikált volatilitás függ a kötési árfolyamtól, még hozzá úgy, hogy ATM pozíció körül minimális és ITM és OTM pozíciók irányába pedig egyaránt nő, ezzel pedig az implikált volatilitás egy mosolyt formál a kötési árfolyam függvényében. Az 1990-es és 2000-es években olyan modellek jelentek meg, amelyek képesek voltak visszaadni a volatilitásmosoly jelenségét.

Szakedolgozatom fő témája ezek közül az egyik legsikeresebb, azaz a SABR-modell. Ez a modell két nagy előnye miatt is igen népszerű. Egyrészt nagyon könnyen és hatékonyan implementálható, hiszen egy egzakt közelítőformulát ad a Black-féle implikált volatilitásra. Másrészt a piaci környezet megváltozása esetén a volatilitásmosolyt a megfelelő irányba tolja el, ez pedig a kockázatkezelésben bizonyul fontosnak. A SABR-modell megjelenésének köszönhetően a swaption piac a 2000-es években további növekedésen ment keresztül.

Ebben a fejezetben bemutatjuk a SABR-modell fontosabb tulajdonságait, továbbá az elődjait: a Black-, normál és lokális volatilitás modelleket.

## 2.2. A Black-modell

Egy európai vételi opció legegyszerűbb és legelterjedtebb árazási módszere a Black-Scholes-modellen[3] alapul. Ebben a modellben adott egy származtatott termék (pl. európai vételi opció egy részvényre), amelynek az árát szeretnénk megállapítani, egy kockázatmentes termék (pl. betét), illetve egy kockázatos termék (pl. részvény), amelyből az árazandó termék kockázata is származik.

A modell feltevései:

- az árfolyamdinamika egy geometriai Brown-mozgás konstans szórással;
- nincs arbitrázs;
- nincs tranzakciós költség;
- lehet shortolni;
- korlátlanul oszthatóak a termékek;
- létezik kockázatmentes  $r$  kamatláb, ami konstans;
- folytonos a kereskedés;
- az alaptermék lejáratig nem biztosít pénzáramot.

A Black-Scholes-modellben a betét és a részvény árfolyamát az alábbi sztochasztikus folyamatok írják le:

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)dt, \\ dS(t) &= rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

ahol  $W(t)$  egy Wiener-folyamat.

Legyen  $c$  a részvényre vonatkozó  $T$ -beli európai vételi opció  $t$ -beli értéke  $K$  kötési árfolyamon. A szokásos árazó formula szerint a kockázatmentes mértékben az opció fair árát a lejáratkori diszkontált kifizetésfüggvény adott időpontra vonatkozó feltételes várható értékével adhatjuk meg:

$$c(t, S(t)) = B(t)E \left( \frac{(S(T) - K)^+}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (2.2)$$

A Black-Scholes képlet megadja, hogy mennyi ennek az opciónak az értéke:

$$c(t, S(t)) = \Phi(d_1)S(t) - \Phi(d_2)e^{-r(T-t)}K, \quad (2.3)$$

ahol  $\Phi$  a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye, továbbá

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)T - t}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S(t)/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

A Black-modell [4] hasonló a Black-Scholes-modellhez annyi a különbséggel, hogy az alaptermék az  $F$  határidős árfolyam. Így tehát a Black-modell alkalmazható kamatcsereopciók árazására.

A forward mértékben<sup>1</sup> a határidős árfolyam egy drift-nélküli geometriai Brown-mozgást követ, azaz

$$dF(t) = \sigma_B F(t) dW(t), \quad F(t) = f \quad (2.5)$$

Ebben a modellben tehát a határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi opció értéke

$$c(t, f) = e^{-r(T-t)}(\Phi(d_1)f - \Phi(d_2)K), \quad (2.6)$$

ahol

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(f/K) + \sigma^2/2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(f/K) - \sigma^2/2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

**2.2.1. Definíció.** Azt a  $\sigma_B(f, K)$  volatilitást, amellyel a Black-modell visszaadja a piacon megfigyelt árat, *Black-féle implikált volatilitásnak* nevezzük.

<sup>1</sup>A  $T$ -forward mérték az a kockázatmentes mértékre abszolút folytonos mérték, amelyben az ármércse folyamat a bankbetét helyett a  $T$ -ben lejáró elemi kötvény jelenértéke.



## 2.3. A normál modell

A normál modellt 1900-ban Bachelier [1] alkotta meg. Ebben a modellben a határidős árfolyamot az alábbi aritmetikai Brown-mozgás írja le a forward mértékben:

$$dF(t) = \sigma_N dW(t). \quad (2.8)$$

Ennek a differenciálegyenletnek természetesen ismert a megoldása. Ha  $F(0) = f$ , akkor

$$F(t) = f + \sigma_N W(t). \quad (2.9)$$

A szokásos árazó formula segítségével az európai vételi opció  $K$  kötési árfolyam mellett:

$$c(t, f) = \exp(-r(T-t)) \left( f - K \right) \Phi \left( \frac{f - K}{\sigma_N \sqrt{T-t}} \right) + \sigma_N \sqrt{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(f - K)^2}{\sigma_N^2 (T-t)} \right) \quad (2.10)$$

Világos, hogy  $F(t)$  normális eloszlású valószínűségi változó, azonban ez azt is jelenti, hogy  $F(t)$  pozitív valószínűséggel negatív, ami igen ritka ezeknél a modelleknél. A jelenlegi negatív kamatkörnyezetben pont emiatt nő a népszerűsége, hiszen a Black-modell nem képes negatív árfolyamokat kezelni.

## 2.4. Lokális volatilitás modellek

A valós piacokon a Black-Scholes-modell feltételei nem, vagy csak részben teljesülnek, így a modell egyszerűsítéseinek ára a pontatlanság. Ráadásul az 1987-es new-york-i tőzsde összeomlása után megfigyelhetővé vált a volatilitásmosoly jelensége: az implikált volatilitás nem állandó a kötési árfolyam függvényében, az OTM és ITM pozíciók irányába egyaránt nő, ezzel pedig egy mosolyt formál.

Ezt a problémát próbálja kezelni a Black-Scholes-modell legkorábbi általánosításai, a lokális volatilitás modellek. A volatilitás itt nem konstans, függ az időtől és a véletlentől is, de csak az árfolyamon keresztül. Ez azt jelenti, hogy az alaptermék árfolyamának egyenlete egy kétváltozós determinisztikus  $\sigma(t, f)$  függvény segítségével adható meg:

$$dF(t) = \sigma(t, F(t)) F(t) dW(t). \quad (2.11)$$

Az egyik lekorábbi lokális volatilitás modell, ami a szakdolgozat szempontjából is releváns, a CEV-modell (constant elasticity of variance):

$$dF(t) = \sigma F^\beta(t) dW(t), \quad (2.12)$$

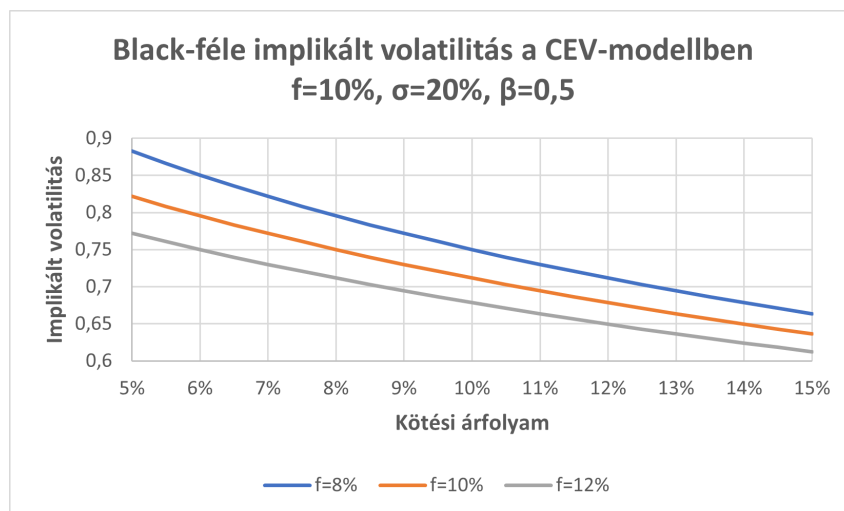
azaz  $\sigma(t, f) = \sigma f^{\beta-1}$  és  $0 \leq \beta \leq 1$ . A  $\beta = 0$  és  $\beta = 1$  paraméterválasztás visszaadja a normális és Black-modelleket. Abban az esetben, ha  $\sigma$  egyváltozós, akkor a Black-féle implikált volatilitásra ismert közelítő formula[16]:

$$\sigma_B(K, f) = \sigma \left( \frac{1}{2}(f + K) \right) \left( 1 + \frac{1}{24} \frac{\sigma'' \left( \frac{1}{2}(f + K) \right)}{\sigma \left( \frac{1}{2}(f + K) \right)} (f - K)^2 + \dots \right). \quad (2.13)$$

A CEV-modell esetében ez azt jelenti, hogy

$$\sigma_B(K, f) = \sigma \left( \frac{f + K}{2} \right)^{\beta-1} \left( 1 + \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)}{6} \right). \quad (2.14)$$

A lokális volatilitás csak az idő és a részvényár függvénye, ezért a Black-Scholes-modell számos tulajdonságát megőrzi. Ilyen például, hogy a piac teljes, a martingálmérték egyértelmű és ezen keresztül a piaci árak is, ugyanakkor általában nem adják vissza a volatilitásmosoly dinamikáját. Ez azt jelenti, hogy az alaptermék árfolyamának megváltozása esetén ellentétes irányú változást mutatnak a volatilitásmosolyban. Ezt láthatjuk a CEV-modell esetében is a 2.2 ábrán.



2.2. ábra. A volatilitásmosoly dinamikája a CEV-modellben

## 2.5. A SABR-modell

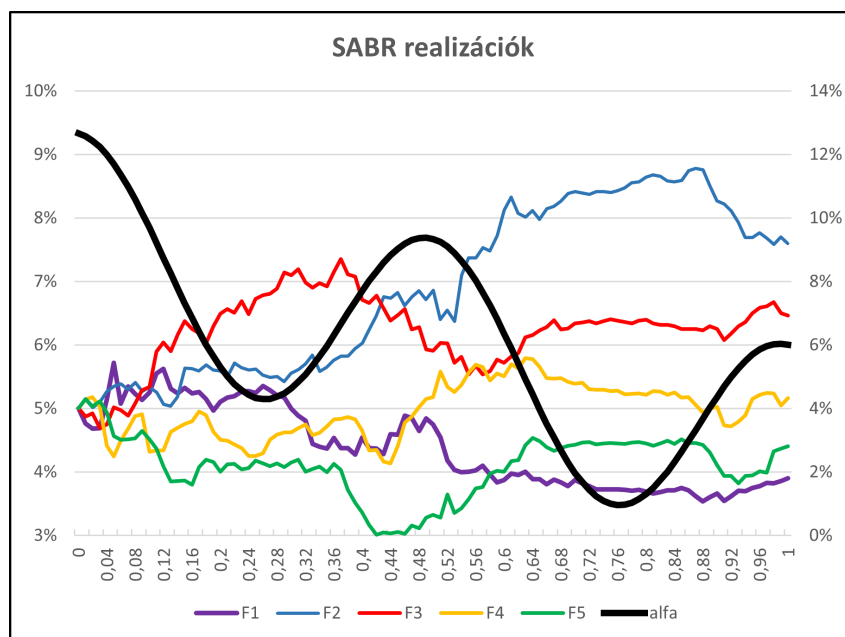
A SABR-modell egy sztochasztikus volatilitás modell, amelyet Hagan, Kumar, Lesniewski és Woodward [13] publikáltak 2002-ben. Az elnevezés a paramétereire vonatkozik:

Stochastic  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\rho$ . Céljuk egy olyan modell létrehozása volt, amely képes reprodukálni a volatilitás mosoly piacról ismert dinamikáját és ezáltal hedgelésre is alkalmas. Ez egy kétfaktoros modell, amely az alaptermék árfolyamát és annak sztochasztikus volatilitását írja le a forward mérték szerint:

$$\begin{aligned} dF(t) &= \alpha(t)F(t)^\beta dW_1(t), & F(0) &= f \\ d\alpha(t) &= \nu\alpha(t)dW_2(t), & \alpha(0) &= \alpha_0, \\ dW_1(t)dW_2(t) &= \rho dt. \end{aligned} \tag{2.15}$$

**2.5.1. Példa.** Nézzük meg  $\alpha$  szerepét az alaptermék árfolyamának változásában. Tegyük fel, hogy  $\alpha$  pályája szinuszos,  $\rho = 0$ , és  $\beta = 0,5$ . (2.3 ábra)

Azt tapasztaljuk, hogy  $t = 0,25$  és  $t = 0,75$  körül mind az öt trajektória ellaposodik, éppen, amikor  $\alpha$  a szinusz hullám alján van. Ugyanakkor a szimuláció elején és közepén az árfolyamok sokkal volatilisabbak, ez pedig egybeesik a szinusz hullám csúcaival. Valóban azt tapasztaljuk, hogy  $\alpha$  a volatilitásnak feleltethető meg.



2.3. ábra. Az árfolyam alakulása a SABR-modellben

Ebben az alfejezetben csak a lényeges eredményeket mutatjuk be, a részletes számítások megtalálhatóak a 3. fejezetben.

Legyen  $V(t, f, \alpha_0)$  egy európai vételi opció értéke a  $t$  időpontban, ha  $F(t) = f$  és  $\alpha(t) = \alpha_0$ .

Legyen  $T_{ex}$  az opció lehívásának időpontja,  $T_{set}$  az elszámolás időpontja,  $K$  pedig a kötési árfolyam. Az  $(F(s), \alpha(s))$  kétdimenziós valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye legyen  $p(t, f, \alpha_0, s, \cdot, \cdot)$ . Ekkor az opció értéke a  $t$  időpontban

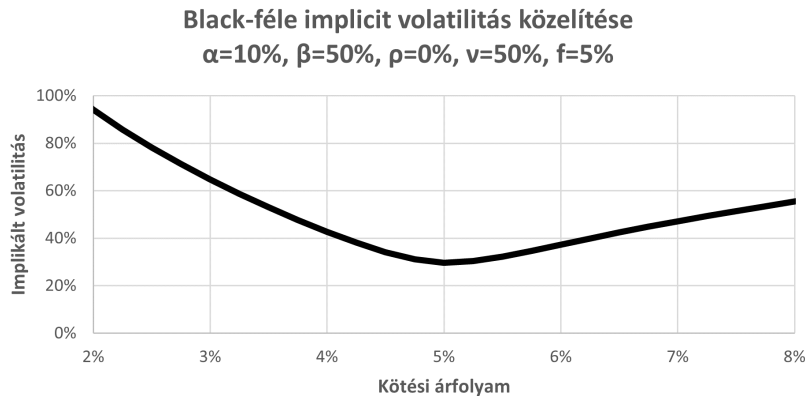
$$\begin{aligned} V(t, f, \alpha_0) &= D(t, T_{set}) \cdot E \left( (F(T_{ex}) - K)^+ | F(t) = f, \alpha(t) = \alpha_0 \right) \\ &= e^{-r(T_{set}-t)} \cdot \int_0^\infty \int_K^\infty (F - K) p(t, f, \alpha_0, T_{ex}, F, A) dF dA. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A Black-moddellel ellentétben a  $p$  sűrűségfüggvényt nem tudjuk meghatározni, ezért egy ún. szinguláris perturbációs eljárásra van szükségünk. Ez azt jelenti, hogy felírunk  $p$ -re egy differenciálegyenletet, amit utána közelítünk olyan differenciálegyenlettel, amit már meg tudunk oldani. Ennek az új differenciálegyenletnek a megoldása közelítése lesz a  $p$  sűrűségfüggvénynek. Az eljárás során az opció fair árát integrál alakban ki tudjuk fejezni. Ami ennél is érdekesebb az az, hogy a Black-féle implikált volatilitást is meg tudjuk határozni az árazás során, ugyanis a SABR-modell  $\beta = 0, \nu = 0$  paraméterekkel visszaadja a Black-modellt. Tehát azt kapjuk a SABR-modell segítségével, hogy a Black-féle implikált volatilitás közelítő formulája

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_B(f, K) &= \frac{\alpha_0}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 f/K} \cdot \left( \frac{\zeta}{x(\zeta)} \right) \\ &\quad \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha_0^2}{24(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \tau_{ex} \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ahol

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha_0} (fK)^{(1-\beta)/2} \log f/K, \quad x(\zeta) = \log \left( \frac{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1 - \rho} \right). \quad (2.18)$$

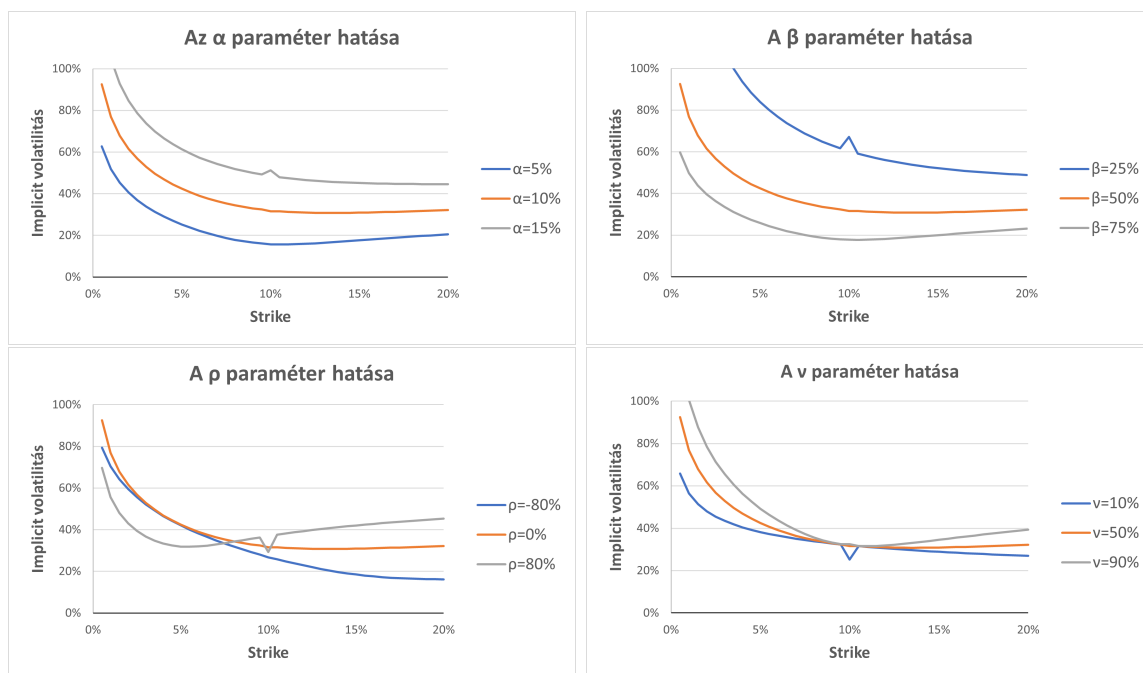


2.4. ábra. Volatilitásmosoly a SABR-modellben

Ez a formula meglepően hatékonynak bizonyul a Black-féle implikált volatilitás közelítésében. A képlet nagyon összetett, ezért a következő alfejezetben részletesen is megvizsgáljuk, hogy a modell egyes paraméterei hogyan változtatják meg az implikált volatilitást. Egy fontos dolog azonban már most látszódik: amint megvannak a modell paraméterei, onnantól egyszerűen megtudjuk határozni az implikált volatilitást tetszőleges kötési árfolyam esetén.

## 2.6. A volatilitásmosoly a SABR-modellben

A lokális volatilitás modellek nem képesek lekövetni a volatilitásmosoly dinamikáját, ezért hedgelésre sem alkalmasak. A SABR-modell nagy erőssége, hogy megoldást nyújt erre a problémára. Először azt vizsgáljuk meg, hogy a SABR-modell négy paramétere ( $\alpha_0, \beta, \rho, \nu$ ) milyen hatással van a volatilitásmosolyra. Ábrák segítségével mutatjuk be, hogy az egyes paraméterek növelése és csökkentése hogyan változtatja meg a volatilitásmosolyt. Legyen kezdetben  $\alpha_0 = 10\%$ ,  $\beta = 50\%$ ,  $\rho = 0\%$ ,  $\nu = 50\%$ .



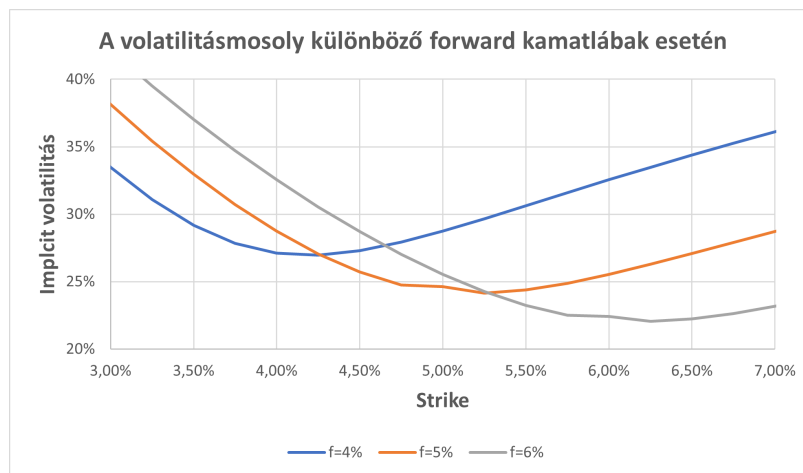
2.5. ábra. A SABR-modell paraméterei és a volatilitásmosoly közötti kapcsolat

Azt tapasztaljuk, hogy minél nagyobb az  $\alpha_0$  paraméter annál nagyobb lesz az implikált

volatilitás is. Ez persze nem meglepő, hiszen az  $\alpha_0$  éppen szórásnak feleltethető meg. A  $\beta$  paraméternek pont fordított hatása van, hiszen egy aritmetikai Brown-mozgás ( $\beta = 0$ ) sokkal volatilisabb egy geometriai Brown-mozgásnál ( $\beta = 1$ ). A  $\rho$  paraméter a két Wiener-folyamat közötti korrelációt jellemzi. Azt vesszük észre, hogy a korreláció befolyásolja a mosoly alakját, nagyobb  $\rho$  értékek balra döntik meg a mosolyt. A  $\nu$  paraméter, vagyis a volatilitás volatilitása pedig a mosoly alakját szabályozza. Minél kisebb a  $\nu$ , a mosoly annál jobban simul rá egy egyenesre, illetve nagyobb  $\nu$  értékek esetén a mosoly jobban kirajzolódik.

A lokális volatilitás modellek talán legnagyobb gyengesége, hogy rossz irányba jelzik előre a volatilitásmosoly megváltozását, ha változik a pillanatnyi határidős kamatláb. Ezzel szemben a SABR-modell közelítőformulája visszaadja a helyes dinamikákat. Ez a tulajdonsága a hedgelésre is alkalmassá teszi.

Vessünk egy pillantást a volatilitásmosolyra. Azt tapasztaljuk, hogy ha  $f$  csökken, akkor a volatilitásmosoly balra tolódik, míg nagyobb  $f$  értékekre jobbra mozdul el. Pontosan ezt akartuk, hiszen ezt mutatják az empirikus adatok.



2.6. ábra. A volatilitásmosoly dinamikája

## 3. fejezet

# Az eredeti SABR-modell

A SABR-modell egy sztochasztikus volatilitás modell, amelyet Hagan, Kumar, Lesniewski és Woodward [13] publikáltak 2002-ben. Céljuk a volatilitásmosoly és annak helyes dinamikáinak replikálása volt. Ez egy kétfaktoros modell, amely az  $F$  határidős árfolyamát és annak  $\alpha$  sztochasztikus volatilitását írja le a forward mértékben:

$$\begin{aligned}dF(t) &= \alpha(t)F(t)^\beta dW_1(t), & F(0) &= f \\d\alpha(t) &= \nu\alpha(t)dW_2(t), & \alpha(0) &= \alpha_0, \\dW_1(t)dW_2(t) &= \rho dt,\end{aligned}\tag{3.1}$$

ahol  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $\alpha_0, \nu > 0$  és  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Jourdain[18] megmutatta,  $\beta < 1$  esetén  $F(t)$  martingál, továbbá  $\beta = 1$  esetén  $F(t)$  pontosan akkor martingál, ha  $\rho \leq 0$ .

Érdeemes megjegyezni, hogy  $\nu = 0$  és  $\beta = 1$  esetén az árfolyam dinamika egy geometriai Brown-mozgás<sup>1</sup>, míg  $\nu = 0$  és  $\beta = 0$  esetén pedig egy aritmetikai Brown-mozgás<sup>2</sup>. Ebben a két esetben ismert zárt formula európai vételi jog árára: előbbinél a Black-modell, utóbbi a normál modellt kapjuk vissza. Általában pedig a call opció árára az ún. szinguláris perturbációs eljárással adhatunk aszimptotikusan pontos közelítő formulát.

Európai vételi jog árazása a SABR-modellben nagyon hasonló módon történik, mint a Black-Scholes-modellben: tekintünk az alaptermékre szóló európai vételi opciót, annak értékére felírunk egy differenciálegyenletet, majd megkeressük annak megoldását. Annyi az eltérés és emiatt a nehézség is, hogy nem ismert explicit megoldása a differenciálegyenletnek, ezért közelítő eljárásokra van szükség. Természetesen a Black-Scholes-modellben

---

<sup>1</sup>A  $dF(t) = \alpha_0 F(t) dW_1(t)$  differenciálegyenletű geometriai Brown-mozgás a Black-modellt adja vissza.

<sup>2</sup>A  $dF(t) = \alpha_0 dW_1(t)$  aritmetikai Brown-mozgás pedig a normál modellt jelenik meg.

az árazást replikáló portfólió kialakításával is elvégezhetjük, ennek azonban nem ismert megfelelője a SABR-modellben.

A menetrend a következő: megadjuk az európai vételi opció árát a szokásos árazó formulával, felírjuk a feltételes várható értéket integrálással, ahol az integrandus kielégít egy differenciálegyenletet, amelynek azonban nem ismert az explicit megoldása. Ezért előállítunk egy aszimptotikusan pontos megoldást az ún. szinguláris perturbációs eljárás segítségével. A módszer lényege, hogy közelítjük a differenciálegyenletet egy olyanal, amit már meg tudunk oldani. Ennek az új differenciálegyenletnek a megoldása lesz az eredeti differenciálegyenlet közelítése. Látni fogjuk, hogy ebből a formulából hogyan számíthatjuk ki a Black-modell implikált volatilitását.

### 3.1. Az árazó formula

Legyen  $V(t, f, \alpha_0)$  a határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi jog értéke a  $t$  időpontban, ha  $F(t) = f$  és  $\alpha(t) = \alpha_0$ . Legyen  $T_{ex}$  az opció lehívásának időpontja,  $T_{set}$  az elszámolás időpontja,  $K$  pedig a kötési árfolyam. Az  $(F(s), \alpha(s))$  kétdimenziós valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye legyen  $p(t, f, \alpha_0, s, \cdot, \cdot)$ . (Feltesszük, hogy  $F(s)$  és  $\alpha(s)$  is abszolút folytonos eloszlású.) Ekkor az opció értéke a  $t$  időpontban

$$\begin{aligned} V(t, f, \alpha_0) &= D(t, T_{set}) \cdot E((F(T_{ex}) - K)^+ | F(t) = f, \alpha(t) = \alpha_0) \\ &= e^{-r(T_{set}-t)} \cdot \int_0^\infty \int_K^\infty (F - K)p(t, f, \alpha_0, T_{ex}, F, A)dFdA. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A diszkontfaktor csak egy szorzó tényező, ezért csak a kettős integrálra fókuszálunk:

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = \int_0^\infty \int_K^\infty (F - K)p(t, f, \alpha_0, T_{ex}, F, A)dFdA. \quad (3.3)$$

Tetszőleges  $t < T_{ex}$  esetén az árazó formula

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = (F - K)^+ + \int_0^\infty \int_K^\infty \int_t^{T_{ex}} (F - K)p_s(t, f, \alpha_0, s, F, A)dsdFdA \quad (3.4)$$

alakra hozható. Ezután felírjuk az integrálban szereplő  $p_s$  parciális deriváltra a Fokker-Planck egyenletet.

**3.1.1. Tétel** (Fokker[12], Planck[20]). *Tekintsük az alábbi többdimenziós sztochasztikus differenciálegyenletet*

$$dX(t) = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad (3.5)$$



ahol  $X(t)$  és  $\mu(X(t), t)$   $N$ -dimenziós véletlen folyamatok,  $\sigma(X(t), t)$   $N \times M$ -es mátrix és  $W(t)$   $M$ -dimenziós Wiener-folyamat. Legyen  $p(x, t)$  az  $X(t)$  sűrűségfüggvénye. Ekkor

$$\frac{dp(x, t)}{dt} = - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dx_i} (\mu_i(x, t)p(x, t)) + \frac{d^2}{dx_i dx_j} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (D_{ij}(x, t)p(x, t)), \quad (3.6)$$

ahol  $D = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ .

Az  $X(s) = (F(s), \alpha(s))$  és  $C(F) = F^\beta$  helyettesítésekkel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{1}{2}A^2[C^2(F)p]_{FF} + \rho\nu[A^2C(F)p]_{FA} + \frac{1}{2}\nu^2[A^2p]_{AA}, \quad \text{ha } s > t \\ p &= \delta(F - f)\delta(A - \alpha_0), \quad \text{ha } s = t, \end{aligned} \quad (3.7)$$

ahol  $\delta$  az origóra koncentrált Dirac-mérték<sup>3</sup>. Az árazó formulát később használni fogjuk a normál és Black-modellek esetén is, ezért vezettük be a  $C(F)$  jelölést.

Mivel  $\alpha(s)$  lognormális eloszlású, aminek véges a várható értéke és szórása, ezért az  $(F, \alpha)$  együttes sűrűség függvénye  $A^2$ -nél gyorsabban tart nullához, ha  $A \rightarrow \infty$ . Ezért

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [C(F)A^2p]_{FA} &= [[C(F)A^2p]_F]_{A=0}^{A=\infty} = 0, \\ \int_0^\infty [A^2p]_{AA} &= [[A^2p]_A]_{A=0}^{A=\infty} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ezt beírjuk a 3.7 egyenletbe és az árazó formulára azt kapjuk, hogy

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = (F - K)^+ + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_K^\infty \int_t^{T_{ex}} (F - K)A^2[C^2(F)p]_{FF} ds dF dA. \quad (3.9)$$

Az integrálok sorrendjét felcserélve az árazó formula tovább egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, f, \alpha_0) &= (F - K)^+ + \frac{1}{2}C^2(K) \int_t^{T_{ex}} \int_0^\infty A^2p(t, f, \alpha_0, s, K, A) dA ds \\ &= (F - K)^+ + \frac{1}{2}C^2(K) \int_t^{T_{ex}} P(t, f, \alpha_0, s, K) ds, \end{aligned} \quad (3.10)$$

ahol

$$P(t, f, \alpha, s, K) = \int_0^\infty A^2p(t, f, \alpha, s, K, A) dA. \quad (3.11)$$

Ezután felhasználjuk a hátráló Kolmogorov-egyenletet, hogy az árazó formulát tovább alakítsuk. Most rögzítjük  $s$  értékét és a  $t$  értékét tekintjük változónak.

<sup>3</sup>Legyen  $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$  mérhető tér úgy, hogy  $x \in M$ . Ekkor az  $x$ -re koncentrált Dirac-delta mérték olyan, hogy tetszőleges  $A \in \mathcal{A}$  esetén  $\delta(A) = 1$ , ha  $x \in A$  és  $\delta(A) = 0$ , ha  $x \notin A$ .

**3.1.2. Tétel** (Kolmogorov [19]). *Tekintsük az alábbi többdimenziós sztochasztikus differenciálegyenletet*

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad (3.12)$$

ahol  $X(t)$  és  $\mu(X(t), t)$   $N$ -dimenziós véletlen folyamatok,  $\sigma(X(t), t)$   $N \times M$ -es mátrix és  $W(t)$   $M$ -dimenziós Wiener-folyamat. Tegyük fel, hogy  $f$  kétszer folytonosan differenciálható valós számokon értelmezett  $N$ -változós függvény.

Legyen  $u(t, x) = E(f(X(t)|X(0) = x))$ . Ekkor  $u$  kielégíti a

$$-\frac{du(x, t)}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \mu_i(x, t) \frac{d}{dx_i} u(x, t) \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( D_{ij}(x, t) \frac{d^2}{dx_i dx_j} u(x, t) \right), \quad (3.13)$$

egyenletet az

$$u(0, x) = f(x) \quad (3.14)$$

kezdeti feltétellel, ahol  $D = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ .

Ekkor  $P$ -re felírjuk a hátráló Kolmogorov-egyenletet, az  $f(x) = x^2$  választással, tehát

$$\begin{aligned} P_t + \frac{1}{2}\alpha_0^2 C^2(f)P_{ff} + \rho\nu\alpha_0^2 C(f)P_{f\alpha_0} + \frac{1}{2}\nu^2\alpha_0^2 P_{\alpha_0\alpha_0} &= 0, \quad \text{ha } t < s, \\ P &= \alpha_0^2 \delta(f - K), \quad \text{ha } t = s. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vegyük észre, hogy  $P$  külön-külön nem függ az  $s$  és  $t$  változóktól, csak az  $s - t$  különbségtől. Ezért vezessük be a  $\tau = s - t$  és a  $\tau_{ex} = T_{ex} - t$  változókat.

**3.1.3. Tétel** (Hagan et al.[13]). *A határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi opció értéke*

$$V(t, f, \alpha_0) = D(t, T_{set}) \left( (F - K)^+ + \frac{1}{2}C^2(K) \int_0^{\tau_{ex}} P(\tau, f, \alpha_0, K)d\tau \right), \quad (3.16)$$

ahol  $P$  kielégíti a

$$P_\tau = \frac{1}{2}\alpha_0^2 C^2(f)P_{ff} + \rho\nu\alpha_0^2 C(f)P_{f\alpha_0} + \frac{1}{2}\nu^2\alpha_0^2 P_{\alpha_0\alpha_0}, \quad \text{ha } \tau > 0 \quad (3.17)$$

egyenletet a

$$P = \alpha_0^2 \delta(f - K), \quad \text{ha } \tau = 0 \quad (3.18)$$

kezdeti feltétellel.

A 3.1.3 Tételben szereplő differenciálegyenletet az ún. szinguláris perturbációs eljárással oldjuk meg. A 3.17 egyenlethez keresünk olyan differenciálegyenletet, ami bizonyos értelemben közel van az eredetihez és ezt a differenciálegyenletet már meg tudjuk oldani. Ez a megoldás lesz a  $P$  közelítése. Azzal a feltevéssel élünk, hogy  $\alpha$  és  $\nu$  (tehát a volatilitás és a volatilitás volatilitása) is 0-hoz közeli ezt pedig az alábbi alakban írjuk fel:

$$\begin{aligned} dF(t) &= \varepsilon \alpha(t) C(F(t)) dW_1, & F(0) &= f \\ d\alpha(t) &= \varepsilon \nu \alpha(t) dW_2(t), & \alpha(0) &= \alpha_0, \\ dW_1(t) dW_2(t) &= \rho dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ezzel a paraméterezéssel a 3.1.3 Tétel is megváltozik.

**3.1.4. Tétel** (Hagan et al.[13]). *A határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi opció értéke*

$$V(t, f, \alpha_0) = D(t, T_{set}) \left( (F - K)^+ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 C^2(K) \int_0^{\tau_{ex}} P(\tau, f, \alpha_0, K) d\tau \right), \quad (3.20)$$

ahol  $P$  kielégíti a

$$P_\tau = \frac{1}{2} \alpha_0^2 \varepsilon^2 C^2(f) P_{ff} + \varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0^2 C(f) P_{f\alpha_0} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu^2 \alpha_0^2 P_{\alpha_0 \alpha_0}, \quad \text{ha } \tau > 0 \quad (3.21)$$

egyenletet a

$$P = \alpha_0^2 \delta(f - K), \quad \text{ha } \tau = 0 \quad (3.22)$$

kezdeti feltétellel.

A továbbiakban a 3.21 differenciálegyenletnek keresünk közelítő megoldását, méghozzá  $O(\varepsilon^2)$  hibával.

Térjünk át az  $f$  változóról a  $z$  változóra az alábbi egyenlettel:

$$z = \frac{1}{\varepsilon \alpha_0} \int_K^f \frac{dy}{C(y)}. \quad (3.23)$$

Továbbá legyen  $B(\varepsilon \alpha z) = C(f)$ . Ezzel a paraméterezéssel  $O(1)$  hibával a hővezetési egyenletet fogjuk kapni, amit a 3.1.5 Tételben látni is fogunk.

A parciális deriváltak is megváltoznak az új paraméterezés miatt:

$$\frac{\partial}{\partial f} \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon \alpha_0 C(f)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon \alpha_0 B(\varepsilon \alpha_0 z)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha_0} - \frac{z}{\alpha_0} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.24)$$

és ezáltal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial f^2} &\rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2 \alpha_0^2 B^2(\varepsilon \alpha_0 z)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon \alpha_0 \frac{B'(\varepsilon \alpha_0 z)}{B(\varepsilon \alpha_0 z)} \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \\
\frac{\partial^2}{\partial f \partial \alpha_0} &\rightarrow \frac{1}{\varepsilon \alpha_0 B(\varepsilon \alpha_0 z)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \alpha_0} - \frac{z}{\alpha_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \alpha_0^2} &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \alpha_0^2} - \frac{2z}{\alpha_0} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \alpha_0} + \frac{z^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2z}{\alpha_0^2} \frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

A kezdeti feltételt biztosító Dirac-mérték súlyozása is megváltozik:

$$\delta(f - K) = \delta(\varepsilon \alpha_0 z C(K)) = \frac{1}{\varepsilon \alpha_0 C(K)} \delta(z). \tag{3.26}$$

Végezetül legyen

$$\hat{P} = \frac{\varepsilon}{\alpha_0} C(K) P. \tag{3.27}$$

Ekkor az árazó formula is megváltozik, most már  $\hat{P}$  segítségével írjuk fel.

**3.1.5. Tétel.** *A határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi opció értéke*

$$V(\tau, f, \alpha_0) = D(t, T_{set}) \left( [f - K]^+ + \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_0 C(K) \int_0^{\tau_{ex}} \hat{P}(\tau, z, \alpha_0) d\tau \right), \tag{3.28}$$

ahol  $\hat{P}(\tau, z, \alpha_0)$  kielégíti a

$$\begin{aligned}
\hat{P}_\tau &= \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon \rho \nu z + \varepsilon^2 \nu^2 z^2) \hat{P}_{zz} - \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_0 \frac{B'}{B} \hat{P}_z + (\varepsilon \rho \nu - \varepsilon^2 \nu^2 z) \alpha_0 \hat{P}_{z\alpha_0} \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu^2 \left( \alpha_0^2 \hat{P}_{\alpha_0 \alpha_0} + 2\alpha_0 \hat{P}_{\alpha_0} \right), \quad \text{ha } \tau > 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

egyenletet a

$$\hat{P} = \delta(z), \quad \text{ha } \tau = 0. \tag{3.30}$$

kezdeti feltétellel.

Ha a 3.29 differenciálegyenletből elhagyjuk az  $O(1)$ -nél kisebb tagokat, akkor a hővezetési egyenletet kapjuk vissza:  $\hat{P}_\tau = \frac{1}{2} \hat{P}_{zz}$ . Ennek pedig ismert az explicit megoldása. A pontosabb becslésért  $O(\varepsilon^2)$  hibával oldjuk meg a differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_\tau &= \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon \rho \nu z + \varepsilon^2 \nu^2 z^2) \hat{P}_{zz} - \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_0 \frac{B'}{B} \hat{P}_z + \varepsilon \rho \nu \alpha_0 \hat{P}_{z\alpha_0}, \quad \text{ha } \tau > 0 \\
\hat{P} &= \delta(z), \quad \text{ha } \tau = 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

A továbbiakban újabb helyettesítésekkel és közelítésekkel az a célunk, hogy eltüntessük az  $\alpha_0$ -szerinti parciális deriváltakat, ugyanis ekkor a differenciálegyenletben csak a  $z$  változó

szerinti parciális deriváltak maradnak majd. Ez pedig azt jelenti, hogy  $\alpha_0$  paraméternek tekinthető és a differenciálegyenletet egyváltozósá redukáltuk.

Egy új változó definiálásával eltüntetjük a  $\frac{1}{2}\varepsilon a(B'/B)\hat{P}_z$  tagot. Legyen  $H(\tau, z, \alpha_0)$  olyan, hogy

$$\hat{P} = \sqrt{C(f)/C(K)}H \equiv \sqrt{B(\varepsilon\alpha_0 z)/B(0)}H. \quad (3.32)$$

$\hat{P}$  parciális deriváltjait kifejezzük  $H$  és parciális deriváltjainak segítségével, majd beírjuk a kapott kifejezéseket a 3.31 egyenletbe és elhagyjuk az  $O(\varepsilon^2)$ -nél kisebb tagokat:

$$\begin{aligned} \hat{P}_z &= \sqrt{B(\varepsilon\alpha_0 z)/B(0)} \left\{ H_z + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0 \frac{B'}{B} H \right\}, \\ \hat{P}_{zz} &= \sqrt{B(\varepsilon\alpha_0 z)/B(0)} \left\{ H_{zz} + \varepsilon\alpha_0 \frac{B'}{B} H_z + \varepsilon^2\alpha_0^2 \left[ \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} \right] H \right\} \\ \hat{P}_{z\alpha_0} &= \sqrt{B(\varepsilon\alpha_0 z)/B(0)} \left\{ H_{z\alpha_0} + \frac{1}{2}\varepsilon z \frac{B'}{B} H_z + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0 \frac{B'}{B} H_{\alpha_0} + \frac{1}{2}\varepsilon \frac{B'}{B} H \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ekkor pedig az árazó formula

$$\tilde{V}(\tau, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0 \sqrt{B(0)B(\varepsilon\alpha_0 z)} \int_0^{\tau_{ex}} H(\tau, z, \alpha_0) d\tau, \quad (3.34)$$

ahol  $H$  kielégíti a

$$\begin{aligned} H_\tau &= \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2) H_{zz} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0 \frac{B'}{B} (zH_z - H) \\ &+ \varepsilon^2\alpha_0^2 \left( \frac{1}{4} \frac{B''}{B} - \frac{3}{8} \frac{B'^2}{B^2} \right) H + \varepsilon\rho\nu\alpha_0 \left( H_{z\alpha_0} + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0 \frac{B'}{B} H_{\alpha_0} \right), \quad \text{ha } \tau > 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$H = \delta(z), \quad \text{ha } \tau = 0$$

differenciálegyenletet és kezdeti feltételt.

A helyettesítés miatt ismét megjelentek  $O(\varepsilon^2)$ -nél kisebb tagok. Ezeket ismét elhagyjuk és az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} H_\tau &= \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2) H_{zz} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0 \frac{B'}{B} (zH_z - H) \\ &+ \varepsilon^2\alpha_0^2 \left( \frac{1}{4} \frac{B''}{B} - \frac{3}{8} \frac{B'^2}{B^2} \right) H, \quad \text{ha } \tau > 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$H = \delta(z), \quad \text{ha } \tau = 0.$$

Eltüntetjük az  $\alpha_0$  szerinti parciális deriváltakat, ezért innentől  $\alpha_0$  tekinthető fix paraméternek. Ez az eredmény kulcsfontosságú, hiszen a problémát egydimenzióssá redukáltuk. A továbbiakban a  $H_z$  parciális deriváltra fókuszálunk. Az a célunk, hogy újabb közelítésekkel egy olyan differenciálegyenletet kapjunk, amit már meg tudunk oldani.

$O(\varepsilon)$  hibával  $B'(\varepsilon\alpha_0 z)/B(\varepsilon\alpha_0 z)$  és  $B''(\varepsilon\alpha_0 z)/B(\varepsilon\alpha_0 z)$  konstansok, ezért ezekre a hányadosokra definiáljuk az alábbi változókat:

$$b_1 = B'(\varepsilon\alpha_0 z_0)/B(\varepsilon\alpha_0 z_0), \quad b_2 = B''(\varepsilon\alpha_0 z_0)/B(\varepsilon\alpha_0 z_0), \quad (3.37)$$

valamely rögzített  $z_0$ -ra. Továbbá legyen

$$\hat{H} = e^{-\varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 b_1 z^2 / 4} H. \quad (3.38)$$

Ekkor a 3.1.3 árazó formula jelenlegi alakja:

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_0 \sqrt{B(0)B(\varepsilon\alpha_0 z)} e^{\varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 b_1 z^2 / 4} \int_0^{\tau_{ex}} \hat{H}(\tau, z) d\tau, \quad (3.39)$$

ahol  $\hat{H}$  kielégíti a

$$\hat{H}_\tau = \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2) \hat{H}_{zz} + \varepsilon^2 \alpha_0^2 \left( \frac{1}{4} b_2 - \frac{3}{8} b_1^2 \right) \hat{H} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 b_1 \hat{H} \quad \text{ha } \tau > 0 \quad (3.40)$$

differentiálegyenletet a

$$\hat{H} = \delta(z), \quad \text{ha } \tau = 0 \quad (3.41)$$

kezdeti feltétellel.

A  $z$  változóról áttérünk az  $x$  változó használatára, amit az alábbi egyenlet definiál:

$$x = \frac{1}{\varepsilon\nu} \int_0^{\varepsilon\nu z} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}} = \frac{1}{\varepsilon\nu} \log \left( \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2} - \rho + \varepsilon\nu z}{1 - \rho} \right).^4 \quad (3.42)$$

Ezzel a helyettesítéssel az árazó formula:

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_0 \sqrt{B(0)B(\varepsilon\alpha_0 z)} e^{\varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 b_1 z^2 / 4} \int_0^{\tau_{ex}} \hat{H}(\tau, x) d\tau, \quad (3.43)$$

ahol  $\hat{H}$  kielégíti a

$$\hat{H}_\tau = \frac{1}{2} \hat{H}_{xx} - \frac{1}{2} \varepsilon \nu I'(\varepsilon\nu z) \hat{H}_x + \varepsilon^2 \alpha_0^2 \left( \frac{1}{4} b_2 - \frac{3}{8} b_1^2 \right) \hat{H} + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 b_1 \hat{H}, \quad \text{ha } \tau > 0 \quad (3.44)$$

$$\hat{H} = \delta(x), \quad \text{ha } \tau = 0.$$

egyenleteket egyenletet és kezdeti feltételt, ahol

$$I(\zeta) = \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}. \quad (3.45)$$

---

<sup>4</sup>Ekkor persze  $\varepsilon\nu z = \sinh \varepsilon\nu x - \rho(\cosh \varepsilon\nu x - 1)$ .

Az utolsó lépés  $Q$  definiálása az alábbi egyenlettel:

$$\hat{H} = I^{1/2}(\varepsilon\nu z(x))Q = (1 - 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2)^{1/4} Q. \quad (3.46)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \hat{H}_x &= I^{1/2}(\varepsilon\nu z) \left[ Q_x + \frac{1}{2}\varepsilon\nu I'(\varepsilon\nu z)Q \right] \\ \hat{H}_{xx} &= I^{1/2}(\varepsilon\nu z) \left[ Q_{xx} + \varepsilon\nu I'Q_x + \varepsilon^2\nu^2 \left( \frac{1}{2}I''I + \frac{1}{4}I'I' \right) Q \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

továbbá a 3.1.3 árazó formula jelenlegi alakja:

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0\sqrt{B(0)B(\varepsilon\alpha_0 z)}I^{1/2}(\varepsilon\nu z)e^{\frac{1}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0 b_1 z^2} \int_0^{\tau_{ex}} Q(\tau, x)d\tau, \quad (3.48)$$

ahol  $Q$  kielégíti a

$$\begin{aligned} Q_\tau &= \frac{1}{2}Q_{xx} + \varepsilon^2\nu^2 \left( \frac{1}{4}I''I - \frac{1}{8}I'I' \right) Q + \varepsilon^2\alpha_0^2 \left( \frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2 \right) Q + \frac{3}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0 b_1 Q, \quad \text{ha } \tau > 0 \\ Q &= \delta(x), \quad \text{ha } \tau = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

egyenletet és kezdeti feltételt.

Ismét  $O(\varepsilon)$  hibával számolva, az  $I(\varepsilon\nu z), I'(\varepsilon\nu z), I''(\varepsilon\nu z)$  változók konstansok, ezért  $z_0$  helyettesítéssel kicserélhetjük őket az  $I(\varepsilon\nu z_0), I'(\varepsilon\nu z_0), I''(\varepsilon\nu z_0)$  értékekre. Legyen továbbá

$$\kappa = \nu^2 \left( \frac{1}{4}I''(\varepsilon\nu z_0)I(\varepsilon\nu z_0) - \frac{1}{8}[I'(\varepsilon\nu z_0)]^2 \right) + \alpha_0^2 \left( \frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2 \right) + \frac{3}{4}\rho\nu\alpha_0 b_1. \quad (3.50)$$

Bármennyire is bonyolultnak tűnik,  $\kappa$  egy konstans érték. A SABR-modell szempontjából kulcsfontosságú részhez értünk, ugyanis  $O(\varepsilon^2)$  hibával számolva a differenciálegyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} Q_\tau &= \frac{1}{2}Q_{xx} + \varepsilon^2\kappa Q, \quad \text{ha } \tau > 0, \\ Q &= \delta(x), \quad \text{ha } \tau = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ennek a differenciálegyenletnek pedig ismert az explicit megoldása:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau} e^{\varepsilon^2\kappa\tau}. \quad (3.52)$$

Emlékezzünk vissza mi volt a SABR-modell megalkotóinak a célja: a Black-féle implikált volatilitásmosoly meghatározása. Ennek érdekében nem az explicit megoldást használjuk, hanem hatványsorba fejtjük és elhagyjuk az  $O(\varepsilon^2)$ -nél kisebb tagokat:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\kappa\varepsilon^2\tau + \dots\right)^{3/2}}. \quad (3.53)$$

A szokásos hatványsor helyett a kitevőben  $\frac{3}{2}$  szerepel, ami kulcsfontosságú lesz a következő alfejezetben az implikált volatilitás meghatározásában.

Tehát sikeresen meghatároztuk az árazó formula közelítését:

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_0 \sqrt{B(0)B(\varepsilon \alpha_0 z)} I^{1/2}(\varepsilon \nu z) e^{\frac{1}{4} \varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 b_1 z^2} \int_0^{\tau_{ex}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau} e^{\varepsilon^2 \kappa \tau} d\tau. \quad (3.54)$$

Egyetlen lépés maradt már csak, mégpedig alkalmas helyettesítéssel egy kezelhetőbb alak előállítása. Vegyük észre, hogy

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{1}{2} \frac{f - K}{x} \int_0^{\tau_{ex}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau} e^{\varepsilon^2 \theta} e^{\varepsilon^2 \kappa \tau} d\tau, \quad (3.55)$$

ahol

$$\varepsilon^2 \theta = \log \left( \frac{\varepsilon \alpha_0 z}{f - K} \sqrt{B(0)B(\varepsilon \alpha_0 z)} \right) + \log \left( \frac{x I^{1/2}(\varepsilon \nu z)}{z} \right) + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 b_1 z^2. \quad (3.56)$$

Az 3.1.3 árazó formulát  $O(\varepsilon^2)$  hiba erejéig határoztuk meg, ezért felhasználhatjuk, hogy

$$e^{\varepsilon^2 \kappa \tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3} \kappa \varepsilon^2 \tau\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(1 - 2\varepsilon^2 \tau \frac{\theta}{x^2}\right)^{3/2}} + O(\varepsilon^4). \quad (3.57)$$

Ebből pedig azt kapjuk, hogy

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{1}{2} \frac{f - K}{x} \int_0^{\tau_{ex}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau} e^{\varepsilon^2 \theta} \frac{d\tau}{\left(1 - \frac{2\tau}{x^2} \varepsilon^2 \theta\right)^{3/2}}. \quad (3.58)$$

Legyen

$$q = \frac{x^2}{2\tau}. \quad (3.59)$$

Ekkor az integrálásban áttérünk erre az új változóra és megkapjuk az 3.1.3 árazó formula végső alakját:

$$\tilde{V}(t, f, \alpha_0) = [f - K]^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2}{2\tau_{ex}}}^{\infty} \frac{e^{-q+\varepsilon^2 \theta}}{(q - \varepsilon^2 \theta)^{3/2}} dq. \quad (3.60)$$

A végső formulát megkapjuk az integrálás határainak eltolásával.



**3.1.6. Tétel** (Hagan et al.[13]). *A SABR-modellben a határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi jog ára*

$$V(t, f, \alpha_0) = D(t, T_{set}) \left( [f - K]^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2}{2\tau_{ex}} - \varepsilon^2\theta}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq \right), \quad (3.61)$$

$O(\varepsilon^2)$  hibával, ahol

$$\varepsilon^2\theta = \log \left( \frac{\varepsilon\alpha_0 z}{f - K} \sqrt{B(0)B(\varepsilon\alpha_0 z)} \right) + \log \left( \frac{xI^{1/2}(\varepsilon\nu z)}{z} \right) + \frac{1}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0 b_1 z^2. \quad (3.62)$$

Sikeresen meghatároztuk az árazó formulát, a következő fejezetben pedig az implikált volatilitásra adunk közelítő formulát. Természetesen ez a formula még nincs kifejezve az eredeti paraméterekkel, ettől most eltekintünk, hiszen minden új paraméter jóldefiniált, így alkalmazni tudjuk az árazó formulát. Az implikált volatilitást ugyanakkor ki fogjuk fejezni az eredeti paraméterekkel, hogy könnyedén megkapjuk a volatilitásmosolyt.

## 3.2. A normál implikált volatilitás

Az előző alfejezetben meghatároztuk a határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi opció közelítő árát, ami viszont még függ  $\varepsilon$  megválasztásától. Ebben az alfejezetben a célunk az implikált volatilitás kiszámítása normál modellben.

Ahogy már korábban is említettük (ld. 3.7 egyenlet), az árazó formulát általános  $C(f)$  függvénnyel határoztuk meg, így speciális esetekben is fel tudjuk írni az európai vételi opció árát. Kezdjük is a normál modellel. Ekkor

$$dF(t) = \sigma_N dW(t), \quad F(0) = f, \quad (3.63)$$

ahol  $\sigma_N$  konstans volatilitás. Ebben a modellben  $C(f)$  azonosan 1. Az árazó formula (3.1.6 Tétel) szerint az opció értékre

$$\hat{V}(t, f) = [f - K]^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2}{2\tau_{ex}} - \varepsilon^2\theta}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq \quad (3.64)$$

Ugyanakkor a 2.10 egyenletet parciális integrálással az alábbi alakra hozhatjuk:

$$\hat{V}(t, f) = [f - K]^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(f-K)^2}{2\sigma_N^2 \tau_{ex}}}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq. \quad (3.65)$$

Tehát kétféle paraméterezés mellett (egyszer általánosan, egyszer pedig a normál modell esetében) is előállítottuk az európai vételi opció árának közelítését. A két ár pontosan akkor egyezik meg, ha az integrálások alsó határai megegyeznek, azaz

$$\frac{x^2}{2\tau_{ex}} - \varepsilon^2\theta = \frac{(f-K)^2}{2\sigma_N^2\tau_{ex}}, \quad (3.66)$$

ezt pedig átrendezve megkapjuk  $\sigma_N$  értékét, amit  $O(\varepsilon^2)$  hibával hatványsorba fejtünk:

$$\sigma_N = \frac{f-K}{x} \frac{1}{\left(1 - 2\varepsilon^2 \frac{\theta}{x^2} \tau_{ex}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f-K}{x} \left\{ 1 + \varepsilon^2 \frac{\theta}{x^2} \tau_{ex} + \dots \right\}. \quad (3.67)$$

Ez egyelőre egy nehezen kezelhető formula, ezért közelítéssel visszavezetjük a kiinduló változóinkra. Korábban  $\varepsilon^2\theta$  értékét egy három tagú összegként definiáltuk (ld. 3.56 egyenlet), az összeg tagjait külön-külön fogjuk becsülni hatványsorba fejtéssel. Tehát az  $f_{av} = \sqrt{fK}$  jelölést használva

$$\sigma_N = \left( \frac{f-K}{z} \right) \left( \frac{z}{x(z)} \right) \{ 1 + \varepsilon^2 (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \tau_{ex} + \dots \}, \quad (3.68)$$

ahol

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\phi_1 &= \frac{1}{z^2} \log \left( \frac{\varepsilon\alpha_0 z}{f-K} \sqrt{C(f)C(K)} \right) = \frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24} \varepsilon^2 \alpha_0^2 C^2(f_{av}) + \dots \\ \varepsilon^2\phi_2 &= \frac{1}{z^2} \log \left( \frac{x}{z} [1 - 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2]^{1/4} \right) = \frac{2 - 3\rho^2}{24} \varepsilon^2 \nu^2 + \dots \\ \varepsilon^2\phi_3 &= \frac{1}{4} \varepsilon^2 \rho \alpha_0 \nu \frac{B'(\varepsilon\nu z_0)}{B(\varepsilon\nu z_0)} = \frac{1}{4} \varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 \gamma_1 C(f_{av}) + \dots \\ \gamma_1 &= \frac{C'(f_{av})}{C(f_{av})}, \quad \gamma_2 = \frac{C''(f_{av})}{C(f_{av})}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Még szükségünk van a szorzat első két tényezőjének átalakítására:

$$\frac{f-K}{z} = \frac{\varepsilon\alpha_0(f-K)}{\int_K^f \frac{dy}{C(y)}} = \left( \frac{1}{f-K} \int_K^f \frac{dy}{\varepsilon\alpha_0 C(y)} \right)^{-1}, \quad (3.70)$$

$$\frac{z}{x(z)} = \frac{\zeta}{\log \left( \frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2-\rho+\zeta}}{1-\rho} \right)}, \quad (3.71)$$

ahol

$$\zeta = \varepsilon\nu z = \frac{\nu}{\alpha_0} \int_K^f \frac{dy}{C(y)} = \frac{\nu}{\alpha_0} \frac{f-K}{C(f_{av})} (1 + O(\varepsilon^2)). \quad (3.72)$$

Azt érdemes megjegyezni, hogy általában nem eredményez jelentős javítást a  $\phi_1, \phi_2,$  és  $\phi_3$  változók használata, mivel 0-hoz közeli az értékük.

Most már rendelkezésre áll a normál implikált volatilitás közelítő formulája a SABR-modellben.

**3.2.1. Tétel** (Hagan et al.[13]). *Tegyük fel, hogy a forward árfolyam dinamikája adott a SABR-modell segítségével:*

$$\begin{aligned} d\hat{F} &= \varepsilon\hat{\alpha}_0 C(\hat{F})dW_1, & \hat{F}(0) &= f \\ d\hat{\alpha}_0 &= \varepsilon\nu\hat{\alpha}_0 dW_2, & \hat{\alpha}_0(0) &= \alpha_0 \\ dW_1 dW_2 &= \rho dt, \end{aligned}$$

*Ekkor az európai vételi opcióhoz tartozó implikált normál volatilitás  $K$  kötési árfolyam mellett:*

$$\begin{aligned} \sigma_N(K) &= \frac{\varepsilon\alpha_0(f-K)}{\int_K^f \frac{dy}{C(y)}} \cdot \left( \frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)} \right) \\ &\quad \left\{ 1 + \left[ \frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24} \alpha_0^2 C^2(f_{av}) + \frac{1}{4} \rho\nu\alpha_0\gamma_1 C(f_{av}) + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \varepsilon^2 \tau_{ex} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

ahol

$$\begin{aligned} f_{av} &= \sqrt{fK}, & \gamma_1 &= \frac{C'(f_{av})}{C(f_{av})}, & \gamma_2 &= \frac{C''(f_{av})}{C(f_{av})}, \\ \zeta &= \frac{\nu}{\alpha_0} \frac{f-K}{C(f_{av})}, & \hat{x}(\zeta) &= \log \left( \frac{\sqrt{1-2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1-\rho} \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

### 3.3. Black-féle implikált volatilitás

Végezetül kiszámítjuk a Black-féle implikált volatilitást. Tegyük fel, hogy a forward árfolyam geometriai Brown-mozgást követ:

$$dF = \varepsilon\sigma_B F dW, \quad \hat{F}(0) = f, \quad (3.75)$$

ahol a szórást  $\varepsilon\sigma_B$  alakban írjuk fel, hogy konzisztensek maradjunk a modellünkkel. Írjuk fel a 3.1.6 árazó formulát a normál és a Black-modellben is. A két ár  $O(\varepsilon^2)$  hiba erejéig megegyezik és az integrandusok egyenlősége miatt fennáll, hogy

$$\sigma_N(K) = \frac{\varepsilon\sigma_B(f-K)}{\log f/K} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \varepsilon^2 \sigma_B^2 \tau_{ex} + \dots \right\}. \quad (3.76)$$

Az előző egyenletet átrendezve megkapjuk a Black-féle implikált volatilitást:

$$\begin{aligned} \sigma_B(K) &= \frac{\alpha_0 \log f/K}{\int_K^f \frac{dy}{C(y)}} \cdot \left( \frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)} \right) \\ &\quad \left\{ 1 + \left[ \frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2 + 1/f_{av}^2}{24} \alpha_0^2 C^2(f_{av}) + \frac{1}{4} \rho\nu\alpha_0\gamma_1 C(f_{av}) + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \varepsilon^2 \tau_{ex} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Végezetül nézzük meg azt a speciális esetet, amikor  $C(f) = f^\beta$ . Ekkor a SABR-modell szerint a forward árfolyam az alábbi dinamikát követi:

$$\begin{aligned} d\hat{F} &= \varepsilon \hat{\alpha}_0 \hat{F}^\beta dW_1, & \hat{F}(0) &= f \\ d\hat{\alpha}_0 &= \varepsilon \nu \hat{\alpha}_0 dW_2, & \hat{\alpha}_0(0) &= \alpha_0 \\ dW_1 dW_2 &= \rho dt. \end{aligned} \quad (3.78)$$

A 3.79-es Tétel szerint ekkor a normál implikált volatilitás  $O(\varepsilon^2)$  hibával

$$\begin{aligned} \sigma_N(K) &= \frac{\varepsilon \alpha_0 (1 - \beta)(f - K)}{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}} \cdot \left( \frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)} \right) \cdot \\ &\quad \left\{ 1 + \left[ \frac{-\beta(2 - \beta)\alpha_0^2}{24 f_{av}^{2-2\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4 f_{av}^{1-\beta}} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \varepsilon^2 \tau_{ex} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

ahol  $f_{av} = \sqrt{fK}$ , továbbá

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha_0} \frac{f - K}{f_{av}^\beta}, \quad \hat{x}(\zeta) = \log \left( \frac{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1 - \rho} \right). \quad (3.80)$$

Hatványsorba fejtséssel még tovább alakítjuk a 3.79 formulát:

$$\begin{aligned} f - K &= \sqrt{fK} \log f/K \left\{ 1 + \frac{1}{24} \log^2 f/K + \frac{1}{1920} \log^4 f/K + \dots \right\}, \\ f^{1-\beta} - K^{1-\beta} &= (1 - \beta)(fK)^{(1-\beta)/2} \log f/K \left\{ 1 + \frac{(1 - \beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1 - \beta)^4}{1920} \log^4 f/K + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ezzel a közelítéssel tehát a normál implikált volatilitás

$$\begin{aligned} \sigma_N(K) &= \varepsilon \alpha_0 (fK)^{\beta/2} \frac{1 + \frac{1}{24} \log^2 f/K + \frac{1}{1920} \log^4 f/K + \dots}{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 f/K + \dots} \cdot \left( \frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)} \right) \\ &\quad \left\{ 1 + \left[ \frac{-\beta(2 - \beta)\alpha_0^2}{24 (fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4 (fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \varepsilon^2 \tau_{ex} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

ahol

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha_0} (fK)^{(1-\beta)/2} \log f/K, \quad \hat{x}(\zeta) = \log \left( \frac{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1 - \rho} \right). \quad (3.83)$$

Ebből pedig már meg tudjuk határozni a Black-féle implikált volatilitást.

**3.3.1. Tétel** (Hagan et al.[13]). *A SABR-modellben az európai vételi opcióra vonatkozó Black-féle implikált volatilitás  $O(\varepsilon^2)$  hiba erejéig*

$$\begin{aligned} \sigma_B(K) &= \frac{\varepsilon \alpha_0}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 f/K + \dots} \cdot \left( \frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)} \right) \cdot \\ &\quad \left\{ 1 + \left[ \frac{(1 - \beta)^2 \alpha_0^2}{24 (fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4 (fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \varepsilon^2 \tau_{ex} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

ahol

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha_0} (fK)^{(1-\beta)/2} \log f/K, \quad \hat{x}(\zeta) = \log \left( \frac{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1 - \rho} \right). \quad (3.85)$$

Az utolsó lépésben legyen  $\varepsilon = 1$ , ekkor ugyanis megkapjuk a Black-féle implikált volatilitás közelítő formuláját a SABR-modell eredeti paramétereivel:

$$\tilde{\sigma}_B(f, K) = \frac{\alpha_0}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 f/K} \cdot \left( \frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)} \right) \cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha_0^2}{24(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \tau_{ex} \right\}. \quad (3.86)$$

A kamatsereopciók árazásához szükségünk van a modell paramétereinek kalibrálására, ezt pedig majd az ATM implikált volatilitás segítségével fogjuk megtenni az 5. fejezetben.

**3.3.2. Tétel.** *ATM pozícióban, azaz  $K = f$  esetén a Black-féle implikált volatilitás közelítő értéke:*

$$\tilde{\sigma}_B(f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha_0^2}{24f^{2-2\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4f^{1-\beta}} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \tau_{ex} \right\} \quad (3.87)$$

## 4. fejezet

# Az arbitrázatmentes SABR-modell

A 3. fejezetben bemutatott árazó formula explicit képletet ad az európai vételi opció árára és ezáltal az implikált volatilitásra, azonban ez csak közelítő formula, ami azzal a feltételezéssel él, hogy  $\alpha_0\sqrt{\tau_{ex}}$ ,  $\nu\sqrt{\tau_{ex}}$ , és  $\frac{|F-K|}{\alpha_0\sqrt{\tau_{ex}}}$  kicsi. Ha a három feltétel közül valamelyik nem teljesül, akkor az árazóformula pontossága lecsökken és ami ennél is nagyobb probléma, hogy arbitrázs lehetőségeket teremt.

### 4.1. Arbitrázs a SABR-modellben

Az eredeti SABR-modellben [13] az implikált volatilitásra adott 3.86 egyenlet csupán közelítő formula, ezt nagyon fontos kihangsúlyozni. Ugyanis bizonyos esetekben előfordulhat, hogy ha ezzel árazunk akkor arbitrázs jelenhet meg. Ez az arbitrázs az implikált sűrűségfüggvény előjéléhez köthető.

**4.1.1. Definíció.** *Amennyiben meghatározható egy kockázatmentes határidős árfolyam eloszlás úgy, hogy a szokásos árazó formulában szereplő feltételes várható érték minden  $g(s)$  kifizetésfüggvényű származtatott követelésre pontosan annak piacon megfigyelt árával esik egybe, azaz*

$$E_Q(\tilde{g}(F(T_{ex})|F(t) = f) = e^{-r(T_{ex}-t)} \int_0^\infty Q(f, t, s, T_{ex})g(s)ds, \quad (4.1)$$

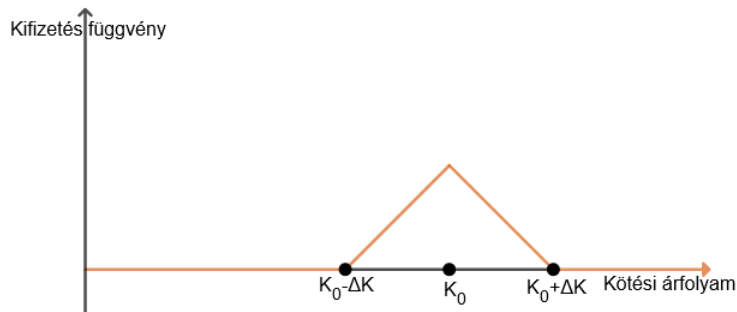
*akkor ezt az eloszlást implikált eloszlásnak, a  $Q(f, t, \cdot, T_{ex})$  sűrűségfüggvényt pedig implikált sűrűségfüggvénynek nevezzük.*

Nagyon alacsony kötési árfolyamok, vagy hosszú lejárat esetén a SABR-modell európai vételi opció ára által indukált lejáratkori implikált sűrűségfüggvény helyenként negatívvá válhat, ami arbitrázshoz vezethet [17]. Speciálisan bemutatunk egy pillangó arbitrázst, amihez felhasználjuk a Breeden-Litzenberger formulát[6]:

$$e^{r(T_{ex}-t)} \frac{d^2 V_{call}}{d^2 K} = Q(f, t, K, T_{ex}), \quad (4.2)$$

ahol  $V_{call}$  a határidős árfolyamra vonatkozó európai vételi opció  $t$ -beli értéke.

**4.1.2. Példa.** Tekintsünk három  $T_{ex}$  időpontban lejárató európai vételi opciót, melyek kötési árfolyamai  $K_0 - \Delta K$ ,  $K_0$  és  $K_0 + \Delta K$ . Az első és a harmadik opció legyen long pozícióban, míg a másodikból tartsunk kettőt short pozícióban. Ekkor a lejáratkori kifizetés függvény:



4.1. ábra. Pillangó opció kifizetésfüggvénye

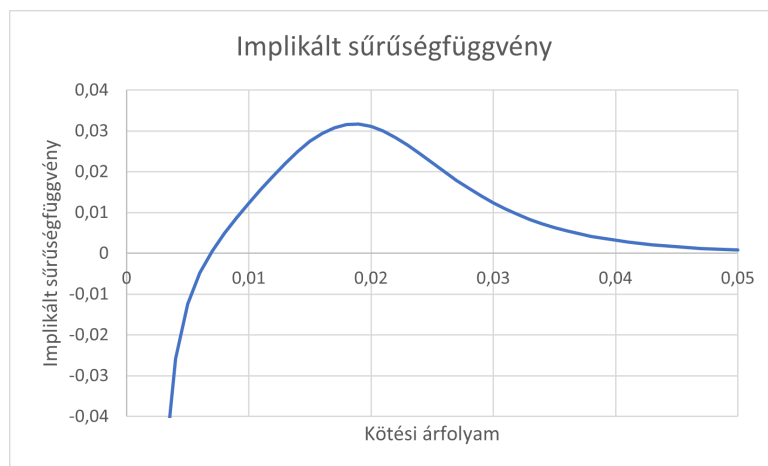
Azt látjuk, hogy ennek az opciónak nemnegatív a lejáratkori kifizetésfüggvénye, ráadásul pozitív valószínűséggel pozitív, ezért az opció értéke pozitív tetszőleges  $t < T_{ex}$  időpontban, azaz

$$V_{call}(t, f, K_0 - \Delta K, T_{ex}) - 2V_{call}(t, f, K_0, T_{ex}) + V_{call}(t, f, K_0 + \Delta K, T_{ex}) > 0. \quad (4.3)$$

Tegyük fel, hogy  $K_0$  olyan, hogy az implikált sűrűségfüggvény, azaz  $Q(f, t, K_0, T_{ex})$  negatív. Ekkor a Breeden-Litzenberger formula szerint a  $V_{call}$   $K$ -szerinti második parciális deriváltja negatív  $K_0$ -ban. Ez pedig azt jelenti, hogy ha differenciahányadosokkal közelítjük, akkor kellően alacsony  $\Delta K$  esetén az előbb bemutatott pillangó opció értéke negatív lesz, ami pedig arbitrázshoz vezet:

$$0 > e^{-r(T_{ex}-t)} Q(f, t, K_0, T_{ex}) = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 K}(t, f, K_0, T_{ex}) \approx \frac{V_{call}(t, f, K_0 - \Delta K, T_{ex}) - 2V_{call}(t, f, K_0, T_{ex}) + V_{call}(t, f, K_0 + \Delta K, T_{ex})}{\Delta K^2} > 0. \quad (4.4)$$

Most pedig megnézzük, hogy a lejáratkori implikált sűrűségfüggvény valóban lehet negatív is. A Breeden-Litzenberger formulában szereplő parciális deriváltak könnyen lehetnek negatívak, amit az alábbi ábra is mutat:



4.2. ábra. Negatív implikált sűrűségfüggvény a SABR-modellben

Ezt kiküszöbölendő, Hagan és Lesniewski [14] létrehoztak egy numerikus módszert, amely arbitrázsmentes közelítést adja meg az európai típusú opciók fair árának.

## 4.2. Az előre haladó forward egyenlet

Hagan és Lesniewski cikke [14] alapján bemutatjuk az arbitrázsmentes SABR-modellt. A 3.1-es alfejezethez hasonlóan kezdjük a tárgyalást, méghozzá a SABR-modell alábbi alakját elemezzük:

$$\begin{aligned}
 dF(t) &= \varepsilon \alpha(t) C(F(t)) dW_1, & F(0) &= f \\
 d\alpha(t) &= \varepsilon \nu \alpha(t) dW_2(t), & \alpha(0) &= \alpha_0, \\
 dW_1(t) dW_2(t) &= \rho dt.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ismét  $O(\varepsilon^2)$  hibával dolgozunk és feltesszük, hogy  $\varepsilon$  kicsi. Az a cél, hogy numerikusan megadjuk a lejáratkori implikált sűrűségfüggvényt, hiszen ekkor bármilyen európai típusú opciót tudunk majd árazni.



Az  $(F(s), \alpha(s))$  kétdimenziós valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye legyen  $p(t, f, \alpha_0, s, \cdot, \cdot)$ , ha  $F(t) = f$  és  $\alpha(t) = \alpha_0$ , továbbá

$$Q^{(k)}(t, f, \alpha_0, s, F) = \int_0^\infty A^k p(t, f, \alpha_0, s, F, A) dA. \quad (4.6)$$

A motiváció a  $Q^{(k)}$  momentumok definiálásának az alábbi azonosság:

$$Q(T_{ex}, F) = Q^{(0)}(t, f, \alpha_0, T_{ex}, F). \quad (4.7)$$

Ekkor ugyanis kapcsolatot teremtünk a  $Q^{(0)}$  és  $Q^{(2)}$  momentumok között, majd numerikusan megadjuk a  $Q^{(0)}$  momentumot és ezzel az implikált sűrűségfüggvényt is. Az implikált sűrűségfüggvénnyel pedig már definíció szerint tudunk árazni tetszőleges európai típusú opciót. A továbbiakban a 3.1 alfejezethez analóg indoklások következnek, ezért csak a főbb lépéseket és eredményeket mutatjuk be. Természetesen a részletes számítások [14]-ban megtalálhatóak.

A  $p$  sűrűségfüggvényre felírjuk a Fokker-Planck egyenletet (3.1.1 Tétel), amiből az következik, hogy

$$Q_s^{(0)} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 (C^2(F) Q^{(2)})_{FF}, \quad \text{ha } s > t. \quad (4.8)$$

Ugyanakkor a  $Q^{(k)}$  momentumok teljesítik a hátráló Kolmogorov-egyenletet (3.1.2 Tétel), vagyis

$$Q_t^{(k)} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha_0^2 C^2(f) Q_{ff}^{(k)} + \varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0^2 C(f) Q_{f\alpha_0}^{(k)} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu^2 \alpha_0^2 Q_{\alpha_0 \alpha_0}^{(k)}, \quad \text{ha } t < s \quad (4.9)$$

az alábbi peremfeltétellel:

$$Q^{(k)}(t, f, \alpha_0, s, F) = \alpha_0^k \delta(F - f), \quad \text{ha } t = s. \quad (4.10)$$

Ezt a differenciálegyenletet a peremfeltétellel együtt a 3.1. alfejezethez hasonlóan számunkra használhatóbb alakra transzformáljuk.

Ehhez legyen  $\tau = s - t$ ,  $B(\varepsilon \alpha_0 z) = C(f)$ ,

$$z = \frac{1}{\varepsilon \alpha_0} \int_f^F \frac{dx}{C(x)}, \quad (4.11)$$

és a könnyebben kezelhetőség kedvéért

$$Q^{(k)}(\tau, z, \alpha_0) = \frac{\alpha_0^{k-1}}{\varepsilon B(0)} \hat{Q}^{(k)}(\tau, z, \alpha_0). \quad (4.12)$$

Ekkor az  $f$  változóról áttérünk a  $z$  változó használatára és elhagyjuk az  $O(\varepsilon^2)$ -nél kisebb tagokat. Így a 4.9 differenciálegyenlet  $O(\varepsilon^2)$  hibával:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\tau^{(k)} = \frac{1}{2}(1 + 2\rho\varepsilon\nu z + \varepsilon^2\alpha_0^2)\hat{Q}_{zz}^{(k)} - \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0\frac{B'(\varepsilon\alpha_0 z)}{B(\varepsilon\alpha_0 z)}\hat{Q}_z^{(k)} - (\varepsilon\rho\nu + \varepsilon^2\nu^2 z)(k-2)\hat{Q}_z^{(k)} \\ - \varepsilon\rho\nu\alpha_0\hat{Q}_{\alpha_0 z}^{(k)} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\nu^2(k-1)(k-2)\hat{Q}^{(k)}, \quad \text{ha } \tau > 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A kezdeti feltétel pedig

$$\hat{Q}^{(k)}(\tau, z, \alpha_0) = \delta(z), \quad \text{ha } \tau = 0. \quad (4.14)$$

Az eredeti [13] cikkben ezután ennek az egyenletnek kerestek egy aszimptotikusan pontos megoldást. Hagan és Lesniewski cikke[14] alapján mi most egy másik irányban megyünk. Először tovább alakítjuk a differenciálegyenletet, majd a következő alfejezetben a Crank–Nicholson séma segítségével numerikusan oldjuk meg azt.

Legyen

$$\hat{U}(\tau, z, \alpha_0) = (1 + 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2)\hat{Q}^{(0)}(\tau, z, \alpha_0). \quad (4.15)$$

Vegyük a 4.13 differenciálegyenletet  $k = 0$  esetén, szorozzuk meg  $(1 + 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2)$ -nel és hagyjuk el a legfeljebb  $O(\varepsilon^2)$  nagyságrendű tagokat:

$$\hat{U}_\tau = (1 + 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2)\hat{U}_{zz} - \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0\frac{B'(\varepsilon\alpha_0 z)}{B(\varepsilon\alpha_0 z)}\hat{U}_z - \varepsilon\rho\nu\alpha_0\hat{U}_{\alpha_0 z} + \varepsilon^2\rho\nu\alpha_0\frac{B'(\varepsilon\alpha_0 z)}{B(\varepsilon\alpha_0 z)}\hat{U}. \quad (4.16)$$

Az utolsó tagot is el szeretnénk hagyni, ezért új változókat vezetünk be. Legyen

$$\Gamma = -\frac{B'(\varepsilon\alpha_0 z)}{B(\varepsilon\alpha_0 z)}, \quad (4.17)$$

továbbá

$$U(\tau, z, \alpha_0) = \hat{U}(\tau, z, \alpha_0)e^{\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0\Gamma\tau}. \quad (4.18)$$

Ismét elhagyjuk a legfeljebb  $O(\varepsilon^2)$  nagyságrendű tagokat, így  $U$  kielégíti az alábbi differenciálegyenletet és kezdeti feltételt:

$$\begin{aligned} U_\tau = (1 + 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2)U_{zz} - \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_0\frac{B'(\varepsilon\alpha_0 z)}{B(\varepsilon\alpha_0 z)}U_z - \varepsilon\rho\nu\alpha_0U_{\alpha_0 z}, \quad \text{ha } \tau > 0, \\ U = \delta(z), \quad \text{ha } \tau = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Vegyük észre, hogy ez a differenciálegyenlet ugyanaz mint  $\hat{Q}^{(2)}$ -re felírt 4.13 differenciálegyenlet, ezért a megoldás egyértelműsége miatt  $\hat{Q}^{(2)}$  és  $U$  megegyezik  $O(\varepsilon^2)$  hiba erejéig.

Ezek szerint

$$\hat{Q}^{(2)}(\tau, z, \alpha_0) = \hat{Q}^{(0)}(\tau, z, \alpha_0)e^{\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0\Gamma\tau}(1 + 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2). \quad (4.20)$$

Ez az egyenlet az eredeti momentumokkal pedig azt jelenti, hogy

$$Q^{(2)}(t, f, \alpha_0, s, F) = \alpha_0^2 Q^{(0)}(t, f, \alpha_0, s, F) e^{\varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 \Gamma \tau} (1 + 2\varepsilon \rho \nu z + \varepsilon^2 \nu^2 z^2). \quad (4.21)$$

Helyettesítsük vissza az így kapott azonosságot a 4.8 egyenletbe. Ekkor

$$Q_s^{(0)} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha_0^2 \left[ (1 + 2\varepsilon \rho \nu z + \varepsilon^2 \nu^2 z^2) e^{\varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 \Gamma \tau} C^2(F) Q^{(0)} \right]_{FF}, \quad \text{ha } s > t. \quad (4.22)$$

Ezt az egyenletet nevezik a  $Q$  implikált sűrűségfüggvény előre haladó forward egyenletének. A következő alfejezetben ezt a differenciálegyenletet fogjuk megoldani numerikusan.  $\Gamma$  értékét  $O(\varepsilon^2)$  hiba erejéig szabadon megválaszthatjuk, a nagyobb pontosság érdekében Hagan és Lesniewski[14] azt javasolták, hogy differenciálhányados helyett térjünk át differenciahányadosra. Tehát a továbbiakban

$$\Gamma = \frac{C(F) - C(f)}{F - f}. \quad (4.23)$$

### 4.3. Diszkretizálás

Ebben az alfejezetben bemutatjuk a Crank–Nicholson sémát[8] felhasználva a 4.22 előre haladó forward egyenlet megoldását. Ennek a sémának az a nagy előnye, hogy megőrzi a várható értéket és a momentumokat.

Tegyük fel, hogy a határidős árfolyam az  $[F_{min}, F_{max}]$  intervallumon mozog és ezt az intervallumot nem hagyja el. Ugyanakkor a határt pozitív valószínűséggel éri el. Ezek alapján a  $Q$  implikált sűrűségfüggvényt az alábbi alakban keressük:

$$Q(s, F) = \begin{cases} Q^L(s) \delta(F - F_{min}), & \text{ha } F = F_{min} \\ Q^c(s, F), & \text{ha } F_{min} < F < F_{max} \\ Q^R(s) \delta(F - F_{max}), & \text{ha } F = F_{max} \end{cases} \quad (4.24)$$

Az átláthatóság érdekében bevezetjük a  $D$  változót:

$$D^2(F) = (1 + 2\varepsilon \rho \nu z + \varepsilon^2 \nu^2 z^2) e^{\varepsilon^2 \rho \nu \alpha_0 \Gamma \tau} C^2(F). \quad (4.25)$$

Ekkor ugyanis az előre haladó forward egyenlet leegyszerűsödik:

$$Q_s = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha_0^2 [D^2(F) Q]_{FF}, \quad \text{ha } F_{min} < F < F_{max} \quad (4.26)$$

Minden  $s > t$ -re 1 a teljes valószínűség, ezért

$$Q^L(s) + \int_{F_{min}}^{F_{max}} Q^c(s, F) dF + Q^R(s) = 1. \quad (4.27)$$

A középső integrál a diszkretizálás során összegre fog redukálódni. Differenciáljunk  $s$  szerint és a középső tag helyére írjuk be a 4.26 egyenletet:

$$\frac{dQ^L}{ds} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 [[D^2(F)Q^c]_F]_{F_{min}}^{F_{max}} + \frac{dQ^R}{ds} = 0. \quad (4.28)$$

A határokon kiértékelve, ebből az következik, hogy

$$\frac{dQ^L}{ds} = \lim_{F \rightarrow F_{min}^+} \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 [D^2(F)Q^c]_F, \quad \frac{dQ^R}{ds} = \lim_{F \rightarrow F_{max}^-} -\frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 [D^2(F)Q^c]_F. \quad (4.29)$$

Ugyanakkor azt is szeretnénk, hogy  $F(s)$  martingál legyen, ehhez pedig arra van szükség, hogy a feltételes várható érték a pillanatnyi határidős árfolyam legyen:

$$E(F(s)|F(t) = f, \alpha(t) = \alpha_0) = F_{min}Q^L(s) + \int_{F_{min}}^{F_{max}} FQ^c(s, F) dF + F_{max}Q^R(s) = f. \quad (4.30)$$

Az eddigiekből az adódik, hogy a martingáltulajdonság megőrzése érdekében  $D^2(F)Q^c$  a határokon eltűnik. Tehát az alábbi

$$Q_T = \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 [D^2(F)Q]_{FF}, \quad \text{ha } F_{min} < F < F_{max}, \quad (4.31)$$

differenciálegyenletet szeretnénk megoldani, azokkal a peremfeltételekkel, hogy

$$D^2(F)Q^c \rightarrow 0, \quad \text{ha } F \rightarrow F_{min}^+, \quad \text{és } D^2(F)Q^c \rightarrow 0, \quad \text{ha } F \rightarrow F_{max}^-, \quad (4.32)$$

minden  $t < s < T_{ex}$  esetén. A határokon a valószínűségeket a

$$\begin{aligned} \frac{dQ^L}{ds} &= \lim_{F \rightarrow F_{min}^+} \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 [D^2(F)Q^c]_F, \\ \frac{dQ^R}{ds} &= \lim_{F \rightarrow F_{max}^-} -\frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 [D^2(F)Q^c]_F \end{aligned} \quad (4.33)$$

differenciálhányadosok adják meg és a kezdeti feltételek pedig:

$$Q^L(t) = 0, \quad Q^c(s, F) \rightarrow \delta(F - f), \quad Q^R(t) = 0, \quad \text{ha } s \rightarrow t^+. \quad (4.34)$$

Emellett olyan megoldást keresünk, amely 1-re összegződik és megőrzi a várható értéket, azaz

$$\begin{aligned} Q^L(T) + \int_{F_{min}}^{F_{max}} Q^c(T, F) dF + Q^R(T) &= 1 \\ F_{min}Q^L(T) + \int_{F_{min}}^{F_{max}} FQ^c(T, F) dF + F_{max}Q^R(T) &= f. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ezek a feltételek biztosítják, hogy  $Q^c(T_{ex}, F) \geq 0$ , amiből pedig már következik az arbitrázsmentesség.

A jelöléseinket még tovább egyszerűsítjük, hogy átlátható maradjon a számolás:

$$M(s, F) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 D^2(F) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha_0^2 (1 + 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2) e^{\varepsilon^2\rho\nu\alpha_0\Gamma\tau} C^2(F), \quad (4.36)$$

ahol

$$z(F) = \frac{1}{\varepsilon\alpha_0} \int_f^F \frac{dy}{C(y)}, \quad \Gamma = \frac{C(F) - C(f)}{F - f}. \quad (4.37)$$

Ahogy korábban már említettük, a Crank-Nicholson sémát[8] fogjuk alkalmazni, ehhez viszont szükségünk van még a lehetséges világállapotok diszkretizációjára. Legyen  $h$  pozitív valós és  $J$  pozitív egész olyan, hogy

$$F_{\max} = F_{\min} + Jh \quad (4.38)$$

és definiáljuk a

$$F_j \equiv F_{\min} + \left(j - \frac{1}{2}\right) h, \quad \text{ha } j = 0, 1, \dots, J + 1 \quad (4.39)$$

osztópontokat. Ezek lesznek a határidős árfolyam lehetséges értékei. A  $h$  paraméter értékét úgy választjuk meg, hogy valamely  $j_0$  egész számra

$$f \equiv F_{j_0} = F_{\min} + \left(j_0 - \frac{1}{2}\right) h. \quad (4.40)$$

Ez a feltétel a későbbi diszkussziótól kímél meg minket.

Szükségünk van még az idő diszkretizálására. Feltehető, hogy  $Q(s, F)$  implikált sűrűségfüggvény nem közvetlenül  $s$  értékétől, hanem a  $\tau = s - t$  különbségtől függ. Legyen  $Q_j^n = Q^c(n\delta, F_j)$ ,  $\tau = n \cdot dt$  és  $F = F_j$  esetén. Természetesen  $Q_j^n$  kifejezhető az alábbi integrál segítségével is:

$$Q_j^n = \frac{1}{h} \int_{F_{\min} + (j-1)h}^{F_{\min} + jh} Q^c(n \cdot dt, y) dy, \quad \text{ha } j = 1, \dots, J \quad (4.41)$$

Ettől most eltekintünk és inkább az előre haladó forward egyenletre fókuszálunk. A Crank-Nicholson séma[8] egy numerikus módszer, amellyel a hővezetési egyenlethez hasonló differenciálegyenleteket tudunk megoldani differenciaegyenletek felírásával. Az előre haladó forward egyenletet különböző véges differenciák módszerével meg tudjuk oldani numerikusan, a Crank-Nicholson séma is egy ilyen, amelynek alapja a trapéz szabály, tehát a másodrendű parciális deriváltat átlagoljuk:

$$Q_j^{n+1} - Q_j^n = \frac{dt}{2h^2} \{M_{j+1}^{n+1}Q_{j+1}^{n+1} - 2M_j^{n+1}Q_j^{n+1} + M_{j-1}^{n+1}Q_{j-1}^{n+1}\} \\ \frac{dt}{2h^2} \{M_{j+1}^nQ_{j+1}^n - 2M_j^nQ_j^n + M_{j-1}^nQ_{j-1}^n\} \quad (4.42)$$

tetszőleges  $j = 1, 2, \dots, J$  esetén. Ehelyett inkább az alábbi alakot használjuk:

$$\begin{aligned} Q_j^{n+1} - \frac{dt}{2h^2} \{M_{j+1}^{n+1}Q_{j+1}^{n+1} - 2M_j^{n+1}Q_j^{n+1} + M_{j-1}^{n+1}Q_{j-1}^{n+1}\} = \\ Q_j^n + \frac{dt}{2h^2} \{M_{j+1}^nQ_{j+1}^n - 2M_j^nQ_j^n + M_{j-1}^nQ_{j-1}^n\}, \quad \text{ha } j = 1, 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (4.43)$$

A peremfeltételek pedig azt adják, hogy

$$\begin{aligned} M_0^{n+1}Q_0^{n+1} &= -M_1^{n+1}Q_1^{n+1}, \quad \text{ha } j = 0, \\ M_{J+1}^{n+1}Q_{J+1}^{n+1} &= -M_J^{n+1}Q_J^{n+1}, \quad \text{ha } j = J + 1. \end{aligned} \quad (4.44)$$

A  $j = 0$  és  $j = J + 1$  időpontokra nincsenek ilyen feltételeink, ez pedig biztosítja, hogy elegendő szabadsági fokunk van az egyenletrendszer megoldására. A kezdeti feltételek a diszkretizálás során:

$$Q_L^0 = 0, \quad Q_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \neq j_0 \\ 1/h & \text{ha } j = j_0 \end{cases}, \quad Q_R^0 = 0. \quad (4.45)$$

Az  $M$  függvény értékét minden világállapotban ki tudjuk számítani az 4.36 képlet segítségével, ami pedig azt teszi lehetővé, hogy konstansoknak tekintsük őket. Ezekből az következik, hogy a differenciálegyenlet lineáris egyenletrendszerre redukálódik. Legyen  $\mathbf{Q}^i = \{Q_0^i, \dots, Q_{J+1}^i\}$ . Ekkor a differenciálegyenlet a peremfeltételekkel együtt felírható az alábbi alakban:

$$A_{n+1}\mathbf{Q}^n = B_{n+1}\mathbf{Q}^{n+1}, \quad (4.46)$$

ahol  $A_{n+1}$  és  $B_{n+1}$  az  $M_i^k$  együtthatókból alkotott  $(J + 2) \times (J + 2)$ -es mátrixok. Invertálással azonnal adódik a rekurzió:

$$\mathbf{Q}^{n+1} = B_{n+1}^{-1}A_{n+1}\mathbf{Q}^n. \quad (4.47)$$

A 4.45 kezdeti feltétel miatt  $Q^0$  adott és innen tetszőleges időpontra meghatározhatjuk  $Q$  értékét. Ez egy implicit módszer, vagyis az adott időpontbeli  $Q$  értékeket az előző időpontbeli  $Q$  értékek segítségével tudjuk meghatározni.

Most már csak  $Q^L(s)$  és  $Q^R(s)$  kifejezésére van szükségünk. Legyenek

$$Q_L^n = Q^L(n \cdot dt), \quad Q_R^n = Q^R(n \cdot dt) \quad (4.48)$$

a peremfeltételek az  $\tau = n \cdot dt$  időpontban. A  $Q_0^{n+1}, Q_1^{n+1}, \dots, Q_J^{n+1}, Q_{J+1}^{n+1}$  értékekből rekurzívan határozzuk  $Q_L^{n+1}$  és  $Q_R^{n+1}$  értékét az előre haladó forward egyenlethől:

$$\begin{aligned} Q_L^{n+1} - Q_L^n &= \frac{dt}{2h} \{M_1^{n+1}Q_1^{n+1} - M_0^{n+1}Q_0^{n+1} + M_1^nQ_1^n - M_0^nQ_0^n\}, \\ Q_R^{n+1} - Q_R^n &= -\frac{dt}{2h} \{M_{J+1}^{n+1}Q_{J+1}^{n+1} - M_J^{n+1}Q_J^{n+1} + M_{J+1}^nQ_{J+1}^n - M_J^nQ_J^n\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

**4.3.1. Tétel.** A megadott  $Q_L$ ,  $Q_j$  és  $Q_R$  megőrzik a valószínűséget, valamint a feltételes várható értéket.

*Bizonyítás.* Az alábbi alakban bizonyítjuk, hogy a valószínűségek összege 1, azaz

$$1 = Q_L^n + \int_{F_{\min}}^{F_{\max}} Q^c(t_n, y) dy + Q_R^n \equiv Q_L^n + \sum_{j=1}^J hQ_j^n + Q_R^n. \quad (4.50)$$

Felhasználjuk közben a 4.42 előre haladó forward egyenlet diszkrétizált alakját és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J h(Q_j^{n+1} - Q_j^n) &= \frac{dt}{2h} \{M_{J+1}^{n+1}Q_{J+1}^{n+1} - M_J^{n+1}Q_J^{n+1} - M_1^{n+1}Q_1^{n+1} + M_0^{n+1}Q_0^{n+1}\} \\ &\quad + \frac{dt}{2h} \{M_{J+1}^nQ_{J+1}^n - M_J^nQ_J^n - M_1^nQ_1^n + M_0^nQ_0^n\} \\ &= - (Q_L^{n+1} - Q_L^n) - (Q_R^{n+1} - Q_R^n) \end{aligned} \quad (4.51)$$

minden  $n \cdot dt$  időpontban. Éppen ezért

$$Q_L^{n+1} + \sum_{j=1}^J hQ_j^{n+1} + Q_R^{n+1} = Q_L^n + \sum_{j=1}^J hQ_j^n + Q_R^n, \quad (4.52)$$

amiből az következik, hogy a valószínűségek összege minden  $n$  időpontban megegyezik, tehát a kezdeti feltétel miatt

$$Q_L^n + \sum_{j=1}^J hQ_j^n + Q_R^n = 1. \quad (4.53)$$

A feltételes várható értékkel ugyanígy járunk el:

$$F_{\min}Q_L^n + \int_{F_{\min}}^{F_{\max}} yQ^c(t_n, y) dy + F_{\max}Q_R^n \equiv F_{\min}Q_L^n + \sum_{j=1}^J hF_jQ_j^n + F_{\max}Q_R^n \quad (4.54)$$

Ismét felhasználjuk a 4.42 előre haladó forward egyenlet diszkrétizált alakját és azt, hogy  $F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1} = 0$ . Így adódik a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J hF_j(Q_j^{n+1} - Q_j^n) &= \frac{dt}{2h} \{F_JM_{J+1}^{n+1}Q_{J+1}^{n+1} - F_0M_1^{n+1}Q_1^{n+1} - F_{J+1}M_J^{n+1}Q_J^{n+1} + F_1M_0^{n+1}Q_0^{n+1}\} \\ &\quad + \frac{dt}{2h} \{F_JM_{J+1}^nQ_{J+1}^n - F_0M_1^nQ_1^n - F_{J+1}M_J^nQ_J^n + F_1M_0^nQ_0^n\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

egyenlet. Ezt pedig tovább alakítva

$$\begin{aligned}
F_{\min} (Q_L^{n+1} - Q_L^n) + \sum_{j=1}^J hF_j (Q_j^{n+1} - Q_j^n) + F_{\max} (Q_R^{n+1} - Q_R^n) = \\
= \frac{dt}{4} (M_1^{n+1}Q_1^{n+1} + M_0^{n+1}Q_0^{n+1}) - \frac{dt}{4} (M_{J+1}^{n+1}Q_{J+1}^{n+1} + M_J^{n+1}Q_J^{n+1}) \\
+ \frac{dt}{4} (M_1^nQ_1^n + M_0^nQ_0^n) - \frac{dt}{4} (M_{J+1}^nQ_{J+1}^n + M_J^nQ_J^n).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

A peremfeltételek miatt az egyenlet jobb oldala 0, tehát a várható értéke állandó az időben:

$$F_{\min}Q_L^{n+1} + \sum_{j=1}^J hF_jQ_j^{n+1} + F_{\max}Q_R^{n+1} = F_{\min}Q_L^n + \sum_{j=1}^J hF_jQ_j^n + F_{\max}Q_R^n \tag{4.57}$$

Ezért

$$F_{\min}Q_L^n + \sum_{j=1}^J hF_jQ_j^n + F_{\max}Q_R^n = hF_{j_0}Q_{j_0}^0 = f. \tag{4.58}$$

□

Tehát  $F(s)$  feltételes várható értéke  $f$  marad a numerikus megoldás esetén is. Ez pedig lehetővé teszi, hogy az implikált sűrűségfüggvény diszkretizált alakjával árazzunk. Az árazást a következő fejezetben mutatjuk be.



## 5. fejezet

# Hogyan árazzunk kamatcsere opciókat?

Az előző két fejezetben bemutattuk, hogy a SABR-modellben hogyan tudjuk meghatározni európai vételi opciók árát. Azonban az árazáshoz még szükségünk van két elengedhetetlen lépésre: meghatározni, hogy pontosan mit is modellezünk, illetve a modellünk kalibrálása.

Cap és caplet opciók esetén a határidős kamatlábra írjuk fel a SABR-modellt a  $T_{ex}$  időpontban lejáráó elemi kötvényhez tartozó forward mérték szerint, azaz

$$\begin{aligned}dF(t) &= \alpha(t)F(t)^\beta dW_1(t), & F(0) &= f \\d\alpha(t) &= \nu\alpha(t)dW_2(t), & \alpha(0) &= \alpha_0, \\dW_1(t)dW_2(t) &= \rho dt.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Az 1. fejezetben láttuk (ld. 1.15 egyenlet), hogy a cap opció tekinthető caplet opciókból álló portfólióként, így értéke a caplet opciók összege. Egy  $T_j$ -ben lejáráó caplet opció értéke pedig a Black-modell szerint

$$Cpl(0, T_{j-1}, T_j, \tau_j, K) = \tau_j P(0, T_j) (f\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)),\tag{5.2}$$

ahol

$$d_\pm = \frac{\ln(f/K) \pm \frac{1}{2}\sigma_{imp}^2(K, f)^2 T_{j-1}}{\sigma_{imp}(K, f)\sqrt{T_{j-1}}}.\tag{5.3}$$

A 3. fejezetben bemutattuk az eredeti SABR-modellt, amelynek célja a Black-féle implikált volatilitás meghatározása volt:

$$\tilde{\sigma}_{imp}(f, K) = \frac{\alpha_0}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 f/K} \cdot \left( \frac{\zeta}{x(\zeta)} \right) \cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha_0^2}{24(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T_{j-1} \right\}, \quad (5.4)$$

ahol

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha_0} (fK)^{(1-\beta)/2} \log f/K, \quad \hat{x}(\zeta) = \log \left( \frac{\sqrt{1-2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1-\rho} \right). \quad (5.5)$$

Ezt a közelítést pedig behelyettesítjük a szórás helyére a Black-modellben és máris megkaptuk egyetlen caplet opció értékét. A cap opció értéke pedig az öt szintetikusan előállító caplet opciók összértéke lesz.

Swaption esetén az a nehézség, hogy nem látszódik egyből, hogy milyen folyamatra lenne érdemes felírni a SABR-modellt. Az 1.20 egyenletnél láttuk, hogy a swap-rátára alkalmazni tudjuk a Black-modellt, aminek van egy  $\sigma_{\alpha,\beta}$  paramétere. Ez is adja a motivációt, hogy írjuk fel a swap-rátát a SABR-modellben és határozzuk meg a  $\sigma_{\alpha,\beta}$  implikált volatilitást:

$$\begin{aligned} dS_{\alpha,\beta}(t) &= \alpha(t) S_{\alpha,\beta}(t)^\beta dW_1(t), & S_{\alpha,\beta}(0) &= s_{\alpha,\beta} \\ d\alpha(t) &= \nu \alpha(t) dW_2(t), & \alpha(0) &= \alpha_0, \\ dW_1(t) dW_2(t) &= \rho dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

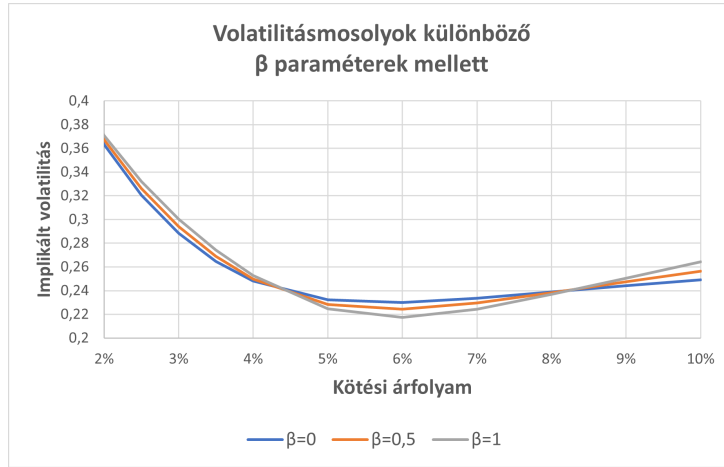
Az első lépéssel tehát megvagyunk, most meghatározzuk a modell paramétereit. Elsőként a  $\beta$ -val kezdünk. Az egyik megközelítés az az, hogy  $\alpha_0$  és  $\beta$  egyaránt a volatilitásmosoly szintjéért felel, ahogy azt láttuk a 2.6 alfejezetben. Tehát  $\beta$  értéke szabadon megválasztható, ami az 5.1 ábrán is látható. A  $\beta = 1$  választás természetes abból a szempontból, hogy visszaadja a lognormális modellt konstans  $\alpha$  esetén, a  $\beta = 0$  mellett az az érv, hogy a normál modellben az árfolyam negatív is lehet,  $\beta = 0,5$  és konstans  $\alpha$  esetén pedig a CIR-modellt kapjuk vissza.

A  $\beta$  paraméter meghatározásához a másik megközelítés a historikus adatokra való illesztés. Ha a határidős árfolyamokat és az ATM implikált volatilitást ismerjük, akkor abból már meg tudjuk határozni a  $\beta$  értékét. Ehhez emlékezzünk vissza 3.87 egyenletre:

$$\tilde{\sigma}_B(f) = \frac{\alpha_0}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha_0^2}{24 f^{2-2\beta}} + \frac{\rho \alpha_0 \nu \beta}{4 f^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] \tau_{ex} \right\}. \quad (5.7)$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát és hagyjuk el a kicsi tagokat:

$$\ln \tilde{\sigma}_B(f) = \ln \alpha_0 + (1-\beta) \ln f. \quad (5.8)$$



5.1. ábra. Volatilitásmosolyok különböző  $\beta$  értékek mellett

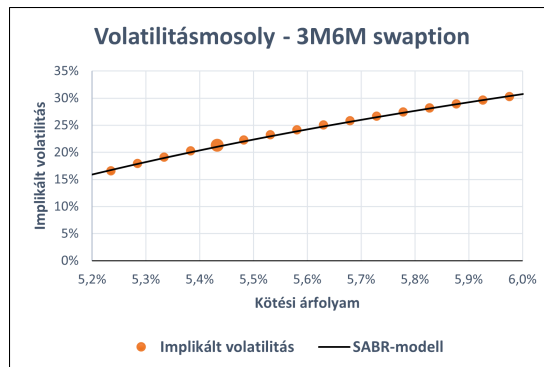
Ezután az implikált volatilitás logaritmusát lineáris regresszióval közelítjük a határidős árfolyam segítségével. A lineáris tag együtthatója lesz  $1 - \beta$ . Ezt a módszert azonban csak nagyon ritkán alkalmazzák, mert a  $\beta$  értékére kapott becslés általában nem 0 és 1 közötti.

A továbbiakban feltesszük, hogy  $\beta = 0,5$ . Az  $\alpha_0$ ,  $\nu$  és  $\rho$  paraméterek meghatározásához a legkisebb négyzetek módszerét fogjuk alkalmazni. Adott pillanatban tekintjük különböző kötési árfolyamok mellett a Black-féle implikált volatilitások által létrehozott mosolyt. Erre a görbére illesztjük a 3.3.1 Tételben szereplő közelítő formulát az implikált volatilitásmosolyra. Ezután vesszük a négyzetes eltéréseket a tényleges és a becsült volatilitások között, ezeket összegezzük és a paramétereink megfelelő megválasztásával minimalizáljuk az összeget. Képlettel felírva:

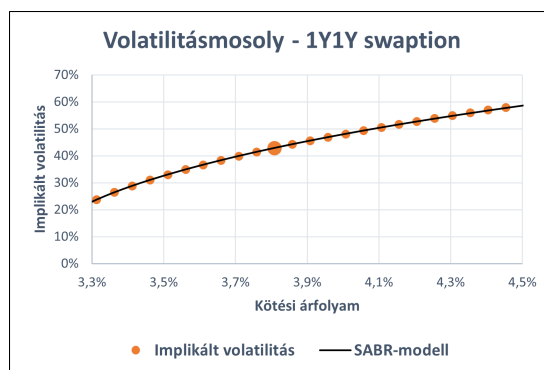
$$(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}) = \operatorname{argmin}_{\alpha_0, \nu, \rho} \sum_K (\tilde{\sigma}_B(f, K, \alpha_0, \nu, \rho) - \sigma_B(K))^2. \quad (5.9)$$

**5.0.1. Példa.** Ezt az optimumkeresést például MS Excel segítségével is elvégezhetjük. Szükségünk van különböző kötési árfolyamok mellett az implikált volatilitásra, ezek a Bloomberg Terminálról[5] letölthetőek. Amint megvannak ezek az adatok, nincs más dolgunk, mint az 5.9 egyenlet alapján elvégezni az illesztést.

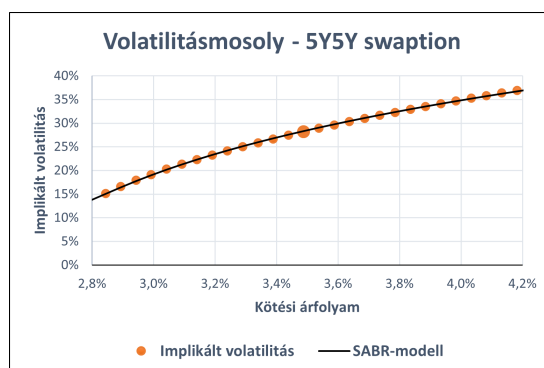
Lássunk néhány példát európai típusú swaption opció implikált volatilitásmosolyának meghatározására. Mindegyik bemutatott opció névértéke 10 millió USD, az adatok pedig 2023. 06. 02-án kerültek letöltésre.



5.2. ábra. 3M6M swaption opció volatilitásmosolya



5.3. ábra. 1Y1Y swaption opció volatilitásmosolya



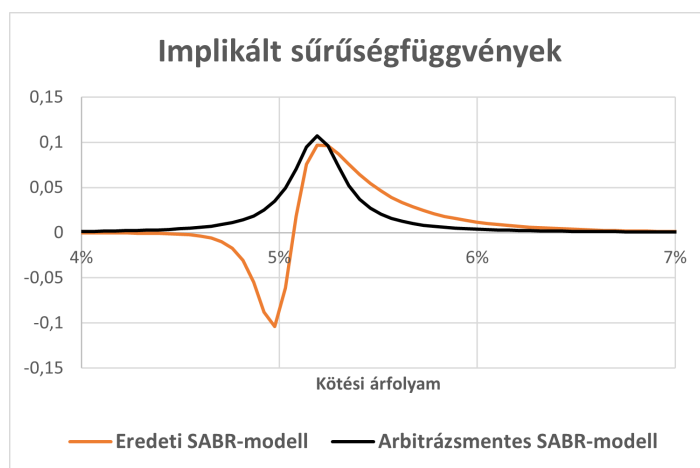
5.4. ábra. 5Y5Y swaption opció volatilitásmosolya

Megvannak a paramétereink, abból ki tudjuk számítani az implikált volatilitás közelítését, így a Black-modell segítségével tudunk árazni. Az egyetlen probléma az lehet, ha az implikált sűrűségfüggvény negatívvá válik, ahogy azt láttuk a 4.1 alfejezetben.

Ezért az arbitrázmentes SABR-modellben[14] is bemutatjuk az árazást. A modell paramétereit ugyanúgy határozzuk meg, a lényeges különbség, hogy nem az implikált volatilitással és a Black-moddellel árazunk, hanem a 4.3 alfejezetben bemutatott diszkretizált implikált sűrűségfüggvény segítségével. Tekintsünk a határidős árfolyamra vonatkozó  $T_{ex}$  időpontban lejáró európai vételi opciót a  $t$  időpontban. A kötési árfolyamot jelölje  $K$ , az opció értékét  $V(t, f, K)$ . Ekkor a 4.3 alfejezet jelöléseit használva az opció értéke

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, f, K) &= f - K, & \text{ha } K < F_{min} \\ \tilde{V}(t, f, K) &= \frac{1}{2}(F_{min} + kh - K)^2 Q_k^N + \sum_{j=k+1}^J (F_{min} + (j - \frac{1}{2})h - K)h Q_j^N \\ &\quad + (F_{max} - K)Q_R^N, & \text{ha } F_{min} + (k - 1)h \leq K < F_{min} + kh \\ \tilde{V}(t, f, K) &= 0, & \text{ha } F_{max} \leq K. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ez az árazó formula nem más, mint a 4.1 egyenlet diszkretizálása. Az eredeti SABR-modell legnagyobb gyengesége, hogy az általa visszaadott opciós árakból származtatott implikált sűrűségfüggvény negatívvá válhat, ez pedig arbitrázs lehetőséget teremt. Az alábbi ábrán látható, hogy a két SABR-modell az 5.0.1 Példában szereplő 1Y1Y swaption opció milyen implikált sűrűségfüggvényeket eredményez:



5.5. ábra. 1Y1Y swaption opció implikált sűrűségfüggvénye

Ez az ábra megmutatja az arbitrázmentes SABR-modell erejét: azáltal, hogy az implikált sűrűségfüggvény nemnegatív, a különféle kamatcsere opciók árazását arbitrázmentessé teszi.

## 6. fejezet

# Összefoglaló

A dolgozat vége felé közeledve tekintsük át, hogy miről is volt szó, illetve hogy milyen irányba lehetne továbbhaladni.

Az elmúlt 40 évben a különféle kamatcsere opciók piaca hatalmas fejlődésen ment át, ami elengedhetlenné tette új, pontosabb árazó formulák kifejlesztését. Szakdolgozatomban a kamatcsere opciók árazására használt SABR-modell két változatát mutattam be.

Az eredeti SABR-modell[13] aszimptotikusan pontos közelítését adja a Black-féle implikált volatilitásnak, amelynek köszönhetően a piac egyik kulcsfontosságú modellévé vált. A közelítő formula levezetése igen hosszás és bonyolult, ugyanakkor egy könnyen implementálható formulát ad az implikált volatilitásra. Emellett a volatilitásmosoly jelenségét és helyes dinamikáját is visszaadja a modell, ami nagyon lényeges a kockázatkezelésben. Fontos pozitívum az is, hogy a modell paramétereinek könnyen értelmezhető szerepe van a volatilitásmosoly alakjában. Ugyanakkor, mint minden modellnek, úgy ennek is megvannak a maga korlátjai: az árazó formula csak aszimptotikusan pontos közelítés, amely bizonyos esetekben pontatlanná válhat. Ahogy láttuk, emiatt az implikált sűrűségfüggvény 0 alá csökkenhet, ami pedig arbitrázs lehetőségeket teremt.

Ezt kiküszöbölendő, az arbitrázsmentes SABR-modellben[14] meghatároztuk az előre haladó forward egyenlet megoldásának numerikus közelítését, így az implikált sűrűségfüggvény segítségével tetszőleges európai típusú opciót tudtunk árazni. Az előre haladó forward egyenletre felírt differenciálegyenletet a Crank-Nicholson séma segítségével oldottuk meg, amely amellett, hogy gyors konvergenciát eredményez, még arbitrázsmentes árazást is biztosít. Ugyanakkor ez a modell sem tökéletes, hiszen a Crank-Nicholson séma által

adott megoldás oszcillálhat, ami rontja a közelítés minőségét. Másrészt pedig hosszú lejáratú opciók pontos árazására szükségünk van valamilyen átlaghoz visszahúzó hatásra az árfolyam dinamikában. Erre is van megoldás, még hozzá a 2020-ban bemutatott ún. átlaghoz visszahúzó SABR-modell[15], de ennek bemutatására a szakdolgozatom keretein belül nem került sor.

Összességében elmondható, hogy bizonyos speciális esetektől eltekintve mindkét SABR-modell a piac számára kifejezetten fontos tulajdonságokkal rendelkezik, amelynek köszönhetően a kamatcsere opciók piacának vezető modelléivé váltak.

## A. függelék

# A Crank-Nicholson séma implementálása Python használatával

A 4.3. alfejezetben bemutatásra került az előre haladó forward egyenlet megoldása a Crank-Nicholson séma segítségével. Alább látható az általam implementált algoritmus:

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Parameterek
f, F_min = 0.036, 0.001
alpha, beta, rho, nu = 0.05, 0.5, 0.5, 0.2
T, N, J, j0 = 0.25, 100, 500, 100
dt = T / N
h = (f - F_min) / (j0 - 0.5)
F_max = F_min + J * h
d = dt / (2 * h ** 2)
dd = dt / (2 * h)

A = np.zeros((J + 2, J + 2))
B = np.zeros((J + 2, J + 2))
Q = np.zeros(J + 2)
```



```

def M(k, n):
    tau = dt * (N - n)
    ff = F_min + (k - 0.5) * h
    z = (ff ** (1 - beta) - f ** (1 - beta)) / (alpha * (1 - beta))
    if ff != f:
        gamma = (ff ** beta - f ** beta) / (ff - f)
    else:
        gamma = (beta - 1) * f ** (beta - 1)
    return 0.5 * pow(alpha, 2) * (1 + 2 * rho * nu * z + nu ** 2 * z ** 2)
        * math.exp(rho * alpha * nu * gamma * tau) * ff ** beta

#Kezdeti es peremfeltetelek
Q_L, Q[j0], Q_R = 0, 1 / h, 0
Diff_L = dt / (2 * h) * (M(1, 0) * Q[1] - M(0, 0) * Q[0])
Diff_R = dt / (2 * h) * (M(J + 1, 0) * Q[J + 1] - M(J, 0) * Q[J])

#Lejartkori implikalt surusegfuggveny meghatarozasa
for n in range(N):
    B[0, 0] = M(0, n + 1)
    B[0, 1] = M(1, n + 1)
    B[J + 1, J] = M(J, n + 1)
    B[J + 1, J + 1] = M(J + 1, n + 1)
    for j in range(1, J + 1):
        A[j, j - 1] = dt / (2 * h ** 2) * M(j - 1, n)
        A[j, j] = 1 - 2 * dt / (2 * h ** 2) * M(j, n)
        A[j, j + 1] = dt / (2 * h ** 2) * M(j + 1, n)
        B[j, j - 1] = -dt / (2 * h ** 2) * M(j - 1, n + 1)
        B[j, j] = 1 + 2 * dt / (2 * h ** 2) * M(j, n + 1)
        B[j, j + 1] = -dt / (2 * h ** 2) * M(j + 1, n + 1)
    Q = np.matmul(np.matmul(np.linalg.inv(B), A), Q)
    Q_L += Diff_L
    Q_R += Diff_R
    Diff_L = dt / (2 * h) * (M(1, n + 1) * Q[1] - M(0, n + 1) * Q[0])
    Diff_R = dt / (2 * h) * (M(J + 1, n + 1) * Q[J + 1] - M(J, n + 1) * Q[J])
    Q_R += Diff_R
    Q_L += Diff_L

```

```
#Implikalt surusegfuggveny abrazolasa
np.savetxt("imp.csv", Q, delimiter=",")
plt.rcParams["figure.figsize"] = [7.50, 3.50]
plt.rcParams["figure.autolayout"] = True
plt.title("Az implikalt surusegfuggveny")
time=np.zeros(300)
for i in range(300):
    time[i]=float(i/100*3)
plt.plot(time, Q[:300] * h, color="pink")
plt.show()
```

# Ábrák jegyzéke

1.1. Kamatcsere ügylet árazása forward-módszerrel . . . . .	9
1.2. Kamatcsereopciók értéke . . . . .	12
2.1. Kamatcsere opciók piaca . . . . .	13
2.2. A volatilitásmosoly dinamikája a CEV-modellben . . . . .	18
2.3. Az árfolyam alakulása a SABR-modellben . . . . .	19
2.4. Volatilitásmosoly a SABR-modellben . . . . .	20
2.5. A SABR-modell paramétereit és a volatilitásmosoly közötti kapcsolat . . . . .	21
2.6. A volatilitásmosoly dinamikája . . . . .	22
4.1. Pillangó opció kifizetésfüggvénye . . . . .	39
4.2. Negatív implikált sűrűségfüggvény a SABR-modellben . . . . .	40
5.1. Volatilitásmosolyok különböző $\beta$ értékek mellett . . . . .	51
5.2. 3M6M swaption opció volatilitásmosolya . . . . .	52
5.3. 1Y1Y swaption opció volatilitásmosolya . . . . .	52
5.4. 5Y5Y swaption opció volatilitásmosolya . . . . .	52
5.5. 1Y1Y swaption opció implikált sűrűségfüggvénye . . . . .	53

# Irodalomjegyzék

- [1] Bachelier, L. (1900) Théorie de la spéculation, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, vol. 3, no. 17, pp. 21–86
- [2] Bank for International Settlements. Interest rate derivatives, <https://stats.bis.org/statx/srs/table/d7>
- [3] Black F., Scholes M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 8, 637-654.
- [4] Black F. (1976) The Pricing of Commodity Contracts, Journal of Financial Economics, pp. 167-179,
- [5] Bloomberg Terminal. <https://www.bloomberg.com/professional/solution/bloomberg-terminal/>
- [6] Breeden, D. and Litzenberger, R.H. (1978) Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices. Journal of Business 51, pp. 621-651.
- [7] Brigo D., Mercurio F. (2001), Interest Rate Models - Theory and Practice, Springer Finance
- [8] Crank, J.; Nicolson, P. (1947) "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type". Proc. Camb. Phil. Soc. 43
- [9] Dupire, B. (1994) Pricing with a smile. Risk Magazine, January, pp. 18–20.
- [10] Dupire, B. (1997) Pricing and hedging with smiles. In: Dempster, M.A.H. and Pliska, S.R. (eds), Mathematics of Derivative Securities. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 103–111.

- [11] Euribor rates. <https://www.euribor-rates.eu/en/current-euribor-rates/3/euribor-rate-6-months/>
- [12] Fokker, A. D. (1914) "Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld". *Ann. Phys.* 348 (4. Folge 43): 810–820
- [13] Hagan P., Kumar D., Lesniewski A., Woodward D. (2002) Managing Smile Risk. *Wilmott Magazine*. 1. pp. 84-108.
- [14] Hagan, P., Kumar, D., Lesniewski, A. and Woodward, D. (2014), Arbitrage-Free SABR. *Wilmott*, 2014: 60-75. <https://doi.org/10.1002/wilm.10290>
- [15] Hagan P., Lesniewski A., Woodward D. (2017) Implied Volatilities for Mean Reverting SABR Models. *Wilmott*. 2020. [10.1002/wilm.10859](https://doi.org/10.1002/wilm.10859).
- [16] Hagan S., Woodward D., (1999) Equivalent Black volatilities, *App. Math. Finance*, 6, pp. 147—157.
- [17] Harrison, J. and Pliska, S. (1981) Martingales and Stochastic Integrals in Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215-260.
- [18] Jourdain, B. (2004) Loss of Martingality in Asset Price Models with Lognormal Stochastic Volatility. Working paper. ENPC-CERMICS.
- [19] Oksendal B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science Business Media.
- [20] Planck, M. (1917) "Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 24: 324–341.
- [21] Száz J. (2018), *Befektetések, kockázatok, folyamatok. Numerikus Pénzügyek II*.