Szakdolgozat

Zelenai Anikó
matematika – kémia osztatlan tanárszak
2023. Budapest

Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi kar

Algebrai szintek
„Szép” és egyszerűen kinéző egyenlőtlenségek keresése

Zelenai Anikó
matematika – kémia osztatlan tanárszak

témavezető:
Dr. Szabó Csaba
egyetemi tanár

2023. Budapest

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott ……………………ZELENAI ANIKÓ……………………………………………… (név)

………KASVPC……………… (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE ………matematika - kémia……………………………………… tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023.:.05..01......................

Zelenai Anikó

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Bevezető

A matematika tanításban/oktatásban nagyon fontos a mérés. A mérésre most úgy tekintünk mint egy olyan eszköz, amely egy kiindulópontot tud nyújtani a diákok algebrai tudásának feltérképezésében.

Vigotszkij 1917-ben született elmélete alapján a diák csak arról a szintről tanítható, amelyik szinten van. Tanári segítség nélkül csak egy nagyon kis lépést tud megugrani. Van egy olyan távolabbi szint, amit tanári segítséggel sem tudna elérni és a két szint között van leközelebbi fejlődési zóna, aminek az elméletét Vigotszkij dolgozta ki, munkája poszthumusz jelent meg *[1]*. Elmélete azon kevés tanuláselméletek közé tartozik, amelyek ma is megállják a helyüket. Ez az elmélet azt mondja, hogy tanári segítséggel lehet csak fejlődni. A Vigotszkij elméletnek van egy kommunikációs része is, amely kimondja, hogy mindenkihez csak az anyanyelvén lehet beszélni, vagyis csak úgy lehet tanítani, hogyha úgy beszélünk hozzá, ahogy ő megérti.

Az algebra egy nagy és jelentős része a matematikának. Algebrai számolások és gondolatmenetek mindenhol előfordulnak, ezért jó és szükséges lehet, hogy valakinek felmérjük az algebrai tudásszintjét. A szakirodalomban *[7]* nagyon sok helyen, ha az algebra szinteket mérik, akkor a lineáris egyenletrendszerek megoldásaiig szeretnének eljutni és a lineáris egyenletrendszerek megoldásait nevezik igazából az algebra csúcsának. A magyar matematika oktatásban, az algebra oktatásban szerepelnek a racionális törtfüggvények, az ezekkel való számolások, és ennek van nagyon sok köze az egyenletrendezéshez is. Ahhoz, hogy rendesen tudjuk számolni a későbbiekben a matematika bármely területén, az ezekkel való számolásoknak az elsajátítása szükséges.

A dolgozatunk célja, hogy megállapítsunk a magyar tanmenet alapján az algebrai szinteknek egy lehetséges fölépítését *[10],[11]*. Erre kezdjük el egy teszt összeállítását. Geometriából már létezik egy ilyen szintezés. A „van Hiele” elemélet 5 részre osztja és lineárisan építi fel a geometriai megértést és ez a szintezés párhuzamos a magyar Nemzeti Alaptantervvel *[9]*. A geometriai a szintezés lineáris, ami azt jelenti, hogy nem egy szintet nem sajátíthatunk el anélkül, hogy egy korábbi szintet elsajátítsunk. Mi nem gondoljuk, hogy csak lineáris felépítése lehet a matematika oktatásnak, elsősorban az algebra oktatásnak, azonban úgy hisszük, hogy minden szintet csak lépésenként lehet elérni.

A dolgozatban először a Nemzeti Alaptantervek és tankönyvek alapján kidolgozunk egy szükséges tudástárat, és ebben megpróbálunk szinteket megállapítani. A „van Hile” szinteket 1957-ben állapította meg a van Hiele házaspár. Erre készítettek egy tesztet, amit standardizáltak, és azóta 40 országban használták *[3]*. Egy ilyen teszt elkészítése hosszú és bonyolult folyamat, mi csak az első lépéseket tehetjük meg.

Kiindulásként végignéztük a Nemzeti Alaptantervet, megnéztük a Kerettantervet és, hogy milyen algebrai készségeket kell elsajátítani, és megpróbáltuk ezt fölépíteni szintekre. Ezzel elkészítettük az algebrai tudás hálóját. A háló úgy készült el, hogy megnéztük, hogy a NAT mire mit épít, és hogy hogyan tanítjuk. Természetesen nem csak így lehet tanítani, de mi ezt vettük alapul. A háló alapján minden elemhez készítettünk feladatoklat. Ezek megalkotásánál az irányadó az volt, hogy mérjék azt, hogy az adott szintet, tudásanyagok elsajátította-e a diák. Ennek a tesztnek az összeállítása nagyon körülményes, sok időt vesz igénybe. Ezért nem is törekedtünk arra, hogy egy végleges tesztet készítsünk, hanem inkább megpróbáltuk alaposan fölépíteni a kiindulási feladatsort. Éppen ezért a szintek felállításánál és a feladatsor összerakásánál minden szinthez több feladatot rendeltünk. Ezeket a feladatokat aszerint készítettük el, hogy milyen kihívások, illetve nehézségek léphetnek fel egy-egy feladat megoldásában. Azt nem tudjuk, hogy a felmerülő kihívások valóban az általunk megállapított szinthez tartoznak-e vagy kisebbhez, ennek ellenére hozzárendeltünk minden nehézéget egy vagy több szinthez. Miután ezeket elkészítettük összeállítottunk egy kétszer 45 perces tesztet, amit megírattunk 29 9. osztályos gimnazistával. Ennek a célja az volt, hogy felmérjük és megállapítsuk, hogy ezek a szintek egymásra épülnek-e, melyikhez melyik szükséges. Utána statisztikai vizsgálatokat végeztünk ezen a kis mintán. Elkészítettünk egy korrelációmátrixot, elvégeztünk egy rangpróbát az összehasonlításra, és megnéztük, hogy statisztikailag melyek azok a feladatok, amik szignifikánsan nehezebbek mint a másik. Az egyik feladat nehezebb mint a másik, hogyha mindenki, aki az egyiket megoldotta, megoldotta a másikat is. Erre lefuttattuk ezt a statisztikai próbát. Olyan kis méretű volt az adathalmaz, ahhoz képest, hogy hány feladat volt, hogy nem paraméteres próbákat kellett használni és ez alapján elkészítettük a mátrixot. A mátrix alapján levontuk a következtetéseket és elkészítettük a feladatok egy alaphálóját.

Kutatásunk egy kiindulási kísérlet volt, ennek alapján már elkezdhetjük a szintek felépítésének megalapozását, és kidolgozhatjuk a következő kísérletet.

Előzmények

Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elmélete

Ahhoz, hogy megkeressük az algebrai szinteket értsük meg először a geometriai szinteket.

A legközelebbi fejlődési zóna elméletét először Vigotszkij dolgozta ki. Az elmélet felfogható egy oktatási állványzatként, melyben az oktatók, mint az alátámasztást nyújtó pontok azért felelnek, hogy a diákok képesek legyenek elvégezni a feladataikat. Tehát Vigotszkij szerint nem csak az önálló fejlődés lényeges a diákok tudásának gyarapításában, hanem a vezetett tanulás is. Ennek során a tanár a tanulónak a legnehezebb olyan feladatot adja, melyet még meg tud oldani az oktató segítségével. A folyamatnak része, hogy amikor a diák elérte a megfelelő szintet, és a tanár segítsége már nem lényeges, akkor hagyja a tanulót önállóan továbbfejleszteni a képességeit *[1]*.

Tehát az elmélet is kimondja, hogy először valaki nagyobb tudásútól kell megtanulni az aktuális tananyag alapjait, hogy a későbbiekben önállóan lehessen mesteri szintűre fejleszteni a képességeinket. Összességében a tanár szerepe, hogy olyan feladatokat adjon a diákoknak, melyeket önállóan nem, de az ő segítségével képesek megoldani. Ezt követően egy olyan tanulási környezetet kell biztosítania, hogy a tanulók képesek legyenek nehezebb feladatokat megoldani, amik más esetben lehetetlennek tűnnének. Mindeközben az oktató csak annyi segítséget adhat a diákoknak, ami alapján megtanulják a feladatmegoldás menetét, de nem veszi el tőlük annak örömét, nem oldja meg helyettük a feladatot.

Az elméletnek még van egy nem elhanyagolható része, amely a kommunikáció fontosságáról beszél. Eszerint a diák fejlődéshez elengedhetetlen, hogy a saját nyelvén szóljunk hozzá, tanítsuk. Azonban nem Vigotszkij elmélete az egyetlen, aki a kommunikáció tanulásban és tanításban betöltött szerepének a jelentőségét taglalja.

Ez az elmélet erőteljesebben jelenik meg Brunernél *[2]*, aki arról ír, hogy a családi kommunikáció nagy hatással van a kulturális és személyiségfejlődésre. Bruner szerint az oktató feladata ösztönözni a tanulókat, hogy maguk fedezzék fel az összefüggéseket. Az oktató és hallgató között végbemenő kommunikációt, a szókratikus tanulást, elkerülhetetlennek és lényegesnek tartotta. Az oktatónak a tanulni kívánt anyagrészeket a tanuló jelenlegi értelmi állapotának megfelelő módon kell előadja.

Vigotszkij -féle legközelebbi fejlődési zóna elvét a „van Hiele" házaspár ültette át a matematikába és elkészítette egyfajta megvalósítását a geometrián belül.

„A van Hiele házaspár ugyanezt a jelenséget – azaz azt, hogy minden gyermekhez a saját nyelvén kell beszélni, hogy fejlődést tapasztaljunk – a matematika területén fogalmazta meg. A „van Hiele" elmélet tulajdonképpen a legközelebbi fejlődési zóna elméletének geometriára való leképezése" *[3]*.

Mindezekből látszik, hogy óriási jelentősége van az iskolai kommunikációnak. Az iskolai kommunikáció számunkra a tanórai előadások, magyarázatok, beszélgetések különböző formái. A tanár célja ezt a kommunikációt a diákokról feltételezett szinten végezni, ez a szint azonban gyakran nem egyezik meg a diákokról feltételezhető szinttel. A diákokról feltételezhető szint pedig ritkán egyezik meg a diákok tényleges szintjével. Feltételezhető szint alatt a NAT által megfogalmazott kompetenciákat, tananyag- és tudásanyagot értjük, míg a tényleges szint az, amivel a diák az adott pillanatban rendelkezik.

Számos tanulmány bizonyította azt, hogy a diákok az egyetemre való belépéskor nem rendelkeznek a szükséges készségekkel, mert az iskolában az érettségire készítik fel őket, nem az életre vagy a NAT-ban megfogalmazott kompetenciáira *[4]*.

Látható, hogy a korábbi elméletek azt sugallják, hogy a tanulási folyamat sikeressége azon múlik, hogy az oktató felmérje a diákok szintjét, és a kommunikációját ahhoz igazítsa. Sikeresség alatt ebben a kontextusban a gondolkodási- és problémamegoldó készség fejlesztését értjük. E nélkül „legjobb” esetben a diákok csak memorizálják a tananyagot, de megérteni biztosan nem fogják.

A „van Hiele” szintek

A „van Hiele” szintek megalkotása két holland oktató Dina van Hiele-Geldolf és a férje Pierre Marie van Hiele nevéhez köthető. Elméletük szerint különböző szintjei vannak a diákok geometriai érésének, melyek befolyásolják nemcsak a geometria egyes részeiről való gondolkodásukat, hanem azt is, hogy milyen magyarázat és szemléltetés szükséges a következő szintre történő fellépéshez. A házaspár pontosan 5 megértési szintet különített el kutatásuk során: globális felismerés, elemzés, informális dedukció, formális dedukció és formális logika szintje *[5]*. A diákok a modell szerint ezeken a szinteken kihagyás nélkül haladnak végig.

Minden gyerek a globális felismerésről kezdi tanulmányait. Ezen a szinten a térről úgy gondolkodnak, mint valami, ami körülöttük létezik. A geometriai koncepciók egészében vannak szemlélve, és nem az alkotóik vagy tulajdonságaik szerint. Az a diák, akinek a geometriai érettsége ennek megfelel, meg tudja tanulni a geometriai szakkifejezéseket, valamint azonosítani és lemásolni is képes specifikus alakzatokat, azonban ezek tulajdonságait nem tudja megállapítani *[6]*.

Az elemzés szintjén kezdődik a tényleges megfigyelés és kísérletezés annak érdekében, hogy a diákok megkülönböztessék az egyes alakzatok jellegzetességeit. Ezek segítségével lesznek képesek az alakzatokat osztályokba sorolni. A különböző idomok itt ismerik fel először a diákok, valamint innentől kezdve a formákat az alkotóikról azonosítják. Azonban még ezen megértési szinten sem lehet elmagyarázni a diákoknak a különböző tulajdonságok közötti kapcsolatokat. Az egyes alakzatok közötti kapcsolatok így nem láthatóak a tanulók számára, és hasonlóan a definíciókat sem értik igazán.

Az informális dedukció szintjén a tanulók képesek megállapítani a tulajdonságok közötti összefüggéseket egy alakzaton belül és azok között is. Ebből adódóan következtetni tudnak egy idom tulajdonságaira, és felismerik az alakzatok osztályait. Megértik, hogy mikor része egy adott idom a csoportnak, valamint a definíciók értelmet nyernek számukra. Azonban még itt sem képesek a diákok felfogni a jelentőségét a következtetésnek, és hogy mi a szerepe az axiómáknak a geometriában. Empirikusan megállapított eredményeket gyakran felcserélik a különböző következtetési módokkal. Ilyen fokú megértés elegendő a bizonyítások felfogására. A diákok a lépések sorrendjének logikailag helyes felcserélését még nem képesek megadni, és egy ismeretlen indulási pontból nem tudnak bizonyítást levezetni.

A formális dedukció az a szint, melyen a tanulók igazán megértik a jelentőségét a következtetésnek, mint a geometriai elméletek egy alkotójának egy axiomatikus rendszeren belül. Itt kitisztul a kapcsolat a különböző kifejezések, fogalmak, axiómák, posztulátumok, elméletek és bizonyítások között, valamint ezen elemek szerepe látható a tanulók számára.

Az a diák, aki ezen a szinten tartózkodik már képes nemcsak memorizálni, hanem önmagától bizonyításokat megalkotni, és megvan a lehetősége, hogy egy bizonyítást több úton levezessen. A szükséges és elégséges feltételek megértése és megkülönböztetése is itt történik. Az állítások megkülönböztetésére és ezek tagadására is képesek már a tanulók.

Az utolsó szinten, formális logika szintjén a diák képes különböző axiómarendszerekben dolgozni. Ekkor már a nem Eukledészi geometriák tanulmányozására és ezen rendszerek összehasonlítására is megvan lehetősége. A geometria absztrakt elemeit is képes vizsgálni és megérteni a tanuló.

Mint minden modell esetén a „van Hiele” szinteknek is megvannak a maguk sajátosságai és korlátai. A házaspár itt 5 jellemző tulajdonságot állapított meg. Az elmélet szerint a szintkihagyás vagy szintugrás nem lehetséges. Ahhoz, hogy valaki elérje a legfejlettebb geometriai gondolkodást, először a többi lépcsőt kell teljesítenie, méghozzá a megadott sorrendben. A házaspár megállapította, hogy a diák jelenlegi szintje, valamint a következő szintlépésének időpontja kevésbé függ az életkorától és jobban a tananyagtól, amit el kell sajátítania és a módszerektől, amiket az oktató használ. Ebbe beletartozik az adott szint saját nyelvrendszere, melyen a leghatékonyabban sajátítható el az adott fok tananyaga. Ebből következik, hogy ha egy más szintnek megfelelő magyarázatot, szemléltetést használ az oktató, nem fog bekövetkezni a szintlépés. Az egyik szint lényeges objektumai a tananyag fókuszai lesznek a következő szinten. Az előbbiek önmagukban meghatároznak egy szükségletet a diákok tanítására és tanulására.

Egy adott szintlépés erősebb összefüggéseben áll a magyarázatokkal és szemléltetéssel mint a tanuló életkorával. Ennek tökéletesítésére a házaspár megállapította, hogy a tanulásnak és a tanításnak milyen fázisokon kell keresztülmennie, ahhoz, hogy a diák a legjobban megértse az adott szint tananyagát. Ez az 5 fázis a következő: informálódás, irányított felfedezés, magyarázat, nem irányított felfedezés és integráció.

Az informálódás során az oktató és a tanuló egy beszélgetést és tevékenységet folytat az adott szint témájáról. Az oktató feltérképezi a diák tudását, a tanuló pedig betekintést nyer arra, hogy miről fog szólni a téma. Ennél a résznél fontos az érettségi foknak megfelelő szókincs használata.

Az irányított felfedezés fázisában a tanár által megtervezett tevékenységeken keresztül a diák felfedezi a tananyag új fogalmait. A tanuló számára a tevékenységeknek fokozatosan kell felfednie az adott szint lényeges jellemzőit. Ezért többnyire gyorsan végrehajtható feladatokat érdemes készíteni, melyek egy speciális részére világítanak rá a tananyagnak.

A magyarázat során a diákok elmondják egymásnak a felfedezéseikkel kapcsolatban tett ötleteiket, gondolataikat. Az oktató fő feladata ebben a részben minimális, csak arra kell figyelnie, hogy a diákok megfelelően használják a szaknyelvet. Emellett a lényeges fogalmak matematikailag helyes megnevezéseit is ő vezeti be.

A nem irányított felfedezés fázisában a tanulók összetettebb, bonyolultabb problémák megoldásával foglalkoznak. A feladatok akár lehetnek nyitott végűek is. Ezen rész során a diákok úgy bővítik a tudásukat, hogy saját gondolatmenetük alapján oldják meg a feladatokat, tehát maguk koordinálják a vizsgálatukat.

Az utolsó integráció nevű tanulási fázisban a diákok átismétlik és összefoglalják a tanultakat azzal a céllal, hogy a már részben megszületett tananyaggal kapcsolatos összefüggéseket kiegészítsék és megszilárdítsák. Ez a relációs rendszer mutatja a különböző fogalmakat és a közöttük lévő kapcsolatokat.

Algebrai megértési szintek általános és középiskolában

Az algebrai megértési szinteket már próbáltak mások is vizsgálni, ám a nemzetközi szakirodalomban *[7]* az algebra fogalma a lineáris egyenletek megoldásában csúcsosodik ki, és az algebrai szinteket ennek eléréséig dolgozzák ki. A magyar matematika oktatásban ennél lényegesen több algebra szerepel már általános iskola ötödik osztálytól, amikor a törtekkel kapcsolatos műveletek bevezetésre kerülnek. Az, hogy hányadik osztályban mi szerepel megtalálható a NAT-ban és a Kerettantervben, ez alapján eljutunk egészen a racionális számoktól a racionális törtfüggvényekkel való bonyolult számolásokig. Ezek már nevezetes szorzatokat, magasabb fokú kifejezéseket és hatvány azonosságokat is tartalmaznak.

Symbol sense

Az algebrai kifejezések kezelésével és megértésével már sokan foglalkoztak, és ezek alapján fogalmazódott meg a symbol sense fogalma. Ez alatt azt értjük, hogy hogyan tekintünk egy kifejezésre, hogy értelmezünk egy képletet, és hogy állunk hozzá.

A symbol sense a következő kisebb kompetenciákat foglalja magába. Annak a képessége, hogy *[8]*

- meg tudod vizsgálni az algebrai kifejezéseket és ezáltal gyenge becsléseket tudsz mondani arról, hogy milyen minták fordulhatnak elő a numerikus, illetve grafikus ábrázolásban
- tudsz jól tájékozott összehasonlításokat megadni növekedés szempontjából algebrai kifejezésekre
- meg tudsz vizsgálni több algebrai kifejezést vagy gráfot
- le tudsz fordítani szóban elhangzott feltételeket annak érdekében, hogy azonosíts egy valószínű formáját egy algebrai szabálynak
- meg tudsz vizsgálni algebrai műveleteket, és meg tudod jósolni a végeredmény kinézetét
- a számszerű becslés esetén meg tudod vizsgálni a végeredményt és megítélni a valószínűségét, hogy az adott algebrai műveletet helyesen alkalmazták-e
- el tudod dönteni, hogy melyik a legjobban alkalmazható több ekvivalens kifejezés közül a kérdés megválaszolására

Az algebrai kifejezések kezelésének és értelmezésének képesége egy indikátora lehet a fejlettebb algebrai tudásnak, ezért a szintek megalkotásakor ezt is figyelembe kell venni. Tehát a symbol sense egy készség, amely alapot nyújthat a szintek megtalálásához.

Algebra és tantervek

Az algebrai szintek kialakításánál mindenképpen figyelembe kell venni a formulák kezelésének a technikáit. Az algebrai szintek megalkotásához nem elegendő a különböző elméletek pontos ismerete, hanem szükség van a gyakorlatban alkalmazott tudásanyagok megvizsgálása is. Erre a legalkalmasabb a Nemzeti alaptanterv, valamint a hozzá kapcsolódó Kerettantervek. Ezek meghatároznak minden tudást és készséget, melyet a diákoknak el kell sajátítani a középiskola tanulmányaik végére.

Ezen dokumentumok által tartalmazott információkat több irányból is meg lehet vizsgálni. Egyrészt megállapítható, hogy a tervek készítői milyen szinten tervezték lezárni a középiskolai algebra tananyagot és ezzel párhuzamosan milyen algebrai ismeretek, mechanizmusok elsajátítását írják elő. Ha abból indulunk ki, hogy az algebrai és a geometriai megértési szintek valamilyen szinten összefüggésben vannak egymással, akkor a párhuzamok megkeresésével és felvázolásával meg lehet alkotni az általunk keresett algebrai szintek első vázlatát. Másrészt, önmagában szemlélve ezen dokumentumok fejlesztési területeit, a megszabott algebrai készségek és ismeretek egyfajta térképet adhatnak, ami mentén el lehet indulni. Tehát ezeknek az irányelveknek tudatában tekintem át a 2020-as évi Nemzeti alaptantervet és a hozzá tartozó Kerettanterveket.

„A tanulási tevékenység legfőbb célja olyan tanulói kompetenciák fejlesztése, amelyek lehetővé teszik az ismereteknek a különböző helyzetekben történő alkalmazását” *[9]*. Ebből következik, hogy a dokumentum olyan feladatokat fogalmaz meg az iskolák és a tanárok számára, melynek lényege nem a megjegyzendő információk memorizáltatása, hanem az értő gondolkodás és problémamegoldás elsajátítása. A NAT szerint ezek a kompetenciák megszerzését „a tevékenységekre épülő tanulásszervezési formák segítik”. A kutatás fő fókuszában a középiskolai 9-12.-es osztályok állnak, így a fejlesztendő kompetenciákat csak ennek fényében vizsgáltam.

A NAT általánosan megfogalmazott elvárásai mellett megvizsgáljuk, hogy az algebra témakör esetén milyen konkrét készségek és képességek kifejlődését várja. A dokumentumot vizsgálva a következő átfogó célként kitűzött és a fejlesztési területekhez kapcsolódó tanulási eredményeket lehet megtalálni 9-12.évfolyamon *[9]*:

- sejtéseket fogalmaz meg és logikus lépésekkel igazolja azokat
- megérti a hallott és olvasott matematikai tartalmú szöveget
- felismeri a matematika különböző területei között a kapcsolatot
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít; a problémának megfelelő modellt választ, alkot
- a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben
- műveleteket végez algebrai kifejezésekkel; átalakít algebrai kifejezéseket összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával
- a matematikai tartalmat rendszerezetten kigyűjti és megérti
- a matematikai fogalmakat és jelöléseket megfelelően használja
- matematika feladatok megoldását szakszerűen prezentálja írásban és szóban a szükséges alapfogalmak, azonosságok, definíciók és tételek segítségével.

Tehát mindezen ismeretek jegyében kaptunk egy képet arról, hogy milyen készségek és képességek fejlesztése történik középiskolai szinten.

Mindezek alapján önmagában nézve a NAT és a kerettantervek elvárásait azt lehet megfigyelni, hogy a számolási készség, a bizonyítási képesség és a műveletek használata fejlődik. Ezért a középiskolai évek alatt elért szinteken ezeknek a kompetenciáknak kell megjelennie. Azt nem tudjuk még, hogy ez egy azt jelenti, hogy egy szinten fejlődik minden készség, vagy hogy több szinten szétosztva jelennek meg ezek a fejlődésterületek. Azonban tekintve, hogy több érési folyamat is ezeknél a korosztályoknál történik, így a sejtésünk az, hogy ebben az időszakban több szintlépésre is van lehetőség. Eszerint ezek a kompetenciák nem önmagukban fejlődnek ki, hanem szorosan kapcsolódnak az elmélethez és mechanizmusokhoz, melyeket a diákok elsajátítanak a matematika tanórák keretei között.

„van Hile” szintek és a NAT kapcsolata

Korábban már megvizsgáltuk a Nemzeti Alaptantervet és a „van Hiele” szinteket külön-külön, azonban a háló eredményessége szempontjából érdemes ellenőrizni, hogy a NAT mennyire van összhangban a „van Hiele” szintek felépülésével. Mivel a NAT a háló megalkotásának az alapforrása, ezért fontos meggyőződni az eredményességéről. A Nemzeti Alaptanterv és a „van Hiele” szintek kapcsolatáról már készült egy kutatás 2016-ban „Geometriai szemléletfejlődés a magyar középiskolákban” címen, így ennek az eredményeit fogjuk röviden összefoglalni *[4]*.

A kutatás során megállapították, hogy a NAT egy lépcsőzetes fejlődést határoz meg, melynek állomásai egyértelműen megfeleltethetőek a „van Hiele” szinteknek. Az általános iskola alsó tagozatán a diákok a következőket tanulják geometriából: háromszög, négyzet és téglalap felismerése, valamint ezek előállítása rajzolással szabadon vagy egy-két tulajdonság megadásával. Ez az első szintnek felel meg. Az 5-6. osztályban az előző ismeretanyag tovább bővül. Nevezetesen a tanulóknak ismerniük kell a síkidomok, sokszögek szemléletes fogalmát, azaz a 2. szintű ismeretekkel kell rendelkezniük. 6. osztály végére ezeken felül különböző alakzatokat tulajdonságaik szerint kell tudniuk csoportosítani, tehát a hármas szintre kell eljutniuk. A későbbiekben, nevezetesen a 7-8. osztály befejeztével a diákok a NAT szerint a negyedik szint elérése felé dolgoznak. Ezt mutatja, hogy képesnek kell lenniük tételek megfogalmazására megfigyelés alapján és meg kell jelennie a bizonyítási igénynek a tanulás során.

Összességében az általános iskola alsó tagozatának végére a második, a felső tagozat befejeztével a harmadik, a középiskola végeztével pedig a negyedik „van Hiele” szintre kell eljutniuk a diákoknak a NAT szerint. Azonban ez a valóságban nem teljesül, sőt a NAT által elvárt szintek és a diákok gyakorlati szintjei között nagy különbségek figyelhetőek meg. Ennek két fő oka van. Egyrészt a középiskolai tanulmányok során nagyon sok iskolában az elsődleges cél a középszintű érettségire való felkészítés. Nem meglepő, hisz a tanulók 95%-a középszintű érettségit tesz. Azonban a középszintű érettségi a harmadik „van Hiele” szintnek megfelelő feladatokat használ, így a felkészítés nem a NAT szerint meghatározott negyedik szintre történik a középiskolai tanulmányok során, hanem az érettségi által diktált harmadikra. Másrészt a tanár-diák kommunikációval kapcsolatban is előfordulhatnak problémák. A tanárok órán használt nyelvezete meghaladhatja a diákokét, így ahogy az elmélet is megfogalmazza a diákoknak esélye sincs a szintlépésre.

A NAT alapvetően nagyon jól felépített struktúrát határoz meg mind a középiskolai mind az általános iskolai tanulmányok során, így jó ugródeszka lehet a fogalmi háló alapjainak lefektetéséhez. Algebrából a tananyag felépítése nem teljesen lineáris, hiszen a maguk az ismeretek inkább hálózatba mint szintekbe rendeződnek. Ennek ellenére az megállapítható, hogy az általános iskola alsó tagozatának a befejeztével a diákoknak ismerniük kell a műveleti sorrendeket és a változók minimális használatának lehetőségeit a szöveges feladatok megoldásakor. Természetesen semmilyen komolyabb egyenlet vagy bonyolultabb számolást nem tudnak elvégezni a változókkal, mert ezek nekik csupán szimbólumok. A hatodik osztály végeztével a tanulóknak ismerniük kell az alapműveletek tulajdonságait, zárójelek jelentéstartalmát és alkalmazniuk is tudni kell a gyakorlatban. Ezen kívül érteniük és ismerniük kell a törtekkel kapcsolatos műveleteket valamint a törtek és a tizedes törtek közötti kapcsolatot. Az általános iskola befejeztével meg kell tudniuk határozni négyzetszámok négyzetgyökét, és a pozitív egész számok pozitív egész hatványait. Talán az egyik legfontosabb ismeretet 7-8. osztályban kezdik el elsajátítani és használni: a betűket mint változókat. Tehát egy komplexebb gondolkodási szintet követelnek meg a tananyagok ezeken az évfolyamokon. Várhatóan a középiskolai tanulmányaik végére a diákok képesek a magasabb szintű absztrakciót igénylő elméletek megértésére, valamint tételek és bizonyítások megsejtésére és kivitelezésére is. Ez alapján elmondható, hogy ha a NAT-ot vesszük alapul, akkor a tanulóknak igen magas fejlődési szinteket kell elérnie nemcsak geometriából, de algebrából is.

Annak érdekében, hogy a szintek tudásanyagának egy első szintezését meg lehessen alkotni, nem elegendő a kompetenciák vizsgálata, hanem a konkrét algebra tananyagot is át kell tanulmányozni 9-12. osztályban. Ehhez a legtöbb segítséget a különböző matematika tankönyvek nyújthatnak. Az elmélet felépülésének a megvizsgálása után egy fogalmi hálót fogunk alkotni, mely ábrázolja a különböző fogalmak közötti kapcsolatokat. Ez a háló egy jó alapot nyújt a kutatás megkezdéséhez, hiszen a különböző fogalmak egymásra épülnek, csakúgy mint a szintek és a szintlépésekhez szükséges ismeretek.

A fogalmi háló

Annak érdekében, hogy megalkossuk az első algebrai szintezést, ahhoz átnéztük a kerettantervet, a NAT-ot és a tankönyvek feladatait és ez alapján felállítottunk a modell egy lehetséges változatát.

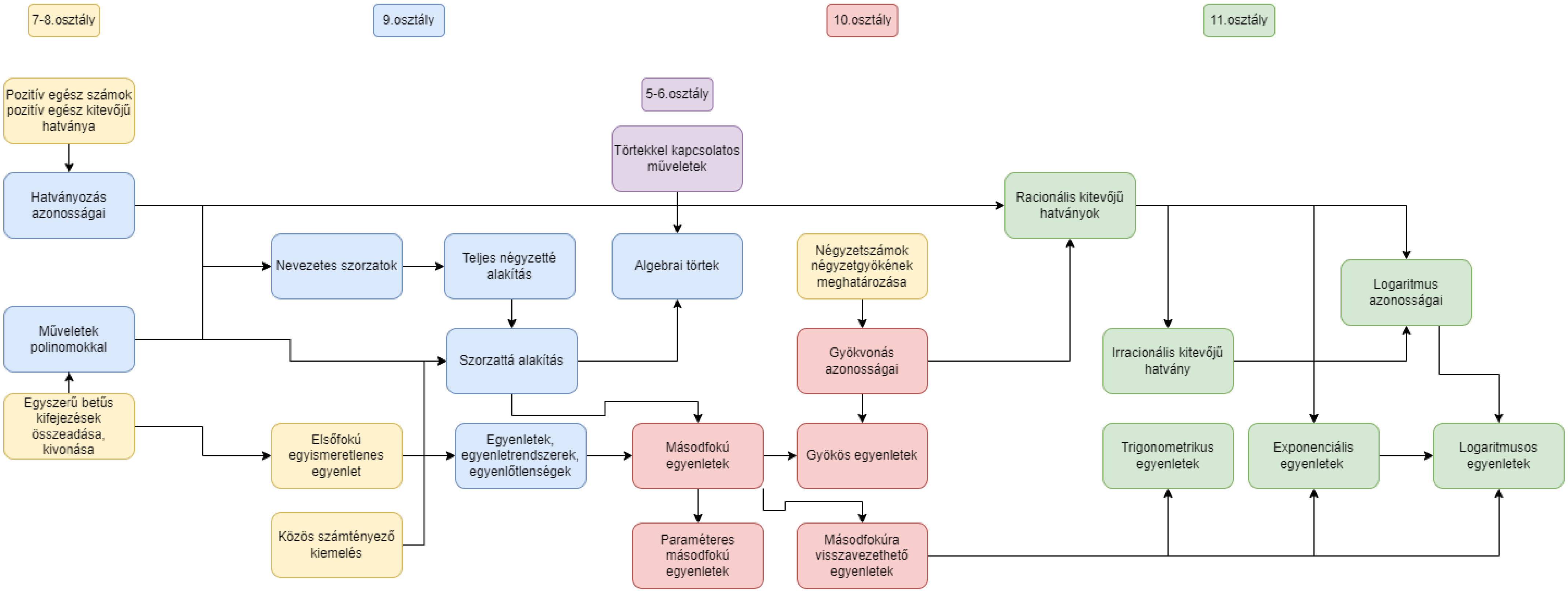
Ezeket az algebrai szinteket az 1. ábra mutatja. Az ábrán akkor mutat nyíl egyik fogalomtól a másikig, hogyha szerintünk az egyik feltételezi a másik a tudását. Például: A nevezetes szorzatokhoz szerintünk szükségesek a hatványozás azonosságai vagy az egyszerű betűs kifejezések összeadását már feltételezik a polinomokkal kapcsolatos műveletek. Hogyha kicsit magasabb szintet nézzünk, akkor az világos, hogy egy gyökös egyenlethez kell ismerni a gyökvonás azonosságait, illetve a másodfokú egyenletek levezetéséhez kell tudni a szorzattá alakítást. Azonban azt nem gondoljuk például, hogy a logaritmus azonosságaihoz szükségesek az algebrai törtek ismerete, viszont annál inkább lényegesek a racionális és irracionális kitevőjű hatványok.

Mivel a NAT ismeretanyagát figyelembe vettük a háló megalkotásakor, ezért a háló tükrözi azt is, hogy az hogyan épül fel. Úgy próbáltuk meg a fogalmak egymásra épülését megállapítani, hogy időrendi sorrendben néztük meg, melyik fogalom hányadik osztályban kerül elő. Az explicit algebrai tudást, a komolyabb algebrát 5-6.osztálytól a törtekkel kapcsolatos műveletekkel kezdjük tanítani, és a 11.osztály végéig eljutunk az exponenciális és logaritmikus egyenletekig is.

Ezen a hálón látható, hogy ha nem is teljesen lineáris, de majdnem lineáris a felépítés. Azonban a gyökös egyenletekhez el lehet jutni az algebrai törtek nélkül és fordítva. Ez rögtön azt jelenti, hogy itt nem lesz lineáris a felépülés, legalább is nem lesz a „van Hiele" elmélethez hasonló szintezés procedurális algebrai tevékenységek elvégzésében.

Most nézzük meg, hogy hogyan lehet eljutni a logaritmikus egyenletekig. A logaritmikus egyenletekhez mindenképpen kellenek a hatványozás azonosságai és a nevezetes szorzatok. Ha végigmegyünk a láncon, akkor lehet látni, hogy egy egész sor tudás kell hozzá. Amikor csak egy egyszerű logaritmikus egyenletben gondolkodunk a tananyagban nem szerepelnek a másodfokúra visszavezethető egyenletek. Mi a hálónkba figyelembe vettük a NAT-ban és a tankönyvekben szereplő összes lehetséges témát.

Annak megállapításához, hogy eldöntsük egy diák milyen algebrai szinten van, tesztfeladatokat kell készítenünk. Először minden egyes kis téglalaphoz elkészítünk feladatokat. A dolgozatunkban a kilencedik osztályos tananyagot vettük alapul, abból is csak az egyenleteket nem tartalmazó részeket. A háló minden eleméhez, minden téglalaphoz hozzárendeltünk tudást és képességeket. Például a hatványozás azonosságain belül a negatív kitevő és a nulladik hatvány használata, illetve az egyszerűsítés képessége. Olyan feladatlapot szerettünk volna összeállítani, amely ezeket a képességeket méri. Ezért minden rubrikához több feladatot állítottunk össze, majd azt vizsgáltuk, hogy melyik tesztfeladat melyik másik feladat megértését feltételezi.


7-8.osztály
9.osztály
10.osztály
11.osztály
5-6.osztály
Pozitív egész számok pozitív egész kitevőjű hatványa
Hatványozás azonosságai
Törtekkel kapcsolatos műveletek
Racionális kitevőjű hatványok
Nevezetes szorzatok
Teljes négyzetté alakítás
Algebrai törtek
Négyzetszámok négyzetgyökének meghatározása
Logaritmus azonosságai
Műveletek polinomokkal
Szorzattá alakítás
Gyökvonás azonosságai
Irracionális kitevőjű hatvány
Egyszerű betűs kifejezések összeadása, kivonása
Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet
Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek
Másodfokú egyenletek
Gyökös egyenletek
Trigonometrikus egyenletek
Exponenciális egyenletek
Logaritmusos egyenletek
Közös számtényező kiemelés
Paraméteres másodfokú egyenletek
Másodfokúra visszavezethető egyenletek

1. ábra

A fogalmi háló egyes állomásai

A következőkben először leírjuk mit gondolunk a fogalmi háló 9. osztályos elemiről, majd bemutatjuk a tesztfeladatokat. A háló elemeinek leírását néha ellátom egyéni benyomásokkal, amiket a tananyag oktatása közben tapasztaltam. Ezek nem biztos, hogy általános érvényűek, de kollegákkal beszélgetve mások is találkoztak ezekkel a jelenségekkel.

I. Hatványozás azonosságai

Mint ahogy a hálóról is leolvasható az első új ismeret, melyet a diákok kilencedik osztályban elsajátítanak, az a hatványozás azonosságai. Jól látható, hogy korábbi tanulmányaik során már találkoznak a pozitív egész kitevőjű hatványok kiszámolásával, valamint ennek alkalmazásával összetett számok prímtényezős felbontása során. Ebből fakadóan ezen az állomáson történik a hatványozás kiterjesztése a negatív kitevőre és a 0-ra, és a hatványozás azonosságainak. mint szabályoknak az általános alakban történő lefektetése és alkalmazása. A pozitív egész kitevőből az azonosságok alkalmazásával a kiterjesztés természetesen jön., ez azonban nem jelenti azt, hogy a diákok könnyen kezdetekben. tapasztalatom alapján sok diák fejében a negatív kitevő, mint egy negatív számmal szorzás van jelen, így megfelelő vezetés nélkül rosszul épülhet be a hosszú távú memóriába. Tisztázás nélkül a későbbiekben, amikor a racionális számokra történik a kiterjesztés, akkor újfent gondokat és elakadást okozhat. A negatív egész kitevővel történő számolásokra a kilencedikes tananyag nem épít, csak a későbbi évfolyamok. Ezzel szemben a pozitív egész kitevővel történő hatványozás alkalmazása egy-és többtagú kifejezésekre az egyik alaposzlopát képezi a tananyagnak mind 9. osztályban mind pedig későbbi évek során.

II. Műveletek polinomokkal

A polinomokkal kapcsolatos műveletek se mind ismeretlenek a középiskolások számára, habár mint sok minden ezt sem nevezik nevén az általános iskola felső tagozats alatt elsajátított tanulmányaik során. Ennek ellenére képesek 8. osztály végére betűket használni ismeretlenek bevezetésére, egyszerű betűs kifejezések összeadásra, kivonására és többtagú kifejezések számmal való szorzására. Fogalmi szinten azonban nincsenek megnevezve és csoportosítva az egész kifejezések, vagyis polinomok. Tehát mindezen gyakorlati ismeretek kibővülnek a kilencedik osztályban elmélettel, valamint komplikáltabb feladatokkal. Képesek lesznek két polinom szorzására, valamint jóval bonyolultabb többnemű kifejezések megkülönböztetésére és az azonosak összevonására. Ezek a gyakorlati ismeretek nem minden esetben épülnek be minden probléma nélkül a diákok emlékezetébe. Tapasztalatom alapján a többnemű kifejezések azonosítása bonyolultabb esetekben például, amikor a szorzás kommutativitását használja ki a feladat, kifejezett kihívást jelenthet a diákok számára. Ami még nehezítheti a megértést, hogy zárójelfelbontások is gyakorta megjelennek az összevonások is kivonások során, melynek ismeretét már általános iskolában kellet elsajátítaniuk, azonban a diákok még hajlamosak a típushibák elkövetésére. Így ez az állomás jóval erősebben épít a korábbi ismeretekre, nevezetesen a zárójelek mint matematikai jelölések használatára és jelentésére az adott feladatban.

III. Nevezetes szorzatok

Ez az első olyan csomópont a halóban, amely nem közvetlenül épít általános iskolás ismeretekre. A megértéséhez a nem sokkal korábban megismert tudásanyag szükséges. A nevezetes szorzatok megismeréséhez és megértéséhez szükséges, hogy mind a polinomokkal kapcsolatos műveleteket, mind pedig a hatványozás azonosságait teljes mértékben elsajátítsák, ugyanis ez az állomás ezt a kettő ismeretet használja kombinálva. Ha az egyiket vagy másikat nem értette meg teljesen a diák, az gyakori típushibákhoz vezethet. (Pl.: Egy polinom hatványozásánál nem szoroz be mindent mindennel, így egyes tagok együtthatója nem lesz jó.) Segíthet a diákok memóriába való beépülésének, ha a geometriai reprezentációját is bemutatja az oktató ezeknek a szorzatoknak. A nevezetes szorzatokat a középiskolában sok esetben a tanulókkal megtanultatják és mint mechanizmust használtatják. Pedig, ha közelebbről megvizsgálva ötletet tudna adni a polinomok hatványozásához, és magyarázatot tudna adni a binomiális tétel működéséről. Önmagában ezt az összefüggést csak nagyon kevés diák látja meg. Technikailag a nevezetes szorzatok nélkül is képesek a diákok polinomok hatványozására, hiszen ez csak egy speciális esete a szorzásnak. Azonban a diákok a későbbekben a szorzattá alakítás esetén nagy hátrányt szenvedhetnek, ha nem képesek felismerni őket.

IV. Teljes négyzetté alakítás

Egy érdekes köztes állomás a szorzattá alakítás és a nevezetes szorzatok között a teljes négyzetté alakítás. Önmagában leginkább a függvényábrázolások során szokott előkerülni, azonban elengedhetetlen része a későbbi szintnek. Tapasztalatom szerint az átalakítás koncepciója egyike azoknak, amit a diákok csak nagy nehézségek árán szoktak megérteni. Önmagában nem tűnik bonyolultnak, de több frissen szerzett ismeret is a része a folyamat megértésének és sikeres alkalmazásának. Először fel kell ismerni nevezetes szorzatot, amelyet kibontva megkapjuk a kifejezés első két tagját. Ezt követően a konstans tagot úgy kell alakítani. hogy a műveleteket elvégezve az eredeti kifejezést kapjuk. A legtöbb esetben a helyes konstans meghatározása okozza a legnagyobb problémát. Ennek az ismeretnek a hiánya nem feltétlenül jár azzal a következménnyel, hogy a későbbiekben egyáltalán nem tudnak szorzattá alakítani, de egy speciális esetével így nem fognak boldogulni. Ugyanis a teljes négyzeteket egyes esetekben tovább lehet alakítani szorzattá. Ennek a bonyolult folyamatnak az egyszerűsítést segítő tételei, mint a Viéte- formulák, a másodfokú egyenlet megoldó képlete tizedik osztályban válik ismertté.

V. Szorzattá alakítás

Véleményem szerint ez a legnagyobb gócpont és a legfontosabb állomás a hálón. Minden eddigi ismeret szükséges ahhoz, hogy a szorzattá alakítás módszereit a diákok megértsék és alkalmazni tudják. Mivel 4 különböző módszert ismernek meg és sajátítanak el ennek megtanulása során, így mindig más és más ismeretanyagot kell előhozniuk a memóriájukból és az eddig alkalmazott iránnyal ellentétesen használniuk.

a) Kiemelés

A kiemelésnek egy speciális esetével már általános iskola felső tagozatában is megismerkednek a diákok. Így kilencedik évfolyamon már képesnek kell lenniük az együtthatók legnagyobb közös osztóját kiemelni egy többtagú algebrai kifejezésből. Ezt bonyolítva kilencedik évfolyamon elsajátítják, hogy hogyan kell változókból kiemelni. Ehhez egy hatványozási azonosságot is kell használni, amikor azonos alapú hatványokat szorzunk csak visszafelé. Annak ellenére, hogy a szabályt jól tudja alkalmazni egyik irányba ez nem jelenti azt, hogy a másik irány is ugyanúgy megy a tanulónak. Azonban, ha nincs tisztában az azonosságokkal, akkor nem tudja elvégezni a kiemelést. Többnyire ez az a szorzattá alakítási módszer, mely a legkevesebb komplikációt szokott okozni a diákok számára, de még így is gyakori hiba, hogy nem mindent emelnek ki, amit lehet. Tehát az, hogy mindig látja, hogy mi a legnagyobb kiemelés, amit meg tud tenni, egy jó indikátora lehet egy mélyebb megértésnek.

b) Kiemelés csoportosítással

Érdekes módon ez a technika épít a közvetlen előtte lévőre. Ugyanis a csoportosításos kiemelés során először két kiemelést hajtunk végre a kifejezés két diszjunkt részére, majd egy zárójeles polinom kiemelést. Általában ennek a technikának az alkalmazhatóságát még tapasztaltabbak sem mindig veszik észre, így a tanulók akkor folyamodnak hozzá, ha az összes többivel nem érnek el eredményt. A kiemelések sikerességének követelményéről már volt szó, azonban az utolsó lépéshez szüksége van a tanulóknak még két nagyon fontos ismeretre. Egyrészt, hogy mit lehet egy elkülönített zárójeles kifejezéssel megtenni, másrészt, hogy hogyan történik polinomok szorzása. Ugyanis a kiemeléses csoportosításnál semmi más nem történik mint annak a kikutatása, hogy az adott kifejezés milyen két polinom szorzásával jöhetett létre. Még további bonyodalmat ad, hogy a két eredeti polinom csak egységszeres erejéig egyértelmű, így a diákok számára különböző végeredmények is előjöhetnek azonos feladatnál.

c) Nevezetes szorzatok felismerése

Ennek az esetnek a kötelező előzményét a legegyszerűbb meghatározni. Ahhoz, hogy a tanuló szorzattá tudjon alakítani egy nevezetes szorzatot kell felismernie, így nem kell más mint a nevezetes szorzatok ismerete. Ennek ellenére a diákoknak meg szokott gyűlni a baja az ilyen feladatokkal, mert nem egyértelmű számukra, hogy hogyan kellene visszaalakítani egy kifejezést, vagy hogy miből egyértelmű, hogy a feladatban szereplő kifejezés egy nevezetes szorzat. Mindezt nehezíti, hogy az oktató sincs egyszerű helyzetben. Elmagyarázni, hogy mit is érdemes nézni nem egyértelmű, hiszen ez számára egyértelmű félig tudatos művelet mindössze. Az, hogy ki miből azonosítja a nevezetes azonosságokat is akár különböző lehet. Ezen felül a feladatok néha csavarnak egyet és megcserélik a tagok sorrendjét, ami még inkább megzavarja a tanulókat. A nevezetes szorzatok rövid időn belüli felismerése és az a képesség, hogy a felismerésből szinte azonnal képes visszaalakítani, egyfajta mélyebb megértést, hozzáértést igényel.

d) Teljes négyzetből szorzat

Talán ez az a módszer, amely a legtöbb tanuló számára túl összetett és nehezen megérthető. Nem véletlenül, hiszen a teljes négyzetté alakításra épül, amely meg a nevezetes szorzatokra, így több frissen tanult anyagrész alkalmazását is igényli. Ellentétben sok kapcsolattal a hálón ez az alá-fölé rendeltségi viszony a diákok számára is egyértelmű, hiszen ennek a folyamatnak az első lépésében teljes négyzetté alakítást végez el. A legnagyobb kihívást azonban az utána következő lépés szokta okozni, amikor egy nevezetes szorzatot kell felismerni. Tehát ez az állomásrészlet kétszeresen épít a nevezetes szorzatokra. Valamint az egyik négyzetes kifejezés egy polinom, ami méginkább zavart okozhat a tanulók fejében.

VI. Algebrai törtek

Nem meglepő, hogy az egész algebra tananyagrészből a legnehezebben alkalmazható és megérthető a diákok számára az algebrai törtek. Természetesen az itt megismert fogalmak erősen építenek az általános iskolai tanulmányaik végére elméletben jól ismert és megértett törtekkel kapcsolatos műveletekre. Azonban ez a legtöbb esetben a tanulók még középiskolai tanulmányaik alatt sem képesek rutinosan elvégezni törteket igénylő műveleteket, valamint értelmezni az adott tört jelentését különböző feladatokban.

a) Algebrai törtek egyszerűsítése

A törtekkel kapcsolatos műveletek közül ez jelenti a legkevesebb problémát a diákok számára, de ezen feladatok megoldásakor sem mentesek a típushibáktól. Két kulcselőzményt fontos ismernünk a megoldásukhoz: a törtek egyszerűsítésének folyamatát, alkalmazhatóságának feltételeit és a szorzattá alakítás módszereit. Tehát már itt látható, hogy az eddig tanultak mind összeérnek ebben a gócpontban, ezért okozhat komoly nehézségeket a diákoknak.

b) Algebrai törtek szorzása és osztása

Ahogy az előző részben is ismertettem annak érdekében, hogy egyáltalán az elmélet megértése megkezdődjön a tanulók fejében, szükséges, hogy jól ismert és szinte már rutinos legyen számukra a törtek szorzásának és osztásának a mechanizmusa. Ezzel a résszel nem szoktak különösebb problémák lenni, habár tapasztalat alapján a diákok nem igazán értik, hogy miért szorzunk úgy törteket, ahogy. Az osztás esetében pedig legtöbbször csak egy mondóka miatt tudják felidézni a művelet végrehajtásának lépéseit: „Törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.” Ebből jól látható, hogy már a törtek osztása és szorzása a legalapvetőbb esetekben is több ismeret felidézését igényli a korábbi tanulmányokból. Ezekben az esetekben még kifejezetten fontos, hogy tisztában legyenek a polinomok szorzásával, valamint a nevezetes szorzatok alkalmazásával. A legtöbb feladat a legegyszerűbb végeredményt kéri, így ezen felül sokszor a közvetlen ez előtt tanult egyszerűsítéseket is tudniuk kell alkalmazni.

c) Algebrai törtek összeadása és kivonása

Véleményem szerint az összes itt megtárgyalt új ismeret közül ez a legnagyobb kihívást jelentő a tanulók számára. Ez nem véletlen hiszen, amire nagy mértékben támaszkodik a törtek összeadása és kivonása nemcsak általános, de még középiskolában is néha fejtörést okoz a diákoknak. Természetesen a közös nevező mint fogalom, valamint annak a megtalálása mint technika az alapja annak, hogy az algebrai törtekkel is el tudjuk végezni ugyanezeket a műveleteket. Ez azonban a változók bevonásával sokkal komplexebb és nehezebben átlátható lesz a tanulók számára. Hiszen ahhoz, hogy megtaláljuk két algebrai tört közös nevezőjét a szorzattá alakítás elkerülhetetlen az első lépésben. Itt azonban nem állhatunk meg, elvégre a törteket közös nevezőre kell hozni és ehhez bővíteni is kell őket, vagyis a polinomszorzás vagy a nevezetes szorzatok valamelyikét alkalmazni kell. Ezután az összevonás során a polinomok összeadása fog következni a törtek számlálóin végrehajtva. Végezetül, mivel a legtöbb feladat igényli, legegyszerűbb alakra kell hozni a törtet. Látható tehát, hogy ezek a műveletek csak önmagukban rengeteg általános iskolai és új ismeretanyagot is igényelnek, így nem meglepő, hogy a legtöbb diáknak nagy kihívást jelentenek, amikor még az általános iskolai tudásuk sem feltétlen épült be a gondolkodásukba.

Teszt elkészítése

A tesztet a háló alapján állítottuk össze. A tesztben összesen 11 feladat szerepel legfeljebb 10 alfeladattal. A következőkben felsoroljuk az összes feladatot kiegészítve azzal, hogy melyik milyen készségeket, kompetenciákat ellenőriz. A leírásnál szerepel, hogy mit gondolunk arról, hogy a diáknak mit kell és mit nem kell elsajátítania. Minden feladatnál írunk arról is, hogy milyen előzetes meglátásaink vannak. Ez a megjegyzés általában kétfajta tartalommal rendelkezhet: milyen készségekkel rendelkezik vagy nem rendelkezik egy gyerek, illetve ezek a készségek hogyan függenek össze. A feladatlista semmiképpen sem teljes és semmiképpen sem kizárólagos, de azt gondoljuk, hogy ez egy jó kiindulás arra, hogy megkeressük az algebrai szinteket.

Ezeket a kompetenciáknak a meglétét nagyon nehéz eldönteni írásbeli munkával. Azért, mert ha valaki valamit procedurálisan jól tud, akkor már konceptuálisan szinte fölösleges leellenőrizni vagy nagyon nehéz. Például, ha valaki tudja a Számelmélet Alaptételét és megkérdezzük tőle két egész szám legkisebb közös többszörösét és abból rájön és úgy számolja ki, akkor ő azt konceptuálisan tudja. De ha már tudja a képletet a legkisebb közös többszörösre és procedurálisan alkalmazza, ugyanarra az eredményre jut. Ugyanígy algebrai kifejezéseknél egy írásbeli teszttel nagyon nehéz eldönteni azt, hogy valaki procedurálisan vagy konceptuálisan lát hozzá. Ezért mi a dolgozatunkban arra fogunk koncentrálni, hogy bizonyos típusú feladatokat meg tud-e oldani a gyerek. Ami ebből látszik, hogy lesznek olyan diákok, akik még csak kevesebb dolgot tanultak algebrából és úgy oldják meg, ők már konceptuálisan is értik az előző anyagrészt, akik meg procedurálisan tudják, azok meg tudják. Tehát most nem törekszünk arra, hogy konceptuális vagy procedurális tudást mérjünk. Akkor, amikor későbbi már későbbi feladatokban, későbbi matematikában szükség van rá, akkor ez mindegy is.

1. **<u>Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezést! Számold ki számológép nélkül!</u>**

$a)\ \dfrac{32^3 \cdot 625^2}{128^4} \cdot \dfrac{64^5}{25^6}$

<u>Feladat célja:</u> Megfigyelni, hogy melyik gyerek fedezi fel, hogy prímtényezős felbontásban egyszerűbb kiszámolni az eredményt, valamint megvizsgálni, hogy a diákok elsajátították-e a hatványozás azonosságait pozitív egész kitevőre.

<u>Megjegyzés:</u> Azok a diákok, akik prímtényezős alakban oldják meg a feladatot nemcsak mechanikai szinten oldják meg a feladatot, hanem képesek a hatványozás azonosságai szabályrendszerében gondolkodni és megtalálni az optimális feladatmegoldási utat.

$b)\ \left(\dfrac{2x}{y}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{xy^2}{2}\right)^2 : \left(\dfrac{1}{x}\right)^4$

<u>Feladat célja:</u> Megvizsgálni, hogy a diákok ugyanolyan biztosan számolnak-e változókkal, mint konkrét számokkal.

<u>Megjegyzés:</u> Lesznek olyan tanulók, akik képesek voltak helyesen megoldani az előző feladatot, de ezt már nem. Feltételezésem az azonban. hogy a diákok nagy része, aki megoldotta az előző részt, képes megoldani ezt is.

$c)\ \dfrac{(3 \cdot 2^4 + 1)^4}{(7^3)^3}$

Feladat célja: A diákok néha keverik, hogy a hatványozás azonosságai mely műveletekre érvényesek, különösen igaz ez az összeadás és szorzás esetén, tehát ez a feladat a tanulók tudásának a biztosságát vizsgálja.

Megjegyzés: Azok a tanulók, akik először helytelenül oldják meg a feladatot, majd rájönnek a hibájukra és korrigálnak, megfelelő ismeretük van a hatványozásról ahhoz, hogy a saját feladatmegoldásaikat ellenőrizzék és javítsák. Ez igazán biztos algebrai alapokra vall, melyekre jól lehet építeni. Akik nem veszik észre a hibájukat, azok csak megtanulták az azonosságokat, de nem sajátították el és értették meg igazán azoknak jelentéstartalmát.

2. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezést a megadott feltételek szerint!

$$\frac{(xy^{-3})^{-2}}{x^{-4}\cdot y^{-4}}\cdot\frac{(x^{-1})^{5}}{\left(\frac{1}{y}\right)^{-2}}$$

a) A végeredményben nem szerepelhet negatív kitevőjű hatvány!
b) A végeredményben nem szerepelhet tört!

Feladat célja: Felmérni, hogy a diákok teljesen megértették és elsajátították a hatványozást negatív kitevőre, valamint a hatványozás azonosságait negatív kitevő esetén is tudják alkalmazni.

Megjegyzés: Azok a diákok, akik helyesen megoldják a feladatot nagy valószínűséggel megértették és alkalmazni is tudják a hatványozás azonosságait nemcsak pozitív, de negatív kitevőre is.

3. Melyik szám a nagyobb?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}\cdot 6^{-8}\quad vagy\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\cdot 18^{-3}$$

Feladat célja: Megvizsgálni a tanulók gondolkodását a negatív kitevő és a törtek kapcsolatában.

Megjegyzés: A feladat nem illeszkedik teljesen a többi közé, így lehetséges, hogy a tanulók nem lesznek képesek ezt megoldani, de így meg lehet vizsgálni, hogy mely diákok tudnak kilépni a sémákból és önállóan gondolkodni, ami magas szintű algebrai képességekre és a tudásukban való bizonyosságra utalhat.

4. Vond össze a megfelelő tagokat, és ha vannak, bontsd ki a zárójeleket!

$a)\ 3x^2+2x^3-5x+4x^3-5x^2-3+x^2-x^3+4x-1$

Feladat célja: Ezzel a feladattal szeretném felmérni, hogy a tanulók rendelkeznek-e azokkal az ismeretekkel, melyeket már 7.-8. osztály során el kellett sajátítaniuk. Nevezetesen, hogy felismerik az egynemű kifejezéseket és képesek megfelelően összeadni azokat.

Megjegyzés: Azok a diákok, aki a bevezető feladatot nem tudják helyesen végrehajtani nagy valószínűséggel még a középiskolai szintet sem érik el, így a későbbi feladatok során, amelyek új nehezebb ismeretekre kérdeznek rá nehézségeik lesznek.

$b)\ (xy^2-3xy+7x^2y)-(2yx^2-3yx+2y^2x)+(7xy-2x^2y+y^2x)$

Feladat célja: Egyrész megfigyelni, hogy a tanulók alkalmazni tudják a zárójelfelbontást, melyet elméletben általános iskola végére el kell sajátítaniuk, valamint megvizsgálni, hogy vannak-e olyan diákok, akik összetett ismeretlenek esetén nem tudják megállapítani, hogy melyek az egyneműek.

Megjegyzés: Azok a tanulók, akik nem tudják a bonyolultabb ismeretleneket megkülönböztetni egymástól lehetséges, hogy nem értették meg igazán az elmélet alapjait, azonban erről biztosabban csak a következő feladat alapján lehet nyilatkozni. Akiknek pedig a zárójelfelbontás okoz gondot nagy eséllyel alkalmazzák a nevezetes azonosságokat is csak megtanulás nem pedig megértés alapján, ezen felül a polinomok szorzásánál is nagyobb valószínűséggel követnek el hibákat.

5. Végezd el a következő műveleteket és vond össze az összevonható tagokat!

$a)\ 3x(2x^2 - 3x + 7)$

Feladat célja: Felmérni, hogy a diákok tisztában vannak a polinomszorzás elméletével és ezt a gyakorlatban is tudják alkalmazni.

Megjegyzés: Azok a tanulók, akik a teszt alapján helyesen tudják alkalmazni a zárójelfelbontást és a hatványozás azonosságait, azoknak nagy valószínűséggel ez a feladat sem fog gondot okozni.

$b)\ (2x + 3)(3x^2 - 6x + 5)$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy azok a tanulók, akik el tudták végezni az előző feladatot képesek-e kiterjeszteni az ismereteiket két zárójelre, valamint hogyha nem milyen típushibákat követnek el.

Megjegyzés: Lesznek olyan diákok, akik „elfelejtik” az összes tagot egymással összeszorozni. Ez esetben vagy a zárójelfelbontással nincsenek teljesen tisztában vagy a hatványozás és változók szorzásával kapcsolatos ismereteik nem szilárdultak meg teljesen.

6. Végezd el a következő műveleteket!

$a)\ (10a + 2b)^2$

Feladat célja: Megfigyelni, hogy ismerik-e a nevezetes azonosságokat és alkalmazni tudják a legalapvetőbb esetben.

Megjegyzés: Ha lesznek olyan diákok, akik a legegyszerűbb esettel sincsenek tisztában, azok nagy eséllyel a többi feladatot se tudják helyesen megoldani.

$b)\ (4a^2 - 5b^5)^2$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy a tanulók alkalmazni tudják a nevezetes azonosságokat bonyolultabb esetekben is, amikor a változók nem első hatványon vannak.

Megjegyzés: Ha lesznek olyanok, akik az előző feladatrészt helyesen megoldották, mégsem sikerül nekik ez, ugyanis „elfelejtik” hatványozni a változókat vagy az együtthatókat. Ezek a tanulók nagy eséllyel vagy a hatványozás azonosságaival nincsenek teljesen tisztában vagy a polinomszorzással.

$c)\ (2a + 4b - c^3)^2$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy a tanulók képesek-e a nevezetes azonosságokat általánosítani több esetre.

Megjegyzés: Azoknak, akik a polinomszorzással és a nevezetes azonosságokkal is egyaránt tisztában vannak nagyobb eséllyel oldják meg ezt a feladatot helyesen.

$d)\ \left(1{,}2x^2 - \frac{2}{5}y^3\right)\left(\frac{6}{5}x^2 + 0{,}4y^3\right)$

Feladat célja: Ez a feladat egyszerre vizsgálja azt, hogy a tanulóknak mennyire stabil a tudásuk a törtek és a tizedes törtek kapcsolatát illetően, valamint, hogy mennyire jól tudják alkalmazni a nevezetes azonosságokkal kapcsolatos tudásukat törtekre.

Megjegyzés: Azok a tanulók, akiknek nehézséget okoz ez a feladat, de az előzőek nem, nagy valószínűséggel nem biztosak a törtekkel kapcsolatos ismereteikben, amely még problémát okozhat az algebrai törtes feladatok esetén.

$e)\ (4x - y)(4x + y) - (2x - y)^2$

Feladat célja: Az előzőek alapján meg lehet állapítani, hogy helyesen el tudják-e végezni a zárójelfelbontásokat. Ebben a feladatban nekik kell kihelyezni a megfelelő helyre. Tehát a zárójelek alkalmazásával, nevezetes azonosságokkal és a polinomok összeadásával kapcsolatos ismereteiket is teszteli ez a feladat.

Megjegyzés: Azok a diákok, akik helyesen alkalmazzák a zárójeleket nagyobb eséllyel tudják a szorzattá alakításokat is jól elvégezni, ahol a zárójelek kitétele kulcsfontosságú.

Megjegyzés 2: A nevezetes azonosságokkal kapcsolatos feladatok helyes megoldásához nem szükséges ismerni az azonosságokat, ugyanis polinomszorzással is meg lehet oldani, azonban az ismeretük gyorsítja a feladatmegoldást.

7. **Számold ki számológép nélkül!**

$$\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2} - \frac{3}{5}$$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy a tanulók képesek-e alkalmazni a nevezetes azonosságokkal kapcsolatos ismereteiket konkrét számokra, valamint, hogy egyáltalán felismerik az alkalmazás lehetőségét.

Megjegyzés: Véleményem szerint, ha ez a feladat közvetlenül a nevezetes azonosságok után következik, akkor nagyobb eséllyel jönnek rá a feladat kulcsára. Ha lesznek, akik közös nevezőre próbálják hozni a törteket, azoknak az ismeretei a nevezetes azonosságok terén még csak alapszinten van.

8. **Alakítsd át teljes négyzetté!**

$a)\ x^2 - 6x + 10$

Feladat célja: Felmérni, hogy ismerik és alkalmazni tudják a teljes négyzetté alakítást.

Megjegyzés: Akik nem ismerik, azoknak a szorzattá alakítás ehhez kapcsolatos feladatával sem fognak tudni megbirkózni.

$b)\ -2x^2 - 8x + 3$

Feladat célja: Felismerik-e, hogy ilyen esetekben a teljes négyzetté alakítás előtt egy kiemelés szükséges és egyszerűsíti is a feladatot. Ezen felül megvizsgálni, hogy a törtek megjelenése egy teljes négyzetté alakítás során kinek okoz nehézséget.

Megjegyzés: Azok a diákok, akik a kiemelés lehetőségét észreveszik és alkalmazzák szilárdabb és komplexebb tudással rendelkeznek, mint akik nem. Lehet, hogy lesznek olyanok, akik jól kiemelne, de a törtekkel nem jól számolnak az átalakítás során. Nekik a teljes négyzetté alakítás nagy eséllyel nem okoz gondot csak a törtekkel való műveletek.

$c)\ x^2 - 7x + 13$

Feladat célja: Megfigyelni, hogy a törtek és a teljes négyzetté alakítás kombinációja mely tanulóknak okoz nehézséget és hogyan.

Megjegyzés: Azok a diákok, akik az első feladatrészt megoldpották, de ezt a feladatot nem tudják nagy valószínűséggel nem biztosak a törtekkel kapcsolatos ismereteikben, ezért az algebrai törtek esetén még nehézségeik lehetnek.

9. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

$a)\ 18a^7b^4 + 6a^5b^7 + 30a^{10}b^3$

Feladat célja: Megfigyelni, hogy a tanulók helyesen alkalmazzák-e a kiemelést.

Megjegyzés: Azok a diákok, akiknek az egyszerű kiemelés nem megy nemcsak a későbbi kiemeléseket tartalmazó szorzattá alakítás feladatok okoznak nehézséget, hanem a törtek egyszerűsítését és bonyolultabb esetben az összeadását tartalmazóak is.

$b)\ 21x^2y^4 + 7x^2y^3 - 14x^3y^3$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy problémát okoz-e a tanulók számára, ha a kiemelés során az egyik tagot teljesen ki lehet emelni.

Megjegyzés: Ha vannak olyan tanulók, akik ezt a részfeladatot helyesen megoldják, ők teljes mértékben értik és átlátják a kiemelés működési elvét és alkalmazását. Azonban véleményem szerint lesznek olyanok, akik a teljesen kiemelhető tagot csak elhagyják.

$c)\ 6ax + 4y + 12x + 2ay$

Feladat célja: Felmérni, hogy a tanulók tisztában vannak-e a csoportosításos kiemeléssel.

Megjegyzés: Hasonló állítás igaz, mint az egyszerű kiemelés esetében, habár a csoportosításos kiemelés jóval ritkább a középiskolai tanulmányok során akár 9.osztályban, akár a későbbiekben.

$d)\ 6ax^2 - 9x^2 + 3 - 2a$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy okoz-e zavart a diákok számára, amikor az egyik kiemelés során csak -1-et kell kiemelni. Lesz-e olyan, aki emiatt átrendezi a tagokat és másképp emel ki?

Megjegyzés: Azok a diákok, akik átrendezés nélkül megoldják a feladatot, jobban átlátják a csoportosításos kiemelést. Nekik nem szükséges a saját elrendezésük, ahhoz, hogy lássák mit lehet kiemelni a kifejezésből.

$e)\ 64x^2 + 9 - 48x$

Feladat célja: Megfigyelni, hogy a tanulók a nevezetes azonosságokat nemcsak egy irányba tudják alkalmazni és felismerni, hanem oda-vissza.

Megjegyzés: Ez a feladat azoknak a tanulóknak okozhat különösen nagy nehézséget, akik nem ismerik a nevezetes azonosságokat, de a polinomszorzást igen, így az eddigi feladatokat meg tudták oldani. Nagy valószínűséggel ők nem fogják tudni megoldani ezt a feladatot.

$f)\ 49a^4 + 28a^2b + 4b^2$

Feladat célja: Ebben az esetben is nevezetes azonosság felismerése a cél, azonban az egyik változó egynél nagyobb hatványon van, így ez megnehezíti.

Megjegyzés: Valószínűleg lesznek olyanok, akik a legegyszerűbb esetben felismerik a nevezetes szorzatot, de ebben az esetben már nem.

$g)\ a^4 - 1$

Feladat célja: Arról szeretnénk meggyőződni, hogy a diákok felismerik-e azt a pontot, amikor már nem lehet tovább bontani a kifejezést vagy még inkább azt, hogy mikor bontható még tovább az adott kifejezés.

Megjegyzés: Elmondható, hogy azok a tanulók, akik meg tudják állapítani, hogy meddig lehet egy kifejezést további szorzótényezőkre bontani magasabb szinten helyezkednek el, mint a többi feladatot megoldók. Ugyanis ezt az ismeretet elmagyarázni sem nagyon lehet a tanulóknak, hiszen vagy látják vagy nem, ami a gyakorlattal és a tudás mélyülésével alakul ki.

$h)\ x^2 - 4x - 21$

Feladat célja: Megfigyelni, hogy képesek-e a diákok a teljes négyzetté alakítás mellet egy nevezetes azonosság alkalmazására is.

Megjegyzés: Azok a tanulók, akik a teljes négyzetté alakítást nem ismerik, azoknak ez a feladat nehezebb, de nem megoldhatatlan, ha valahogy rájönnek a Viéte-formulák által kimondottakra. Azonban azt fejben csak egész számok esetén tudják alkalmazni.

$i)\ 45x^2 - 120x + 80$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy felismerik-e a nevezetes azonosságot, ha egy trükkösebb kiemeléssel bonyolítjuk. Ugyanis könnyebb felismerni az azonosságot ebben az esetben, ha nem a négyzetes tag együtthatóját emeljük ki, hanem csak 5-öt.

Megjegyzés: Nagy valószínűséggel lesznek olyanok, akik más esetben felismerték a nevezetes azonosságot, de itt nem. Meglátásom szerint azoknak a diákoknak nagyobb valószínűségű a sikere, akik csak 5-öt emelnek ki. Mindenesetre különböző módszerek helyes alkalmazása kombinálva magas algebrai tudásra vall.

$j)\ \frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}my^2$

Feladat célja: Hogyan oldják meg azt a feladatot, amely egyszerűbbé válik, ha egy kiemelést elvégzünk, de meg lehet anélkül is oldani.

Megjegyzés: Azok a tanulók, akik először kiemelnek és csak utána alkalmazzák a nevezetes azonosságot képesek túllépni a konkrét sémafeladatokon és elgondolkodni a megoldásuk menetén, nemcsak mechanikailag alkalmazni az eddigi ismereteiket.

10. Egyszerűsítsd a következő törteket!

$a)\ \dfrac{17x^3y^2}{34xy^4}$

Feladat célja: Megfigyelni, hogy a tanulók tisztában vannak-e a törtek egyszerűsítésével, ha azok változót tartalmaznak.

Megjegyzés: Ha egy diáknak ez a feladat nehézséget jelent az két okból következhet. Egyrészt lehetséges, hogy a közönséges törtek egyszerűsítésével nincs tisztában, másrészt lehetséges, hogy az algebrai törteken fellelhető változók bizonytalanítják el.

$b)\ \dfrac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy azok a tanulók, akik a nevezetes azonosságokat sikeresen felismerik és szorzattá alakítják, valamint egyszerűsíteni is tudnak egyszerűbb algebrai törteket, meg tudják-e tenni a következő lépést. Egyszerűsíteni tudják-e az algebrai törtet, ha számlálójában és nevezőjében is a számukra ismert nevezetes azonosságok találhatóak.

Megjegyzés: Véleményem szerint, ha a diák számára nem jelent problémát a nevezetes azonosságok szorzattá alakítása, valamint a törtek egyszerűsítése, akkor ezzel a feladattal sem kellene, hogy gondja legyen.

11. Végezd el a következő műveleteket és hozd a legegyszerűbb alakra a végeredményt!

$a)\ \dfrac{8a^4x^3}{15y^6}:\dfrac{16a^2x^4}{25y^7}$

Feladat célja: Megfigyelni, hogy a tanulók jártasak-e a törtekkel történő osztásban, valamint az ezzel járó egyszerűsítési lehetőségekben, úgy, hogy algebrai törtekkel kell mindezeket végrehajtani.

Megjegyzés: Mivel a feladatot ki kell dolgozni a tanulóknak, így könnyen felfedezhető, hogyha a diáknak nem a változók jelentenek nehézséget, hanem az alapvető törtekkel kapcsolatos műveletek végrehajtásának módjait nem ismeri. A nagyobb gond, ha a műveletekkel nincsen tisztában, hiszen ezeket a középiskolába való belépéskor már ismernie kellene. Ha azonban az algebrai tört kezelése okoz gondot a számára, akkor nagy eséllyel nemcsak ez a feladat, de az előtte lévők, valamint az utána következőek is nehézséget fognak neki okozni.

$b)\ \dfrac{6x^2-4x}{24+6x}\cdot\dfrac{x+4}{9x^2-12x+4}$

Feladat célja: Hasonlóan az előzőhöz itt is két ismeret jelenlétét vizsgáljuk egyszerre. Egyrészt, hogy ismeri-e törtek szorzásának menetét, valamint, hogy az előbbi feladathoz képest bonyolultabb esetre is képes megoldani az egyszerűsítést.

Megjegyzés: Ha a nevezetes azonosságokkal kapcsolatos egyszerűsítést nem tudta elvégezni, akkor nagy valószínűséggel ezt a feladatrészt se tudja majd megoldani. Azonban, ha ismeri a kiemelést és tud nevezetes szorzatokat tartalmazó törteket egyszerűsíteni, akkor nagy eséllyel meg kell tudnia oldani ezt a feladatrészt is.

$c)\ \frac{3x^2+6x+3}{x^2-1} : \frac{3x+3}{2x^2-4x+2}$

Feladat célja: Meggyőződni arról, hogy azok a diákok, akik a feladat eddigi részeivel jól boldogultak egy az eddigieknél nagyobb nehézségű feladatot is képesek megoldani. Ehhez azonban szükségük van a már korábban említett nem igazán tanítható ismeretre, hogy mikor lehet még egy felbontás után további felbontásokat végezni egy polinomon.

Megjegyzés: Azoknak a tanulóknak van a legnagyobb esélye helyesen megoldani ezt a feladatot, akik nem állnak meg egy szorzattá alakítás után, hanem továbbvizsgálódnak. Vagyis akik helyesen megoldották az ehhez kapcsolódó szorzattá alakításos feladatokat.

$d)\ \frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}$

Feladat célja: Egyrészt kideríteni, hogy a tanulók ismerik-e a közös nevező fogalmát, és tudják, hogy hogyan kell közös nevezőt kiszámolni. Másrészt, hogy ezt a tudást megzavarja-e, ha nem közönséges, hanem algebrai törtekkel kell dolgozniuk.

Megjegyzés: Ha nem algebrai törtek esetében nem tudják, hogy hogyan kell meghatároznia közös nevezőt, akkor a további két feladatrésszel sem valószínű, hogy boldogulni fognak.

$e)\ \frac{2a}{4a^2-9}+\frac{3}{4a^2+12a+9}$

Feladat célja: Ez a feladatrész jóval összetettebb mint az előzőek. Ugyanis nemcsak azt vizsgálja, hogy bonyolultabb közös nevező meghatározására és a vele való számolásra képesek a diákok, hanem hogy a végeredményben félreértelmezik az egyszerűsítés lehetőségét.

Megjegyzés: Lesznek olyan diákok, akik helyesen meghatározzák a közös nevezőt és azzal meghatározzák a végeredményt jól, azonban tévesen a egyszerűsítik a törtet. Ők jobban sablonokban gondolkodnak mint azok akik észreveszik, hogy nem lehet egyszerűsíteni a végeredményben.

$f)\ \frac{3}{a}-\frac{2a-2}{2-a}-\frac{2a^2-4}{a^2-2a}$

Feladat célja: Megvizsgálni, hogy azok a tanulók, akik a -1-kiemelését helyesen elvégezték egy korábbi feladatban észreveszik-e, hogy ugyanezen feladat közös nevezőjének megtalálásához is szükséges. Ezzel összeköttetésben pedig megfigyelni, hogy helyesen tudják-e kezelni a -1 kiemelését törtek esetében. Lesz-e, aki emiatt a tört előjelét megváltoztatja?

Megjegyzés: Azok a diákok, akik a -1 kiemelésekor megváltoztatják a tört előjelét, szélesebb körű ismeretekre mutatnak jelet. Valamint azok, akik ezt a feladatrészt helyesen megoldják egyszerűsítéssel együtt, láthatóan átlátják és értik az eddig tanultak között a kapcsolatot és nagyon magas szintű algebrai kompetenciákkal rendelkeznek.

A tesztelések eredményei és elemzésük

A teszteket a Páduai Szent Antal Általánis Iskola, Gimnázium és Alapfokú Művészeti Iskolában március 21.-én töltettük ki 29 diákkal. Az osztályban 2 csoport volt, mindkét csoportnak kétszer 45 perc állt rendelkezésre a megíráshoz. Az egész osztályt ugyanaz a szaktanár tanítja. A kitöltés után a dolgozatokat kijavítottuk az alábbi szempontok szerint: minden feladatnak több alpontja volt, amelyeket különböző készségeket ellenőriztek. Például az első feladatban egy pont járt a helyes felbontásokra, különböző hatványazonosságok helyes alkalmazására, valamint a végeredményre, így összesen 5 pontot lehetett elérni.

Ez egy hatalmas adathalmaz, úgyhogy első lépésben azt próbáltuk megállapitani, hogy melyik feladat megoldása függ melyik másik megoldásától, és hogy mikor igaz az, hogy ha valaki az egyik feladatot meg tudja oldani, akkor a másikat is. Erre kétfajta statisztikai próbát végeztünk. Az egyik egy nem paraméteres korrelációmátrix keresés volt, a másik pedig egy rangpróba. amelyik azt mondta meg, hogy ha valaki az egyik feladatot megoldotta, akkor a másikat is. A nem paraméteres korrelációmátrixban az összes szempontot nem lehetett figyelembe venni, mert túl kevés adat volt ehhez a rengeteg szemponthoz. A statisztikus, aki segített nekünk felhívta a figyelmünket arra, hogy mindent elsősorban 5%-os szignifikanciaszinttel mérünk. Mivel nekünk nagyon sok az adatunk, így egészen biztos, hogy lennének hibás következtetések.

Végül úgy döntöttünk, hogy nem készségekre, kompetenciákra bontjuk fel a vizsgálatot, hanem a feladatok összpontszámait néztük. A feladatok összpontszám táblázatából készítettük el a korrelációmátrixot, amelyik a mellékletben található. A sárga szín jelöli, ha a korrelációs együttható nagyobb mint 0,5 vagy kisebb mint -0,5 és szignifikáns a korreláció, a kék, ha a korrelációs együttható -0,5 és 0,5 között van, valamint úgyszintén szignifikáns az összefüggés. A zöld és a piros színek mindketten nem szignifikáns korrelációt jelölnek, a zöldnél minél erőteljesebb a szín annál nagyobb a korrelációs együttható, míg a pirosnál ezzel ellenkezőleg minél határozottabb a szín, annál kisebb az együttható.

Az alábbiakban kielemzünk néhány eredményt. Az összes számadat értelmezése unalmas és időigényes lenne. A megállapításaink elősegítik egy újabb, több diákkal megírandó tesztnek az elkészítését.

Ha megnézzük a mátrixot, látható, hogy az 1-es feladat összes alpontja, valamint a kettes feladat korrelál, ami nem meglepő, hiszen mindkét feladat a hatványozás azonosságainak különböző képességeit tesztelte. Ez azt jelenti, hogy a tananyag beépülése ebben az esetben úgy történt, ahogyan számítottunk rá. Kicsit kilógnak a sorból az 1.a. és 1.b. alfeladatok. Ez abból eredhet, hogy a tisztán számolási feladatok esetén, mint amilyen az 1.a. is, nem használhattak számológépet a diákok, így néhányan bele sem kezdtek a feladatba vagy hatalmas hatványokkal számoltak írásban, míg az 1.b. változókat tartalmazott, így számolás szempontjából könnyebben elvégezhető volt. Ami ezen felül leolvasható még, hogy az 5-ös és a 6-os feladatok összes alfeladat, valamint 9.c.-9.f., és a 9.h.-9.j. részfeladatok korrelálnak, tehát ha tesztelünk, akkor ezekből a feladatokból elég egyet-egyet kiválasztani, mert nagy a valószínűsége annak, hogyha valaki tudja az egyiket, akkor a másikat is. Meglepő viszont, hogy a 9.a., 9.b. és 9.j. feladatok nem korrelálnak a 9. feladat többi részfeladatával, pedig mindhárom feladat a szorzattá alakítást teszteli, valamint az a. és a b. részfeladatok megoldásához kiemelést kell használni. Ezzel kaptunk egy kiindulási állapotot, hogy amikor a végső teszt elkészül, akkor milyen típusú feladatok kerüljenek bele.

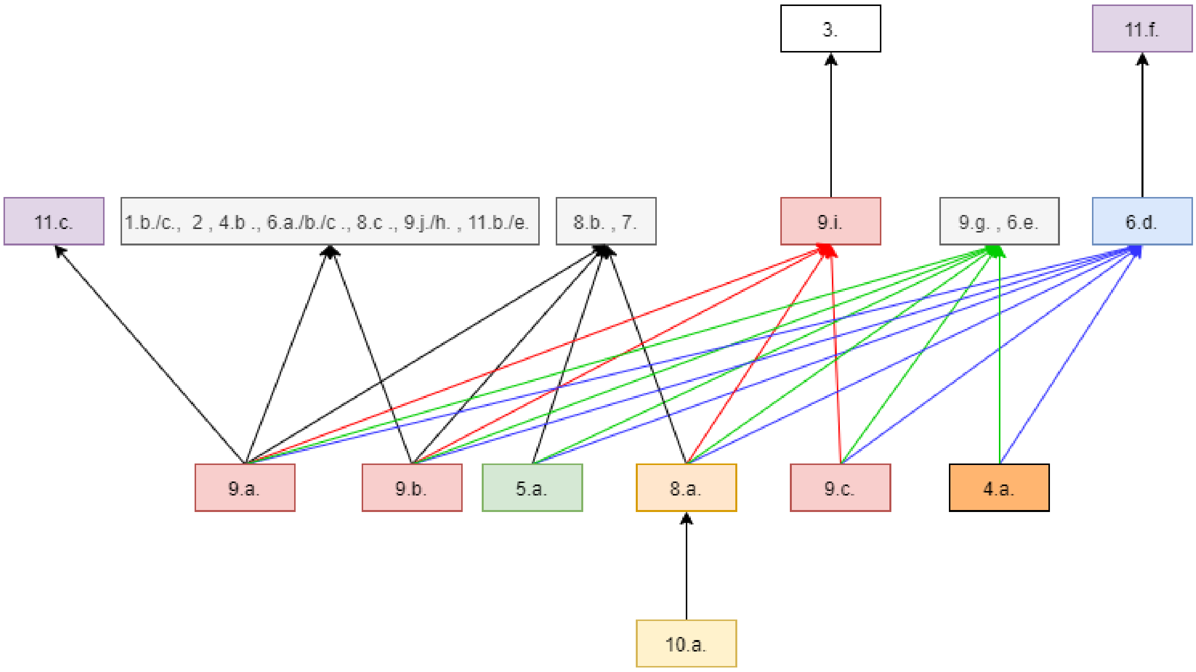
A másik feladatunk az volt, hogy ezen feladatok alapján megállapítsuk a lehetséges algebrai szinteket, hogy melyik melyikre épül. Ennek a kivitelezése sokkal bonyolultabb volt, mert túl sok feladattal dolgoztunk. Az első számú táblázat tartalmazza, hogy mely feladatok esetében volt igaz, hogyha valaki megoldotta az egyiket, akkor a másikat is. Mindenképpen figyelembe kell venni, hogy ezek nemparaméteres statisztikai próbák, azaz gyenge próbák. A táblázatban csillagokkal jelöltük, hogy milyen erős az összefüggés a kettő között. Az is elképzelhető, hogy két feladat megoldása összefügg, de a próba nem adta szignifikánsnak. Éppen ezért felsoroltuk mindenhol a megfelelő szignifikanciaszintet, hogy az alapján megállapíthatóak legyenek a fölső rétegek, melyeket érdemes vizsgálni. A csillagos rész azt jelenti, hogy az egyik feladat szignifikánsabban nehezebb mint a másik, tehát ha valaki megoldotta az egyik feladatot, akkor nagy valószínűséggel megoldotta a másikat is.

Ezek alapján elkészítettük a feladathálót. (*2. ábra*) Az ábrán nyíl összevontunk feladatokat és egyikből nyíl mutat a másikba, ha az nehezebb mint a másik, azaz hogyha valaki megoldotta az egyik feladatot, akkor megoldotta a másikat is.

A hálóban találhatunk várt összeköttetéseket. Például a 9.j. és 9.a. Mindkettő feladat szorzattá alakítással foglalkozott és már a megalkotásukkor a 9.j.-t nehezebbnek gondoltuk. Azonban vannak olyan egymásra épülések, amik teljes megleptek minket. Arra például nem számítottunk, hogy a 8.c. és 9.b. egymás alatt lesz. Az előbbi egy teljes négyzetté alakítási feladat az utóbbi pedig egy kiemeléses szorzattá alakítás. Ennek számos oka lehet. Az egyik, hogy automatikusan a független anyagrészek között mégis van egy logikai összefüggés, amire nem gondoltunk. Egy másik ok, hogy lehet, hogy az egyik feladat könnyű és a másik nehéz és a véletlen így hozta ebben az osztályban a megoldásokat. Az várható volt, hogy a 8.c.-t kevesebben oldják meg, de az nem, hogy aki ezt megoldotta az a 9.b.-t is.

A leghosszabb lánc, ami látható az a 10.a. -8.a.-9.i.-3, ami azt jelenti, hogy ebben az osztályban, ha valaki megoldotta a 9.i.-t, akkor a 8.a.-t is és ha valaki megoldotta a 8.a.-t, akkor a 10.a.-t is. Ez meglepő, hiszen a 10.a. és a 8.a. feladatok olyan készségeket tesztelnek, melyek a között a fogalmi hálónkban nem vezet közvetlen nyíl. Az is lehet, hogy ez az osztálynak egy sajátossága, de az is lehet, hogy vannak valami olyan algebrai készségek, képességek, amikről eddig nem tudtunk. Ezt egy hosszabb vizsgálattal lehetne csak kideríteni. A táblázat további elemzése túlmutat a dolgozat mennyiségi keretein.

Összességében a kutatás eredményei között voltak kiszámíthatóak és meglepőek is. Természetesen a kis számú minta miatt nem lehet általános következtetéseket levonni, de egy jó kiindulópontja lehet egy későbbi részletesebb kutatásnak.


3.
11.f.
11.c.
1.b./c., 2 , 4.b ., 6.a./b./c ., 8.c ., 9.j./h. , 11.b./e.
8.b. , 7.
9.i.
9.g. , 6.e.
6.d.
9.a.
9.b.
5.a.
8.a.
9.c.
4.a.
10.a.

2. ábra

Összefoglalás

Dolgozatunkban a magyarországi közoktatásnak megfelelő algebrai készségek szintjeit próbáltuk feltérképezni. A Kerettanterv és a NAT alapján megnéztük, hogy melyek azok az algebrai kompetenciák, algebrai készségek, amiket el kell sajátítani. Ezeket időrend és egymásra épülés szerint elrendeztük egy hálóba.

Célunk az volt, hogy készítsünk egy olyan tesztet, ami fölméri, hogy a diákok tudása algebrából milyen szintű. Ehhez a NAT-ban szereplő összes algebrai képességhez elkészítettük egy-egy feladatot vagy feladat csoportot, amelyik ezt hivatott szolgálni. Ebben a feladatsorban 11 feladat szerepelt 1-10 közötti alfeladatokkal. Ezt kitörtettük egy nyolcosztályos gimnáziumban összesen 29 tanulóval.

Ezt követően a dolgozatokat kijavítottuk és megvizsgáltuk több szempont alapján. Ezek közül a szempontok közül kiválasztottunk egyet, az összpontszámot és ezek szerint rangsoroltuk a feladatokat. A feladatokat kétféleképpen csoportosítottuk. Az egyik csoportosítás azt szolgálta, hogy megnézzük, hogy mely feladatok ekvivalensek a gyerekek számára, azaz, ha az egyiket megoldják, akkor a másikat is és fordítva. A másik pedig a szintezésre vonatkozott. Hogyha valaki megoldotta az egyiket, akkor a másikat is, vagyis melyik feladat nehezebb a másiknál. Az első kategorizálás arra való, hogyha valakinek szeretnénk felmérni az algebrai készségeit, akkor nem kell az összes feladatot ezek közül feltenni, hanem csak egy-egy csoportból elég egyet-egyet. A második arra való, hogy elkezdjük felépíteni a szinteket, hiszen csak akkor tudjuk megmondani, hogy melyik szint nehezebb a másiknál, ha már ezt megnéztük.

A munkánk egy esettanulmány, amelyből mély következtetéseket levonni a kis létszám miatt nem lehet, de mindenképpen jó kiindulópontja egy nagyobb, alaposabb kutatásnak. Megállapítottuk, hogy az algebrai képességek egy része már ebben az osztályban is úgy épül föl, ahogy azt elképzeltük, de voltak meglepetések is. Ezek további hosszasabb kutatást igényelnek, hogy valósak-e vagy más okai vannak.

„Szép” és egyszerűen kinéző egyenlőtlenségek keresése

Bevezetés

A feladat

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán található egy feladat, amelynek megoldása és kinézete érdekes kérdést vetett fel bennünk. A feladat a következő:

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{3(x^3y + y^3z + z^3x)}$$

Megoldások

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán több bizonyítást is bemutatnak.

A fórumon idézik Vasile Cirtoaje megoldását, aki az Algebraic inequalities - old and new methods című könyvében közölte azt. Ezt a megoldást most nem mutatjuk be.

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán az egyik résztvevő behivatkozott egy cikket, melynek szerzői: Nguyen Duy Tung, Zhou Yuan Zhe és a cikk címe: The Interesting Around Technical Analysis Three Variable Inequalities - Nguyen Duy Tung, Zhou Yuan Zhe. Itt közlik a feladat megoldását, azonban a későbbiekben kiderül, hogy ez hibás.

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán a kitűző két helyes megoldást is közöl. A szerző mindenfajta magyarázatot, érvelést mellőz és a közepébe vág a feladat megoldásának a következőképpen:

1. Megoldás

Hasonlítsuk össze ezt az egyenlőtlenséget a következő triviális egyenlőtlenséggel:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca),$$

Ez az egyenlőtlenség tetszőleges valós a, b, c-re teljesül. Észrevehetjük, hogy ha ebbe az egyenlőtlenségbe behelyettesítjük a következő értékeket

$$a = x^2 + yz - xy, b = y^2 + zx - yz, c = z^2 + xy - zx$$

akkor éppen a bizonyítandó tétel adódik.

2. Megoldás

Vegyük észre, hogy

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 \geq 3x^3y + 3y^3z + 3z^3x =$$
$$= \frac{1}{2}((x^2 + 2yz - y^2 - zx - xy)^2 + (y^2 + 2xz - z^2 - xy - yz)^2 + (z^2 + 2xy - x^2 - yz - zx)^2) \geq 0.$$

Tehát az $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - 3x^3y - 3y^3z - 3z^3x$ polinomot föl tudjuk bontani 3 négyzet összegére, azaz mindig pozitív.

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán közlik azt is, hogy mikor áll fenn egyenlőség.

A fenti egyenlőség a következő esetben teljesül:

1. $x = y = z$
2. $x : y : z = sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right) : sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) : sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$
3. $y : z : x = sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right) : sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) : sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$

4. $z : x : y = sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right) : sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) : sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Ebből következik, hogy megszokott módszerekkel mint számtani-mértani közép, nem lehet ezt a feladatot megoldani. A középértékeket csak akkor lehet használni, ha csak $x = y = z$ esetben áll fenn az egyenlőség.

Érdekes módon se a Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán se a fenti két helyen nem szerepel magyarázat arra vonatkozóan, hogy miért csak ezekben az esetekben lehet egyenlőség. Bogár Eszter Szakdolgozatában bebizonyítja, hogy mikor van egyenlőség. A bizonyításában többváltozós polinomok fölötti diszkriminánsokat használ *[1]*.

Szép egyenlőtlenségek keresése

Korábban közölt keretek közt készült kifejezéseket keresünk katartikus kimenetre koncentrálva. Azaz, ehhez hasonló szép algebrai egyenlőtlenségeket keresünk. Itt a hasonlóság alatt azt értjük, hogy háromváltozós, negyedfokú, homogén egyenlőtlenségeket keresünk, amelyekben minél kevesebb tag szerepel. Természetesen akkor nevezzük szépnek a kifejezést, ha a megmaradt együtthatókból minél több egész szám van, de már az is megfelelő, ha egy nem túl összetetten valós szám.

Szabó Csaba és Domokos Mátyás karakterizálta a negyedfokú, homogén háromváltozós kifejezéseket, amelyek valós helyen felvett értékei nemnegatívak és négy különböző helyen is felveszik a 0-át. Ezeket háromféle módon is leírták *[2]*.

1. Alak

$$g = (l^2m^2 - l^2mn + l^2n^2 - lm^2n - lmn^2 + m^2n^2)(x^4 + y^4 + z^4)$$
$$-(2l^3m - l^3n - l^2mn - lm^3 - lm^2n - lmn^2 + 2m^3n - mn^3)(x^3y + y^3z + z^3x)$$
$$+(l^3m - 2l^3n + l^2mn - 2lm^3 + lm^2n + lmn^2 + ln^3 + m^3n - 2mn^3)(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$+(l^3 - l^2m - l^2n - lm^2 + 3lmn - ln^2 + m^3 - m^2n - mn^2 + n^3)$$
$$(l + m + n)(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2)$$
$$+(l^4 - l^3m - l^3n + 2l^2mn - l^2n^2 - lm^3 + 2lm^2n + 2lmn^2 - ln^3 + m^4 - m^3n - m^2n^2$$
$$-mn^3 + n^4)(x + y + z)xyz$$

, ahol $(l : m : n) \in \mathbb{P}^2$ egy pont amire igaz, hogy $l + m + n \neq 0$ és $(l : m : n) \neq (1 : 1 : 1)$

2. Alak

$$g = (\sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_3)(x^4 + y^4 + z^4)$$
$$+\left(\frac{3}{2}\Delta\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma 2_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + \frac{3}{2}\sigma_1\sigma_3\right)(x^3y + y^3z + z^3x)$$
$$+\left(-\frac{3}{2}\Delta\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2\frac{3}{2}\sigma_1\sigma_3\right)(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$+(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 9\sigma_1\sigma_3)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$
$$+(-\sigma_1^4 + 5\sigma_1^2\sigma_2 - 9\sigma_1\sigma_3 - 3\sigma_2^2)(x + y + z)xyz$$

, ahol $\sigma_1 \coloneqq l + m + n$; $\sigma_2 \coloneqq lm + ln + mn$; $\sigma_3 \coloneqq lmn$; $\Delta \coloneqq (l - m)(m - n)(n - l)$ és l, m, n-re ugyanazok igazak, mint az előzőben.

3. Alak

$$\lambda(x^4 + y^4 + z^4)(a^2 - ab + b^2) + \lambda(x^3y + y^3z + z^3x)(2b - a)$$
$$+\lambda(x^3z + y^3x + z^3y)(-a - b) + \lambda(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(1 - a^2 + ab - b^2)$$
$$+\lambda xyz(x + y + z)(2a - b - 1)$$

, ahol $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$

Mindhárom forma más szempontból lehet ideális a keresésünkhöz, de a jól kezelhetősége miatt a 3.-kal számolunk a továbbiakban.

A következőkben a 3. karakterizált kifejezés segítségével fogunk megoldásokat keresni, úgy, hogy minél kevesebb tag szerepeljen a kifejezésben. Itt a tag kifejezést bővebben értjük, nemcsak a leírásban szereplő kifejezéseket nevezzük tagnak, hanem az összevonás után keletkezetteket is. Megvizsgáljuk az összes olyan esetet, amikor szerepel az $(x+y+z)^4$, az $(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2$ vagy az $(x^2+y^2+z^2)^2$ azonosság az egyenlőtlenségben, és valamelyik együttható eltűnik.

Ha az $(x+y+z)^4$ azonosságból indulunk ki

A binomiális tétel miatt, ha azt szeretnénk, hogy a köbös tagok ne jelenjenek meg a kifejezésben, akkor az $\frac{a^2-ab+b^2}{2b-a}=\frac{a^2-ab+b^2}{-a-b}=\frac{1}{4}$, ha a négyzetes tagokat szeretném eltűntetni, akkor az $\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2}=\frac{1}{6}$, ha pedig az elsőfokú tagoktól szeretnénk megszabadulni, akkor az $\frac{a^2-ab+b^2}{2a-b-1}=\frac{1}{12}$ egyenlőségnek kell teljesülnie. A számításainkat a Wolfram alfa program segítségével végeztük el.

1. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3y+y^3z+z^3x$ és az $xyz(x+y+z)$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{2b-a}=\frac{1}{4},\frac{a^2-ab+b^2}{2a-b-1}=\frac{1}{12}$$

Első gyökpár

$$a=\frac{1}{104}\left(11-7i\sqrt{23}\right),b=-\frac{1}{104}i\left(-7i+5\sqrt{23}\right)$$

Második gyökpár

$$a=\frac{1}{104}\left(11+7i\sqrt{23}\right),b=\frac{1}{104}i\left(7i+5\sqrt{23}\right)$$

Mivel a feltételeink komplex megoldásokat adnak így ezeket nem válogatjuk be a szép egyenlőtlenségeink közé.

2. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3z+y^3x+z^3y$ és az $xyz(x+y+z)$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{-a-b}=\frac{1}{4},\frac{a^2-ab+b^2}{2a-b-1}=\frac{1}{12}$$

Első gyökpár

$$a=\frac{1}{52}\left(9-\sqrt{23}i\right),b=\frac{1}{104}\left(7+5\sqrt{23}i\right)$$

Második gyökpár

$$a=\frac{1}{52}\left(9+\sqrt{23}i\right),b=\frac{1}{104}\left(7-5\sqrt{23}i\right)$$

Mivel a feltételeink komplex megoldásokat adnak így ezeket nem válogatjuk be a szép egyenlőtlenségeink közé.

3. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$és az $xyz(x+y+z)$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2}=\frac{1}{6},\frac{a^2-ab+b^2}{2a-b-1}=\frac{1}{12}$$

Első gyökpár

$$a=\frac{1}{14}\left(19-\sqrt{111}i\right),b=-\frac{\sqrt{111}i}{7}$$

Második gyökpár

$$a=\frac{1}{14}\left(19+\sqrt{111}i\right),b=\frac{\sqrt{111}i}{7}$$

Mivel a feltételeink komplex megoldásokat adnak így ezeket nem válogatjuk be a szép egyenlőtlenségeink közé.

4. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$és az $x^3y+y^3z+z^3x$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2}=\frac{1}{6},\frac{a^2-ab+b^2}{2b-a}=\frac{1}{4}$$

A feltételeink két valós megoldáspárt adnak meg a -ra és b-re.

Első gyökpár

$$\lambda=7,a=-\frac{2}{7},b=\frac{1}{7}$$

$$x^4+y^4+z^4+4(x^3y+y^3z+z^3x)+1(x^3z+y^3x+z^3y)+6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$-12xyz(x+y+z)\geq 0$$
$$(x+y+z)^4-3(x^3z+y^3x+z^3y)-24xyz(x+y+z)\geq 0$$
$$(x+y+z)^4\geq 3(x^3z+y^3x+z^3y)+24xyz(x+y+z)$$

Második gyökpár

$$\lambda=7,a=\frac{2}{7},b=\frac{3}{7}$$

$$x^4+y^4+z^4+4(x^3y+y^3z+z^3x)-5(x^3z+y^3x+z^3y)+6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$-6xyz(x+y+z)\geq 0$$
$$(x+y+z)^4-9(x^3z+y^3x+z^3y)-18xyz(x+y+z)\geq 0$$
$$(x+y+z)^4\geq 9(x^3z+y^3x+z^3y)+18xyz(x+y+z)$$

5. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$és az $x^3z+y^3x+z^3y$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2}=\frac{1}{6},\frac{a^2-ab+b^2}{-a-b}=\frac{1}{4}$$

A feltételeink két valós megoldáspárt adnak meg a -ra és b-re.

Első gyökpár

$$\lambda = 7, a = -\frac{1}{7}, b = -\frac{3}{7}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 - 5(x^3y + y^3z + z^3x) + 4(x^3z + y^3x + z^3y) + 6(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$
$$-6xyz(x + y + z) \geq 0$$
$$(x + y + z)^4 - 9(x^3y + y^3z + z^3x) - 18xyz(x + y + z) \geq 0$$
$$(x + y + z)^4 \geq 9(x^3y + y^3z + z^3x) + 18xyz(x + y + z)$$

Második gyökpár

$$\lambda = 7, a = -\frac{3}{7}, b = -\frac{1}{7}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1(x^3y + y^3z + z^3x) + 4(x^3z + y^3x + z^3y) + 6(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$
$$-12xyz(x + y + z) \geq 0$$
$$(x + y + z)^4 - 3(x^3y + y^3z + z^3x) - 24xyz(x + y + z) \geq 0$$
$$(x + y + z)^4 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x) + 24xyz(x + y + z)$$

6. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4 + y^4 + z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3z + y^3x + z^3y$ és az $x^3y + y^3z + z^3x$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{-a - b} = \frac{1}{4}, \frac{a^2 - ab + b^2}{2b - a} = \frac{1}{4}$$

A feltételeink egyetlen megoldáspárhoz vezetnek.

Egyetlen gyökpár

$$\lambda = 16\,, a = -\frac{1}{4}\,, b = 0$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + 4(x^3y + y^3z + z^3x) + 4(x^3z + y^3x + z^3y) + 15(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$
$$-24xyz(x + y + z) \geq 0$$
$$(x + y + z)^4 + 9(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 36xyz(x + y + z) \geq 0$$
$$(x + y + z)^4 \geq -9(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 36xyz(x + y + z)$$

Ha az $(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2$ azonosságból indulunk ki

A binomiális tétel és a fenn szereplő azonosság következtében ezekben az esetekben a fő kikötésünk, hogy $\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2} = 1$. Így a négyzetes tagok nem fognak szerepelni a végső egyenlőtlenségeben. Mivel mi minél kevesebb tagot szeretnénk meghagyni, így az első feltételünk mellé mindig választunk egy másik tagot, amelynek az együtthatóját 0-ra állítjuk.

7. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4 + y^4 + z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3y + y^3z + z^3x$ és az $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{1 - a^2 + ab - b^2} = 1\,, 2b - a = 0$$

A feltételeink két valós megoldáspárt adnak meg a -ra és b-re.

Első gyökpár

$$\lambda = 4\,, a = -\frac{2}{\sqrt{6}}\ , b = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$2(x^4 + y^4 + z^4) + 0(x^3y + y^3z + z^3x) + 2\sqrt{6}(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$+2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - \left(4 + 2\sqrt{6}\right)xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 + 2\sqrt{6}(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$-\left(4 + 2\sqrt{6}\right)xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 \geq -2\sqrt{6}(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$+\left(4 + 2\sqrt{6}\right)xyz(x + y + z)$$

Második gyökpár

$$\lambda = 4\,, a = \frac{2}{\sqrt{6}}\,, b = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$2(x^4 + y^4 + z^4) + 0(x^3y + y^3z + z^3x) - 2\sqrt{6}(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$+2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + \left(2\sqrt{6} - 4\right)xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 - 2\sqrt{6}(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$+\left(2\sqrt{6} - 4\right)xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 \geq 2\sqrt{6}(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$-\left(2\sqrt{6} - 4\right)xyz(x + y + z)$$

8. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4 + y^4 + z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3z + y^3x + z^3y$ és az $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{1 - a^2 + ab - b^2} = 1\,, -a - b = 0$$

A feltételeink két valós megoldáspárt adnak meg a -ra és b-re.

Első gyökpár

$$\lambda = 4\,, a = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,, b = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$2(x^4 + y^4 + z^4) + 2\sqrt{6}(x^3y + y^3z + z^3x) + 0(x^3z + y^3x + z^3y)$$
$$+2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - \left(4 + 2\sqrt{6}\right)xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 + 2\sqrt{6}(x^3y + y^3z + z^3x)$$
$$-\left(4 + 2\sqrt{6}\right)xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2 \geq -2\sqrt{6}(x^3y+y^3z+z^3x)$$
$$+\left(4+2\sqrt{6}\right)xyz(x+y+z)$$

Második gyökpár

$$\lambda = 4\,, a = \frac{1}{\sqrt{6}}\,, b = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$2(x^4+y^4+z^4) - 2\sqrt{6}(x^3y+y^3z+z^3x) + 0(x^3z+y^3x+z^3y)$$
$$+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + \left(2\sqrt{6}-4\right)xyz(x+y+z) \geq 0$$
$$(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2 - 2\sqrt{6}(x^3y+y^3z+z^3x)$$
$$+\left(2\sqrt{6}-4\right)xyz(x+y+z) \geq 0$$
$$(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2 \geq 2\sqrt{6}(x^3y+y^3z+z^3x)$$
$$-\left(2\sqrt{6}-4\right)xyz(x+y+z)$$

9. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $xyz(x+y+z)$ és az $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2} = 1\,, 2a-b-1 = 0$$

A feltételeink két valós megoldáspárt adnak meg a -ra és b-re.

Első gyökpár

$$\lambda = 4\,, a = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,, b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$2(x^4+y^4+z^4) - 2\left(\sqrt{3}+1\right)(x^3y+y^3z+z^3x) + 2\left(\sqrt{3}-1\right)(x^3z+y^3x+z^3y)$$
$$+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + 0xyz(x+y+z) \geq 0$$
$$(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2 - 2\left(\sqrt{3}+1\right)(x^3y+y^3z+z^3x)$$
$$+\,2\left(\sqrt{3}-1\right)(x^3z+y^3x+z^3y) \geq 0$$
$$(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2 \geq 2\left(\sqrt{3}+1\right)(x^3y+y^3z+z^3x)$$
$$-2\left(\sqrt{3}-1\right)(x^3z+y^3x+z^3y)$$

Második gyökpár

$$\lambda = 4\,, a = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,, b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2(x^4+y^4+z^4) + 2\left(\sqrt{3}-1\right)(x^3y+y^3z+z^3x) - 2\left(\sqrt{3}+1\right)(x^3z+y^3x+z^3y)$$
$$+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + 0xyz(x+y+z) \geq 0$$

$$(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)(x^3y+y^3z+z^3x)$$
$$-\,2\left(\sqrt{3}+1\right)(x^3z+y^3x+z^3y) \geq 0$$

$$(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2 \geq -2\left(\sqrt{3}-1\right)(x^3y+y^3z+z^3x)$$

$$+2\left(\sqrt{3}+1\right)(x^3z+y^3x+z^3y)$$

Ha az $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ azonosságból indulunk ki

A binomiális tétel miatt, ha minimalizálni akarjuk az egyenlőtlenségünkben szereplő tagok számát, akkor a következő feltételre van szükség: $\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2} = \frac{1}{2}$. Mivel a kijelölt azonosságunk kibontásából nem fognak harmadfokú és elsőfokú tagok keletkezni, így ezek egyikének az együtthatóját érdemes még 0-nak választani.

10. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4 + y^4 + z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3y + y^3z + z^3x$ és az $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{1 - a^2 + ab - b^2} = \frac{1}{2}\, , 2b - a = 0$$

A feltételeink két valós megoldáspárt adnak meg a -ra és b-re.

Első gyökpár

$$\lambda = 3\, , a = -\frac{2}{3}\, , b = -\frac{1}{3}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + 0(x^3y + y^3z + z^3x) + 3(x^3z + y^3x + z^3y) + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$-6xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3(x^3z + y^3x + z^3y) - 6xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq -3(x^3z + y^3x + z^3y) + 6xyz(x + y + z)$$

Második gyökpár

$$\lambda = 3\, , a = \frac{2}{3}\, , b = \frac{1}{3}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + 0(x^3y + y^3z + z^3x) - 3(x^3z + y^3x + z^3y) + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$+0xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^3z + y^3x + z^3y) \geq 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3z + y^3x + z^3y)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{3(x^3z + y^3x + z^3y)}$$

Ezekkel a feltételekkel az eredeti feladathoz nagyon hasonló egyenlőtlenséget kaptunk.

11. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4 + y^4 + z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3z + y^3x + z^3y$ és az $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{1 - a^2 + ab - b^2} = \frac{1}{2}\, , -a - b = 0$$

A feltételeink két valós megoldáspárt adnak meg a -ra és b-re.

Első gyökpár

$$\lambda = 3\, , a = \frac{1}{3}\, , b = -\frac{1}{3}$$

$$x^4+y^4+z^4-3(x^3y+y^3z+z^3x)+0(x^3z+y^3x+z^3y)+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$+0xyz(x+y+z)\geq 0$$
$$(x^2+y^2+z^2)^2-3(x^3y+y^3z+z^3x)\geq 0$$
$$(x^2+y^2+z^2)^2\geq 3(x^3y+y^3z+z^3x)$$
$$x^2+y^2+z^2\geq\sqrt{3(x^3y+y^3z+z^3x)}$$

Ezekkel a feltételekkel megkaptuk az eredeti feladatban szereplő egyenlőtlenséget.

Második gyökpár

$$\lambda=3\,,a=-\frac{1}{3}\,,b=\frac{1}{3}$$

$$x^4+y^4+z^4+3(x^3y+y^3z+z^3x)+0(x^3z+y^3x+z^3y)+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$-2xyz(x+y+z)\geq 0$$
$$(x^2+y^2+z^2)^2+3(x^3y+y^3z+z^3x)-6xyz(x+y+z)\geq 0$$
$$(x^2+y^2+z^2)^2\geq -3(x^3y+y^3z+z^3x)+6xyz(x+y+z)$$

12. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $xyz(x+y+z)$ és az $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2}=\frac{1}{2}\,,2a-b-1=0$$

Első gyökpár

$$\lambda=3\,,a=\frac{1}{3}\,,b=-\frac{1}{3}$$

Második gyökpár

$$\lambda=3\,,a=\frac{2}{3}\,,b=\frac{1}{3}$$

Ezek a megoldáspárokat már előkerültek a korábbi számításaink során, így nem vizsgáljuk meg őket újra.

13. Egyenlőtlenség

Azt szeretnénk, hogy szerepeljen az $x^4+y^4+z^4$ -es tag, de ne szerepeljen az $x^3y+y^3z+z^3x$, az $x^3z+y^3x+z^3y$ és az $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$. Ehhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{1-a^2+ab-b^2}=\frac{1}{2}\,,2b-a=0\,,-a-b=0$$

Sajnálatos módon nincs megoldás ebben az esetben, tehát nem lehet mindkét harmadfokú tag együtthatóját 0-nak választani.

Összegzés

Az $(x+y+z)^4$ azonosság az egyenlőtlenségbe történő beiktatásakor az 1., 2., 3., és 4. feltételekkel csak komplex megoldások születtek, így ezeket nem tartjuk szép egyenlőtlenségeknek. Az 5. és 6. kikötések során kapott gyökök nem csak valósak, de racionálisak is, így igazán szép egyenlőtlenségekhez vezettek.

Amikor az $(x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2$ azonosságot vettük alapul, akkor minden megoldásunk valós lett. Ezeket is beválogatjuk a szép egyenlőtlenségeink közé, hiszen a dolgozat elején szabott feltételeket teljesítik, de korántsem olyan kielégítőek mint az előző kettő.

Végezetül, amikor $(x^2+y^2+z^2)^2$ azonosságot használtuk kiindulópontnak, akkor egy esetben visszakaptuk az eredeti problémát, egy másikban pedig egy ahhoz nagyon hasonlóra jutottunk. Ezeket találjuk a legszebbnek. A többi itt szereplő egyenlőtlenség is ugyanúgy kielégítően szép, hiszen nem csak valós de racionális együtthatók szerepelnek bennük.

Mellékletek

Eredmények értékelése

Nem paraméteres korrelációmátrix

	x1a	x1b	x1c	x2	x3	x4a	x4b	x5a	x5b	x6a	x6b	x6c	x6d	x6e	x7	x8a	x8b	x8c	x9a	x9b	x9c	x9d	x9e	x9f	x9g	x9h	x9i	x9j	x10a	x10b	x11a	x11b	x11c	x11d	x11e	x11f
x1a	1X	0,5	0,5	0,69	0,5	0,1	-0	0,1	0,2	-0	-0	0,1	0,1	-0	-0	0,1	0,64	0,3	0,3	0,3	0	-0	0,2	0,2	0	0,2	0,5	0	-0	0	-0	-0	0,3	0,1	-0	0,3
x1b	0,5	1X	0,58	0,80	0,61	0,4	-0	0,1	0,1	0,2	0	0,2	0,1	0,1	-0	0,2	0,77	0,4	0,4	0	0,2	-0	0,4	0,4	0,55	0,63	0,61	0,5	0,4	0,5	0,3	0,4	0,73	0,2	0,4	0,4
x1c	0,5	0,58	1X	0,69	0,5	0,4	-0	0,3	0,2	0,1	0,3	0,3	0,56	0,2	-0	0,1	0,3	0,2	0,2	0,4	0	0,1	0,2	0,2	0,4	0,2	0,1	0,4	-0	0	-0	-0	0,2	0,1	0,2	0,1
x2	0,69	0,80	0,69	1X	0,77	0,4	0,1	0,2	0,1	0,3	0,4	0,4	0,3	0,1	-0	0,4	0,84	0,5	0,3	0,4	0,3	0,1	0,65	0,65	0,58	0,6	0,70	0,5	0,1	0,5	0,2	0,2	0,5	0,3	0,2	0,5
x3	0,5	0,61	0,5	0,77	1X	0,3	0,2	-0	-0	0,4	0,4	0,5	0,5	0,1	-0	0,5	0,59	0,5	0,2	0,1	0,5	0,3	0,71	0,71	0,4	0,4	0,67	0,64	0,2	0,58	0,1	0,3	0,2	-0	0,3	0,3
x4a	0,1	0,4	0,4	0,4	0,3	1X	0,5	0,4	-0	0,4	0,2	0,1	0,4	0,3	-0	-0	0,3	0,1	-0	-0	-0	0,3	0,5	0,5	0,58	0,1	0,2	0,3	-0	0,1	-0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2
x4b	-0	-0	-0	0,1	0,2	0,5	1X	0	-0	0,62	0,55	0,1	0,3	0,4	0,1	0,4	0,2	0,1	-0	-0	0,3	0,5	0,62	0,62	0,5	0,3	0,4	0,4	0	0,5	0,2	0,4	0,1	0,2	0,2	0,2
x5a	0,1	0,1	0,3	0,2	-0	0,4	0	1X	0,63	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	-0	-0	0	0,3	-0	0	-0	-0	0,1	0,1	0,4	-0	-0	-0	-0,6	-0	-0,6	-0	-0	0,3	-0	0,4
x5b	0,2	0,1	0,2	0,1	-0	-0	-0	0,63	1X	0,2	0,3	0,5	0,2	0,2	0	-0	0,2	0,2	-0	0,2	-0	-0	-0	-0	0,3	-0	-0	-0	-0,5	-0	-0,5	-0	0,1	0,2	-0	0,1
x6a	-0	0,2	0,1	0,3	0,4	0,4	0,62	0,5	0,2	1X	0,72	0,71	0,5	0,68	-0	0,3	0,3	0,4	-0	-0	0,5	0,3	0,64	0,64	0,80	0	0,4	0,3	-0	0,4	-0	0,1	-0	0	-0	0,3
x6b	-0	0	0,3	0,4	0,4	0,2	0,55	0,3	0,3	0,72	1X	0,74	0,75	0,60	0,2	0,5	0,1	0,2	-0	0,4	0,4	0,2	0,61	0,61	0,5	0,1	0,2	0,4	-0	0,4	-0	0,1	-0	0,1	0,1	0,3
x6c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,1	0,4	0,5	0,71	0,74	1X	0,69	0,60	-0	0,3	0,2	0,3	-0	0,2	0,60	0	0,5	0,5	0,5	-0	0,2	0,1	-0	0,1	-0,5	-0	-0	-0	-0	0,2
x6d	0,1	0,1	0,56	0,3	0,5	0,4	0,3	0,3	0,2	0,5	0,75	0,69	1X	0,64	0,1	0,4	0,1	0,2	-1	0,4	0,4	0,5	0,59	0,59	0,4	-0	0,1	0,4	-0	0	-0	-0	-0	-0	0,2	0,1
x6e	-0	0,1	0,2	0,1	0,1	0,3	0,4	0,4	0,2	0,68	0,60	0,60	0,64	1X	0,1	0,3	0,1	0,4	-1	0,2	0,58	0,4	0,5	0,5	0,5	0	0,1	0,3	-0	0,1	-0	0	-0	-0	0,2	0,3
x7	-0	-0	-0	-0	-0	-0	0,1	-0	0	-0	0,2	-0	0,1	0,1	1X	-0	-0	-1	-1	0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	0,1	-0	0,1	0,3	-0
x8a	0,1	0,2	0,1	0,4	0,5	-0	0,4	-0	-0	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	-0	1X	0,4	0,3	-0	0,61	0,75	0,57	0,71	0,71	0,2	0,5	0,5	0,59	0,3	0,5	0,3	0,2	0,1	-0	0,2	0,2
x8b	0,64	0,77	0,3	0,84	0,59	0,3	0,2	0	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1	0,1	-0	0,4	1X	0,5	0,2	0,2	0,3	0	0,58	0,58	0,5	0,75	0,90	0,4	0,3	0,57	0,4	0,5	0,73	0,4	0,3	0,624
x8c	0,3	0,4	0,2	0,5	0,5	0,1	0,1	0,3	0,2	0,4	0,2	0,3	0,2	0,4	-1	0,3	0,5	1X	0,3	0,2	0,5	0,3	0,5	0,5	0,3	0,3	0,58	0,5	0,1	0,4	-0	0,3	0,1	-0	0,3	0,5
x9a	0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1	-0	0,2	0,3	1X	-0	-0	-0	-0	-0	-0	0,3	0,2	0,2	0,5	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,2
x9b	0,3	0	0,4	0,4	0,1	-0	-0	0	0,2	-0	0,4	0,2	0,4	0,2	0	0,61	0,2	0,2	-0	1X	0,3	0,2	0,3	0,3	-0	0,2	0,1	0,2	-0	-0	0	-0	0	0	0	0,2
x9c	0	0,2	0	0,3	0,5	-0	0,3	-0	-0	0,5	0,4	0,60	0,4	0,58	-0	0,75	0,3	0,5	-0	0,3	1X	0,59	0,71	0,71	0,4	0,2	0,5	0,4	0,2	0,3	-0	0,1	-0	-0	0	0,2
x9d	-0	-0	0,1	0,1	0,3	0,3	0,5	-0	-0	0,3	0,2	0	0,5	0,4	-0	0,57	0	0,3	-0	0,2	0,59	1X	0,56	0,56	0,2	0	0,2	0,5	0,1	0	0,1	-0	-0	-1	0,1	-0
x9e	0,2	0,4	0,2	0,65	0,71	0,5	0,62	0,1	-0	0,64	0,61	0,5	0,59	0,5	-0	0,71	0,58	0,5	-0	0,3	0,71	0,56	1X	1X	0,61	0,4	0,71	0,62	0	0,5	0	0,3	0,1	-0	0,3	0,5
x9f	0,2	0,4	0,2	0,65	0,71	0,5	0,62	0,1	-0	0,64	0,61	0,5	0,59	0,5	-0	0,71	0,58	0,5	-0	0,3	0,71	0,56	1X	1X	0,61	0,4	0,71	0,62	0	0,5	0	0,3	0,1	-0	0,3	0,5
x9g	0	0,55	0,4	0,58	0,4	0,58	0,5	0,4	0,3	0,80	0,5	0,5	0,4	0,5	-0	0,2	0,5	0,3	-0	-0	0,4	0,2	0,61	0,61	1X	0,2	0,4	0,3	-0	0,3	0	0,1	0,3	0,1	-0	0,2
x9h	0,2	0,63	0,2	0,6	0,4	0,1	0,3	-0	-0	0	0,1	-0	-0	0	-0	0,5	0,75	0,3	0,3	0,2	0,2	0	0,4	0,4	0,2	1X	0,71	0,66	0,62	0,74	0,68	0,77	0,82	0,5	0,56	0,5
x9i	0,5	0,61	0,1	0,70	0,67	0,2	0,4	-0	-0	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	-0	0,5	0,90	0,58	0,2	0,1	0,5	0,2	0,71	0,71	0,4	0,71	1X	0,5	0,4	0,73	0,3	0,65	0,6	0,3	0,4	0,662
x9j	0	0,5	0,4	0,5	0,64	0,3	0,4	-0	-0	0,3	0,4	0,1	0,4	0,3	-0	0,59	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,62	0,62	0,3	0,66	0,5	1X	0,56	0,72	0,4	0,57	0,3	0	0,72	0,3
x10a	-0	0,4	-0	0,1	0,2	-0	0	-0,6	-0,5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	0,3	0,3	0,1	0,5	-0	0,2	0,1	0	0	-0	0,62	0,4	0,56	1X	0,55	0,67	0,71	0,4	0,2	0,64	0,3
x10b	0	0,5	0	0,5	0,58	0,1	0,5	-0	-0	0,4	0,4	0,1	0	0,1	-0	0,5	0,57	0,4	0,4	-0	0,3	0	0,5	0,5	0,3	0,74	0,73	0,72	0,55	1X	0,5	0,85	0,5	0,4	0,62	0,5
x11a	-0	0,3	-0	0,2	0,1	-0	0,2	-0,6	-0,5	-0	-0	-0,5	-0	-0	-0	0,3	0,4	-0	0,4	0	-0	0,1	0	0	0	0,68	0,3	0,4	0,67	0,5	1X	0,5	0,61	0,4	0,3	0,1
x11b	-0	0,4	-0	0,2	0,3	0,1	0,4	-0	-0	0,1	0,1	-0	-0	0	0,1	0,2	0,5	0,3	0,3	-0	0,1	-0	0,3	0,3	0,1	0,77	0,65	0,57	0,71	0,85	0,5	1X	0,63	0,5	0,76	0,587
x11c	0,3	0,73	0,2	0,5	0,2	0,2	0,1	-0	0,1	-0	-0	-0	-0	-0	-0	0,1	0,73	0,1	0,4	0	-0	-0	0,1	0,1	0,3	0,82	0,6	0,3	0,4	0,5	0,61	0,63	1X	0,68	0,4	0,4
x11d	0,1	0,2	0,1	0,3	-0	0,2	0,2	0,3	0,2	0	0,1	-0	-0	-0	0,1	-0	0,4	-0	0,3	0	-0	-1	-0	-0	0,1	0,5	0,3	0	0,2	0,4	0,4	0,5	0,68	1X	0,4	0,605
x11e	-0	0,4	0,2	0,2	0,3	0,3	0,2	-0	-0	-0	0,1	-0	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3	0,3	0,3	0	0	0,1	0,3	0,3	-0	0,56	0,4	0,72	0,64	0,62	0,3	0,76	0,4	0,4	1X	0,603
x11f	0,3	0,4	0,1	0,5	0,3	0,2	0,2	0,4	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1	0,3	-0	0,2	0,62	0,5	0,2	0,2	0,2	-0	0,5	0,5	0,2	0,5	0,66	0,3	0,3	0,5	0,1	0,58	0,4	0,60	0,60	1X

1. mátrix

Feladatok páronkét táblázat

Az alábbi táblázatokban csak azokat az eredményeket lehet látni, amelyek a kutatás szempontjából lényegesek voltak, ezért feldolgozásra kerültek.

1	.y.	group	group	n1	n2	statisti	p	p.adj	p.adj.signi
2	pont	x7	x9a	29	29	0	1,41E-06	0,000839	***
3	pont	x7	x9b	29	29	0	1,9E-06	0,001	**
4	pont	x8b	x9a	29	29	0	1,89E-06	0,001	**
5	pont	x8b	x9b	29	29	1	2,4E-06	0,001	**
6	pont	x9a	x9g	29	29	432	1,78E-06	0,001	**
7	pont	x11f	x9a	29	29	0	2,63E-06	0,002	**
8	pont	x11f	x9b	29	29	0	3,02E-06	0,002	**
9	pont	x6d	x9a	29	29	4	2,57E-06	0,002	**
10	pont	x6d	x9b	29	29	0	3,63E-06	0,002	**
11	pont	x6e	x9b	29	29	1	3,78E-06	0,002	**
12	pont	x9a	x9i	29	29	351	3,08E-06	0,002	**
13	pont	x9b	x9g	29	29	405	2,76E-06	0,002	**
14	pont	x6e	x9a	29	29	8	4,75E-06	0,003	**
15	pont	x3	x9a	29	29	0	6,54E-06	0,004	**
16	pont	x3	x9b	29	29	4	7,76E-06	0,004	**
17	pont	x8a	x8b	29	29	351	6,8E-06	0,004	**
18	pont	x9b	x9i	29	29	371	6,83E-06	0,004	**
19	pont	x11f	x8a	29	29	3	9,14E-06	0,005	**
20	pont	x1c	x9a	29	29	0	9,04E-06	0,005	**
21	pont	x10a	x9g	29	29	372	1,02E-05	0,006	**
22	pont	x2	x9a	29	29	0	9,88E-06	0,006	**
23	pont	x2	x9b	29	29	0	1,06E-05	0,006	**
24	pont	x6d	x8a	29	29	0	1,31E-05	0,007	**
25	pont	x6e	x8a	29	29	5	1,24E-05	0,007	**
26	pont	x8a	x9g	29	29	369,5	1,15E-05	0,007	**
27	pont	x1c	x9b	29	29	0	1,47E-05	0,008	**
28	pont	x8b	x9c	29	29	2	1,42E-05	0,008	**
29	pont	x7	x8a	29	29	11	0,000015	0,009	**
30	pont	x11c	x9a	29	29	15	1,79E-05	0,01	*
31	pont	x9a	x9h	29	29	253	0,000018	0,01	*
32	pont	x10a	x8b	29	29	298,5	1,98E-05	0,011	*
33	pont	x11e	x9a	29	29	2	2,03E-05	0,011	*
34	pont	x11f	x9c	29	29	2	0,00002	0,011	*
35	pont	x8a	x9i	29	29	296	2,27E-05	0,013	*
36	pont	x3	x8a	29	29	0	2,43E-05	0,014	*
37	pont	x4a	x9g	29	29	318	2,43E-05	0,014	*
38	pont	x11e	x9b	29	29	6	2,67E-05	0,015	*

1. táblázat

	.y.	group1	group2	n1	n2	statistic	p	p.adj	p.adj.signif
39	pont	x1b	x9a	29	29	11	2,79E-05	0,016	*
40	pont	x5a	x9g	29	29	315	2,88E-05	0,016	*
41	pont	x6d	x9c	29	29	0	3,15E-05	0,017	*
42	pont	x8c	x9a	29	29	0	3,05E-05	0,017	*
43	pont	x1b	x9b	29	29	16,5	3,28E-05	0,018	*
44	pont	x9b	x9h	29	29	270,5	3,18E-05	0,018	*
45	pont	x8c	x9b	29	29	0	3,36E-05	0,019	*
46	pont	x4a	x6d	29	29	252	3,56E-05	0,02	*
47	pont	x9c	x9i	29	29	253	3,78E-05	0,021	*
48	pont	x5a	x7	29	29	230	4,02E-05	0,022	*
49	pont	x5a	x8b	29	29	249	4,39E-05	0,024	*
50	pont	x10a	x7	29	29	335	4,49E-05	0,025	*
51	pont	x11b	x9a	29	29	12	4,48E-05	0,025	*
52	pont	x6b	x9b	29	29	2	4,63E-05	0,025	*
53	pont	x9c	x9g	29	29	270	4,61E-05	0,025	*
54	pont	x6a	x9a	29	29	3,5	5,09E-05	0,028	*
55	pont	x10a	x11f	29	29	269	5,76E-05	0,031	*
56	pont	x3	x9c	29	29	0	5,63E-05	0,031	*
57	pont	x6c	x9b	29	29	4,5	0,000057	0,031	*
58	pont	x5a	x6e	29	29	229	5,89E-05	0,032	*
59	pont	x6c	x9a	29	29	10	5,94E-05	0,032	*
60	pont	x11f	x5a	29	29	4	6,38E-05	0,034	*
61	pont	x9a	x9j	29	29	206	6,43E-05	0,034	*
62	pont	x5a	x6d	29	29	190	6,56E-05	0,035	*
63	pont	x4b	x9a	29	29	5	6,69E-05	0,036	*
64	pont	x11b	x9b	29	29	20,5	7,11E-05	0,038	*
65	pont	x11f	x4a	29	29	13	7,98E-05	0,042	*
66	pont	x10a	x3	29	29	247,5	8,13E-05	0,043	*
67	pont	x6e	x9c	29	29	12,5	8,11E-05	0,043	*
68	pont	x6b	x9a	29	29	7,5	0,000086	0,045	*
69	pont	x10a	x9i	29	29	266	8,94E-05	0,047	*
70	pont	x9b	x9j	29	29	206	8,95E-05	0,047	*
71	pont	x6a	x9b	29	29	10	9,06E-05	0,048	*

2. táblázat

Hivatkozások

Algebrai szintek

[1] Vigotszkij, Lev Szemjonovics, Gondolkodás és beszéd. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1967

[2] Bruner, Jerome Seymour, Acts of Meaning, Harvard University Press, Cambrige, 1990

[3] Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsay Anna, Szeibert Janka és Török Tímea, Teszteljük a tesztet: A geometriai megértés szintjeinek újragondolása a magyarországi teszteredmények alapján, Tudományos Diákköri Dolgozat, ELTE, Budapest, 2018

[4] Dr. Szabó Csaba, Bursics Anna, Muzsay Anna és Edőcsény Ágnes Csenge, Geometriai szemléletfejlődés a magyar középiskolákban, Módszertani Tanulmány, ELTE, Budapest, 2016

[5] Herendiné Kónya Eszter, A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei, Iskolakultúra, Budapest, 2003

[6] Mary L. Crowley, The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, Learning and Teaching Geometry, Reston, 1987

[7] Juan D. Godino, Teresa Neto, Miguel R. Wilhelmi, Lilia Aké, Silvia Etchegaray and Aitzol Lasa, Algebraic reasoning levels in primary and secondary education, Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Prague, 2015

[8] Abraham Arcavi, Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Matematics, For the Learning of Matematics, Vancouver, 1994

[9] Nemzeti Alaptanterv, 2020 https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/letoltes (utolsó megtekintés: 2023.04.28.)

[10] Kerettanterv 5-8. osztály, 2020 https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_5_8 (utolsó megtekintés: 2023.04.28.)

[11] Kerettanterv 9-12. osztály, 2020 https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf (utolsó megtekintés: 2023.04.28.)

„Szép” és egyszerűen kinéző egyenlőtlenségek keresése

[1] Bogár Eszter, Hilbert 17. problémájának bemutatása egy nem szimmetrikus, pozitív, homogén formán keresztül, Szakdolgozat, ELTE, Budapest, 2014

[2] M. Domokos and Cs. Szabó, Note on counting sum of squares representations, Budapest, 2014