

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Gyúró Noémi

# LOKÁLIS BIFURKÁCIÓK DETEKTÁLÁSA

MSc diplomamunka

Alkalmazott matematika szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor, adjunktus

Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2023.

# Bevezetés

Ismeretes, hogy a szerkezetképződés az embrionális fejlődés egyik sajátos jellemzője (vö. [18]). Cooke és Zeeman tanulmánya (vö. [5]) óta több cikk is modellezte a szomitogenezist vagy más néven csigolyaképződést (vö. pl. [2], [7], [22]). A Schlögl-féle séma (vö. [27]), a Gray-Scott-modell ([8]), illetve a Schnackenberg-modell (vö. [28]) mintájára a [19] tanulmányban egy

$$\left. \begin{aligned} \partial_t[A] &= d_A \Delta_r[A] + f_1([A], [B]), \\ \partial_t[B] &= d_B \Delta_r[B] + f_2([A], [B]) \end{aligned} \right\} \quad (0.0.1)$$

alakú kémiai reakció-diffúzió-rendszert javasoltak a szerzők két anyag koncentrációja időfejlődésének leírására, ahol a modell alapjául szolgáló



kémiai séma az

$$\begin{aligned} [\dot{A}] &= f_1([A], [B]) := -k_1[A] + k_2[A]^2[B], \\ [\dot{B}] &= f_2([A], [B]) := k'_{-3} - k_3[B] - k_2[A]^2[B] \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszert generálja. Itt A és B az adott kémiai anyagokat reprezentálják, melyek koncentrációját szögletes zárójel, azok rezervoárját pedig R jelöli, a  $(k_1, k_2, k_3, k'_{-3})$  állandók pedig pozitív paraméterek. A (0.0.3) kinetikai rendszert szokás sebességi egyenletnek is hívni, a benne szereplő paramétereket pedig sebességi állandóknak (vö. [20]). Az egyenletben lévő harmadfokú nem-linearitásnak a (0.0.2)-beli második autokatalitikus reakció az oka.

Az áttekinthetőség kedvéért bevezetjük az

$$\alpha := k_1, \quad \beta := k_2, \quad \gamma := k'_{-3}, \quad \delta := k_3$$

jelöléseket és a koncentrációk esetében elhagyjuk a zárójeleket:

$$A := [A], \quad B := [B].$$

Dolgozatunkban a (0.0.3) kinetikai rendszer kvalitatív tulajdonságaival foglalkozunk: feltételeket fogalmazunk meg az egyensúlyi helyzetek létezésére, azok stabilitására, majd lokális bifurkációk felléptét igazoljuk. A kapott eredményeket numerikus szimulációkkal vizualizáljuk. A bizonyítás során felhasznált bifurkációs tételeket a Függelékben írtuk le részletesen.

A jelen dolgozat lényegében megegyezik a 2021. évi Matematikai Intézetben megszervezett Tudományos Diákköri Konferencián Dr. Kovács Sándor és György Szilvia témavezetésével benyújtott, majd ott III. díjat nyert dolgozatommal.

Budapest, 2023. június 2.

*Gyúró Noémi*

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>1. A rendszer fizikai relevanciája</b>	<b>5</b>
<b>2. Egyensúlyi helyzetek stabilitása</b>	<b>7</b>
<b>3. Bifurkációk</b>	<b>12</b>
3.1. Nyereg-csomó-bifurkáció . . . . .	12
3.2. Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció . . . . .	14
3.3. Bogdanov-Takens-bifurkáció . . . . .	20
<b>4. Függelék : a dolgozatban felhasznált bifurkációs tételek</b>	<b>25</b>
4.1. Nyereg-csomó-bifurkáció . . . . .	25
4.2. Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció . . . . .	28
4.3. Bogdanov-Takens-bifurkáció . . . . .	31
<b>Hivatkozások</b>	<b>32</b>

# 1. fejezet

## A rendszer fizikai relevanciája

A (0.0.3) kinetikai differenciálegyenlet-rendszer megoldása fizikai tartalma alapján csak akkor fogadható el, ha az nem-negatív kezdeti értékből indulva tetszőleges  $t > 0$  esetén nem-negatív marad, továbbá értelmezési tartománya a teljes  $[0, +\infty)$  intervallum (vö. [29]), azaz a rendszer nem „robban fel”.

Nyilvánvaló, hogy a (0.0.3) rendszer jobb oldala sima függvény:  $\mathbf{f} := (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1$ , így a Picard-Lindelöf-tétel biztosítja a megfelelő kezdetiérték-feladat megoldásának létezését, ill. egyértelműségét.

A (0.0.3) modell fizikai relevanciájának igazolásához megmutatjuk, hogy az  $[A, B]$  fázissík pozitív kvadránsa invariáns halmaz.

**1.0.1. lemma.** A (0.0.3) egyenlet  $A(0) > 0$ ,  $B(0) > 0$  kezdeti feltételnek eleget tévő megoldásai  $t > 0$  esetén is pozitívak maradnak.

**Bizonyítás.** Mivel  $A \equiv 0$  a (0.0.3) rendszer első egyenletének megoldása, ezért az egyértelműség következtében (0.0.3)-nak nincsen olyan  $A(0) > 0$  kezdeti feltételnek eleget tévő  $A$  megoldása, amely véges idő alatt zérussá válna. A második komponens pozitivitását pedig a következő módon láthatjuk be. Tegyük fel indirekt módon, hogy a (0.0.3) rendszer  $B(0) > 0$  kezdeti feltételnek eleget tévő megoldása először a  $t^* > 0$  időpontban válik zérussá, azaz legyen

$$t^* := \min\{t > 0 : B(t) = 0\}.$$

Ekkor a (0.0.3) rendszer második egyenletéből azt kapjuk, hogy

$$\dot{B}(t^*) = \gamma - \delta B(t^*) - \beta A^2(t^*)B(t^*) = \gamma > 0,$$

azonban  $B(0) > 0$  következtében  $B(t^*) = 0$  csak úgy teljesülhet, hogy  $\dot{B}(t^*) \leq 0$ , ami ellentmond a kezdeti feltétel pozitív voltának. Ennélfogva tetszőleges  $0 < t \in \mathbb{R}$  esetén  $B(t) > 0$  teljesül. ■

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a (0.0.3) rendszer megoldásai egyenletesen korlátosak, következésképpen az egész  $[0, +\infty)$  intervallumon értelmezve vannak.

**1.0.2. lemma.** A (0.0.3) kinetikai rendszernek minden, a fázissík pozitív kavadránsában induló pályája az

$$\Omega := \left\{ (A, B) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : \sigma(A, B) \leq \frac{k}{\mu} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \right\} \quad (1.0.1)$$

halmazba torkollik, ahol  $k, \mu > 0$  alkalmas állandó.

**Bizonyítás.** A

$$\sigma(A, B) := A + B \quad (A, B > 0)$$

függvénynek a (0.0.3) megoldásai mentén vett idő szerinti deriváltja

$$\dot{\sigma}(A, B) = \dot{A} + \dot{B} = \gamma - \alpha A - \delta B \quad (A, B > 0)$$

alakú. Így bármely  $\mu > 0$  számra

$$\dot{\sigma}(A, B) + \mu\sigma(A, B) \equiv \gamma - \alpha A - \delta B + \mu A + \mu B = \gamma + (\mu - \alpha)A + (\mu - \delta)B \quad (1.0.2)$$

teljesül. Következésképpen a  $\mu \leq \min\{\alpha, \delta\}$  választással azt kapjuk, hogy a fenti becslés jobb oldala a fázissík pozitív negyedében korlátos, azaz alkalmas  $k > 0$  számmal

$$\dot{\sigma}(A, B) + \mu\sigma(A, B) \leq k \quad (A, B > 0)$$

teljesül. Mindkét oldalt  $e^{\mu t}$ -vel szorozva ( $t \in [0, +\infty)$ ) azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\dot{\sigma}(A(t), B(t)) \cdot e^{\mu t} + \mu\sigma(A(t), B(t)) \cdot e^{\mu t}}_{\frac{d}{dt}(\sigma(A(t), B(t)) \cdot e^{\mu t})} \leq k \cdot e^{\mu t} \quad (t \in [0, +\infty)),$$

ill. integrálva  $\int_0^t ds$ , majd felülről becslve

$$\sigma(A(t), B(t)) \cdot e^{\mu t} - \sigma(A(0), B(0)) \leq \frac{k}{\mu}(e^{\mu t} - 1) \leq \frac{k}{\mu}e^{\mu t} \quad (t \in [0, +\infty)).$$

adódik. Átrendezéssel ez nem más, mint

$$0 \leq \sigma(A(t), B(t)) \leq \frac{k}{\mu} + \sigma(A(0), B(0)) \cdot \exp(-\mu t) \quad (t \in [0, +\infty)),$$

ami azt jelenti, hogy a  $t \rightarrow +\infty$  határátmenettel

$$0 \leq \sigma(A, B) \leq \frac{k}{\mu} + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \quad \blacksquare$$

## 2. fejezet

### Egyensúlyi helyzetek stabilitása

Az  $[A, B]$  fázissík pozitív kvadránsának határán a (0.0.3) rendszernek egyetlen egyensúlyi helyzete van:  $\mathbf{E}_b := (0, \gamma/\delta)$ . A belső egyensúlyi helyzetek pedig a  $B = \mathcal{N}_1(A)$  és  $B = \mathcal{N}_2(A)$  izoklinák metszéspontjában helyezkednek el, ahol tetszőleges  $A > 0$  esetén

$$\mathcal{N}_1(A) := \frac{\alpha}{\beta A} \quad \text{és} \quad \mathcal{N}_2(A) := \frac{\gamma}{\delta + \beta A^2}.$$

Az  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$  egyenlőségből látható, hogy az egyensúlyi helyzet első komponense a

$$\pi(A) := \alpha\beta A^2 - \beta\gamma A + \alpha\delta \quad (A > 0)$$

másodfokú polinom gyöke. A

$$K := \beta\gamma^2 - 4\alpha^2\delta$$

jelölés bevezetésével a  $\pi$  polinom gyökeinek száma a következőképpen alakul (vö. 2.0.1. ábra):

- $K < 0$  esetén  $\pi$ -nek nincsen valós gyöke, ezért a (0.0.3) rendszernek nincsen belső egyensúlyi helyzete;
- $K = 0$  esetén  $\pi$ -nek egyetlen valós gyöke van, így a (0.0.3) rendszernek pontosan egy belső egyensúlyi helyzete van:

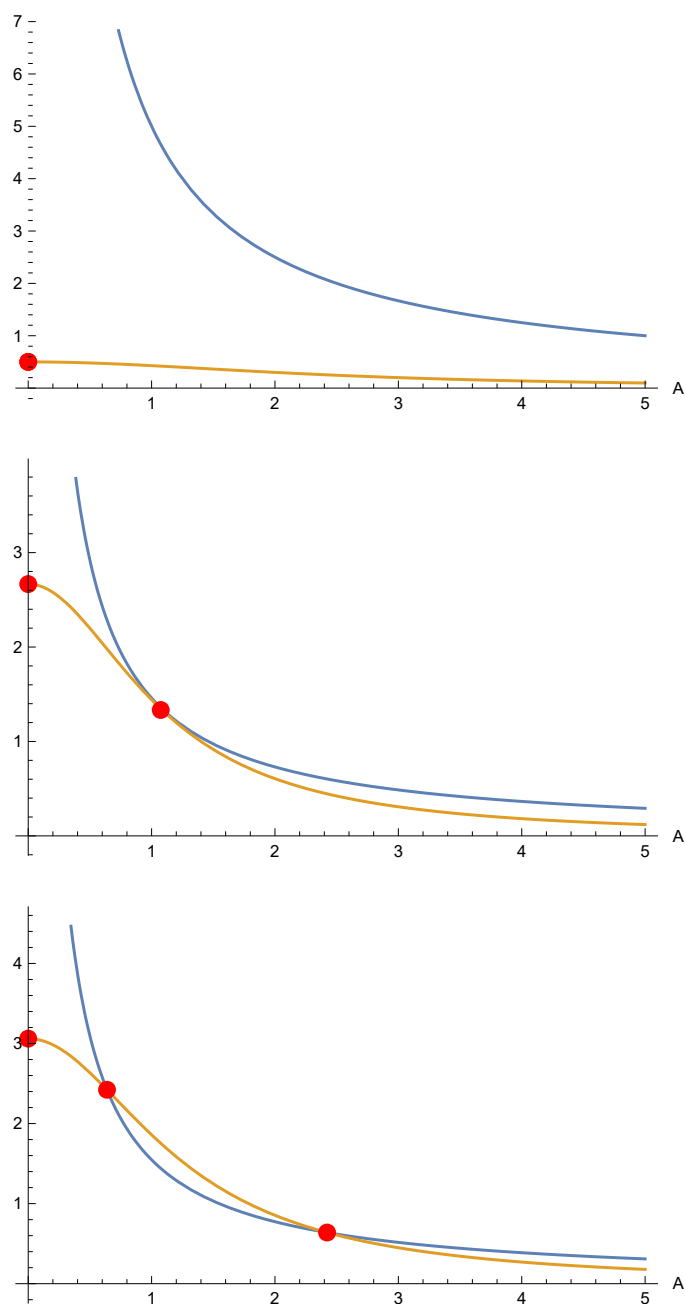
$$\bar{\mathbf{E}} := (\bar{A}, \bar{B}) := \left( \frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{\gamma}{2\delta} \right);$$

- $K > 0$  esetén  $\pi$ -nek két különböző valós gyöke van, ezért a (0.0.3) rendszernek két belső egyensúlyi helyzete van:  $\mathbf{E}_\pm := (A_\mp, B_\pm)$ , ahol

$$A_\pm := \frac{\beta\gamma \pm \sqrt{\beta K}}{2\alpha\beta} \quad \text{és} \quad B_\pm := \frac{\alpha}{\delta} \cdot A_\pm.$$

A 2.0.1. ábráról sejthető, hogy a  $K > 0$  esetben a határon lévő és a két belső egyensúlyi helyzet egy egyenesre illeszkedik. Valóban, az  $A \neq 0$  feltevés mellett a (0.0.3)-beli két jobboldali komponens egyenlővé téve zérussal, majd az elsőben  $A$ -t kiemelve, a két jobb oldal összeadásával az egyensúlyi helyzetekre vonatkozó

$$AB = \alpha/\beta, \quad \alpha A + \delta B = \gamma \quad (2.0.1)$$

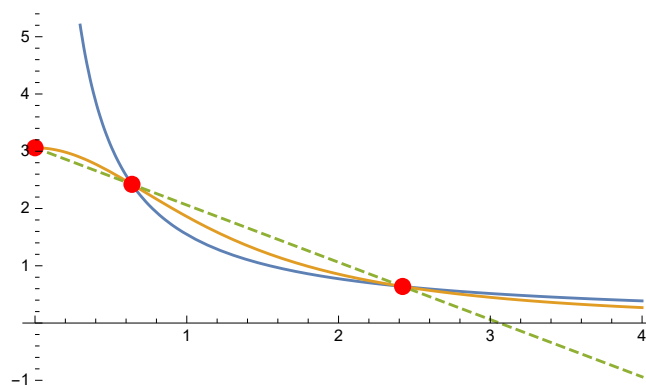


2.0.1. ábra. A (0.0.3) rendszer izoklinái a  $K < 0$ ,  $K = 0$  és a  $K > 0$  esetben.

ekvivalens egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenlet geometriai tartalma az, hogy az egyensúlyi helyzetek egy negatív meredekségű egyenes és egy hiperbola metszéspontjában helyezkednek el, továbbá  $A = 0$  esetén az iménti egyenes tartalmazza az  $E_b$  pontot, mivel ez esetben  $B = \gamma/\delta$  teljesül (vö. 2.0.2. ábra).

Az egyensúlyi helyzetek stabilitásának vizsgálatát a linearizálás módszerével végezzük el. A





2.0.2. ábra. A (0.0.3) rendszer belső egyensúlyi helyzetei egy hiperbola és egy egyenes metszéspontjában.

(0.0.3) jobb oldalának Jacobi-mátrixa nem más, mint

$$J(A, B) := \frac{\partial}{\partial(A, B)} \mathbf{f}(A, B) = \begin{bmatrix} -\alpha + 2\beta AB & \beta A^2 \\ -2\beta AB & -\delta - \beta A^2 \end{bmatrix}.$$

Így a (0.0.3) rendszer  $\bar{\mathbf{S}}$  egyensúlyi helyzete pontosan akkor (lokálisan) aszimptotikusan stabilis, ha

$$\text{Tr}(J(\bar{\mathbf{S}})) < 0 \quad \text{és} \quad \det(J(\bar{\mathbf{S}})) > 0 \quad (2.0.2)$$

teljesül.

Az egyes egyensúlyi helyzetek stabilitását az alábbi tételben foglaljuk össze.

### 2.0.1. tétel.

1. A határon lévő  $\mathbf{E}_b$  egyensúlyi helyzet lokálisan,  $K < 0$  esetén pedig globálisan aszimptotikusan stabilis (vö. 2.0.3. ábra).
2. Az  $\bar{\mathbf{E}}$  egyensúlyi helyzet lehet stabilis meg labilis is (vö. 2.0.4. ábra).
3. Az  $\mathbf{E}_+$  egyensúlyi helyzet labilis.
4. Az  $\mathbf{E}_-$  egyensúlyi helyzet

a) (lokálisan) aszimptotikusan stabilis, ha

$$2\alpha^3 < \gamma(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma),$$

b) labilis, ha

$$2\alpha^3 > \gamma(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma).$$

**Bizonyítás.** A  $K$  előjelének megfelelően három esetet különböztethetünk meg.

**1. eset.** A  $K < 0$  esetben az egyetlen  $\mathbf{E}_b$  egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabilis, hiszen a

$$J(\mathbf{E}_b) = J(0, \gamma/\delta) = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

mátrix minden sajátértéke negatív. A Poincaré-Bendixson-tétel (vö. [6]) következményeként elmondható tehát, hogy az (1.0.1)-beli  $\Omega$  halmaz nem tartalmaz határciklust. Mivel  $\Omega$  korlátos és pozitívan invariáns, és  $\mathbf{E}_b$  az egyetlen egyensúlyi helyzet  $\Omega$ -ban, ezért ebben az esetben az  $\mathbf{E}_b$  lokálisan aszimptotikusan stabilis volta maga után vonja annak globálisan stabilis voltát.

**2. eset.** A  $K = 0$  esetben az  $\mathbf{E}_b$  egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabilis, hiszen  $J(\mathbf{E}_b)$  stabilis mátrix. Az egyetlen belső egyensúlyi helyzet,  $\bar{\mathbf{E}}$  labilis, ha  $\alpha > 2\delta$ , ui. a

$$J(\bar{\mathbf{E}}) = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ -2\alpha & -2\delta \end{bmatrix}$$

Jacobi mátrixnak ebben a pontban ugyan pozitív nyoma van:

$$\text{Tr}(J(\bar{\mathbf{E}})) = \alpha - 2\delta.$$

Az  $\alpha \leq 2\delta$  esetben a linearizálás módszerével nem dönthető el  $\bar{\mathbf{E}}$  stabilitása, mivel a  $J(\bar{\mathbf{E}})$  mátrix spektruma  $\det(J(\bar{\mathbf{E}})) = 0$  következtében tartalmazza a zérust, a másik sajátérték pedig nem-pozitív (valós) szám.

**3. eset.** A  $K > 0$  esetben a határon lévő  $\mathbf{E}_b$  egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabilis, ui. ebben az esetben a  $J(\mathbf{E}_b)$  mátrix stabilis, továbbá

a) az  $\mathbf{E}_+ = (A_+, B_+)$  egyensúlyi helyzet labilis, mivel a

$$J(\mathbf{E}_+) = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{(\sqrt{\beta K} - \beta\gamma)^2}{4\alpha^2\beta} \\ -2\alpha & \frac{\gamma(\sqrt{\beta K} - \beta\gamma)}{2\alpha^2} \end{bmatrix}$$

mátrix

$$\det(J(\mathbf{E}_+)) = \frac{K - \gamma\sqrt{\beta K}}{2\alpha} < 0$$

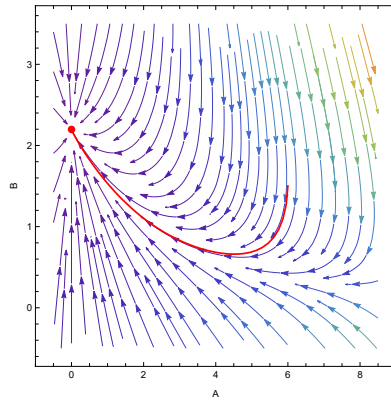
következtében nem stabilis.

b) az  $\mathbf{E}_- = (A_-, B_-)$  egyensúlyi helyzet stabilis, amennyiben

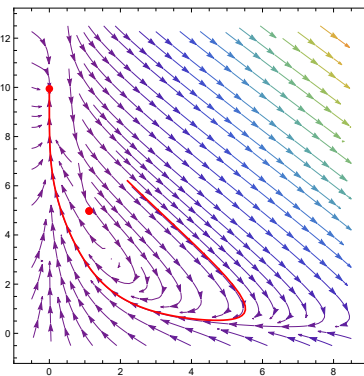
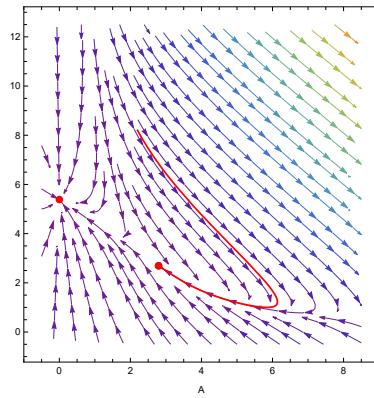
$$\text{Tr}(J(\mathbf{E}_-)) = \alpha - \frac{\gamma(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma)}{2\alpha^2} < 0,$$

illetve labilis, ha  $\text{Tr}(J(\mathbf{E}_-)) > 0$ , mivel a Jacobi-mátrix és determinánsa ebben az egyensúlyi helyzetben nem más, mint

$$J(\mathbf{E}_-) = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma)^2}{4\alpha^2\beta} \\ -2\alpha & -\frac{\gamma(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma)}{2\alpha^2} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \det(J(\mathbf{E}_-)) = \frac{K + \gamma\sqrt{\beta K}}{2\alpha} > 0. \quad \blacksquare$$



2.0.3. ábra. A (0.0.3) rendszer fázisportréja, ha  $K < 0$ .



2.0.4. ábra. A (0.0.3) rendszer fázisportréja, ha  $K = 0$  ( $\bar{E}$  stabilis, ill. labilis).

## 3. fejezet

### Bifurkációk

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy miként változik meg a (0.0.3) rendszer egyensúlyi helyzeteinek stabilitása, ha a (2.0.2) feltétel sérül, azaz ha az  $\bar{S}$  egyensúlyi helyzet elveszti stabilitását. Megmutatjuk, hogy a (0.0.3) rendszer  $f_1$  és  $f_2$  jobb oldalában szereplő bizonyos paraméterek kritikus értékénél a (0.0.3) rendszer fázisképében minőségi változás: bifurkáció következik be. Konkrétan nyereg-csomó-, Poincaré-Andronov-Hopf-, illetve Bogdanov-Takens-bifurkációt fogunk analitikusan igazolni. A bifurkációs paraméter jelölésére minden esetben a  $\mu$  szimbólumot használjuk. A hivatkozott bifurkációs tételek a függelékben találhatóak meg.

#### 3.1. Nyereg-csomó-bifurkáció

A  $K = 0$  egyenletű görbe, pontosabban a

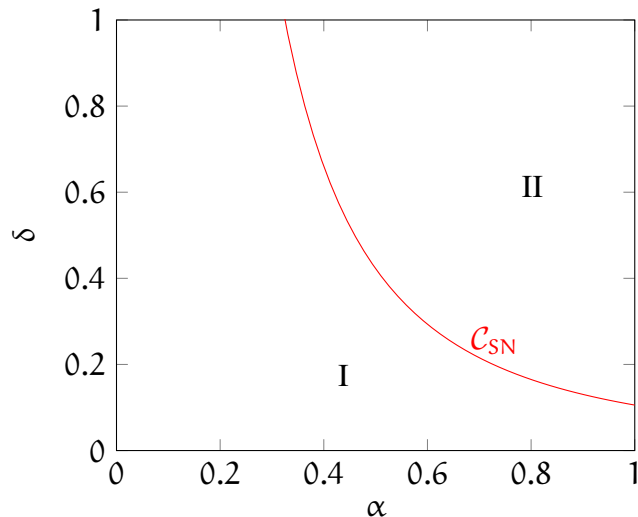
$$\mathcal{C}_{SN} := \left\{ (\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2 : \delta = \frac{\beta\gamma^2}{4\alpha^2} \right\} \quad (3.1.1)$$

ún. nyereg-csomó-bifurkációs görbe (vö. 3.1.1. ábra) az  $(\alpha, \delta)$  paraméter-síkot a belső egyensúlyi helyzetek száma alapján két összefüggő komponensre osztja. Ha az  $(\alpha, \delta)$  paraméterpár a II-es tartományban, azaz a  $\mathcal{C}_{SN}$  görbe felett helyezkedik el ( $K > 0$ ), akkor a (0.0.3) rendszernek két belső egyensúlyi helyzete van:  $\mathbf{E}_+$  és  $\mathbf{E}_-$ . Ha az iménti paraméter-pár az I-es tartományban, azaz a  $\mathcal{C}_{SN}$  görbe alatt van ( $K < 0$ ), akkor a (0.0.3) rendszernek nincsen belső egyensúlyi helyzete. Ha az  $(\alpha, \delta)$  paraméter-pár a  $\mathcal{C}_{SN}$  görbére illeszkedik ( $K = 0$ ), akkor az  $\mathbf{E}_+$  és az  $\mathbf{E}_-$  egyensúlyi helyzet összeolvad egyetlen egyensúlyi helyzetté:  $\bar{\mathbf{E}} = (\bar{A}, \bar{B})$ .

Világos, hogy ez az összeolvadás a  $\beta$  paraméter

$$\mu_{SN} := \frac{4\alpha^2\delta}{\gamma^2} \quad (3.1.2)$$

kritikus értékénél következik be. Ahogy  $\beta$  értéke  $\mu_{SN}$  alá kerül, az  $\bar{\mathbf{E}}$  egyetlen belső egyensúlyi helyzet megszűnik létezni.



3.1.1. ábra. Nyereg-csomó-bifurkációs görbe.

Látható, hogy az

$$\alpha \neq 2\delta \tag{3.1.3}$$

esetben a 0 egyszeres sajátértéke a  $J(\bar{\mathbf{E}})$  mátrixnak és a másik sajátérték valós része zérustól különböző. Ez arra enged következtetni, hogy a (3.1.2) kritikus értéknél nyeregcsomó-bifurkáció jelenik meg. Ezt bizonyítandó megvizsgáljuk, hogy fennállnak-e a Függelékben lévő (4.1.1) tétel feltételei.

Az

$$\chi_1 := A, \quad \chi_2 := B, \quad \mathbf{x}_{SN} := \bar{\mathbf{E}}$$

ill.

$$\mathfrak{A} := \partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})$$

jelöléseket bevezetve (3.1.3) következményeként elmondható, hogy az  $\mathfrak{A}$  mátrix minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitással rendelkezik:

$$\sigma(\mathfrak{A}) = \{0, \alpha - 2\delta\}$$

és a

$$\mathbf{q} := \begin{bmatrix} -\delta/\alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorokra

$$\mathfrak{A}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathfrak{A}^T\mathbf{p} = \mathbf{0},$$

ill.

$$\mathbf{p}^T\mathbf{q} \equiv \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$$

teljesül. Az egyenlet jobb oldalának a megfelelő deriváltjait képezve azt kapjuk, hogy

$$\partial_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) = \begin{bmatrix} A^2 B \\ -A^2 B \end{bmatrix}_{A=\frac{\gamma}{2\alpha}, B=\frac{\gamma}{2\delta}} = \frac{\gamma^3}{8\alpha^2\delta} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

továbbá a

$$\partial_{12} f_1(A, B) = 2\beta A = \partial_{21} f_1(A, B), \quad \partial_{11} f_1(A, B) = 2\beta B, \quad \partial_{22} f_1(A, B) = 0,$$

$$\partial_{12} f_2(A, B) = -2\beta A = \partial_{21} f_2(A, B), \quad \partial_{11} f_2(A, B) = -2\beta B, \quad \partial_{22} f_2(A, B) = 0$$

egyenlőségekből

$$\begin{aligned} \partial_{11} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})(\mathbf{q}, \mathbf{q}) &= \\ &= \begin{bmatrix} \partial_{11} f_1(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) q_1^2 + 2\partial_{12} f_1(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) q_1 q_2 + \partial_{22} f_1(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) q_2^2 \\ \partial_{11} f_2(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) q_1^2 + 2\partial_{12} f_2(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) q_1 q_2 + \partial_{22} f_2(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) q_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta\gamma\delta}{\alpha^2} - \frac{2\beta\gamma\delta}{\alpha^2} + 0 \\ -\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha^2} + \frac{2\beta\gamma\delta}{\alpha^2} + 0 \end{bmatrix} = \frac{\beta\gamma\delta}{\alpha^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

következik. A fenti  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{q}$  vektorral

$$\mathbf{a} := \mathbf{p}^T \cdot \partial_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) = \frac{\gamma^3}{8\alpha^2\delta} \neq 0$$

és

$$\mathbf{b} := \mathbf{p}^T \cdot [\partial_{11} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})(\mathbf{q}, \mathbf{q})] = -\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha^2} \neq 0$$

adódik. Így  $\mathbf{b}/\mathbf{a} < 0$ , ami azt jelenti (vö. Függelék, (4.1.1). tétel), hogy beláttuk az alábbi tételt.

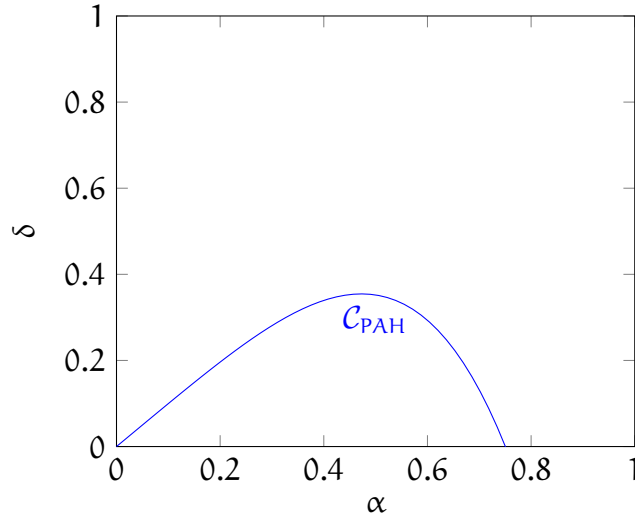
**3.1.1. tétel.** A (3.1.3) feltétel teljesülése esetén a (0.0.3) rendszerben a (3.1.2) kritikus értéknél szuperkritikus nyereg-csomó-bifurkáció lép fel.

## 3.2. Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció

Az (0.0.3) rendszer alakjából látható, hogy a B-tengely invariáns halmaz, következésképpen nincsen a határon lévő  $\mathbf{E}_b$  egyensúlyi helyzetet belsejében magába foglaló zárt pálya. Mivel  $\det(J(\mathbf{E}_+)) < 0$ , ezért az  $\mathbf{E}_+$  egyensúlyi helyzet nyereg, amennyiben létezik. Következésképpen periodikus pálya csak az  $\mathbf{E}_-$  egyensúlyi helyzetből bifurkálódhat.

Mint ahogy már azt az előző fejezetben megmutattuk, az  $\mathbf{E}_-$  egyensúlyi helyzet stabilitása akkor változik meg, amikor a  $J(\mathbf{E}_-)$  mátrix nyoma eltűnik. A 3.2.1. ábrán a

$$\mathcal{C}_{PAH} := \{(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2 : \text{Tr}(J(\mathbf{E}_-)) = 0\} = \left\{ (\alpha, \delta) \in \mathbb{R}_+^2 : \delta = \frac{\alpha\beta\gamma^2 - \alpha^4}{\beta\gamma^2} \right\} \quad (3.2.1)$$



3.2.1. ábra. Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációs görbe.

Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációs görbe látható az  $(\alpha, \delta)$  paramétersíkon. A görbe feletti paraméterpontok esetén az  $\mathbf{E}_-$  egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis. Közeledve a  $C_{PAH}$  görbéhez a  $J(\mathbf{E}_-)$  mátrix sajátértékei komplex számok lesznek és az  $\mathbf{E}_-$  egyensúlyi helyzet stabilis fókusszá változik. Átlépve a  $C_{PAH}$  görbét Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációval határciklus keletkezik.

Látható, hogy a  $J(\mathbf{E}_-)$  mátrix nyoma pontosan akkor tűnik el, amikor a  $\beta$  paraméter eléri a

$$\mu_H := \frac{\alpha^4}{\gamma^2(\alpha - \delta)} \quad (3.2.2)$$

kritikus értéket, feltéve persze, ha  $\alpha > \delta$  is teljesül (vö. [15]). Mint ahogy az az alábbi tételből is látható, ellenkező esetben a (0.0.3) rendszernek nincsen határciklusa.

**3.2.1. tétel.** Ha fennáll a  $\alpha \leq \delta$  feltétel, akkor a (0.0.3) rendszernek nincsen nemtriviális periodikus megoldása.

**Bizonyítás.** A

$$h(A, B) := \frac{1}{A^2} \quad (A, B > 0)$$

Dulac-függvénnyel tetszőleges  $A, B > 0$  esetén

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(h\mathbf{f})(A, B) &= \frac{\partial(h\mathbf{f})}{\partial A}(A, B) + \frac{\partial(h\mathbf{f})}{\partial B}(A, B) = \\ &= \frac{\partial}{\partial A} \left( -\frac{\alpha}{A} + \beta B \right) + \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{\gamma}{A^2} - \frac{\delta B}{A^2} - \beta B \right) = \frac{\alpha - \delta}{A^2} - \beta < 0 \end{aligned}$$

adódik. Így a Bendixson-Dulac-kritérium (cf. [6]) felhasználásával azt kapjuk, hogy a kérdéses nemtriviális periodikus megoldás létezése kizárható. ■

A határciklus létezéséhez azt kell belátni, hogy a  $J(\mathbf{E}_-)$  mátrix

$$z_{\pm}(\beta) = \rho(\beta) \pm \omega(\beta) \cdot \iota \quad (\beta > 0)$$

sajátértékeire fennállnak a Függelékbeli **(PAH2)**-**(PAH3)** feltételek (vö. [14]), azaz az áthaladási és a transzverzálitási feltétel. A  $J(\mathbf{E}_-)$  mátrix karakterisztikus polinomja

$$\Delta_{\mathbf{E}_-}(z, \beta) := z^2 + p(\beta)z + q(\beta) \quad (z \in \mathbb{C}, \beta > 0) \quad (3.2.3)$$

alakú, ahol

$$p(\beta) := \frac{\gamma(\sqrt{\beta K} + \beta\gamma^2)}{2\alpha^2} - \alpha = \frac{\gamma\sqrt{\beta(\beta\gamma^2 - 4\alpha^2\delta)} + \beta\gamma}{2\alpha^2} - \alpha \quad (\beta > 0)$$

és

$$q(\beta) := \frac{K + \gamma\sqrt{\beta K}}{2\alpha} = \frac{\beta\gamma^2 - 4\alpha^2\delta + \gamma\sqrt{\beta(\beta\gamma^2 - 4\alpha^2\delta)}}{2\alpha} \quad (\beta > 0).$$

A  $\Delta_{\mathbf{E}_-}$  polinom pontosan akkor teljesíti **(PAH2)**-**(PAH3)** feltételeket, ha

$$0 = \Delta_{\mathbf{E}_-}(\omega\iota, \mu_H) = -\omega^2 + p(\mu_H)\omega\iota + q(\mu_H),$$

azaz

$$p(\mu_H) = 0 \quad \text{és} \quad q(\mu_H) > 0, \quad (3.2.4)$$

ill.

$$0 \neq \rho'(\mu_H) = \Re \left( -\frac{\partial_2 \Delta_{\mathbf{E}_-}(\omega\iota, \mu_H)}{\partial_1 \Delta_{\mathbf{E}_-}(\omega\iota, \mu_H)} \right) = \Re \left( -\frac{p'(\mu_H)\omega\iota + q'(\mu_H)}{2\omega\iota + p(\mu_H)} \right) = -\frac{p'(\mu_H)}{2}. \quad (3.2.5)$$

Belátható tehát (vö. Függelék, 4.2.1. tétel) a következő

**3.2.2. tétel.** Ha  $K > 0$  és

$$\alpha > 2\delta, \quad (3.2.6)$$

akkor a  $\beta = \mu_H$  kritikus paraméterértéknél a (0.0.3) rendszer  $\mathbf{E}_-(\beta) = (A_+(\beta), B_-(\beta))$  egyensúlyi helyzetéből határciklus bifurkálódik Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációval; a bifurkáció szuperkritikus, mivel az

$$l_1 := \frac{\alpha^4}{2\omega\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2} \cdot (-9\alpha^2 + 13\alpha\delta + 4\delta^2) \quad (3.2.7)$$

első Poincaré-Ljapunov együttható negatív.

**Bizonyítás.**

**1. lépés.** Világos, hogy,

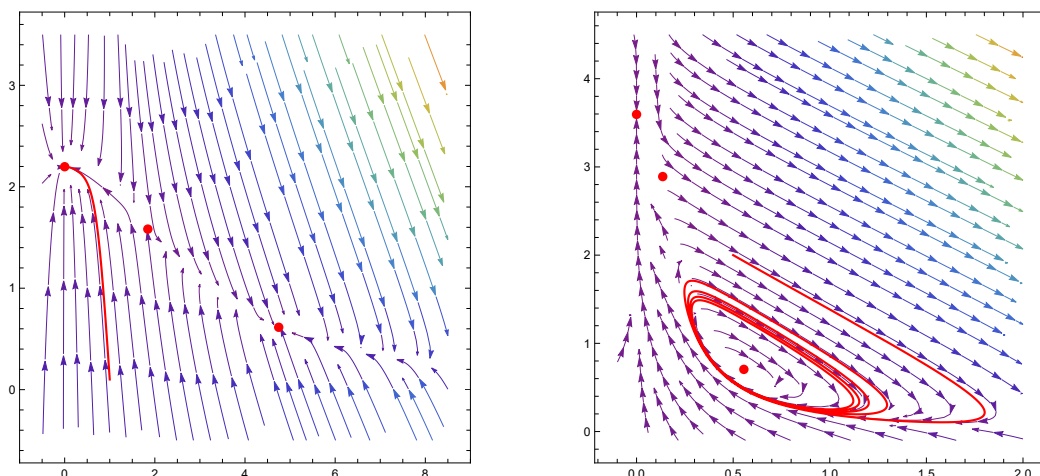
$$p(\mu_H) = 0, \quad q(\mu_H) = \alpha(\alpha - \delta) > 0,$$

majd némi számolással azt kapjuk, hogy

$$p'(\mu_H) = \frac{\gamma^2(\alpha - \delta)^2}{\alpha^3(\alpha - 2\delta)} \neq 0$$

(vö. [15]), ami a Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció felléptét igazolja. A 3.2.2 ábrán a (0.0.3) rendszer fázisportréját láthatjuk, mielőtt a bifurkációs paraméter elérné a kritikus értéket, illetve miután elérte azt.





3.2.2. ábra. A (0.0.3) rendszer fázisportréja a  $K > 0$ , a  $\beta < \mu_N$ , ill. a  $\beta = \mu_H$  esetben.

**2. lépés.** A továbbiakban meghatározzuk az  $l_1$  Poincaré-Ljapunov-együtthatót, amelynek előjeléből következtethetünk a bifurkáció szub- ill. szuperkritikus voltára. E célból a (0.0.3) rendszert

$$(\dot{A}, \dot{B}) = \mathbf{F}(A, B, \beta) \quad (3.2.8)$$

alakba írjuk, a paramétertől való függését hangsúlyozandó. A Függelékbeli  $\mathfrak{B}$  bilineáris, illetve  $\mathfrak{C}$  trilineáris leképezések (vö. (4.2.1)) koordinátafüggvényei

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi, \mu_H)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=\mathbf{E}_-} x_j y_k, \quad (i \in \{1,2\}),$$

ill.

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi, \mu_H)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=\mathbf{E}_-} x_j y_k z_l \quad (i \in \{1,2\})$$

alakúak. Ha a  $\beta = \mu_H$  kritikus értéknél  $\mathfrak{A}_-$  jelöli a  $J(\mathbf{E}_-)$  Jacobi-mátrixot:

$$\mathfrak{A}_- := \frac{\partial \mathbf{F}(\xi, \mu_H)}{\partial (A, B)} \Big|_{\xi=\mathbf{E}_-},$$

akkor  $\pm i\omega$  sajátértékei  $\mathfrak{A}_-$ -nak, a hozzájuk tartozó  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{K}^2$  bal, ill. jobb oldali sajátvektorokra pedig (4.2.3), ill. (4.2.2) alapján

$$\mathfrak{A}_- \mathbf{q} = i\omega \mathbf{q}, \quad \mathfrak{A}_-^T \mathbf{p} = -i\omega \mathbf{p}, \quad (3.2.9)$$

ill.

$$\langle \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q} \rangle = 1 \quad (3.2.10)$$

teljesül. Az első Poincaré-Ljapunov-együtthatót a

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \cdot \Re(\langle \mathbf{p}, \mathcal{H}_{21} \rangle) \quad (3.2.11)$$

Kuznetsov-formula (vö. (4.2.4)) alapján számoljuk, ahol

$$\mathcal{H}_{21} := \mathfrak{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + 2\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{h}_{11}) + \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{h}_{20}),$$

ill.

$$\mathbf{h}_{11} := \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \quad \text{és} \quad \mathbf{h}_{20} := (2i\omega I_2 - \mathfrak{A})^{-1} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$$

(vö. 4.2.1. definíció). A  $\beta = \mu_H$  kritikus paraméterértéknél

$$\mathfrak{A}_- = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha - \delta \\ -2\alpha & -\alpha \end{bmatrix},$$

ill.

$$\mathfrak{A}_-^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2\delta)} \begin{bmatrix} -\alpha & -(\alpha - \delta) \\ 2\alpha & \alpha \end{bmatrix},$$

majd az

$$\omega := \sqrt{\alpha(\alpha - 2\delta)}$$

jelölést bevezetve a (4.2.3) vektorokra

$$\mathbf{q} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\alpha + i\omega}{\alpha - \delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} \sim \begin{bmatrix} \frac{\alpha - i\omega}{\alpha - \delta} \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz  $\mathbf{q}$ , ill.  $\mathbf{p}$  az  $\mathfrak{A}_-$ , ill. az  $\mathfrak{A}_-^T$  mátrix  $i\omega$ , ill.  $-i\omega$  sajátértékéhez tartozó sajátvektora. A (4.2.2) normalizálási feltétel következtében

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\alpha + i\omega}{\alpha - \delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2\omega} \begin{bmatrix} \frac{\alpha - i\omega}{\alpha - \delta} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A  $\mathfrak{B}$  bilineáris leképezés ekkor

$$\mathfrak{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\alpha^2}{\gamma(\alpha - \delta)} \begin{bmatrix} \alpha x_1 y_1 + (\alpha - \delta)(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ -(\alpha x_1 y_1 + (\alpha - \delta)(x_1 y_2 + x_2 y_1)) \end{bmatrix}$$

$$\left( (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \right),$$

alakú, míg a  $\mathfrak{C}$  trilineáris leképezés a következő alakú:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{2\alpha^4}{\gamma^2(\alpha - \delta)} \begin{bmatrix} x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 \\ -(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) \end{bmatrix}$$

$$\left( (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \right).$$

Következésképpen

$$\mathfrak{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \frac{2\alpha^4}{\gamma^2(\alpha - \delta)^2} \begin{bmatrix} -3\alpha + i\omega \\ 3\alpha - i\omega \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{2\alpha^2}{\gamma(\alpha - \delta)} \begin{bmatrix} -\alpha + 2i\omega \\ \alpha - 2i\omega \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \frac{2\alpha^3}{\gamma(\alpha - \delta)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az  $l_1$  együttható definíciójában lévő első tag

$$\langle \mathbf{p}, \mathfrak{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = \frac{\alpha^4}{\gamma^2\omega(\alpha - \delta)^2} \cdot (\omega(\delta - 3\alpha) + i\alpha(\alpha + \delta)),$$

amelynek valós része

$$\Re(\langle \mathbf{p}, \mathfrak{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle) = \frac{\alpha^4(\delta - 3\alpha)}{\gamma^2(\alpha - \delta)^2}.$$

A  $\mathfrak{A}_-$  mátrixot invertálva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{s} := \mathfrak{A}_-^{-1}\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2\delta)} \begin{bmatrix} -\alpha & -(\alpha - \delta) \\ 2\alpha & \alpha \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) =$$

$$= \frac{2\alpha^2}{\gamma(\alpha - \delta)(\alpha - 2\delta)} \begin{bmatrix} \delta \\ -\alpha \end{bmatrix},$$

ill.

$$\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{4\alpha^4}{\gamma^2(\alpha - \delta)^2(\alpha - 2\delta)} \begin{bmatrix} -\alpha(\alpha - \delta) + i\delta\omega \\ \alpha(\alpha - \delta) - i\delta\omega \end{bmatrix}.$$

Az  $l_1$  együttható definíciójában lévő második tag

$$\langle \mathbf{p}, \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathfrak{A}_-^{-1}\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})) \rangle = -\frac{2\alpha^4}{\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2} \cdot \left( \alpha^2 - \alpha\delta - \delta^2 - i\frac{\alpha\delta(2\alpha - 3\delta)}{\omega} \right),$$

amelynek valós része

$$\Re(\langle \mathbf{p}, \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathfrak{A}_-^{-1}\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})) \rangle) = -\frac{2\alpha^4(\alpha^2 - \alpha\delta - \delta^2)}{\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2}.$$

Az

$$\mathbf{r} := (2i\omega I_2 - \mathfrak{A}_-)^{-1} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \frac{1}{3\omega^2} \begin{bmatrix} -\alpha - 2i\omega & -(\alpha - \delta) \\ 2\alpha & \alpha - 2i\omega \end{bmatrix} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) =$$

$$= \frac{2\alpha}{3\gamma(\alpha - \delta)(\alpha - 2\delta)} \begin{bmatrix} \alpha(4\alpha - 7\delta) + 2i\omega(\alpha - \delta) \\ \alpha(-5\alpha + 8\delta) \end{bmatrix}$$

vektor bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{B}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{r}) = \frac{4\alpha^4}{3\gamma^2(\alpha - \delta)^2(\alpha - 2\delta)} \begin{bmatrix} (\alpha - \delta)(-3\alpha + 4\delta) - i\omega(4\alpha - 7\delta) \\ -(\alpha - \delta)(-3\alpha + 4\delta) + i\omega(4\alpha - 7\delta) \end{bmatrix}.$$

Hosszabb számolási után az  $l_1$  együttható definíciójában lévő harmadik tagra

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{p}, \mathfrak{B} \left( \bar{\mathbf{q}}, (2\iota\omega\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{A}_-)^{-1} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \right) \right\rangle = \\ & = -\frac{2\alpha^4}{3\gamma^2\omega(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2} \cdot \left[ 3\omega(\alpha^2 - \alpha\delta - \delta^2) + \iota(4\alpha^3 + 21\alpha\delta^2 - 18\alpha^2\delta - 4\delta^3) \right] \end{aligned}$$

adódik, melynek valós része

$$\Re \left( \left\langle \mathbf{p}, \mathfrak{B} \left( \bar{\mathbf{q}}, (2\iota\omega\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{A}_-)^{-1} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \right) \right\rangle \right) = -\frac{2\alpha^4(\alpha^2 - \alpha\delta - \delta^2)}{\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2}.$$

Végül a (4.2.4) formula szolgáltatja az első Poincaré-Ljapunov-együtthatót:

$$\begin{aligned} 2\omega l_1 & = \frac{\alpha^4(\delta - 3\alpha)}{\gamma^2(\alpha - \delta)^2} - 2\frac{2\alpha^4(\alpha^2 - \alpha\delta - \delta^2)}{\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2} - \frac{2\alpha^4(\alpha^2 - \alpha\delta - \delta^2)}{\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2} = \\ & = \frac{\alpha^4}{\gamma^2(\alpha - 2\delta)(\alpha - \delta)^2} \cdot (-9\alpha^2 + 13\alpha\delta + 4\delta^2), \end{aligned}$$

ami negatív, hiszen az  $\alpha > 2\delta$  feltétel következtében

$$-9\alpha^2 + 13\alpha\delta + 4\delta^2 < -8\alpha^2 + \frac{13}{2}\alpha^2 = -\frac{3}{2}\alpha^2. \quad \blacksquare$$

### 3.3. Bogdanov-Takens-bifurkáció

A (3.1.3) és a (3.2.6) feltételek alapján nyilvánvaló, hogy a  $K = 0$  és az  $\alpha = 2\delta$  egyenlőségek a nyereg-csomó- és a Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció szempontjából alapvető jelentőséggel bírnak. A 3.3.1 ábrán a  $\mathcal{C}_{SN}$  nyereg-csomó-bifurkációs görbét és a  $\mathcal{C}_{PAH}$  Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációs görbét láthatjuk. A görbék metszésponja a

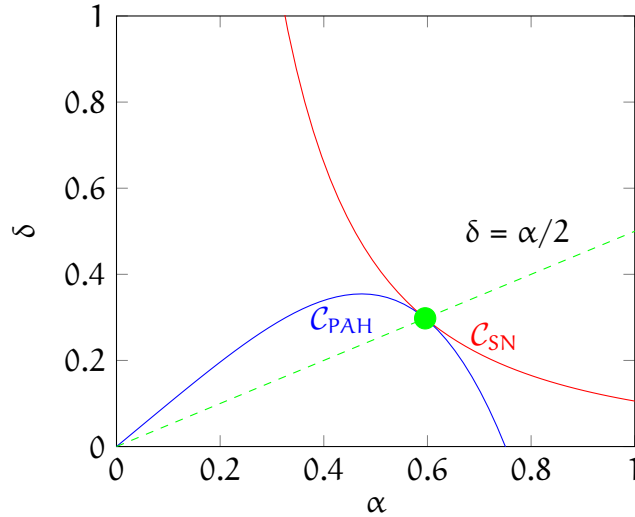
$$\beta\gamma^2 = 4\alpha^2\delta, \quad \alpha = 2\delta \tag{3.3.1}$$

paraméter-konstellációnak felel meg. A (3.3.1) következményeként

$$\det(J(\bar{\mathbf{E}})) = 0 = \text{Tr}(J(\bar{\mathbf{E}}))$$

adódik, amiből Bogdanov-Takens-bifurkáció (vö. [3], [36]) fellépésére lehet következtetni. Mint ahogy korábban megmutattuk, a (3.3.1) feltétel teljesülése esetén a (0.0.3) rendszernek egyetlen egyensúlyi helyzete van a fázissík pozitív kvadránsában:

$$\bar{\mathbf{E}} = (\bar{A}, \bar{B}) = \left( \frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{\gamma}{2\delta} \right).$$



3.3.1. ábra. A Bogdanov-Takens bifurkációs diagram.

Az egyszerűség kedvéért legyen

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := (2, 2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}, 1). \quad (3.3.2)$$

Ekkor a Jacobi-mátrix az  $\bar{\mathbf{E}} = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \sqrt[3]{2}\right)$  egyensúlyi helyzetben

$$J(\bar{\mathbf{E}}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

alakú.

A Függelékbeli 4.3.1. tétel felhasználása céljából vezessük be az

$$x_1 := A - \bar{A}, \quad x_2 := B - \bar{B} \quad \text{és a} \quad \mu_1 := \alpha - 2, \quad \mu_2 := \delta - 1$$

transzformációkat. Ekkor a (0.0.3) rendszer az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathfrak{A}\mathbf{x} + \mathfrak{J}\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathfrak{A}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{6}\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) =: \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3.3.3)$$

alakba írható, ahol

$$\mathfrak{A} := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{J} := \begin{bmatrix} -\sqrt[3]{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 4\sqrt[3]{4} \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_1 y_2 \\ -x_1 y_1 - x_1 y_2 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathfrak{A}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := \begin{bmatrix} -x_1 \mu_1 \\ -x_2 \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := 2\sqrt[3]{2} \begin{bmatrix} x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 \\ -x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_1 \end{bmatrix}.$$

Belátható tehát a

### 3.3.1. tétel. A

$$\beta := \gamma := 2\sqrt[3]{2}$$

feltétel teljesülése esetén a (0.0.3) rendszernek a  $(\alpha, \delta) = (2, 1)$  pár Bogdanov-Takens-bifurkációs pontja: a (0.0.3) rendszer topológiailag ekvivalens egy

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \mathcal{O}(\|\eta\|^3) \end{aligned} \right\}$$

alakú rendszerrel.

**Bizonyítás.**

**Step 1.** Az zérustól különböző

$$\mathfrak{A}_{\text{BT}} := \partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{BT}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{BT}}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrix kétszeres zérus sajátértékéhez tartozó, (4.3.2) feltételeknek eleget tévő általánosított jobb, ill. bal oldali sajátvektoraira

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$  bázisban tetszőleges  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektor egyértelműen felírható az

$$\mathbf{x} = y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ -2y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

alakban. Az  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$  vektormező koordinátáira pedig

$$\begin{aligned} F_1(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1) &= y_2 - (\sqrt[3]{2}/2)\mu_1 - (y_1 + y_2)\mu_1 \\ &\quad - 2\sqrt[3]{2}(y_1 + y_2)^2(2y_1 + y_2) + 2\sqrt[3]{4}(y_1 + y_2)^2 \\ &\quad - 2\sqrt[3]{4}(y_1 + y_2)(2y_1 + y_2), \\ F_2(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1) &= -2y_2 - \sqrt[3]{2}\mu_2 + (2y_1 + y_2)\mu_2 \\ &\quad + 2\sqrt[3]{2}(y_1 + y_2)^2(2y_1 + y_2) - 2\sqrt[3]{4}(y_1 + y_2)^2 \\ &\quad + 2\sqrt[3]{4}(y_1 + y_2)(2y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Az

$$\langle \mathbf{F}(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{p}_1 \rangle \quad \text{és az} \quad \langle \mathbf{F}(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{p}_0 \rangle$$

skaláris szorzatok pedig a következőképpen számolhatók ki:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{p}_1 \rangle &= F_1(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{p}_1^1 + F_2(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{p}_1^2 \\ &= -\sqrt[3]{2}(\mu_1 + \mu_2) - 2(y_1 + y_2)\mu_1 + (2y_1 + y_2)\mu_2 \\ &\quad - 2\sqrt[3]{2}(y_1 + y_2)^2(2y_1 + y_2) + 2\sqrt[3]{4}(y_1 + y_2)^2 \\ &\quad - 2\sqrt[3]{4}(y_1 + y_2)(2y_1 + y_2)\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{p}_0 \rangle &= F_1(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{p}_0^1 + F_2(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{p}_0^2 \\ &= y_2 + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\mu_1 + 2\mu_2) + (y_1 + y_2)\mu_1 - (2y_1 + y_2)\mu_2.\end{aligned}$$

**Step 2.** Némi számolás után a Függelékbeli **(BT1)-(BT2)** feltételek

$$\alpha_{20} + b_{11} = 0 - 2\sqrt[3]{4} = -2\sqrt[3]{4} \neq 0 \quad \text{és} \quad b_{20} = -4\sqrt[3]{4} \neq 0$$

alakúak, ahonnan

$$s := \text{sgn} \left[ -4\sqrt[3]{4} \cdot (-2\sqrt[3]{4}) \right] = 1$$

következik.

**Step 3.** Megmutatjuk, hogy fennáll a Függelékbeli **(BT3)** transzverzálitási feltétel. Mivel a jobb oldal ebben az esetben

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \equiv \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - (\sqrt[3]{2}/2)\mu_1 - \mu_1 x_1 + 2\sqrt[3]{2}x_1^2 x_2 + 2\sqrt[3]{4}x_1^2 + 2\sqrt[3]{4}x_1 x_2 \\ -4x_1 - 2x_2 - \sqrt[3]{2}\mu_2 - \mu_2 x_2 - 2\sqrt[3]{2}x_1^2 x_2 - 2\sqrt[3]{4}x_1^2 - 2\sqrt[3]{4}x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

alakú, ezért

$$\text{Tr}(\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})) \equiv -\mu_1 - \mu_2 + 2\sqrt[3]{4}x_1 + 2\sqrt[3]{4}x_2 + 4\sqrt[3]{2}x_1 x_2 - 2\sqrt[3]{2}x_1^2$$

és

$$\begin{aligned}\det(\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})) &= 2(\mu_1 - \mu_2) + \mu_1 \mu_2 + 2\sqrt[3]{4}x_1(\mu_1 - 2\mu_2) + 2\sqrt[3]{2}x_1^2(2 + \mu_1) - \\ &\quad - 2(1 + \mu_2)(\sqrt[3]{4}x_2 + 2\sqrt[3]{2}x_1 x_2)\end{aligned}$$

következtében a

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := [\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \text{Tr}(\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})), \det(\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}))] \quad ((\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$$

leképezés

$$\mathbf{G}'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = [\omega_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})]_{i,j=1}^4$$

Jacobi mátrixának elemeire

$$\omega_{11}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := 2 - \mu_1 + 4\sqrt[3]{4}x_1 + 2\sqrt[3]{4}x_2 + 4\sqrt[3]{2}x_1 x_2, \quad \omega_{12}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := 1 + 2\sqrt[3]{4}x_1 + 2\sqrt[3]{2}x_1^2,$$

$$\begin{aligned}
\omega_{13}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= -2^{-2/3} - x_1, & \omega_{23}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= -\sqrt[3]{2} - x_2, & \omega_{33}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= \omega_{34}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := -1, \\
\omega_{21}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= -4 - 4\sqrt[3]{4}x_1 - 2\sqrt[3]{4}x_2 - 4\sqrt[3]{2}x_1x_2, \\
\omega_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= -2 - b - 2\sqrt[3]{4}x_1 - 2\sqrt[3]{2}x_1^2, \\
\omega_{31}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= 2\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{2}x_1 + 4\sqrt[3]{2}x_2, & \omega_{32}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= 2\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{2}x_1, \\
\omega_{14}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= \omega_{23}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := \omega_{41}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := 0, \\
\omega_{41}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= 2\sqrt[3]{4}\mu_1 - 4\sqrt[3]{4}\mu_2 + 8\sqrt[3]{2}x_1 + 4\sqrt[3]{2}x_1\mu_1 - 4\sqrt[3]{2}x_2 - 4\sqrt[3]{2}x_2\mu_2, \\
\omega_{42}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= -2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4}\mu_2 - 4\sqrt[3]{2}x_1 - 4\sqrt[3]{2}x_1\mu_2, \\
\omega_{43}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= 2 + \mu_2 + 2\sqrt[3]{4}x_1 + 2\sqrt[3]{2}x_1^2, \\
\omega_{44}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &:= -2 + \mu_1 - 4\sqrt[3]{4}x_1 - 2\sqrt[3]{4}x_2 - 4\sqrt[3]{2}x_1x_2.
\end{aligned}$$

A  $\mathbf{G}$  leképezés reguláris a  $(\mathbf{x}_{BT}, \boldsymbol{\mu}_{BT})$  pontban, mivel Jacobi-determinánsára

$$\det(\mathbf{G}'(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -\sqrt[3]{1/4} & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -2^{1/3} \\ 2 \cdot \sqrt[3]{4} & 2 \cdot \sqrt[3]{4} & -1 & -1 \\ 0 & -2 \cdot \sqrt[3]{4} & 2 & -2 \end{bmatrix} = -24 \neq 0$$

teljesül. ■



## 4. fejezet

# Függelék : a dolgozatban felhasznált bifurkációs tételek

Az alábbiakban legyen  $\mu \in \mathbb{R}$ , majd tekintsük az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (4.0.1)$$

differenciálegyenlet-rendszert, ahol

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty.$$

### 4.1. Nyereg-csomó-bifurkáció

Tegyük fel, hogy a  $\mu := \mu_{SN}$  paraméterértéknél a (4.0.1) rendszer  $\mathbf{x}_{SN}$  egyensúlyi helyzetére az alábbi feltételek teljesülnek.

(SN1). A

$$\partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})$$

mátrixnak a 0 egyszeres sajátértéke, és a másik sajátérték valós része zérustól különböző.

(SN2). Ha  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  a  $\partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})$  mátrix zérus sajátértékéhez tartozó baloldali sajátvektora, akkor

$$\alpha := \mathbf{p}^T \cdot \partial_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) \neq 0.$$

(SN3). Ha  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$  a  $\partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})$  mátrix zérus sajátértékéhez tartozó (jobb oldali) sajátvektora, akkor

$$\mathbf{b} := \mathbf{p}^T \cdot [\partial_{11} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})(\mathbf{q}, \mathbf{q})] \neq 0.$$

Ekkor igaz az alábbi állítás (vö. [9], [24], [26], ill. [32] és [33]).

**4.1.1. tétel. (Nyereg-csomó-bifurkáció.)** Az (SN1)-(SN3) feltételek teljesülése esetén

1. van olyan  $0 \in I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumon értelmezett

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

$\mathcal{C}^1$ -görbe, amelyre

- $\gamma[I] = \{(\mathbf{x}, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{0}\}$ ,
- $\gamma(0) = (\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})$ ,
- $\dot{\gamma}(0) = (\mathbf{q}, 0)$ ;

2. az  $(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN})$  rendezett pár az

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{0}$$

egyenlet **bifurkációs pontja**, ami azt jelenti, hogy  $(\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) \in \mathbb{R}^2 \times I$  tetszőleges környezetében vannak olyan

$$(\mathbf{u}_n, \mu_n), (\mathbf{v}_n, \mu_n) \in \mathbb{R}^2 \times I, \quad \mathbf{u}_n \neq \mathbf{v}_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatok, amelyekre

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_n, \mu_n) = \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_n, \mu_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{u}_n, \mu_n) = (\mathbf{x}_{SN}, \mu_{SN}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{v}_n, \mu_n);$$

3. a  $\gamma$  görbe második komponensének második deriváltja nem tűnik el a 0-ban:  $\ddot{\gamma}_2(0) = -b/a$ , továbbá

- $b/a < 0$  esetén

$$|\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{0}\}| = \begin{cases} 0 & (\mu < \mu_{SN}), \\ 1 & (\mu = \mu_{SN}), \\ 2 & (\mu > \mu_{SN}) \end{cases}$$

(szuperkritikus bifurkáció);

- $b/a > 0$  esetén

$$|\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{0}\}| = \begin{cases} 0 & (\mu > \mu_{SN}), \\ 1 & (\mu = \mu_{SN}), \\ 2 & (\mu < \mu_{SN}) \end{cases}$$

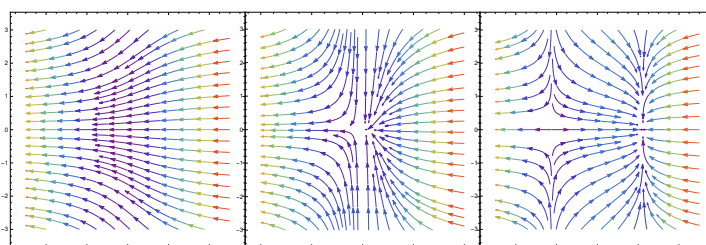
(szubkritikus bifurkáció).

A jelenséget szemléltetendő tekintsük

- az

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (4.1.1)$$

kétdimenziós rendszert. Amint az a 4.1.1. ábrán is látszik, a (4.1.1) rendszernek  $\mu < 0$  esetén nincsen egyensúlyi helyzete. Ahogy  $\mu$  növekszik és eléri a 0-t, az origó lesz a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete. Amennyiben  $\mu$  tovább növekszik, már két egyensúlyi helyzet figyelhető meg:  $E_1 := (-\sqrt{-\mu}, 0)$  és  $E_2 := (\sqrt{-\mu}, 0)$ . A  $\mu = 0$ -ban a rendszer tehát nem strukturálisan stabilis: bifurkáció lép fel. Az  $E_1$  egyensúlyi helyzet körül nyeregszerű fázisképet láthatunk, az  $E_2$  körül a fáziskép pedig csomószerű. Ezek miatt hívják ezt a jelenséget szuperkritikus nyereg-csomó-bifurkációnak.

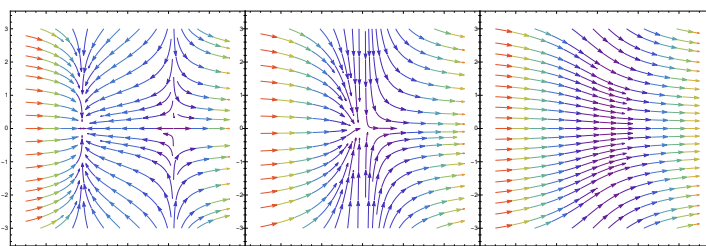


4.1.1. ábra. Az  $\dot{x} = \mu - x^2$ ,  $\dot{y} = -y$  rendszer nyereg-csomó-bifurkációs diagramja.

- az

$$\dot{x} = \mu + x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (4.1.2)$$

kétdimenziós rendszert. Amint az a 4.1.2. ábrán is látszik, a (4.1.2) rendszernek  $\mu > 0$  esetén nincsen egyensúlyi helyzete. Ahogy  $\mu$  csökken és eléri a 0-t, az origó lesz a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete. Amennyiben  $\mu$  tovább csökken, már két egyensúlyi helyzet figyelhető meg:  $E_1 := (-\sqrt{\mu}, 0)$  és  $E_2 := (\sqrt{\mu}, 0)$ . A  $\mu = 0$ -ban a rendszer tehát nem strukturálisan stabilis: bifurkáció lép fel. Az  $E_1$  egyensúlyi helyzet körül csomószerű fázisképet láthatunk, az  $E_2$  körül a fáziskép pedig nyeregszerű. Ezek miatt hívják ezt a jelenséget szubkritikus nyereg-csomó-bifurkációnak.



4.1.2. ábra. Az  $\dot{x} = \mu + x^2$ ,  $\dot{y} = -y$  rendszer nyereg-csomó-bifurkációs diagramja.

## 4.2. Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció

Tegyük fel, hogy a  $\mu := \mu_H$  paraméterértéknél a (4.0.1) rendszer  $\mathbf{x}_H$  egyensúlyi helyzetére az alábbi feltételek teljesülnek.

(PAH1). Alkalmass  $\varepsilon > 0$  esetén a

$$\partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_H, \mu)$$

mátrixnak van egy

$$\rho(\mu) \pm \omega(\mu)i \quad (\mu \in (\mu_H - \varepsilon, \mu_H + \varepsilon))$$

sajátértékpárja.

(PAH2). Teljesül az áthaladási feltétel:

$$\rho(\mu_H) = 0, \quad \omega(\mu_H) \neq 0.$$

(PAH3). Teljesül az transzverzálitási feltétel:

$$\rho'(\mu_H) \neq 0.$$

Ekkor igaz az alábbi állítás (vö. [9], [24], ill. [6]).

**4.2.1. tétel. (Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció).** A (PAH1)-(PAH3) feltételek teljesülése esetén

1. van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy

$$(\mu_H - \delta, \mu_H + \delta) \subset (\mu_H - \varepsilon, \mu_H + \varepsilon)$$

és van olyan  $\mu : (\mu_H - \delta, \mu_H + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, hogy bármely  $\tau \in (\mu_H - \delta, \mu_H + \delta)$  esetén az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu(\tau))$$

egyenletnek van

$$I \ni t \mapsto \mathbf{p}(t, \tau)$$

periodikus megoldása.

2. Az  $(\mathbf{x}_H, \mu_H) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  pontnak van olyan környezete, amely a

$$\mathbf{p}(t, \tau) \quad (t \in I, \tau \in (\mu_H - \delta, \mu_H + \delta))$$

családon kívül nem tartalmaz határciklust.

A kialakuló periodikus megoldás (pályamenti) stabilitásának meghatározását illetően a következő módon érdemes eljárni (vö. [16]). Értelmezzük a

$$\mathfrak{B} = (B_1, B_2) : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2, \quad \text{ill.} \quad \mathfrak{C} = (C_1, C_2) : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2 \quad (4.2.1)$$

bilineáris, ill. trilineáris leképezéseket a

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\xi}, \mu_H)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}_H} x_j y_k, \quad (i \in \{1,2\}),$$

ill.

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 f_i(\boldsymbol{\xi}, \mu_H)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}_H} x_j y_k z_l \quad (i \in \{1,2\})$$

koordinátafüggvények segítségével, majd vezessük be az

$$\mathfrak{A} := \partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_H, \mu_H), \quad \text{ill. az} \quad \omega := \omega(\mu_H)$$

jelölést. Legyen  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{K}^2$  az  $\mathfrak{A}$  mátrix  $\pm i\omega$  sajátértékéhez tartozó bal-, ill. jobboldali sajátvektora, pontosabban legyen

$$\langle \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q} \rangle = 1 \quad (4.2.2)$$

és

$$\mathfrak{A}\mathbf{q} = i\omega\mathbf{q}, \quad \mathfrak{A}^T \bar{\mathbf{p}} = -i\omega\bar{\mathbf{p}}. \quad (4.2.3)$$

**4.2.1. definíció.** Legyen

$$\mathcal{H}_{21} := \mathfrak{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + 2\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{h}_{11}) + \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{h}_{20}),$$

ill.

$$\mathbf{h}_{11} := \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \quad \text{és} \quad \mathbf{h}_{20} := (2i\omega I_2 - \mathfrak{A})^{-1} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}).$$

Ekkor az

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \cdot \Re(\langle \bar{\mathbf{p}}, \mathcal{H}_{21} \rangle) \quad (4.2.4)$$

számot **első Poincaré-Ljapunov-együtthatónak** nevezzük (vö. [6], [16]).

Az  $l_1$  együttható előjele determinálja a kialakuló periodikus megoldás pályamenti stabilitását.

**4.2.2. tétel.** Ha

- $l_1 < 0$ , akkor  $\mathbf{p}(\cdot, \tau)$  orbitálisan aszimptotikusan stabilis, ill. az  $\mathbf{x}_H$  egyensúlyi helyzet már nem stabilis (**szuperkritikus Hopf-bifurkáció**),
- $l_1 > 0$ , akkor  $\mathbf{p}(\cdot, \tau)$  orbitálisan nem stabilis, ill. az  $\mathbf{x}_H$  egyensúlyi helyzet még stabilis (**szubkritikus Hopf-bifurkáció**),

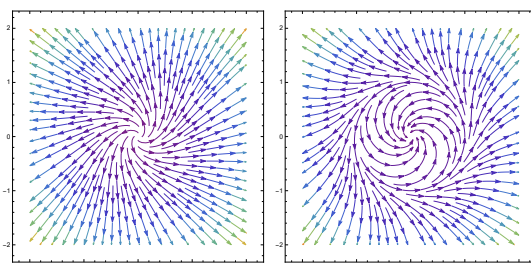
Megjegyezzük, hogy az  $l_1 = 0$  esetben a második Poincaré-Ljapunov-együttható kiszámolása szükséges (vö. [13]).

A jelenséget szemléltetendő tekintsük az alábbi kétdimenziós rendszereket (vö. [6], [21], [34]):

- az

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \quad (4.2.5)$$

kétdimenziós rendszert. Amint az a 4.2.1. ábrán is látszik, a (4.2.5) rendszernek  $\mu \leq 0$  esetén egyetlen egyensúlyi helyzete van: az origó, ami stabilis fókusz. A  $\mu > 0$  esetben az origó elveszti stabilitását és szuperkritikus Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációval egy stabilis határciklus keletkezik:  $\sqrt{\mu}$  sugarú kör bifurkálódik.

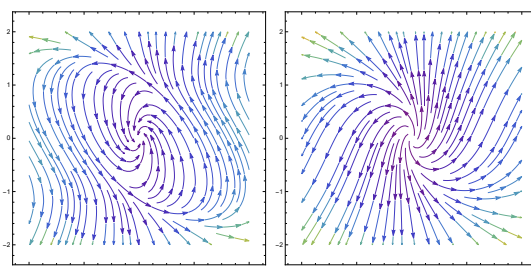


4.2.1. ábra. Az  $\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)$ ,  $\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2)$  rendszer fázisportréja a  $\mu \leq 0$  és a  $\mu > 0$  esetben.

- az

$$\dot{x} = \mu x - y + xy^2, \quad \dot{y} = x + \mu y + y^3 \quad (4.2.6)$$

kétdimenziós rendszert. Amint az a 4.2.2. ábrán is látszik, a (4.2.6) rendszernek  $\mu \geq 0$  esetén egyetlen egyensúlyi helyzete van: az origó, ami labilis fókusz. A  $\mu < 0$  esetben az origó stabilizálódik és szubkritikus Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációval egy labilis határciklus keletkezik:  $\sqrt{-\mu}$  sugarú kör bifurkálódik.



4.2.2. ábra. Az  $\dot{x} = \mu x - y + xy^2$ ,  $\dot{y} = x + \mu y + y^3$  rendszer a  $\mu \geq 0$  és a  $\mu < 0$  esetben.

### 4.3. Bogdanov-Takens-bifurkáció

Ebben az alfejezetben egy kétparaméteres rendszerekben előforduló bifurkációra adunk elégséges feltételt. Legyen  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$ , majd tegyük fel, hogy az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \quad (4.3.1)$$

rendszer  $\mathbf{x}_{\text{BT}} := \mathbf{0}$  egyensúlyi helyzete esetén az

$$\mathfrak{A}_{\text{BT}} := \partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\text{BT}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{BT}})$$

mátrixnak a 0 kétszeres sajátértéke, ahol  $\boldsymbol{\mu}_{\text{BT}} := \mathbf{0}$ , majd jelölje  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ , ill.  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$  az  $\mathfrak{A}_{\text{BT}}$  mátrix ezen sajátértékéhez tartozó általánosított jobb oldali, ill. bal oldali sajátvektorait, pontosabban legyen

$$\mathfrak{A}_{\text{BT}} \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{A}_{\text{BT}} \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 \quad \text{és} \quad \mathfrak{A}_{\text{BT}}^T \mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{A}_{\text{BT}}^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1,$$

ill.

$$\langle \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0 \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 \rangle = 1 \quad \text{és} \quad \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0 \rangle = \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1 \rangle = 0. \quad (4.3.2)$$

Írjuk fel valamely  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektort

$$\mathbf{x} = y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1$$

alakban, ahol

$$y_1 := \langle \mathbf{x}, \mathbf{p}_0 \rangle \quad \text{és} \quad y_2 := \langle \mathbf{x}, \mathbf{p}_1 \rangle,$$

majd tegyük fel, hogy fennállnak az alábbi feltételek.

**(BT0).** A  $\mathfrak{A}_{\text{BT}}$  mátrix különbözik a zérusmátrixtól:  $\mathfrak{A}_{\text{BT}} \neq \mathbf{0}$ .

**(BT1).**  $a_{20} + b_{11} \neq 0$ , ahol

$$a_{20} := \left. \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle \mathbf{F}(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{p}_0 \rangle \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}},$$

$$b_{11} := \left. \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle \mathbf{F}(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{p}_1 \rangle \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}};$$

**(BT2).**  $b_{20} \neq 0$ , ahol

$$b_{20} := \left. \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle \mathbf{F}(y_1 \mathbf{q}_0 + y_2 \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{p}_1 \rangle \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}};$$

**(BT3).** a

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) := [\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \text{Tr}(\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})), \det(\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}))] \quad ((\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$$

leképezés reguláris az  $(\mathbf{x}_{\text{BT}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{BT}})$  pontban: az  $(\mathbf{x}_{\text{BT}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{BT}})$  pontbeli Jacobi-mátrixa invertálható.

Ekkor igaz az alábbi állítás (vö. [16]).

**4.3.1. tétel. (Bogdanov-Takens-bifurkáció).** A (BT0)-(BT3) feltételek teljesülése esetén a (4.3.1) rendszer topologikusan ekvivalens egy

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 + s \eta_1 \eta_2 + \mathcal{O}(\|\eta\|^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3)$$

alakú rendszerrel, ahol  $\beta_1$  és  $\beta_2$  a  $\mu$  paraméternek olyan függvénye, amelyre  $\beta_1(\mathbf{0}) = 0 = \beta_2(\mathbf{0})$  teljesül, továbbá

$$s := \text{sgn} [b_{20}(a_{20} + b_{11})] = \pm 1.$$

Az  $s = -1$  esetben a (4.3.3) rendszer bifurkációs diagramja látható a 4.3.1. ábrán (vö. [4]). A

$$\beta = (\beta_1, \beta_2) := (0, 0)$$

Bogdanov-Takens-bifurkációs pont egy környezetében  $\beta$  szétválasztja a nyereg-csomó-bifurkációs görbe

$$\mathcal{T}_+ := \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 : 4\beta_1 = \beta_2^2, \beta_2 > 0\}$$

és

$$\mathcal{T}_- := \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 : 4\beta_1 = \beta_2^2, \beta_2 < 0\}$$

ágát. A

$$\mathcal{H} := \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$$

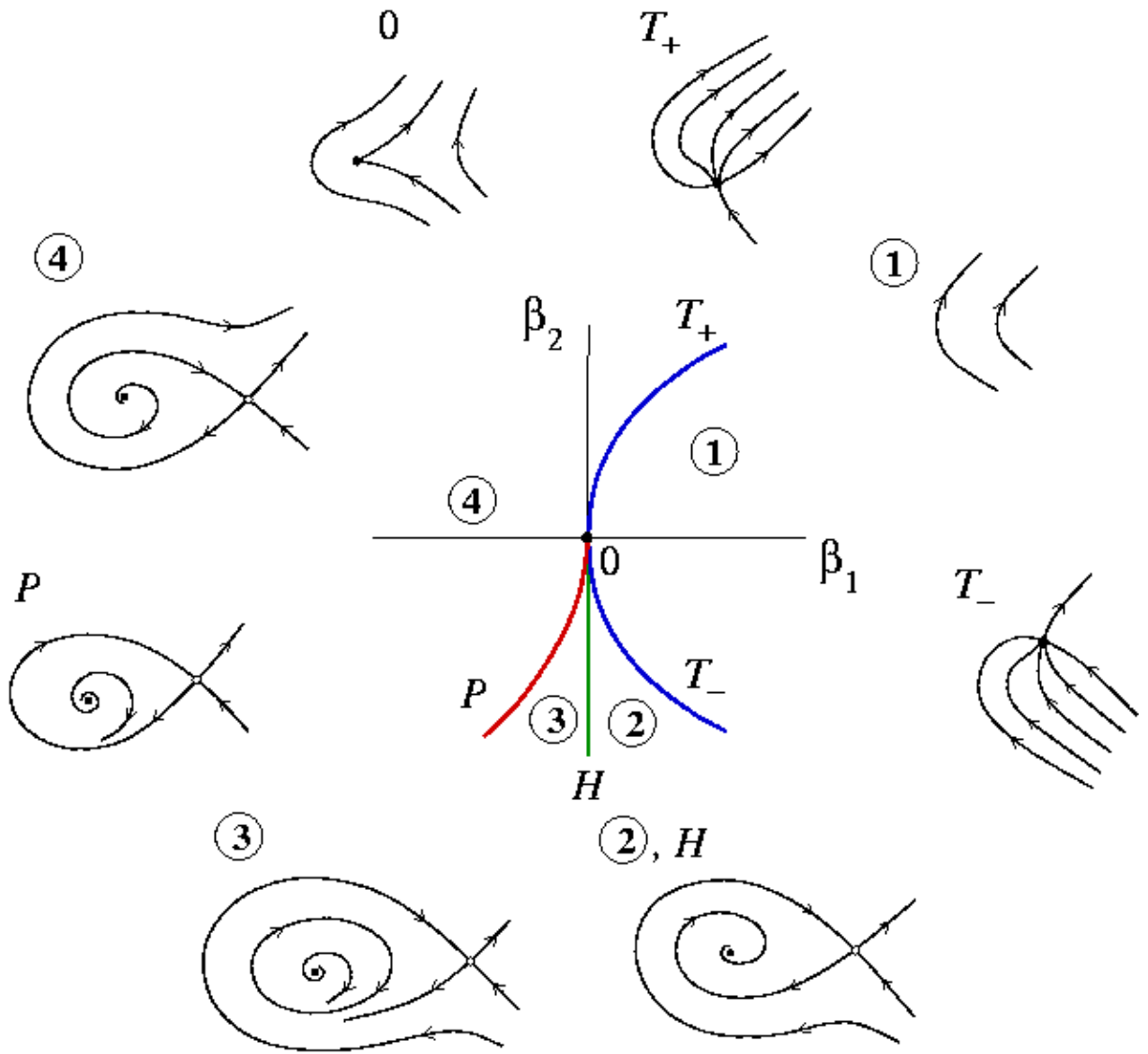
félegyenes nem más, mint a Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkációs görbe, a

$$\mathcal{P} := \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 : 25\beta_1 = -6\beta_2^2 + \mathcal{O}(|\beta_2|^3), \beta_2 < 0\}$$

pedig az ún. homoklinikus bifurkációs görbe. A  $\beta$  Bogdanov-Takens-bifurkációs pont a nyereg-csomó-bifurkációs görbe és a Poincaré-Andronov-Hopf bifurkációs görbe érintési pontjában helyezkedik el. Az ① tartomány nem tartalmaz egyensúlyi helyzetet (így határciklus sem). A nyereg-csomó-bifurkációs görbe  $\mathcal{T}_-$  ágát keresztezve a ② tartományba lépve két egyensúlyi helyzet bifurkálódik: egy nyereg és egy stabilis csomó. A  $\mathcal{H}$  Poincaré-Andronov-Hopf bifurkációs görbét keresztezve a ③ tartományba lépve stabilis határciklus keletkezik, következésképpen a ③ tartományban két egyensúlyi helyzet és egy stabilis határciklus van. Az óramutató járásával egyezően folytatva a körbejárást a  $\mathcal{P}$  homoklinikus bifurkációs görbét keresztezve a határciklus homoklinikus pályává, azaz olyan pályává alakul, amelynek alfa és omega határhalmaza ugyanaz az egyensúlyi helyzetet tartalmazó halmaz. A ④ tartományban a homoklinikus pálya eltűnik, csak két egyensúlyi helyzet marad, amely a nyereg-csomó-bifurkációs görbe  $\mathcal{T}_+$  ágát átlépve egybeolvad, és az ① tartományban megszűnik létezni.

Az  $s = 1$  esetben hasonlóan tárgyalható. Mivel a  $t \mapsto -t$ ,  $\eta_2 \mapsto -\eta_2$  helyettesítéssel ugyanerre a (4.3.3) alakra redukálódik, ezért a bifurkációs diagram ugyanúgy néz ki ebben az esetben is, azonban a Bogdanov-Takens-pont környezetében kialakuló határciklus nem lesz stabilis.





4.3.1. ábra. Bogdanov-Takens-bifurkáció (vö. [16], [10]): a (4.3.3) rendszer bifurkációs diagramja.

# Irodalomjegyzék

- [1] BIRKHOFF, G.; ROTA, G-C.: *Ordinary differential equations*, Fourth edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [2] BAKER, R. E.; SCHNELL, S.; MAINI, P. K.: *A clock and wavefront mechanism for somite formation*, *Dev. Biol.*, **293** (2006), 116–126.
- [3] BOGDANOV, R. I.: *Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues*, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, **9**(2) (1975), 63; *Funct. Anal. Appl.*, **9**(2) (1975), 144–145.
- [4] CARRILLO, F. A.; VERDUZCO, F.; DELGADO, J.: *Analysis of the Takens-Bogdanov bifurcation on m-parameterized vector fields*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **20**(4) (2010), 995–1005.
- [5] COOKE, J.; ZEEMAN, C.: *A Clock and Wavefront Model for Control of the Number of Repeated Structures during Animal Morphogenesis*, *J. Theor. Biol.* **58** (1976), 455–476.
- [6] FARKAS, M.: *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1994.
- [7] GOLDBETER, A.; GONZE, D.; POURQUIE, O.: *Sharp Developmental Thresholds Defined Through Bistability by Antagonistic Gradients of Retinoic Acid and FGF Signaling*, *Dev Dynam.*, **236** (2007), 1495–1508.
- [8] GRAY, P.; SCOTT, S. K.: *Autocatalytic reactions in the isothermal continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system  $A + 2B \rightarrow 3B$ ;  $B \rightarrow C$* , *Chem. Eng. Sci.*, **39** (1984), 1087–1097.
- [9] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [10] GUCKENHEIMER, J.; KUZNETSOV, Y. A.: *Bogdanov-Takens bifurcation*, *Scholarpedia* **2**(1) (2007), 1854.
- [11] HALE, J.: *Ordinary differential equations*, Dover Publications, New York, 2009.

- [12] HASSARD, B. D.; KAZARINOFF, N. D.; WAN, Y. H.: *Theory and applications of Hopf bifurcation*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 41. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.
- [13] KOVÁCS, S.; GYÖRGY, SZ.; GYÚRÓ, N.: *On an Invasive Species Model with Harvesting*, In: R. Mondaini (szerk.): *Trends in Biomathematics: Modeling Cells, Flows, Epidemics, and the Environment*, (Springer 2020), 299–334.
- [14] KOVÁCS, S.; GYÖRGY, SZ.; GYÚRÓ, N.: *Characteristic polynomials*, In: Kamal Shah (szerk.) *Recent Advances in Polynomials*, IntechOpen (2022) 166 p. pp. 1-36.
- [15] KOVÁCS, S.; GYÖRGY, SZ.; GYÚRÓ, N.: *Oscillations in a System Modelling Somite Formation*, In: R. Mondaini (szerk.): *Trends in Biomathematics: Stability and Oscillations in Environmental, Social, and Biological Models: Selected Works from the BIOMAT Consortium Lectures*, Rio de Janeiro, Brazil, 2021 Cham, Svájc: Springer Nature Switzerland (2022), 237–248.
- [16] KUZNETSOV, Y. A.: *Elements of applied bifurcation theory, Third edition*. Applied Mathematical Sciences, Berlin, Heidelberg, New York and Tokyo: Springer-Verlag, 2004.
- [17] KUZNETSOV, Y. A.: *Saddle-node bifurcation*, Scholarpedia **1**(10) (2006), 1859.
- [18] LEMARCHAND, A.; BIANCA, C.: *Reaction-Diffusion Approach to Somite Formation*, IFAC-PapersOnLine, **48**(1) (2015), 346–351.
- [19] LEMARCHAND, A.; NOWAKOWSKI, B.: *Do the internal fluctuations blur or enhance axial segmentation?*, EPL, **94** (2011) 48004.
- [20] LENTE, G.: *A Michaelis-Menten-kinetika determinisztikus és sztochasztikus modelljei*, Alkalmaz. Mat. Lapok, **33**(2) (2016), 159–174.
- [21] MARX, B.; VOGT, W.: *Dynamische Systeme – Theorie und Numerik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2011.
- [22] MORELLI, L. G.; ARES, S.; HERRGEN, L.; SCHRÖTER, CH.; JÜLICHER, F.; OATES, A. C.: *Delayed coupling theory of vertebrate segmentation*, HFSP Journal, **3**(1) (2009), 55–66.
- [23] MURRAY, PH. J.; MAINI, PH. K.; BAKER, R. E.: *The clock and wavefront model revisited*, J. Theor. Biol., **283** (2011), 227–238.
- [24] PERKO, L.: *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [25] PÓTA, GY.: *Fizikai kémia*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2005.

- [26] PÖTZSCHE, CH.: *Bifurcation theory*, Lecture Notes, SS 2010, TU München, 2011.
- [27] SCHLÖGL, F.: *Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions*, *Z. Physik*, **253** (1972), 147–161.
- [28] SCHNAKENBERG, J.: *Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour*, *J. Theoret. Biol.*, **81**(3) (1979), 389–400.
- [29] PÓTA, GY.: *Fizikai kémia*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2005.
- [30] SIMON, P.; TÓTH, J.: *Differenciálegyenletek/Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex Kiadó, Budapest, 2020.
- [31] SIMON, L. P.: *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Budapest, 2012 (<https://simonp.web.elte.hu/files/dinrendjegyzet.pdf>).
- [32] SOTOMAYOR, J.: *Structural stability and bifurcation theory*, in *Dynamical Systems*, M. M. Peixoto (ed.), Academic Press, 549–560, 1973.
- [33] SOTOMAYOR, J.: *Generic bifurcations of dynamical systems*, in *Dynamical Systems*, M. M. Peixoto (ed.), Academic Press, 561–582, 1973.
- [34] STROGATZ.: *Nonlinear Dynamical Systems and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books, Reading Massachusetts, 1994.
- [35] TÓTH, J.; SZILI, L.: *Matematika és Mathematica*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
- [36] TAKENS, F.: *Forced oscillations and bifurcation*, Applications of global analysis, I (Sympos., Utrecht State Univ., Utrecht, 1973), 1–59. *Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht*, **3** (1974), Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, Utrecht, 1974.