

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar

**Elliptikus PDE-k numerikus megoldása nem  
reguláris adatok mellett**

**Andó-Kinorányi Dóra**

Témavezető:  
**Karátson János**

Alkalmazott Matematika MSc.



Budapest  
2023

## Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Karátson János tanár úrnak a segítségét és irányítását az elmúlt másfél évben. Nagyra értékelem az időt és energiát, amit a konzultációkra és a dolgozat javítására szánt, ezek nagyban hozzájárultak ahhoz, hogy a dolgozat elérje a jelenlegi formáját.

Köszönöm a férjemnek a végtelen támogatást, hogy végig mellettem állt és bízott bennem. Továbbá hálával tartozom a családomnak, amiért a képzésem során végig lelkesítettek és bátorítottak engem. A segítségük nélkül ez az út jóval nehezebb lett volna.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Elliptikus feladatok numerikus megoldása véges differenciás módszerrel 3D tartományokon</b>	<b>4</b>
2.1. Egységkocka . . . . .	4
2.1.1. A megoldás közelítése . . . . .	4
2.1.2. A becslési hiba nagysága különböző lépéstávolságok esetén . . . . .	6
2.1.3. A gradiens közelítése . . . . .	7
2.2. Hiányos kocka konkáv sarokkal („Fichera corner”) . . . . .	8
2.2.1. Az együtthatómátrix struktúrája . . . . .	8
2.2.2. A becslési hiba nagysága különböző lépéstávolságok esetén . . . . .	10
<b>3. Elliptikus feladatok numerikus megoldása bilineáris végelemekkel 2D tartományon</b>	<b>11</b>
3.1. Poisson-egyenlet . . . . .	11
3.1.1. Az együtthatómátrix . . . . .	12
3.1.2. A numerikus megoldás . . . . .	14
3.1.3. A hiba kiszámolása Poisson-egyenlet esetén . . . . .	15
3.1.4. A posteriori hibabecslés konstrukciója és pontosságának vizsgálata . . . . .	16
3.2. Szakadós együtthatójú PDE . . . . .	19
3.2.1. Az együtthatómátrix . . . . .	20
3.2.2. Numerikus megoldás . . . . .	23
3.2.3. A posteriori hibabecslés konstrukciója és pontosságának vizsgálata szakadós együtthatójú PDE esetén . . . . .	24
<b>4. Elliptikus feladatok numerikus megoldása trilineáris végelemekkel 3D tartományon</b>	<b>25</b>
4.1. Poisson-egyenlet . . . . .	25
4.1.1. Az együtthatómátrix . . . . .	27
4.1.2. A numerikus megoldás . . . . .	31
4.1.3. A közelítés hibája abszolútértékben . . . . .	31
4.1.4. A posteriori hibabecslés konstrukciója és pontosságának vizsgálata . . . . .	32
4.2. Szakadós együtthatójú PDE . . . . .	35
4.2.1. Az együtthatómátrix . . . . .	36
4.2.2. A porteriori hibabecslés alkalmazása ismeretlen megoldású feladatokra . . . . .	39
<b>Függelékek</b>	<b>42</b>
<b>A. A 3D-s Poisson-együtthatómátrix elemeinek kiszámolása</b>	<b>42</b>
<b>B. A négyzeteken számolandó értékekhez szükséges együtthatók kiszámolása a 3D-s posteriori hibabecsléshez</b>	<b>46</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>47</b>

# 1. Bevezetés

## Motiváció

Elliptikus parciális differenciálegyenletekkel gyakran tudunk modellezni fizikai folyamatokat. A legegyszerűbb példa elliptikus parciális differenciálegyenletekre a Poisson-egyenlet, melyhez megadható a peremre vonatkozó feltétel is. Dirichlet-peremfeltételnek nevezzük, ha ismerjük a tartomány peremén a megoldás értékeit. Az ilyen típusú feladatok általános alakja a következő:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

ahol  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  egy korlátos tartomány, és  $\partial\Omega$  szakaszonként sima határ.

Az elliptikus differenciálegyenletek vizsgálata során hasznos, ha ismerjük a függvények fizikai jelentését. Bizonyos áramlásokat és erőtereket gyakran tudunk modellezni egy  $W \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  vektormező segítségével. Erre a  $W$  vektormezőre két fizikai törvény is vonatkozik. A  $\operatorname{div} W = f$  egyenlet a *megmaradási törvényt* írja le. Eszerint a  $W$  mező által szállított anyag vagy megmarad (ha  $f \equiv 0$ ), vagy a forrás/nyelő  $f$  függvényében változik. A  $W$ -re vonatkozó *Fick-törvény* szerint a  $W$  mező arányos egy megfelelő  $u \in C^1(\Omega)$  mező gradiensevel. Az  $u$  függvényt potenciálnak nevezzük. A törvény  $W = -p\nabla u$  alakban is felírható, ahol  $p > 0$  konstans, vagy függvény. A fenti szabályok a  $-\operatorname{div}(p\nabla u) = f$  elliptikus egyenletre vezetnek, ami  $p \equiv 1$  esetén megegyezik az  $-\Delta u = f$  Poisson-egyenlettel.

Más fizikai jelenségek modellezésére is használhatjuk az elliptikus PDE-eket. Ezekben  $u$  gradiensenek vizsgálata is hasznos lehet, a dolgozatban 2.1.3. alfejezetben a gradienst közelítjük numerikus módszerekkel. A Maxwell-egyenletek kétdimenziós stacionárius esete

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H = \rho \\ \operatorname{div} B = 0, \end{cases}$$

ahol  $H$  a mágneses mezőt,  $B$  a mágneses indukciót jelöli. Ekkor  $\operatorname{div} B = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0$ , vagyis  $-\partial_2 B_2 = \partial_1 B_1$  tehát  $W = (W_1, W_2) = (-B_2, B_1)$  mellett  $\operatorname{rot} W = 0$ . Eszerint  $W = -\nabla u$  valamely  $u$  potenciál esetén. Ha  $\exists k > 0$ , melyre  $H = kB$ , akkor

$$\operatorname{rot} H = \partial_2 H_1 - \partial_1 H_2 = k(\partial_2 B_1 - \partial_1 B_2) = k(\partial_2 W_2 + \partial_1 W_1) = k \operatorname{div} W = -\operatorname{div}(k\nabla u),$$

tehát  $\operatorname{rot} H = \rho$  összefüggésből kapjuk, hogy

$$-\operatorname{div}(k\nabla u) = \rho.$$

## A dolgozat felépítése

A dolgozat elméleti hátterének alapja és forrása a Numerical Methods for Elliptic Partial Differential Equations jegyzet [2].

A középpontban két numerikus megoldó módszer, a véges differenciás módszer és a véges elem-módszer áll. Az első fejezetben bevezetjük a Szoboljev-terek fogalmát, melyek használatával tudjuk értelmezni a gyenge megoldás fogalmát, illetve kimondjuk a FEM módszer konvergenciájáról szóló releváns tételeket. A 2. fejezetben a véges differenciás módszer alkalmazásával oldunk meg feladatokat 3 dimenziós tartományokon. A véges differenciás módszer alapötlete,

hogy a deriváltakra vonatkozó ismert közelítéseket (ún. véges differenciákat) alkalmazzuk a numerikus megoldás keresése közben. A fejezet első felében az értelmezési tartomány egy egységkocka, a fejezet második felében egy hiányos kocka, mellyel a Fichera corner problémáját szemléltetjük.

A 3. és a 4. fejezetek célja a végelem-módszer [1] vizsgálata, illetve egy posteriori hibabecslő képlet alkalmazása néhány konkrét feladatra. A végelem-módszer működését szemléltetjük 2 dimenzióban egy Laplace-operátoros feladaton, illetve egy szakadásos együtthatójú feladat esetén. Ezután 3 dimenzióra térünk át, megoldunk egy Laplace-operátoros feladatot, majd egy ismeretlen megoldású szakadásos együtthatós feladat numerikus megoldására alkalmazzuk a hibabecslő képletünket.

A dolgozat középpontjában a módszerek implementálása áll oly módon, hogy az egyes nem reguláris feladatokig eljussunk, amihez számos részletkérdés kidolgozása szükséges. A numerikus módszerek alkalmazására a Matlab [5] programot használtuk. A dolgozathoz kapcsolódó kódok elérhetők a <https://github.com/dorakino/thesis-msc-akd.git> oldalon.

## Szoboljev-terek

A végelem-módszer vizsgálatához elengedhetetlen a Szoboljev-terek vizsgálata, melyek olyan függvényekből álló Hilbert-terek, melyek gyengített értelemben differenciálhatók. Az elliptikus parciális differenciálegyenletek megoldhatóságának biztosításához fontos tulajdonság a Szoboljev-terek teljessége. A Szoboljev-tér általános definícióját az  $L^2(\Omega)$  tér fogalmára építjük. Az  $L^2(\Omega)$  tér olyan függvényekből áll, melyek Lebesgue-értelemben vett  $L^2$ -normája véges, vagyis  $\|u\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 < \infty$  a tér minden  $u$  függvényére.

**1.0.1. Definíció.** Az  $u \in L^2(\Omega)$  függvénynek van  $\partial_i u \in L^2(\Omega)$  parciális deriváltja általános értelemben valamely  $i \in \{1, \dots, n\}$  esetén, ha  $\exists z_i \in L^2(\Omega)$ , melyre

$$\int_{\Omega} u \partial_i v = - \int_{\Omega} z_i v \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ekkor használhatjuk a  $\partial_i u = z_i$  jelölést.

**1.0.2. Definíció** ( $H^1$  Szoboljev-tér).

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial_i u \in L^2(\Omega) \text{ általános értelemben } \forall i = 1, \dots, n\}$$

**1.0.3. Definíció** ( $H_0^1$  Szoboljev-tér).

$$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ nyom értelemben}\},$$

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \quad \|u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

A magasabbrendű Szoboljev-terek definíciójához bevezetjük a deriválás multiindexes jelölését.

**1.0.4. Definíció.** Legyen  $k \in \mathbb{N}^+$ , ha  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ , akkor  $\partial^\alpha u := \partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n} u$ .

**1.0.5. Definíció** (Magasabb rendű Szoboljev-terek).

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ általános értelemben, } \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Bizonyos feltételek mellett meg tudjuk vizsgálni a végeelem-módszer konvergenciáját. Az alakregularitás az egyik fontos feltétel, mely a triangulációra, illetve a triangulációk családjára vonatkozhat. Az általunk vizsgált feladatok megoldásához az  $\mathbf{R}_4$  és az  $\mathbf{R}_8^3$  elemeket használjuk, tehát csak az erre vonatkozó alakregularis triangulációkkal foglalkozunk a dolgozat során.

**1.0.6. Definíció** (Alakregularis triangulációk). A  $\tau_h$  téglalap- vagy téglatest-triangulációt alakregularisnak nevezzük, ha teljesül rá a következő:  $h_{max}/h_{min}$  korlátos.

## A végeelem-módszer konvergenciája

Tekintsük a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p\nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

elliptikus egyenletet. Tegyük fel, hogy  $\exists m > 0$ , melyre  $p(x) \geq m$  minden  $x \in \Omega$  esetén. A gyenge megoldás fogalmának bevezetése lehetővé teszi olyan differenciálegyenletek kezelését, amelyek klasszikus értelemben nem rendelkeznek megoldással.

**1.0.7. Definíció** (Gyenge megoldás). Az  $u \in H_0^1(\Omega)$  függvényt az 1. feladat gyenge megoldásának nevezzük, ha  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$  esetén

$$\int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

teljesül.

A Lax-Milgram lemma következménye, hogy a gyenge megoldás mindig létezik és egyértelmű. Jelölje  $u^*$  a gyenge megoldást. A végeelem-módszerrel kapott numerikus megoldás konvergenciájáról szól az alábbi két tétel.

**1.0.8. Tétel.** Legyen  $k \in \mathbb{N}^+$ , és tegyük fel, hogy

- $u^* \in H^{k+1}(\Omega)$ ,
- $P(T) \supset P^k(T)$ ,  $(\forall T \in \tau_h)$ ,
- továbbá a trianguláció alakregularis.

Ekkor

$$|u^* - u_h| \leq ch^k |u^*|_{k+1},$$

ahol  $c$  független a triangulációtól.

A tétel szerint megfelelően sima megoldások esetén,  $k$  rendű elemek használatával

$$|u^* - u_h|_1 \leq O(h^k)$$

teljesül. Az  $\mathbf{R}_4$  és az  $\mathbf{R}_8^3$  elemek használatánál az elsőrendű konvergenciához feltétel, hogy  $u^* \in H^2$ .

**1.0.9. Tétel** (FEM Konvergenciatétel  $H^2$ -regularitás nélkül). Alkalmazzunk elsőrendű végeelem-módszert téglalapokkal/téglatestekkel. Ha a trianguláció alakregularis, akkor

$$|u - u_h|_1 \rightarrow 0 \quad \text{ahogy } h \rightarrow 0.$$

## 2. Elliptikus feladatok numerikus megoldása véges differenciás módszerrel 3D tartományokon

A véges differenciás módszer szerint a megoldás közelítéséhez az értelmezési tartományon felveszünk egy rácsot, melynek lépésközeit  $h_1, h_2, h_3$ -mal jelöljük. Azt szeretnénk, ha a rács finomításával a rácspontokban a becült érték egyre jobban közelítené a pontos megoldást. [2] Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a továbbiakban ekvidisztáns felosztással dolgozunk, vagyis  $h_1 = h_2 = h_3 =: h$ . A rács paraméterének nevezzük  $h$ -t. A tartomány belső pontjaiban a diszkrét Laplace-operátor közelítéséhez mindhárom irányban a

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{u+i} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

szimmetrikus módszert alkalmazunk, így kapjuk az alábbi közelítést:

$$-\Delta u(ih, jh, kh) \approx \frac{-u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k} - u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k} - u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1} + 6u_{i,j,k}}{h^2}. \quad (2)$$

### 2.1. Egységkocka

#### 2.1.1. A megoldás közelítése

Az első vizsgált tartományunk az  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  egységkocka. Ezen oldjuk meg a

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ f(x, y, z) = 3\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \end{cases} \quad (3)$$

feladatot. Ennek a feladatnak könnyen kiszámolható a pontos megoldása, így a közelítésből származó hibát is meg tudjuk majd kapni. A pontos megoldás

$$u(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z).$$

A leírtaknak megfelelően alkalmazunk egy  $h$  lépésközű ekvidisztáns rácsot  $\Omega$ -n,  $N$  jelöli a belső rácspontok számát. A kapott rács pontjait lexikografikusan egy darab  $N^3$  hosszú vektorba rendezzük úgy, hogy először az  $x$ -tengely, majd az  $y$ -tengely, végül pedig a  $z$ -tengely mentén növeljük az indexeket. Ezzel a rendezéssel a rácspontokbeli közelített értékeket egy  $u_h \in \mathbb{R}^3$  vektorban tudjuk eltárolni. Hasonlóképpen igaz ez az  $f$  rácspontokbeli értékére is, ezt  $f_h$ -val jelöljük. Az 2-es képlet alkalmazásával felírható egy  $A_h$  együtthatómátrixú lineáris algebrai egyenletrendszer, melynek jobb oldalán az  $f$  értékei szerepelnek az egyes rácspontokban.

Ehhez jelölje  $I_N$  az  $N \times N$ -es identitásmátrixot, továbbá bevezetjük az alábbi jelöléseket.

$$E := \begin{pmatrix} 6 & -1 & & & \\ -1 & 6 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 6 & -1 \\ & & & -1 & 6 \end{pmatrix} = \text{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\tilde{B} := \left( \begin{array}{c|c|c|c} E & -I_N & & \\ \hline -I_N & \ddots & \ddots & \\ \hline & \ddots & E & -I_N \\ \hline & & -I_N & E \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}.$$

Ezek segítségével felírható az

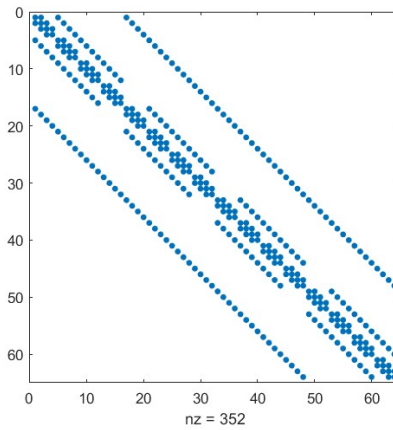
$$A_h := \frac{1}{h^2} \left( \begin{array}{c|c|c|c} \tilde{B} & -I_{N^2} & & \\ \hline -I_{N^2} & \ddots & \ddots & \\ \hline & \ddots & \tilde{B} & -I_{N^2} \\ \hline & & -I_{N^2} & \tilde{B} \end{array} \right) = \frac{1}{h^2} \text{blokktridiag}(-I_{N^2}, \tilde{B}, -I_{N^2}) \in \mathbb{R}^{N^3 \times N^3}$$

(4)

együtthatómátrix. Az

$$A_h u_h = f_h \tag{5}$$

lineáris egyenletrendszer  $u_h$  megoldása lesz a közelített érték a rácspontokban. A 1. ábrán az együtthatómátrix nemnulla elemeinek struktúrája látható  $N = 4$  mellett. [?]

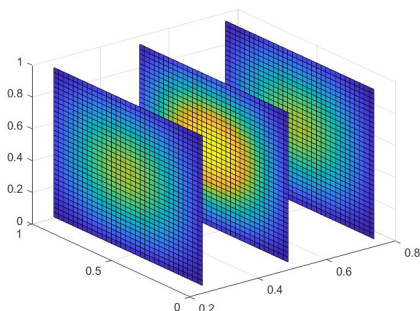


1. ábra. Az együtthatómátrix struktúrája kockán,  $N = 4$  mellett.

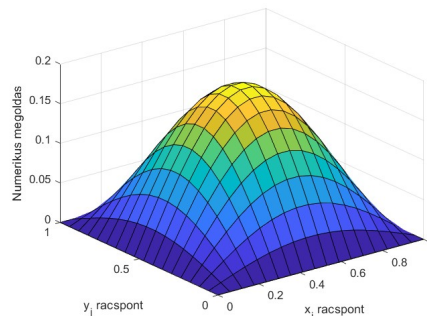
Az összes megoldás nem ábrázolható térben, azonban valamely változó fixálásával megtekinthetjük tetszőleges "rétegen" a közelítő megoldásunkat. A 2. ábrán az  $x = 8h$ ,  $x = 16h$ ,



$x = 24h$  rétegeken ábrázoljuk a becsült megoldást. A 3. ábrán a  $z = h$  érték rögzítésével ábrázoltuk a becsült megoldást  $N = 8$ , illetve  $N = 16$  belső rácspont esetén.



2. ábra. Az  $N = 32$  melletti becsült értékek az  $x = 8h$ ,  $x = 16h$ ,  $x = 24h$  rétegeken.



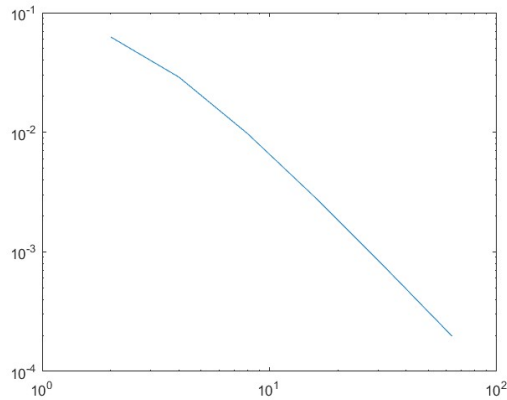
3. ábra. A  $z = h$ ,  $N = 16$  melletti becsült értékek.

### 2.1.2. A becslési hiba nagysága különböző lépéstávolságok esetén

Az alábbi táblázat a rácspontbeli becsült értékek eltérését tartalmazza a pontos értékektől maximum-normában.

Belső rácspontok száma (N)	Hiba nagysága
2	0.0628
4	0.0289
8	0.0098
16	0.0028
32	$7.5303 \cdot 10^{-4}$
64	$1.9452 \cdot 10^{-4}$

Mivel a belső pontokban a szimmetrikus sémával közelítettük a diszkrét Laplace-operátort, ezért másodrendű konvergenciát várunk. A hibák nagyságát érdemes loglog-ábra segítségével is ábrázolni, így szemléltethető a módszer rendje.

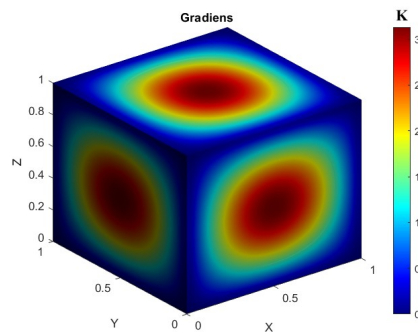


4. ábra. Loglog-ábra a hiba és a lépésköz kapcsolatáról.

A 4. ábrán a 3. és a 6. pont közötti egyenes körülbelül  $\frac{-1,7003}{0,9031} = -1,8827$  meredekségű, ami nagyjából megfelel a másodrendnek.

### 2.1.3. A gradiens közelítése

A közelített megoldásból kiszámoltuk a rácspontbeli gradiensvektorok hosszát. A határon a  $|\nabla u| \approx |\partial_v u|$  közelítést alkalmaztuk. Az éleken és a csúcsokban lévő pontokban a megoldás nem  $C^1$ -beli, így ott  $v$  olyan vektor, mely egy oldal belső pontjában az oldalra merőleges vektor, egy oldal élén az élre merőleges, átellenes él irányába mutató vektor, a kocka csúcsaiban pedig a kocka középpontjába mutató vektor. Az 5. ábrán a közelített  $|\nabla u|$  látható a 3. feladat esetén.



5. ábra.  $|\nabla u|$  közelítése a határon a 3. feladat esetén.

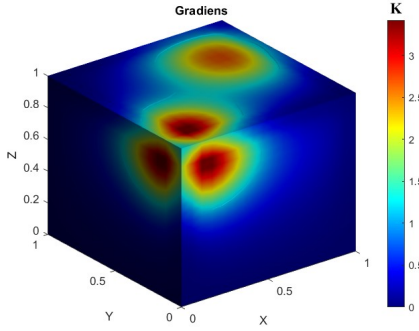
Az 6. ábrán az

$$f(x, y, z) = 3e^{-10(x-0)^2 - 10(y-0)^2 - 10(z-1)^2} + e^{-10(x-0.8)^2 - 10(y-0.7)^2 - 10(z-1)^2}$$

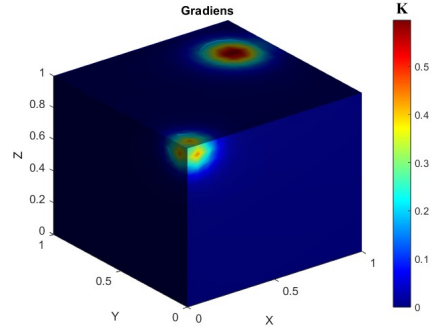
feladathoz tartozó, a 7. ábrán az

$$f(x, y, z) = 3e^{-100(x-0)^2 - 100(y-0)^2 - 100(z-1)^2} + e^{-100(x-0.8)^2 - 100(y-0.7)^2 - 100(z-1)^2}$$

feladathoz tartozó közelített  $|\nabla u|$  szerepel.



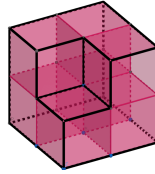
6. ábra. A közelített  $|\nabla u|$  kettős Gauss-forrás esetén (1. eset).



7. ábra. A közelített  $|\nabla u|$  kettős Gauss-forrás esetén (2. eset).

## 2.2. Hiányos kocka konkáv sarokkal („Fichera corner”)

A másik általunk vizsgált tartomány egy olyan 1 élhosszúságú kocka, melynek az egyik sarkából elhagytunk egy  $\frac{1}{2}$  élhosszúságú kockát. „Fichera corner”-nek nevezik angolul az ilyen sarkot, az ilyen testeken értelmezett feladatok numerikus megoldása gyakori tesztfeladat. [6] Ezt a testet szemlélteti a 8. ábra. Ezen a tartományon csak azt az esetet vizsgáltuk, mikor a belső pontok száma páratlan sok.



8. ábra. Hiányos kocka konkáv sarokkal (Fichera corner).

### 2.2.1. Az együtthatómátrix struktúrája

Legyen  $a := sN + (N - s)s$ , ahol  $s = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ . Az eljárás együtthatómátrixa egy olyan négyzetes blokkmátrix, melynek bal felső négyzetes blokkja egy blokktridiagonális mátrix,  $N^2$  méretű blokkokkal, a főátlóban  $C$  blokkokkal, a második átlókban  $-I$  blokkokkal. A jobb alsó négyzetes blokk szintén egy blokktridiagonális mátrix  $a^2$  méretű blokkokkal, ennél a főátlóban  $D$  mátrixok vannak, a második átlókban  $-I$ -k. A mátrix többi részeiben csak  $A_1$ -ben és  $A_2$ -ben vannak nemnulla elemek. Az  $A_1$  egy olyan  $a \times N^2$ -es mátrix, melyben az utolsó  $a$  oszlop által meghatározott részmátrix az  $-I \in \mathbb{R}^{s \times s}$ , máshol pedig minden elem 0.  $A_2 = A_1^T$ , azaz az  $A_2$  egy olyan mátrix, melyben az utolsó  $a$  sor által meghatározott részmátrix az  $-I \in \mathbb{R}^{s \times s}$ , máshol pedig minden elem 0. Tehát a mátrixnak összesen  $sN^2 + (N - s)a$  oszlopa van. Például  $N = 5$  esetén az alábbi struktúrát figyelhetjük meg. A mátrix fölött, illetve mellett az adott

blokk mérete szerepel.

$$A = \begin{array}{c} N^2 \\ N^2 \\ a \\ a \\ a \end{array} \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} N^2 & (1. \text{ blokk}) & N^2 & (s. \text{ blokk}) & a & a & a \\ \hline & C & & -I & & & \\ \hline & -I & & C & A_2 & & \\ \hline & & & A_1 & D & -I & \\ \hline & & & & -I & D & -I \\ \hline & & & & & -I & D \end{array} \right)$$

$C$  mátrix egy olyan blokktridiagonális mátrix, melynek minden oszlopában  $N$  darab  $N \times N$ -es blokk van.  $C$  főátlójában  $\tilde{B} = \text{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  blokkok szerepelnek, a második átlókban pedig  $-I$  mátrixok.

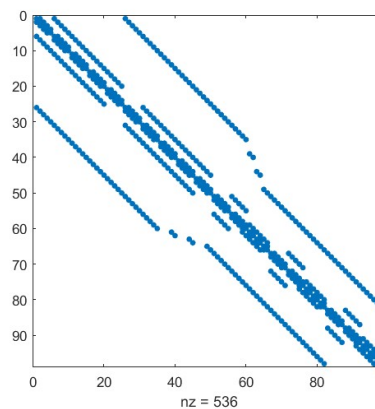
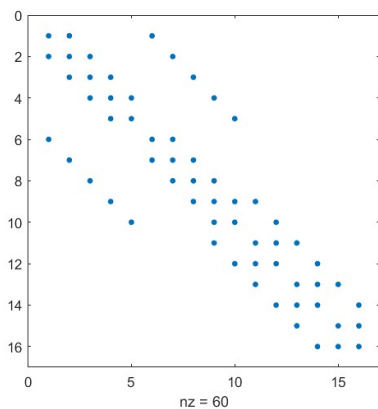
$$C = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \tilde{B} & -I & & \\ \hline -I & \tilde{B} & \ddots & \\ \hline & \ddots & \ddots & -I \\ \hline & & -I & \tilde{B} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

A  $D$  mátrix struktúrája megegyezik az  $A$  mátrix struktúrájával, azonban a méretek különböznek. A  $D$  mátrix bal felső négyzetes blokkjában a blokkok  $N \times N$ -esek, egy oszlopban  $s$  darab van belőlük, és a részmátrix főátlójában lévő blokkokat  $\tilde{B}$ -vel jelöljük. A jobb alsó négyzetes részmátrixban a blokkok  $s \times s$ -esek, egy oszlopban  $N - s$  van belőlük, és a részmátrix főátlójában lévő blokkokat  $\hat{B}$ -vel jelöljük.  $\tilde{B} = \text{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  és  $\hat{B} = \text{tridiag}(-1, 6, -1) \in \mathbb{R}^{s \times s}$ . Az  $A_1$  és  $A_2$  részeknek megfelelő elemeket hasonlóan írjuk fel, mint  $A$ -nál. Tehát  $D$  egy  $(Ns + (N - s)s) \times (Ns + (N - s)s)$ -es mátrix.  $N = 5$ -nél a következőképpen néz ki  $D$ .

$$D = \begin{array}{c} N \\ N \\ s \\ s \\ s \end{array} \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} N & (1. \text{ blokk}) & N & (s. \text{ blokk}) & s & s & s \\ \hline & \tilde{B} & & -I & & & \\ \hline & -I & & \tilde{B} & A'_2 & & \\ \hline & & & A'_1 & \hat{B} & -I & \\ \hline & & & & -I & \hat{B} & -I \\ \hline & & & & & -I & \hat{B} \end{array} \right)$$

**2.2.1. Megjegyzés.** Ha síkbeli  $L$ -tartományon vizsgáljuk az FDM együtthatómátrixát, a  $D$  mátrixot kapjuk, azzal a különbséggel, hogy az 5-pontos differenciacsillagban a középpontbeli elemek helyén 6 helyett 4 szerepel.

A 9. ábrán a  $D$  mátrix nemnulla elemeit, a 10. ábrán a módszer együtthatómátrixát láthatjuk  $N = 5$  esetén.



9. ábra. A  $D$  mátrix struktúrája  $N = 5$  mellett.

10. ábra. A módszer együtthatómátrixának struktúrája  $N = 5$  mellett.

A módszer együtthatómátrixa  $A_h = \frac{1}{h^2} A$ .

### 2.2.2. A becslési hiba nagysága különböző lépéstávolságok esetén

A pontos megoldás

$$u^*(x, y, z) = \sin(2x\pi) \sin(2y\pi) \sin(2z\pi).$$

Különböző belső rácspontszámok esetén az alábbi hibákat kapjuk. Látható, hogy a hiba  $N$  növelésével nullába konvergál.

Belső rácspontok száma (N)	$\ u^* - u_h\ _{\max}$
3	0.2337
7	0.0530
15	0.0130
35	0.0025
63	$8.0358 \cdot 10^{-4}$

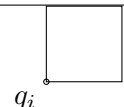
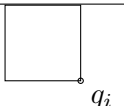
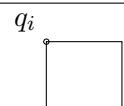
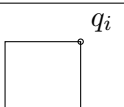
### 3. Elliptikus feladatok numerikus megoldása bilineáris végelemekkel 2D tartományon

#### 3.1. Poisson-egyenlet

A feladatok numerikus megoldásához a végeelem-módszert használjuk az  $\mathbf{R}_4$  elemmel. A vizsgált tartományokat egyenlő,  $h$  oldalhosszúságú  $T_k$ ,  $k = \{1, \dots, M\}$  négyzetekre bontjuk, így kapjuk a módszer során használt  $\tau_h = \{T_1, \dots, T_M\}$  triangulációt. Minden négyzet felett a megoldást ún. bilineáris függvényekkel közelítjük. Bilineáris függvényeknek nevezzük az

$$x, y \mapsto a_k + b_k x + c_k y + d_k xy$$

alakú függvényeket. Az  $\mathbf{R}_4$  elem rendje 1. Egy  $h$  oldalhosszúságú négyzeten a  $\varphi_i(x, y) = \frac{xy}{h^2}$  bázisfüggvényt, és annak néhány transzformáltját használjuk, az origót a bal alsó sarokba helyezzük. A bázisfüggvényeket  $\varphi_i$ -vel jelöljük, ezek tartóinak középpontjait  $q_i$ -vel.  $N$  jelöli a belső osztópontok számát,  $h$  az ekvidisztáns rácstávolságot. Az alábbi táblázatban láthatjuk a bázisfüggvények képletét.

A bázisfüggvény által felvett értékek	A megfelelő bázisfüggvény képlete
	$\varphi_i = \frac{(h-x)(h-y)}{h^2}$
	$\varphi_i = \frac{x(h-y)}{h^2}$
	$\varphi_i = \frac{y(h-x)}{h^2}$
	$\varphi_i = \frac{xy}{h^2}$

A kapott rács pontjait lexikografikusan egy darab  $N^2$  hosszú vektorba rendezzük úgy, hogy először az  $x$ -tengely, majd az  $y$ -tengely mentén növeljük az indexeket. Ezzel a rendezéssel a rácsponthoz tartozó közelített értékeket egy  $u_h \in \mathbb{R}^2$  vektorban tudjuk eltárolni, vagyis  $u_h$ -val jelöljük a numerikus megoldást. A Galjorkin-módszert alkalmazva a folytonos feladatunkat diszkrét,  $A_h u_h = b_h$  alakú feladattá alakítjuk, amit aztán az  $A_h \setminus b_h$  paranccsal oldunk meg. A lineáris algebrai egyenletrendszerben az együtthatómátrix elemeinek képlete

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j,$$

a feladat jobboldalának képlete

$$b_i = \int_{\Omega_i} f \varphi_i.$$

A bilineáris végeelem-módszert alkalmazzuk két feladat megoldásának közelítésére. Először egy egyszerűbb feladatot, egy Poisson-egyenletet oldunk meg az egységnégyzeten.

**3.1.1. Feladat.** A végeselem-módszer alkalmazásával oldjuk meg az alábbi feladatot!

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{cases} \quad (6)$$

A feladatnak ismerjük a pontos megoldását, tehát ki tudjuk számolni a numerikus megoldás pontos megoldástól való eltérését. A pontos megoldás az

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

függvény. Bilineáris végeselem-módszer segítségével a PDE megoldását egy megfelelő lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza. A következő alfejezetben az ehhez tartozó  $A_h$  együtthatómátrixot számoljuk ki.

### 3.1.1. Az együtthatómátrix

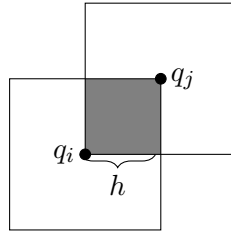
Az  $A_h$  együtthatómátrix elemeinek képlete:

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j.$$

A mátrix egyes elemeinek értéke a bázisfüggvények egymáshoz való pozíciójától függ, ez alapján különböztetünk meg eseteket. Az egyes esetekben az alábbihoz hasonló számolást kell elvégezni az együtthatómátrix elemeinek kiszámolásához.

**Példa együttható kiszámítására, ha átlósan helyezkednek el a bázisfüggvények.**

Ebben az esetben a bázisfüggvények középpontjai egy  $h$  oldalú négyzet átlós csúcsaira esnek.



Az origót itt is a bal alsó sarokba helyezzük, és felírjuk a metszetre vonatkozó képletét a bázisfüggvényeknek.

$$\varphi_i(x, y) = \frac{xy}{h^2}; \quad \nabla \varphi_i = \left( \frac{y}{h^2}, \frac{x}{h^2} \right)$$

$$\varphi_j = \frac{(h-x)(h-y)}{h^2}; \quad \nabla \varphi_j = \left( \frac{y-h}{h^2}, \frac{x-h}{h^2} \right)$$


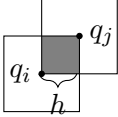
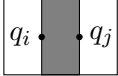
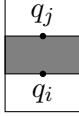

$$\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \frac{y(y-h)}{h^4} + \frac{x(x-h)}{h^4}$$

Ezek felhasználásával ki tudjuk számolni az együtthatómátrix egy elemének értékét.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j &= \frac{1}{h^4} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} (y^2 - yh + x^2 - xh) \, dx dy = \frac{1}{h^4} \int_{[0,h]} \left[ xy^2 - xyh + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2h}{2} \right]_{x=0}^h dy = \\ &= \frac{1}{h^4} \int_{[0,h]} \left( hy^2 - yh^2 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right) dy = \frac{1}{h^4} \left[ \frac{hy^3}{3} - \frac{y^2h^2}{2} + \frac{h^3y}{3} - \frac{h^3y}{2} \right]_{y=0}^h = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

### Az együtthatómátrix értékei

Összesen öt esetet különböztetünk meg a lehetséges pozíciók alapján. Az alábbi táblázatban összegyűjtöttük a bázisfüggvények lehetséges egymáshoz való pozícióit, illetve a számolások részletei nélkül tartalmazza az együttható felírásához szükséges integrálok értékeit.

Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$\int_{\Omega} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$ értéke
a bázisfüggvények tartóinak nincs metszete		0
átlósan helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
egymás mellett helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
egymás felett helyezkednek el a bázisfüggvények		$-\frac{1}{3}$
ugyanott vannak a bázisfüggvények		$\frac{8}{3}$

### A teljes együtthatómátrix

A különböző esetekből kapott értékek összeillesztésével kapjuk meg a teljes  $A_h$  együtthatómátrixot, amely egy blokkmátrix.

A főátlóban lévő blokkmátrix:

$$E = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$



A 2. átlóban lévő blokkmátrix:

$$F = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A teljes együtthatómátrix:

$$A_h = \begin{bmatrix} E & F & 0 & 0 & 0 \\ F & E & F & 0 & 0 \\ 0 & F & E & F & 0 \\ 0 & 0 & F & E & F \\ 0 & 0 & 0 & F & E \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

### Az egyenletrendszer jobboldala

Az egyenletrendszer jobboldalának képlete  $b_i = \int_{\Omega_i} f \varphi_i$ . A számolások során alkalmaztuk a

$$\int_{\Omega_i} f \varphi_i \approx f(q_i) \int_{\Omega_i} \varphi_i \quad (7)$$

közelítést. A  $\int_{\Omega_i} \varphi_i$  kiszámolásához a bázisfüggvény tartóját 4 egyenlő négyzetre bontjuk. Forgásszimmetria miatt elég csak az egyik négyzeten kiszámolni az integrált, mi az  $N_1$  négyzetet vizsgáljuk.

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline N_1 & N_3 \\ \hline N_2 & N_4 \\ \hline \end{array} \quad 0 \\ 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline N_2 & N_4 \\ \hline \end{array} \quad 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

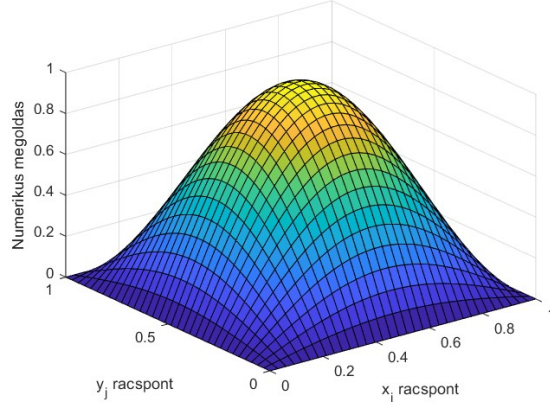
Az  $N_1$  négyzeten a  $\varphi_i$  bázisfüggvény képlete  $\varphi_i = \frac{x(h-y)}{h^2}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{N_1} \varphi_i &= \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \frac{x(h-y)}{h^2} dx dy = \int_{[0,h]} \frac{h-y}{h^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^h dy = \frac{1}{2} \int_{[0,h]} (h-y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[ hy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^h = \frac{h^2}{4}. \end{aligned}$$

Tehát a teljes tartón nézve az integrált kapjuk, hogy  $\int_{\Omega_i} \varphi_i = \sum_{i=1}^4 \int_{N_i} \varphi_i = h^2$ .

### 3.1.2. A numerikus megoldás

A fentiek alkalmazásával és a MATLAB segítségével megoldjuk a 6. feladatot. 2D feladat esetén a megoldás felszínét könnyen tudjuk ábrázolni. Az alábbi ábrán a megoldás numerikus közelítése látható.



11. ábra. A numerikus megoldás,  $N = 32$  mellett.

### 3.1.3. A hiba kiszámolása Poisson-egyenlet esetén

Mivel ismerjük a pontos megoldást, így ki tudjuk számolni a numerikus közelítés hibáját. Az ortogonalitás miatt

$$u^* = u_h + (u^* - u_h)$$

$$|u^* - u_h|_1^2 = |u^*|_1^2 - |u_h|_1^2$$

Mivel  $u^*$  függvényt ismerjük, így  $|u^*|_1^2$ -t ki tudjuk számolni.

$$|u^*|_1^2 = |\sin(\pi x) \sin(\pi y)|_1^2 = \int_{\Omega} |\nabla u^*|^2$$

$$\nabla u^* = (\pi \sin(\pi y) \cos(\pi x), \pi \cos(\pi y) \sin(\pi x))$$

$$|\nabla u^*|^2 = \pi^2 \sin^2(\pi y) \cos^2(\pi x) + \pi^2 \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi y)$$

Felhasználjuk a következő nevezetes azonosságokat:

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\int_{[0,1]} \sin^2(\pi x) dx = \int_{[0,1]} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{[0,1]} \cos^2(\pi x) dx = \int_{[0,1]} \frac{1 + \cos(2\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}$$

Ezek felhasználásával kapjuk:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 &= \pi^2 \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} (\sin^2(\pi y) \cos^2(\pi x) + \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi y)) \, dx \, dy = \\
&= \pi^2 \int_{[0,1]} \sin^2(\pi y) \int_{[0,1]} \cos^2(\pi x) \, dx \, dy + \int_{[0,1]} \cos^2(\pi y) \int_{[0,1]} \sin^2(\pi x) \, dx \, dy = \\
&= \frac{\pi^2}{2} \int_{[0,1]} \sin^2(\pi y) \, dy + \frac{\pi^2}{2} \int_{[0,1]} \cos^2(\pi y) \, dy = \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

### A hiba értéke $N$ függvényében

Különböző  $N$  esetén az alábbi hibákat kapjuk. Jól látható, hogy  $N$  növelésével a hiba nullába tart, ráadásul a lépésköz felezésével a hiba is körülbelül feleződik.

Belső rácspontok száma ( $N$ )	$ u_h - u^* _1$
1	2.0487
2	1.2487
4	0.7158
8	0.3907
16	0.2057
32	0.1058
64	0.0537
128	0.0271
256	0.0136
512	0.0068
1024	0.0034

1. táblázat. A hiba nagysága a 2 dimenziós Poisson-egyenlet esetén  $N$  függvényében.

#### 3.1.4. A posteriori hibabecslés konstrukciója és pontosságának vizsgálata

A posteriori hibabecsléssel a kiszámolt numerikus megoldás pontosságát tudjuk vizsgálni. [4] Ezzel szemben az „a priori” hibabecslésnél a numerikus megoldás kiszámolása előtt adunk becslést. Az alábbi képlet kiszámolásának részleteit a [2] jegyzetben olvashatjuk. A képlet alkalmazható alakreguláris triangulációk esetén.

$$|u_h - u^*|_1^2 \leq c \left( \sum_T h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 + \sum_e h_e \|[\partial_\nu u_h]\|_{L^2(e)}^2 \right)$$

A képletben szereplő  $T$  négyzeteket, az  $e$  két egymás melletti négyzet metszeteként előálló szakaszt jelöl. A  $h_T$  és  $h_e$  hosszparaméterek oldalhosszokat jelölnek, a mi esetünkben ezek egységesen  $h$  értékűek voltak. Az általános képletben az  $\|f\|_{L^2(T)}^2$  helyett  $\|Lu_h - f\|_{L^2(T)}^2$  szerepel, azonban  $Lu_h = 0$  minden cellán, így az egyszerűbb alakkal számolhatunk. Nevezzük hibaszorzónak a  $c$  értéket. Ebben a részben becslést írunk fel a hibaszorzó értékére felhasználva a pontos megoldást.

## Érték a szakaszokon

Minden egymás melletti két négyzet metszetében lévő négyzetre kiszámoljuk a  $\|[\partial_\nu u_h]\|^2$  értéket, ezt az ugrás négyzetes integráljának nevezzük, ennek részleteit a következőkben olvashatjuk.

Illesszünk minden négyzeten a csúcspontokban felvett értékekre illeszkedő

$$u_h(x, y) = a_T + b_T x + c_T y + d_T xy$$

paraméterű polinomot, mivel bilineáris elemeket használunk. Az alábbi ábrán az egységnyi-zet csúcsaiban felvett értékekhez tartozó változók elhelyezkedése látható.

$$\begin{array}{ccc}
 (ih, jh) & & ((i+1)h, jh) \\
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 v_1 & v_2 \\
 \hline
 v_3 & v_4 \\
 \hline
 \end{array} & & \\
 (ih, (j+1)h) & & ((i+1)h, (j+1)h)
 \end{array}$$

Jelöljük  $v_1, v_2, v_3, v_4$ -gyel a rácspontban közelített értékeket. Közelítsük a megoldásfüggvényt egy kis egységnyi-zet felett az  $u(x, y) = a_T + b_T x + c_T y + d_T xy$  függvénnyel. A  $u_h$  polinomba behelyettesítjük az egyik kocka  $v_1, \dots, v_4$  csúcspontjainak koordinátáit, és így az adott pontbeli közelített értékeket kapjuk. Ezt felhasználva minden kockára fel tudunk írni egy 4 egyenletből álló egyenletrendszert, amely megoldásával kapjuk a kockára vonatkozó polinom paramétereit. A rácspontokban felvett értékek:

$$\begin{aligned}
 (ih, jh) : v_1 &:= u(ih, jh) = a_T + b_T ih + c_T jh + d_T ijh^2 \\
 ((i+1)h, jh) : v_2 &:= u((i+1)h, jh) = a_T + b_T(i+1)h + c_T jh + d_T(i+1)jh^2 \\
 (ih, (j+1)h) : v_3 &:= u(ih, (j+1)h) = a_T + b_T ih + c_T(j+1)h + d_T i(j+1)h^2 \\
 ((i+1)h, (j+1)h) : v_4 &:= u((i+1)h, (j+1)h) = a_T + b_T(i+1)h + c_T(j+1)h + \\
 &\quad + d_T(i+1)(j+1)h^2
 \end{aligned}$$

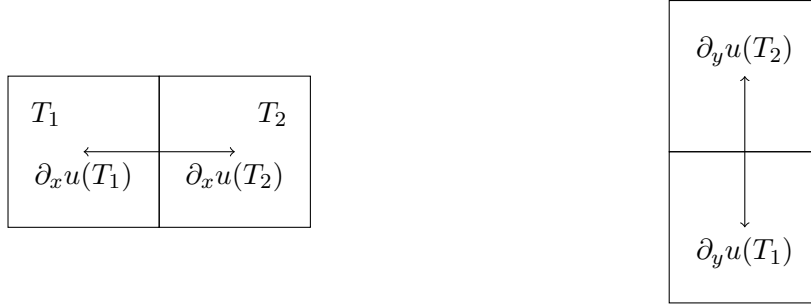
Az ebből felírható egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix}
 1 & ih & jh & ijh^2 \\
 1 & (i+1)h & jh & (i+1)jh^2 \\
 1 & ih & (j+1)h & i(j+1)h^2 \\
 1 & (i+1)h & (j+1)h & (i+1)(j+1)h^2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_T \\
 b_T \\
 c_T \\
 d_T
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4
 \end{bmatrix}$$

Ezt az egyenletrendszert minden négyzeten felírjuk és megoldjuk, így minden négyzeten megkapjuk az  $a_T, \dots, d_T$  paramétereiket. Ezek felhasználásával minden kockán ki tudjuk számolni az iránymenti deriváltakat.

$$\begin{aligned}\partial_x u(T_1) &= b_{T_1} + d_{T_1} y \\ \partial_x u(T_2) &= b_{T_2} + d_{T_2} y\end{aligned}$$

Az iránymenti deriváltak segítségével tudjuk kiszámolni az ugrás négyzetének integrálját. A metszet pozíciójától függően két esetet különböztetünk meg. Általánosan az alsó indexben szereplő 1-es az adott tengely mentén vett kisebb koordinátájú négyzetre vonatkozik. A két esetet az alábbi ábrákon szemléltetjük.



A bal oldali esetben az ugrás integráljának négyzete

$$\|[\partial_\nu u_h]\|^2 = \int_{jh}^{(j+1)h} (b_{T_2} + d_{T_2} y - b_{T_1} - d_{T_1} y)^2 dy,$$

a jobb oldali esetben

$$\|[\partial_\nu u_h]\|^2 = \int_{ih}^{(i+1)h} (c_{T_2} + d_{T_2} x - c_{T_1} - d_{T_1} x)^2 dx.$$

Ezeket az integrálokat minden függőleges, illetve vízszintes élen kiszámoljuk, majd ezek összegének  $h$ -szorosaként megkapjuk a képlet jobboldalán szereplő összeg egyik tagját.

### Érték a négyzeteken

A képletben szereplő  $\|f\|_{L^2(T)}^2$  értéket minden kis négyzeten kiszámoljuk. Egy tetszőleges  $T = [ih, (i+1)h] \times [jh, (j+1)h]$  négyzeten az  $\|f\|_{L^2(T)}^2$  értéke

$$\|f\|_{L^2(T)}^2 = \int_T |f|^2 = \frac{\pi^2}{4} (\sin(2\pi hi) - \sin(2\pi h(i+1)) + 2\pi h) (\sin(2\pi hj) - \sin(2\pi h(j+1)) + 2\pi h).$$

Ezeket szintén minden négyzetre kiszámoljuk, majd ezek összegének  $h^2$ -szorosaként megkapjuk a hibabecslő képlet jobboldalán szereplő másik tagot.

### A hibaszorzó értéke az $N$ függvényében

A fenti lépések elvégzésével ki tudjuk számolni a hibabecslő képlet jobb oldalán szereplő összeg értékét. Mivel ismerjük a becslés hibáját, tudunk becslést mondani  $c$ -re az alábbi egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{|u_h - u^*|_1^2}{\sum_T h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 + \sum_e h_e \|[\partial_\nu u_h]\|_{L^2(e)}^2} \leq c$$

Különböző  $N$  esetén a következő alsó becsléseket tudjuk felírni  $c$ -re.

Belső rácspontok száma ( $N$ )	$c$
4	0.0990
8	0.0908
16	0.0870
32	0.0851
64	0.0842
128	0.0838
256	0.0836
512	0.0834
1024	0.0834

2. táblázat. Becslés a hibaszorzó értékére a 2 dimenziós Poisson-egyenlet esetén  $N$  függvényében.

### 3.2. Szakadásos együtthatójú PDE

Ebben a fejezetben egy olyan feladat vizsgálata volt a cél, melynél a megoldás gradiense nem folytonos, de a feladat jobboldala folytonos. Ennek megfelelően írtuk fel az alábbi feladatot szakadásos együtthatók használatával. A pontos megoldás legyen

$$u(x, y) = z(x)(y - y^2), \text{ ahol}$$

$$z(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ 8x^3(1 - x), & \text{ha } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Az általunk vizsgált PDE:

$$-\partial_x(p\partial_x u) - \partial_y^2 u = f,$$

$$\text{ahol } p(x, y) = p_1 = 2, \text{ ha } x \leq \frac{1}{2}, \text{ és } p(x, y) = p_2 = 1, \text{ ha } x \geq \frac{1}{2}.$$

Itt a megoldás nincs  $C^1$ -ben, azonban a végeelem-módszer megfelelő a gyenge megoldás közelítésére.

#### A feladat jobboldala

A feladat jobboldalát az alábbiakban számoljuk ki.

- Ha  $x \leq \frac{1}{2}$ , akkor  $u(x, y) = x(y - y^2)$ . Ekkor  $\nabla u = (y(1 - y), x(1 - 2y))$ .

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \nabla u = (2y(1 - y), x(1 - 2y)),$$

$$-\partial_x(p\partial_x u) - \partial_y^2 u = 2x.$$

- Ha  $x \geq \frac{1}{2}$ , akkor  $u(x, y) = 8x^3(1-x)(y-y^2)$ . Ekkor  $\nabla u = (8(3x^2 - 4x^3)(y-y^2), 8(x^3 - x^4)(1-2y))$ ,  $-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = -48x(1-2x)(y-y^2) + 16x^3(1-x)$ .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \nabla u = (8(3x^2 - 4x^3)(y-y^2), 8(x^3 - x^4)(1-2y)), \\ -\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = -48x(1-2x)(y-y^2) + 16x^3(1-x).$$

Tehát

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ -48x(1-2x)(y-y^2) + 16x^3(1-x), & \text{ha } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A szokásos

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p\nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

alakú feladat helyett

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

alakú feladatot is vizsgálhatunk, ha  $A \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^{2 \times 2})$  egyenletesen pozitív definit. Ennél a feladatnál  $A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p \in L^\infty(\Omega)$  alakú.

### 3.2.1. Az együtthatómátrix

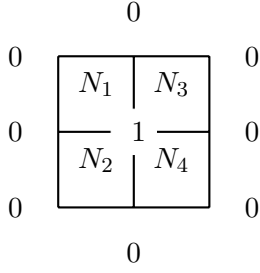
Az együtthatómátrix elemeinek képlete:

$$a(u, v) = \int (p\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v) \implies a_{ij} = \int_{\Omega} (p\partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j).$$

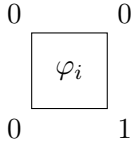
Ebben az alfejezetben az együtthatómátrixban szereplő elemek tagjait számoljuk ki. Az ábrákon a bázisfüggvények egymáshoz való elhelyezkedését, illetve a bázisfüggvények rácspontokban felvett értékeit ábrázoljuk. Az egyes négyzetekben a rácspontokban felvett értékekre illesztünk bilineáris függvényeket, így kapjuk meg a bázisfüggvények képletét.  $q_i, q_j$  jelöli a  $\varphi_i, \varphi_j$  bázisfüggvények középpontjait rendre. Szürkével emeljük ki a bázisfüggvények tartóinak metszetét. A bázisfüggvények egymáshoz való elhelyezkedése alapján különböztetünk meg eseteket. Az alábbi alfejezetben bemutatjuk az egyik esetben a számolás részleteit, a többi esetben is hasonló számolások szükségesek.

#### Példa: egymásra illeszkedő bázisfüggvények

Ebben az esetben  $q_i = q_j$ , és  $\varphi_i = \varphi_j$ .



Forgásszimmetria miatt elég az egyik kis négyzeten (legyen ez  $N_1$ ) kiszámolni az  $\int_{N_1} (\partial_x \varphi_i)^2$  és az  $\int_{N_1} (\partial_y \varphi_i)^2$  értékeket. A bázisfüggvény által felvett értékek a négyzet csúcspontjaiban:



$$\varphi_j(x, y) = \frac{x(h-y)}{h^2}; \quad \partial_x \varphi_j = \frac{h-y}{h^2}; \quad \partial_y \varphi_j = \frac{-x}{h^2}$$

$$\int_{N_1} (\partial_x \varphi_i)^2 = \int_0^h \int_0^h \frac{(h-y)^2}{h^4} dx dy = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{N_1} (\partial_y \varphi_i)^2 = \int_0^h \int_0^h \frac{x^2}{h^4} dx dy = \frac{1}{3}.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega} (\partial_x \varphi_i)^2 = \sum_{i=1}^4 \int_{N_i} (\partial_x \varphi_i)^2 = \frac{4}{3},$$

$$\int_{\Omega} (\partial_y \varphi_i)^2 = \sum_{i=1}^4 \int_{N_i} (\partial_y \varphi_i)^2 = \frac{4}{3}.$$

### Az együttthatómátrix értékei

Az együttthatómátrix elemeire az alábbi vonatkozik, ahol az  $N_k$  kis négyzetet jelöl, és  $\Omega_{ij} = \text{supp} \varphi_i \cap \text{supp} \varphi_j$ .

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega_{ij}} (p \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j) = \sum_{N_i \in \Omega_{ij}} (p \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j) = \\ &= \sum_{N_k \in \Omega_{ij}} \left( p \int_{N_k} \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \int_{N_i} \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j \right), \end{aligned}$$

mivel az  $N_k$  négyzeteken a  $p$  konstans értékű. Az alábbi táblázatban összegyűjtöttük a bázisfüggvények lehetséges egymáshoz való pozícióit, illetve a számolások részletei nélkül tartalmazza az együtttható felírásához szükséges integrálok értékeit.



Bázisfüggvények pozíciója	Bázisfüggvények ábrán	$p \int_{N_i} (\partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j + \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j)$ értéke
a bázisfüggvények tartóinak nincs metszete		0
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		4
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$\frac{8}{3}$
egymás melletti bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		-1
egymás melletti bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$-\frac{1}{3}$
egymás feletti bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		0
egymás feletti bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$-\frac{1}{3}$
átlós bázisfüggvények, a bal oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$-\frac{1}{2}$
átlós bázisfüggvények, a jobb oldalon helyezkedik el a teljes metszet		$-\frac{1}{3}$
egymásra illeszkedő bázisfüggvények, áthalad rajtuk a felezővonal		$\frac{10}{3}$
egymás feletti bázisfüggvények, áthalad rajtuk a felezővonal		$-\frac{1}{6}$

### A teljes együtthatómátrix

A különböző esetekből kapott értékek összeillesztésével kapjuk meg a teljes együtthatómátrixot.

A főátlóban lévő blokkmátrix:

$$E_p = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A 2. átlóban lévő blokkmátrix:

$$F_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A teljes együtthatómátrix:

$$\begin{bmatrix} E_p & F_p & 0 & 0 & 0 \\ F_p & E_p & F_p & 0 & 0 \\ 0 & F_p & E_p & F_p & 0 \\ 0 & 0 & F_p & E_p & F_p \\ 0 & 0 & 0 & F_p & E_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$$

### Az egyenletrendszer jobboldala

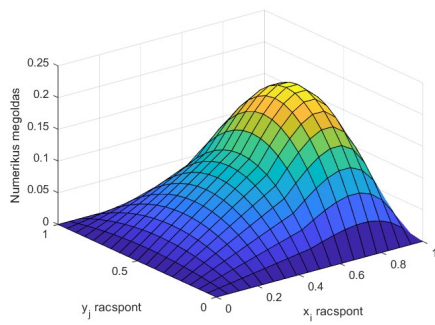
Az egyenletrendszer jobboldalának kiszámolásához felhasználjuk a 3.1.1. alfejezet és a 3.2. alfejezet eredményeit, továbbá alkalmaztuk a

$$\int_{\Omega_i} f \varphi_i \approx f(q_i) \int_{\Omega_i} \varphi_i = f(q_i) h^2$$

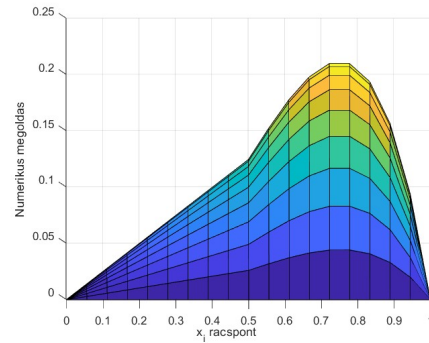
közelítést.

### 3.2.2. Numerikus megoldás

A lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a feladat numerikus megoldását. Az alábbi ábrán a numerikus megoldást láthatjuk  $N = 17$  esetén.



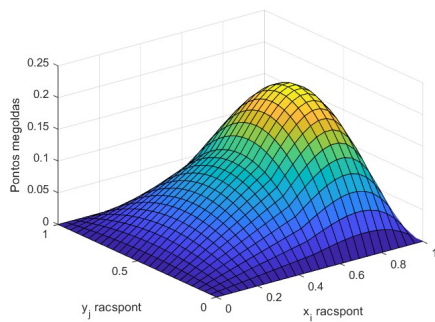
(a) Felülnézet



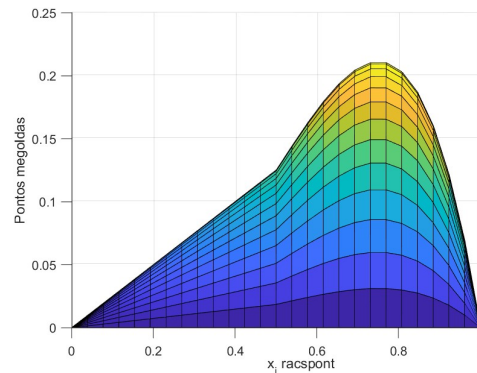
(b) Oldalnézet

12. ábra. A numerikus megoldás különböző nézetekben  $N = 17$  esetén.

A pontos megoldás  $N = 17$  esetén:



(a) Felülnézet



(b) Oldalnézet

13. ábra. A pontos megoldás különböző nézetekben  $N = 17$  esetén.

A 12b. és a 13b. ábrákon jól látható, hogy a megoldás folytonos, és  $x = 0.5$ -ben törik.

### 3.2.3. A posteriori hibabecslés konstrukciója és pontosságának vizsgálata szakadós együtthatójú PDE esetén

A posteriori hibabecslő képletet a szakadós együtthatójú feladatunk esetében is megvizsgáltuk. A 3.1.4. alfejezetben leírtaknak megfelelően jártunk el itt is, azzal a különbséggel, hogy a megfelelő részeket megszoroztuk az oda tartozó  $p$  értékekkel. A pontos megoldás ismeretében tudtunk itt is becslést adni a  $c$  hibaszorzó értékére, ezzel kaptuk az alábbi táblázatot, mely a  $c$ -re vonatkozó alsó becsléseket tartalmazza az  $N$  belső rácspontszám függvényében.

Belső rácspontok száma ( $N$ )	$c$
5	0.0070
9	0.0054
17	0.0046
33	0.0042
65	0.0040
129	0.0039
257	0.0037
513	0.0036
1025	0.0034

3. táblázat. Becslés a hibaszorzó értékére  $N$  függvényében.

#### 4. Elliptikus feladatok numerikus megoldása trilineáris végeselemekkel 3D tartományon

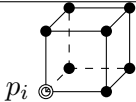
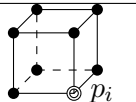
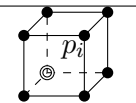
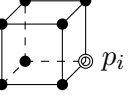
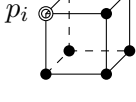
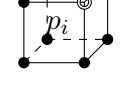
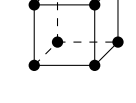
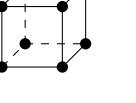
Az  $\mathbf{R}_8^3$  elemmel dolgozunk, ami a 2 dimenziós  $R_4$  elem 3 dimenziós megfelelője. Legyen  $T_k$  egy  $h$  oldalhosszú kocka  $\forall k \in \{1, \dots, M\}$  esetén,  $u|_{T_k}$  ún. trilineáris függvény, vagyis  $u|_{T_k}$

$$x, y, z \mapsto a_k + b_k x + c_k y + d_k z + e_k xy + f_k xz + g_k yz + h_k xyz$$

alakú,  $\forall k \in \{1, \dots, M\}$ . Ekkor a trianguláció mérete  $h$ . Az  $\mathbf{R}_8^3$  elem rendje 1.

##### 4.1. Poisson-egyenlet

Az alábbi táblázatban láthatjuk a bázisfüggvények képletét.

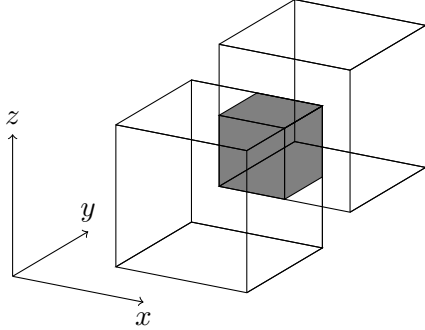
A bázisfüggvény által felvett értékek	A megfelelő bázisfüggvény képlete
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{(h-x)(h-y)(h-z)}{h^3}$
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{x(h-y)(h-z)}{h^3}$
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{y(h-x)(h-z)}{h^3}$
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{xy(h-z)}{h^3}$
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{z(h-x)(h-y)}{h^3}$
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{xz(h-y)}{h^3}$
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{yz(h-x)}{h^3}$
	$\varphi_i(x, y, z) = \frac{xyz}{h^3}$

4. táblázat. A bázisfüggvények képletei. A bal oldali oszlopban látható ábrákon teli pöttyel jelöljük, ha a bázisfüggvény által felvett érték 0, a  $p_i$  pontokban a felvett érték 1.

#### 4.1.1. Az együtthatómátrix

Négy esetet különböztetünk meg aszerint, hogy egymáshoz képest hogyan helyezkednek el a bázisfüggvények. Az ábrákon szürkével jelöljük a bázisfüggvények tartóinak metszetét.

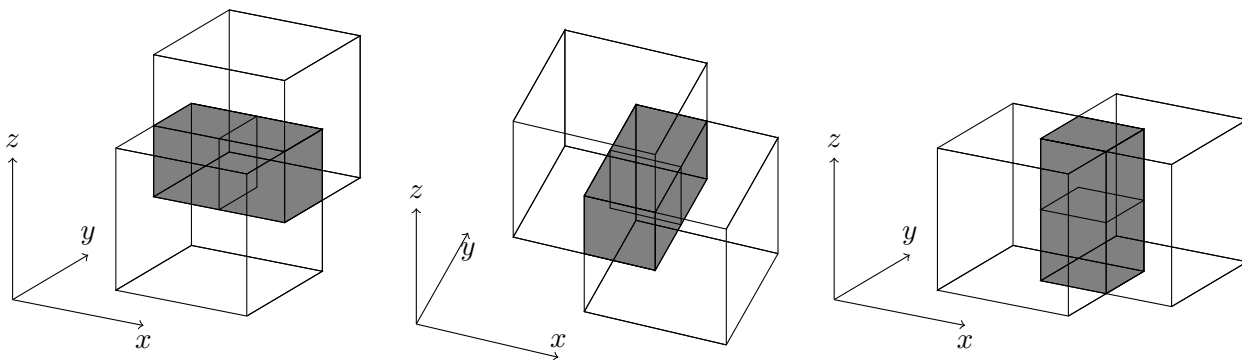
**1. eset:** A bázisfüggvények tartóinak középpontjai egy kocka szemközti csúcsaira esnek.



$$\begin{aligned}\varphi_i &= \frac{(h-x)(h-y)(h-z)}{h^3} \\ \varphi_j &= \frac{xyz}{h^3} \\ \nabla\varphi_i &= \left( \frac{-(h-y)(h-z)}{h^3}, \frac{-(h-x)(h-z)}{h^3}, \frac{-(h-x)(h-y)}{h^3} \right) \\ \nabla\varphi_j &= \left( \frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j &= \\ &= -\frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} ((h-y)(h-z)yz + (h-x)(h-z)xz + (h-x)(h-y)xy) dx dy dz = \\ &= -\frac{h}{12}\end{aligned}$$

**2. eset:** A bázisfüggvények tartóinak középpontjai egy kocka lapjának ellentétes csúcsaira esnek. Ebben az esetben a metszet egy  $h \times h \times 2h$  méretű téglalapot. Attól függően, hogy a hosszabbik oldal melyik tengely mentén helyezkedik el, megkülönböztethetnénk három esetet, ezeket ábrázolják az ábrák. Azonban mindhárom esetben ugyanaz a metszettartományon számolandó integrál értéke, mivel elforgatással a szorzatfüggvények egymásba vihetők. Az origó a bal alsó hozzánk közelebbi sarokban van.



A két bázisfüggvény tartójának  $\Omega$  metszetét felosztjuk két  $h$  oldalhosszúságú kockára ( $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ), és csak az egyikén számoljuk ki a szükséges integrált. Az  $\Omega_1$  kockán felírjuk a bázisfüggvények képletét.

$$\begin{aligned}\varphi_i(x, y, z) &= \frac{x(h-y)(h-z)}{h^3} \\ \varphi_j(x, y, z) &= \frac{xyz}{h^3} \\ \nabla\varphi_i &= \left( \frac{(h-y)(h-z)}{h^3}, \frac{-x(h-z)}{h^3}, \frac{-x(h-y)}{h^3} \right) \\ \nabla\varphi_j &= \left( \frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3} \right)\end{aligned}$$

Ezek felhasználásával az  $\Omega_1$  kockán kiszámoljuk a gradiensek szorzatának integrálját.

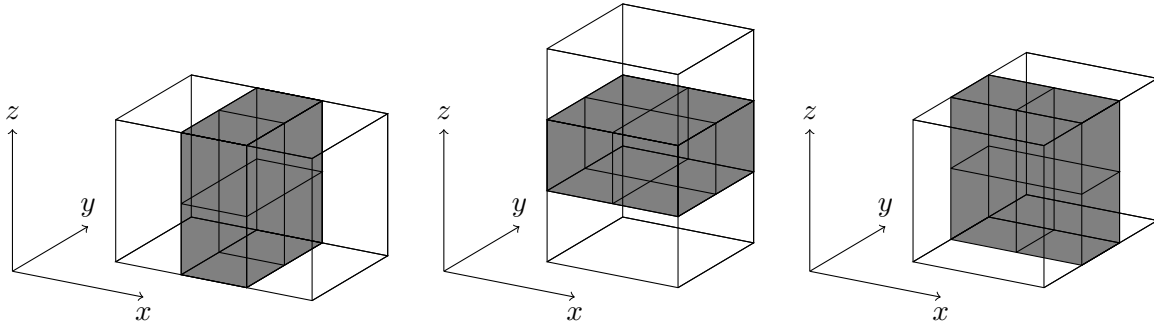
$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j &= \\ &= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} (yz(h-y)(h-z) - x^2z(h-z) - x^2y(h-y)) \, dx \, dy \, dz = -\frac{h}{12}\end{aligned}$$

Szimmetriai megfontolásokból az integrál  $\Omega_2$  kockán is ugyanennyi, azaz

$$\int_{\Omega_2} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \int_{\Omega_1} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = -\frac{h}{12} \quad , \text{ így}$$

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = -\frac{h}{6}.$$

**3. eset** A bázisfüggvények tartóinak középpontjai egy kocka élének szomszédos csúcsaira esnek. Ebben az esetben a metszet egy  $h \times 2h \times 2h$  méretű téglalest. Attól függően, hogy a rövidebbik oldal melyik tengely mentén helyezkedik el, megkülönböztethetnénk három esetet, ezeket ábrázolják az ábrák.



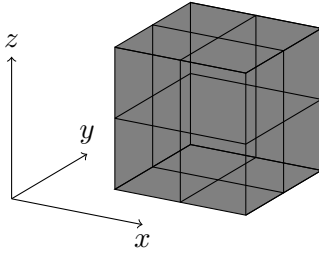
A két bázisfüggvény tartójának  $\Omega$  metszetét felosztjuk négy  $h$  oldalhosszúságú kockára ( $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ ), és csak az egyiket számoljuk ki a szükséges integrált. Az  $\Omega_1$  kockán felírjuk a bázisfüggvények képletét.

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \frac{yz(h-x)}{h^3} \\ \varphi_j &= \frac{xyz}{h^3} \\ \nabla\varphi_i &= \left(-\frac{yz}{h^3}, \frac{z(h-x)}{h^3}, \frac{y(h-x)}{h^3}\right) \\ \nabla\varphi_j &= \left(\frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3}\right)\end{aligned}$$

Ezek felhasználásával az  $\Omega_1$  kockán kiszámoljuk a gradiensek szorzatának integrálját.

$$\int_{\Omega_1} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} (-y^2z^2 + xz^2(h-x) + xy^2(h-x)) dx dy dz = 0$$

**4. eset** A bázisfüggvények tartóinak középpontjai egybeesnek. Ebben az esetben a metszet egy  $2h \times 2h \times 2h$  méretű téglatest.



$$\begin{aligned}\varphi_i = \varphi_j &= \frac{xyz}{h^3} \\ \nabla\varphi_i = \nabla\varphi_j &= \left(\frac{xz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3}\right)\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_1} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} (y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2) dx dy dz = \frac{h}{3}$$



## A teljes együtthatómátrix

A különböző esetekből kapott értékek összeillesztésével kapjuk meg a teljes együtthatómátrixot. A végső együtthatómátrix blokkmátrix, mely az alábbi blokkokból tevődik össze.

A főatlóban lévő blokkmátrix:

$$D = \text{diag}\left(\frac{8}{3}\right) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

2. blokk:

$$B = \text{tridiag}\left(-\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}\right) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

3. blokk:

$$C = \text{tridiag}\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

4. blokk:

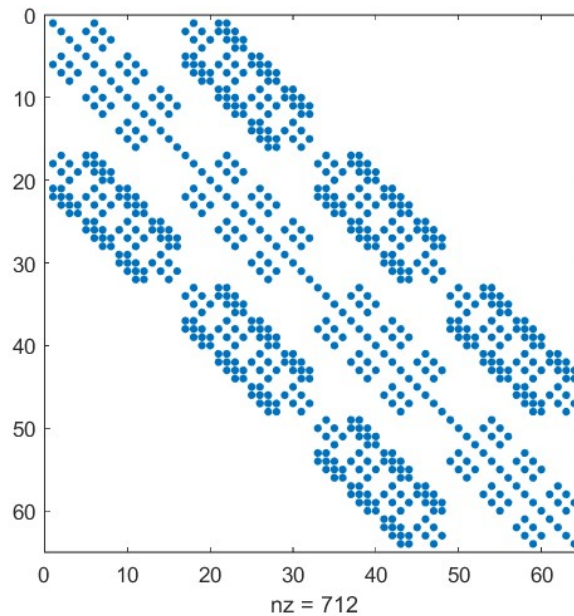
$$S := \text{blokktridiag}(B, D, B)$$

5. blokk:

$$R := \text{blokktridiag}(C, B, C)$$

A teljes együtthatómátrix:

$$A_h = h \cdot \text{blokktridiag}(R, S, R)$$



14. ábra. Az együtthatómátrix nemnulla elemei  $N = 4$  esetén.

#### 4.1.2. A numerikus megoldás

A kiszámolt együtthatómátrix alkalmazásával megoldjuk az alábbi feladatot.

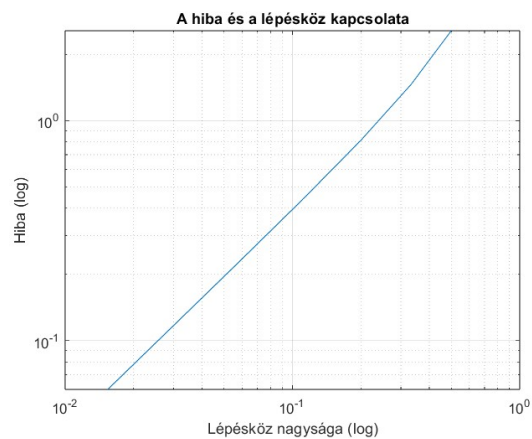
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ f(x, y, z) = 3\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \end{cases}$$

A fenti feladat megoldása  $u(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$ . Mivel ismerjük a pontos megoldást, így ki tudjuk számolni a közelítés hibáját. A hibát  $H_0^1$  normában számoljuk.

#### 4.1.3. A közelítés hibája abszolútértékben

N	Hiba abszolútértékben
1	2.5637
2	1.4641
4	0.8137
8	0.4391
16	0.2303
32	0.1183
64	0.0600

5. táblázat. Az abszolútértékes hiba nagysága a rácspontok számának függvényében



15. ábra. Loglog ábra a lépésköz és a hiba kapcsolatáról

#### 4.1.4. A posteriori hibabecslés konstrukciója és pontosságának vizsgálata

A hibabecslő képlet 3 dimenzióban megegyezik a 2 dimenziós képlettel. Ezt alátámasztja a [3] cikk.

$$|u_h - u^*|_1^2 \leq c \left( \sum_K h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_N h_N \|[\partial_\nu u_h]\|^2 \right)$$

A képletben szereplő  $K$  egységkockákat, az  $N$  két egységkocka metszeteként előálló négyzetét jelöli. A  $h_K$  és  $h_N$  hosszparaméterek oldalhosszokat jelölnek, a mi esetünkben ezek egységesen  $h$  értékűek voltak. Az általános képletben az  $\|f\|_{L^2(K)}^2$  helyett  $\|Lu_h - f\|_{L^2(K)}^2$  szerepel, azonban  $Lu_h = 0$  minden cellán, így az egyszerűbb alakkal számolhatunk. Az alábbiakban a 2D-vel analóg módon haladunk, de a kiszámítás összetettebb.

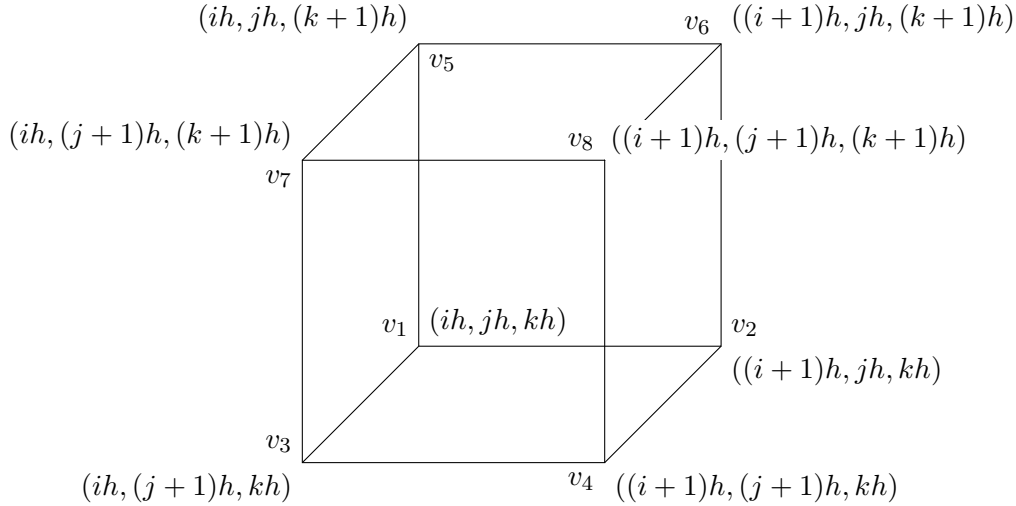
#### Értékek a négyzeteken

Minden egymás melletti két kocka metszetében lévő négyzetre kiszámoljuk a  $\|[\partial_\nu u_h]\|^2$  értéket, ezt az ugrás négyzetes integráljának nevezzük, ennek részleteit a következőkben olvashatjuk.

Illesszünk minden kockában a csúcspontokban felvett értékekre illeszkedő

$$u_h(x, y, z) = a_T + b_T x + c_T y + d_T z + e_T xy + f_T xz + g_T yz + h_T xyz$$

paraméterű polinomot. Az alábbi ábrán szemléltetjük a csúcspotok koordinátáit és az ott felvett értékeket.



A  $u_h$  polinomba behelyettesítjük az egyik kocka  $v_1, \dots, v_8$  csúcspontjainak koordinátáit, és így az adott pontbeli közelített értékeket kapjuk. Ezt felhasználva minden kockára fel tudunk írni egy 8 egyenletről álló egyenletrendszer, amely megoldásával kapjuk a kockára vonatkozó polinom paramétereit. A felírható egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_T + b_T i h + c_T j h + d_T k h + e_T i j h^2 + f_T i k h^2 + g_T j k h^2 + h_T i j k h^3 \\
v_2 &= a_T + b_T (i + 1) h + c_T j h + d_T k h + e_T (i + 1) j h^2 + f_T (i + 1) k h^2 + g_T j k h^2 + \\
&\quad + h_T (i + 1) j k h^3 \\
v_3 &= a_T + b_T i h + c_T (j + 1) h + d_T k h + e_T i (j + 1) h^2 + f_T i k h^2 + g_T (j + 1) k h^2 + \\
&\quad + h_T i (j + 1) k h^3 \\
v_4 &= a_T + b_T (i + 1) h + c_T (j + 1) h + d_T k h + e_T (i + 1) (j + 1) h^2 + f_T (i + 1) k h^2 + \\
&\quad + g_T (j + 1) k h^2 + h_T (i + 1) (j + 1) k h^3 \\
v_5 &= a_T + b_T i h + c_T j h + d_T (k + 1) h + e_T i j h^2 + f_T i (k + 1) h^2 + g_T j (k + 1) h^2 + \\
&\quad + h_T i j (k + 1) h^3 \\
v_6 &= a_T + b_T (i + 1) h + c_T j h + d_T (k + 1) h + e_T (i + 1) j h^2 + f_T (i + 1) (k + 1) h^2 + \\
&\quad + g_T j (k + 1) h^2 + h_T (i + 1) j (k + 1) h^3 \\
v_7 &= a_T + b_T i h + c_T (j + 1) h + d_T (k + 1) h + e_T i (j + 1) h^2 + f_T i (k + 1) h^2 + \\
&\quad + g_T (j + 1) (k + 1) h^2 + h_T i (j + 1) (k + 1) h^3 \\
v_8 &= a_T + b_T (i + 1) h + c_T (j + 1) h + d_T (k + 1) h + e_T (i + 1) (j + 1) h^2 + \\
&\quad + f_T (i + 1) (k + 1) h^2 + g_T (j + 1) (k + 1) h^2 + h_T (i + 1) (j + 1) (k + 1) h^3
\end{aligned}$$

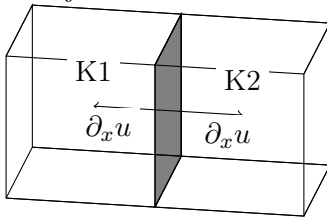
Ezt az egyenletrendszert minden egységkockán felírjuk és megoldjuk, így minden kockára megkapjuk az  $a_T, \dots, h_T$  paramétereket. Ezek felhasználásával minden kockán ki tudjuk számolni az iránymenti deriváltakat.

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= b_T + e_T y + f_T z + h_T y z \\
\partial_y u &= c_T + e_T x + g_T z + h_T x z \\
\partial_z u &= d_T + f_T x + g_T y + h_T x y
\end{aligned}$$

Az iránymenti deriváltak segítségével tudjuk kiszámolni az ugrás négyzetének integrálját. A metszet pozíciójától függően három esetet különböztetünk meg. A 2. és 3. esetet visszavezetjük az 1. esetre. Általánosan az alsó indexben szereplő 1-es az adott tengely mentén vett kisebb koordinátájú kockára vonatkozik.

### 1. eset: a kockák az $x$ -tengely mentén helyezkednek el egymás mellett

A  $\partial_x u$  iránymenti deriváltat tekintjük. Mutasson az alsó indexben szereplő 1-es a bal oldali, a 2-es a jobb oldali kockára vonatkozó értékekre.



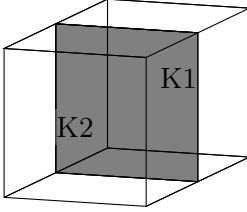
A  $K_1$ , azaz a bal oldali kockán az  $\partial_x u$  értéke  $b_1 + e_1 y + f_1 z + h_1 y z$ . Hasonlóan a  $K_2$ , azaz a jobb oldali kockán az  $\partial_x u$  értéke  $b_2 + e_2 y + f_2 z + h_2 y z$ . Így kapjuk, hogy a  $K_1$  és a  $K_2$  kockák  $[jh, (j+1)h] \times [kh, (k+1)h]$  paraméterű metszetén

$$\|[\partial_\nu u_h]\|^2 = \int_{kh}^{(k+1)h} \int_{jh}^{(j+1)h} (b_2 + e_2 y + f_2 z + h_2 y z - b_1 - e_1 y - f_1 z - h_1 y z)^2 dy dz.$$

A 2. és 3. esetben hasonló gondolatmenettel kapjuk meg a keresett értéket.

## 2. eset: a kockák az $y$ -tengely mentén helyezkednek el egymás mellett

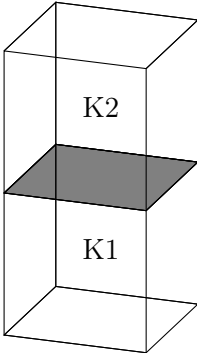
A  $\partial_y u$  iránymenti deriváltat tekintjük. Mutasson az alsó indexben szereplő 1-es a tőlünk távolabbi, a 2-es a hozzánk közelebbi kockára. Jelölje  $[ih, (i+1)h] \times [kh, (k+1)h]$  négyzet a  $K_1$  és a  $K_2$  kockák metszetét.



$$\|[\partial_\nu u_h]\|^2 = \int_{kh}^{(k+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} (c_2 + e_2 x + g_2 z + h_2 x z - c_1 - e_1 x - g_1 z - h_1 x z)^2 dx dz$$

## 3. eset: a kockák a $z$ -tengely mentén helyezkednek el egymás mellett

A  $\partial_z u$  iránymenti deriváltat tekintjük. Mutasson az alsó indexben szereplő 1-es az alsó, a 2-es a felső kockára. Jelölje  $[ih, (i+1)h] \times [kh, (k+1)h]$  négyzet a  $K_1$  és a  $K_2$  kockák metszetét.



$$\|[\partial_\nu u_h]\|^2 = \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} (d_2 + f_2 x + g_2 y + h_2 x y - d_1 - f_1 x - g_1 y - h_1 x y)^2 dx dy$$

A különböző esetekben kapott  $\|[\partial_\nu u_h]\|^2$  pontos értékét a B függelékben olvashatjuk.

## Értékek a kockákon

A képletben szereplő  $\|f\|_{L^2(K)}^2$  értéket minden kis kockán kiszámoljuk. Egy tetszőleges  $K = [ih, (i+1)h] \times [jh, (j+1)h] \times [kh, (k+1)h]$  kockán az  $\|f\|_{L^2(K)}^2$  értéke

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(K)}^2 &= \int_{kh}^{(k+1)h} \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} |f|^2 dx dy dz = \\ &= \frac{9}{64} \pi (2\pi(p-q) - \sin(2\pi p) + \sin(2\pi q)) (2\pi(r-s) - \sin(2\pi r) + \sin(2\pi s)) (2\pi(w-u) + \\ &\quad + \sin(2\pi u) - \sin(2\pi w)), \end{aligned}$$

ahol  $p = ih$ ,  $q = (i+1)h$ ,  $r = jh$ ,  $s = (j+1)h$ ,  $u = kh$ ,  $w = (k+1)h$ .

## A $c$ hibaszorzó értéke a rácspontok számának függvényében

A fenti lépések elvégzésével ki tudjuk számolni a hibabecslő képlet jobb oldalán szereplő összeg értékét. Mivel ismerjük a becslés hibáját, tudunk becslést mondani  $c$ -re.

$$\frac{|u_h - u^*|_1^2}{\sum_K h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_N h_N \|[\partial_\nu u_h]\|^2} \leq c$$

Különböző  $N$  esetén a következő alsó becsléseket tudjuk felírni  $c$ -re.

Belső rácspontok száma ( $N$ )	$c$
4	<b>0.1094</b>
8	0.1058
16	0.1046
32	0.1043
42	0.1042
50	0.1042

6. táblázat. Alsó ecslés  $c$ -re a 3 dimenziós Laplace-operátoros feladat esetén.

A kiszámolt  $c$  értékek közül  $c = 0.1094$  a maximum, így a hibabecslő képletben a későbbiek során ezt használjuk.

## 4.2. Szakadásos együtthatójú PDE

### A vizsgált feladat

Az eddig vizsgált Laplace-operátoros feladatot az alábbiak szerint módosítjuk. Az értelmezési tartomány valamilyen kezdeti felosztása mellett tekintsünk egy függvényt, mely minden kis kockán felvesz különböző  $p_i$  értékeket, ahol  $i$  befutja a kockákat. Mi  $N_0 = 4$  kezdeti felosztás mellett adtuk meg az együtthatókat. Tároljuk el ezeket az együtthatókat egy

$P_0 \in \{p_1, \dots, p_i\}^{(N_0+1) \times (N_0+1) \times (N_0+1)}$  mátrixban. Ennek segítségével felírható az új feladat  $P$  együtthatómátrixa. A  $P$  mátrix  $N = 4$  esetén megegyezik  $P_0$ -lal, 4-nél nagyobb  $N$  rácspontszám esetén pedig a megfelelő  $p_i$  érték sokszorosításával töltjük fel a kapott kockákat, vagyis vesszük a  $P_0$  és az  $\mathbf{1}_{\frac{N}{N_0} \times \frac{N}{N_0} \times \frac{N}{N_0}}$  mátrixok Kronecker-szorzatát, ahol az  $\mathbf{1}_{\frac{N}{N_0} \times \frac{N}{N_0} \times \frac{N}{N_0}}$  egy olyan  $\frac{N}{N_0} \times \frac{N}{N_0} \times \frac{N}{N_0}$  méretű mátrixot jelöl, melynek minden eleme egy.

#### 4.2.1. Az együtthatómátrix

Szeretnénk a 4.1.1. részben leírt  $A_h$  együtthatómátrixot  $P$  felhasználásával úgy átalakítani, hogy az új feladat megoldásához szükséges  $A_h^P$  együtthatómátrixot kapjuk.

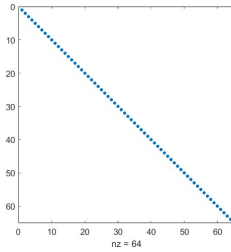
Tekintsünk egy tetszőleges  $q_k$  bázisfüggvényt, ahol  $k \in \{1, \dots, N^3\}$ . A  $k$  index felhasználásával fel tudjuk írni  $q_k$  koordinátáit.

- A  $q_k$  középpont  $x$ -koordinátája:  $k \bmod N$ ,
- A  $q_k$  középpont  $y$ -koordinátája:  $\lceil \frac{k}{N} \rceil \bmod N$ ,
- A  $q_k$  középpont  $z$ -koordinátája:  $\lceil \frac{k}{N^2} \rceil \bmod N$ .

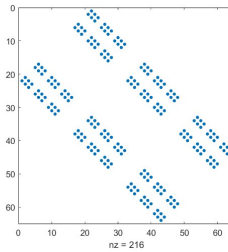
Tehát  $k$ -ből ismerjük  $q_k(x_k, y_k, z_k)$ -t.

A bázisfüggvények tartóinak metszetén vett integrálok négy különböző értéket vehettek fel. Ezekben az esetekben a tartók metszete lehetett egy darab  $h$  oldalhosszú kocka (ekkor az együttható  $-\frac{h}{12}$  volt), két darab  $h$  oldalhosszú kocka uniója (ekkor az együttható  $-\frac{h}{6}$  volt), négy darab  $h$  oldalhosszú kocka uniója (ekkor az együttható 0 volt), vagy pedig nyolc darab  $h$  oldalhosszú kocka uniója (ekkor az együttható  $\frac{8h}{3}$  volt).

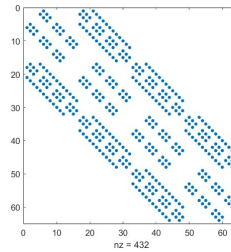
Vizsgáljuk meg az  $A_h$  mátrix nemnulla elemű átlói és a releváns bázisfüggvények egymáshoz való pozícióinak kapcsolatát! Az átlóbeli elemek értékei alapján be tudjuk csoportosítani az  $A_h$  átlóit.



(a) A főátlóban végig  $\frac{8h}{3}$  szerepel.



(b) Ebben a nyolc átlóban végig  $-\frac{h}{12}$  szerepel.



(c) Ebben a tizenkét átlóban  $-\frac{h}{6}$  szerepel.

16. ábra.  $A_h$  átlói az értékeik alapján csoportosítva  $N = 4$  mellett.

- Azzal az esettel, mikor négy kis kocka uniója a metszet, nem kell foglalkoznunk, mivel ezt bármivel beszorozva is 0-t kapunk.
- A főátló elemei azon eseteknek felelnek meg, mikor a metszet nyolc darab kis kockából áll, vagyis a két bázisfüggvény tartójának középpontja egybeesik. Ilyenkor az érintett nyolc kockára vonatkozó  $p_i$ -k számtani közepével fogjuk megszorozni a főátló megfelelő

elemét. Ezt mindegyik főátlóbeli elemre elvégezzük, így kapjuk az  $A_h^P$  együtthatómátrix főátlóbeli elemeit.

- A második ábrán látható átlók annak az esetnek felelnek meg, mikor a metszet egy darab kis kockából áll. Ilyenkor csak a metszet által meghatározott kocka  $p_i$  értékével kell megszoroznunk az  $A_h$  mátrix megfelelő elemét. Az alábbi táblázat a különböző pozíciójú középpontok koordinátái, az együtthatómátrix átlói illetve a megfelelő  $p$  értékek közötti kapcsolatot tartalmazza. Az érintett  $p$  értékeket ugyanolyan sorrendben vesszük, amilyen sorrendben a nekik megfelelő középpont-párok vannak a megfelelő átlóban, így be tudjuk szorozni a  $p$ -kel az együtthatómátrix elemeit. A mátrixátlókat 0-tól indexeljük, vagyis a főátló a 0. átlónak számít.

A középpontok koordinátái közötti kapcsolat	$A_h$ hanyadik átlója	A metszet által érintett $p$ érték
$x_j = x_i + 1, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_j = z_i + 1$	$N^2 + N + 1$	$P(x_i + 1, y_i + 1, z_i + 1)$
$x_j = x_i - 1, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_j = z_i + 1$	$N^2 + N - 1$	$P(x_i, y_i + 1, z_i + 1)$
$x_j = x_i + 1, \quad y_j = y_i - 1, \quad z_j = z_i + 1$	$(N - 1)N + 1$	$P(x_i + 1, y_i, z_i + 1)$
$x_j = x_i - 1, \quad y_j = y_i - 1, \quad z_j = z_i + 1$	$(N - 1)N - 1$	$P(x_i, y_i, z_i + 1)$
$x_j = x_i + 1, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_j = z_i - 1$	$-(N - 1)N + 1$	$P(x_i + 1, y_i + 1, z_i)$
$x_j = x_i - 1, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_j = z_i - 1$	$-(N - 1)N - 1$	$P(x_i, y_i + 1, z_i)$
$x_j = x_i + 1, \quad y_j = y_i - 1, \quad z_j = z_i - 1$	$-N^2 - N + 1$	$P(x_i + 1, y_i, z_i)$
$x_j = x_i - 1, \quad y_j = y_i - 1, \quad z_j = z_i - 1$	$-N^2 - N - 1$	$P(x_i, y_i, z_i)$

7. táblázat. A bázisfüggvények metszete egy darab kocka.

Mivel  $a \geq 1$ , ezért  $b = a + 1 \geq 2$ , ahol  $a, b$  jelöli az  $x_i, x_j$  változókat valamilyen kombinációban. Ugyanígy  $a \leq N$ , ezért  $b = a - 1 \leq N - 1$ . Tehát a fenti esetekben az érintett értékei a  $P$  mátrixnak a  $\{P(p_1, p_2, p_3) \mid p_1, p_2, p_3 \in \{2, \dots, N\}\}$ .

- A harmadik ábrán látható átlók annak az esetnek felelnek meg, mikor a metszet két darab kis kockából áll. Ilyenkor a metszet által meghatározott két kocka  $p_i$  értékeinek számtani közepével kell megszoroznunk az  $A_h$  mátrix megfelelő elemét.



A középpontok közötti kapcsolat	$A_h$ hanyadik átlója	A metszet által érintett $p$ érték
$x_i = x_j + 1, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_i = z_j$	$N - 1$	$\frac{P(x_i, y_i + 1, z_i) + P(x_i, y_i + 1, z_i + 1)}{2}$
$x_j = x_i + 1, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_i = z_j$	$N + 1$	$\frac{P(x_i + 1, y_i + 1, z_i) + P(x_i + 1, y_i + 1, z_i + 1)}{2}$
$x_i = x_j + 1, \quad y_i = y_j + 1, \quad z_i = z_j$	$-N - 1$	$\frac{P(x_i, y_i, z_i) + P(x_i, y_i, z_i + 1)}{2}$
$x_j = x_i + 1, \quad y_i = y_j + 1, \quad z_i = z_j$	$-N + 1$	$\frac{P(x_i + 1, y_i, z_i) + P(x_i + 1, y_i, z_i + 1)}{2}$
$x_i = x_j + 1, \quad y_i = y_j, \quad z_j = z_i + 1$	$N^2 - 1$	$\frac{P(x_i, y_i, z_i + 1) + P(x_i, y_i + 1, z_i + 1)}{2}$
$x_j = x_i + 1, \quad y_i = y_j, \quad z_j = z_i + 1$	$N^2 + 1$	$\frac{P(x_i + 1, y_i, z_i + 1) + P(x_i + 1, y_i + 1, z_i + 1)}{2}$
$x_i = x_j + 1, \quad y_i = y_j, \quad z_i = z_j + 1$	$-N^2 - 1$	$\frac{P(x_i, y_i, z_i) + P(x_i, y_i + 1, z_i)}{2}$
$x_j = x_i + 1, \quad y_i = y_j, \quad z_i = z_j + 1$	$-N^2 + 1$	$\frac{P(x_i + 1, y_i, z_i) + P(x_i + 1, y_i + 1, z_i)}{2}$
$x_i = x_j, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_j = z_i + 1$	$N^2 + N$	$\frac{P(x_i, y_i + 1, z_i + 1) + P(x_i + 1, y_i + 1, z_i + 1)}{2}$
$x_i = x_j, \quad y_i = y_j + 1, \quad z_j = z_i + 1$	$N^2 - N$	$\frac{P(x_i, y_i, z_i + 1) + P(x_i + 1, y_i, z_i + 1)}{2}$
$x_i = x_j, \quad y_j = y_i + 1, \quad z_i = z_j + 1$	$-N^2 - N$	$\frac{P(x_i, y_i + 1, z_i) + P(x_i + 1, y_i + 1, z_i)}{2}$
$x_i = x_j, \quad y_i = y_j + 1, \quad z_i = z_j + 1$	$-N^2 + N$	$\frac{P(x_i, y_i, z_i) + P(x_i + 1, y_i, z_i)}{2}$

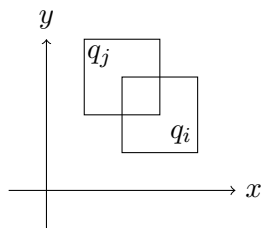
8. táblázat. A bázisfüggvények metszete két darab kocka.

A táblázat első négy sorában a  $z$ -tengely mentén, azaz egymás felett, a második négy sorban a  $y$ -tengely mentén, az utolsó négy sorban pedig a  $x$ -tengely mentén vannak egymás mellett a metszetben a kockák.

Részletesebben ábrázoljuk a bázisfüggvények pozícióját (rögzített  $z$  mentén,  $q_i, q_j$ -re illeszkedő síkon ábrázolva) abban a négy esetben, mikor a két kocka egymáson van, azaz a  $z$ -tengely mentén vannak egymás mellett.

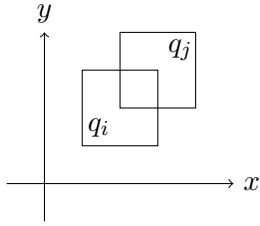
1.  $(j - i) = (N - 1)$

$j > i$ , vagyis a főátló feletti átló. Az  $A_h$  mátrix  $(N - 1)$ . átlója.

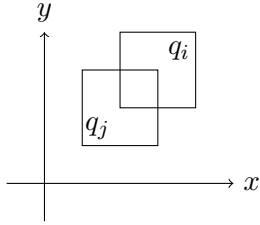


2.  $(j - i) = (N + 1)$

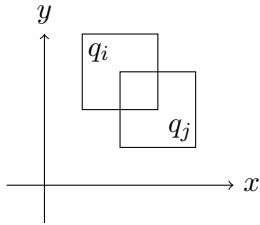
$j > i$ , vagyis a főátló feletti átló. Az  $A_h$  mátrix  $(N + 1)$ . átlója.



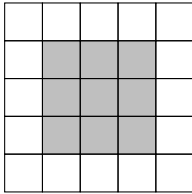
3.  $(i - j) = (N + 1)$   
 $i > j$ , vagyis a főátló alatti átló. Az  $A_h$  mátrix  $(-N - 1)$ . átlója.



4.  $(i - j) = (N - 1)$   
 $i > j$ , vagyis a főátló alatti átló. Az  $A_h$  mátrix  $(-N + 1)$ . átlója.



A fenti négy esetben a  $P$  ugyanazon részei érintettek. Az alábbi ábra mutatja a  $P$ -nek azon érintett részeit, ahol lehet a metszet (fix  $z$  rétegen nézve).



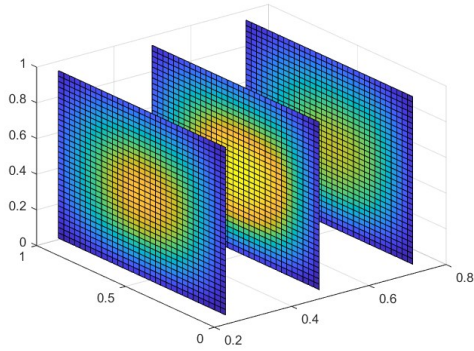
Tehát a metszetekre számolandó átlagok:

$$P(2 : N, 2 : N, 1 : N) + P(2 : N, 2 : N, 2 : N + 1).$$

#### 4.2.2. A porteriori hibabecslés alkalmazása ismeretlen megoldású feladatokra

A fent leírt általános feladat megoldását közelítjük a végeselem-módszer alkalmazásával különböző  $P$  paraméterek mellett. Mivel nem ismerjük a feladat pontos megoldását, így a posteriori hibabecslő képletet használjuk a 4.1.4. alfejezetben kiszámolt  $c$  paraméterrel. A képletből a négyzetes hiba felső becslését kapjuk meg, a gyökfüggvénnyel ebből számoltuk a hiba felső becslését.

Három különböző esetre futtatunk hibabecslést. Az első esetben a felvett értékek halmaza az  $\{1, 2\}$  volt, és a 2-es értékeket a kocka belsejére koncentráltuk, tehát a belső  $3 \times 3 \times 3$ -as kockán a  $P_0$  mátrix 2, máshol 1 értékű.

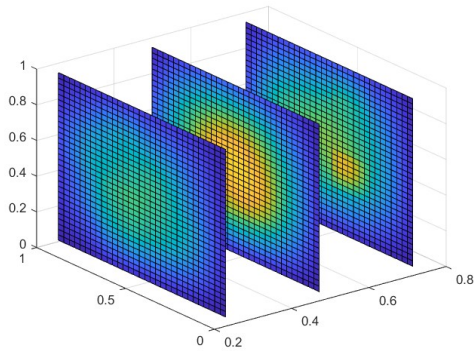


17. ábra. A közelítő megoldás értékei az  $x = 8h$ ,  $x = 16h$ ,  $x = 24h$  rétegeken  $N = 32$  mellett.

$N$	A hiba felső becslése	Relatív hiba
4	0.8664	1
8	0.4904	0.5661
16	0.2772	0.3199
32	0.1623	0.1874
64	0.1004	0.1159

18. ábra. A hiba felső becslése  $N$  függvényében középen koncentrált  $p_i = 2$  mellett.

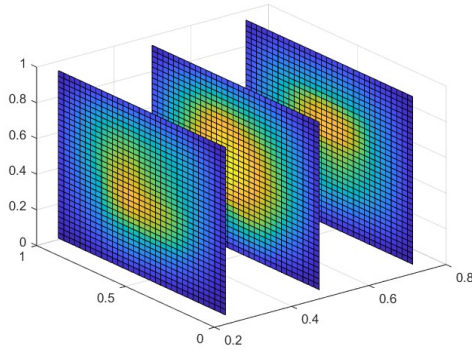
A másik két esetben random generáltuk a  $P_0$  mátrixot. A különbség a felvett értékek halmazában van, az egyik esetben  $\{1, 2\}$ , a másik esetben  $\{1, \dots, 6\}$  volt.



19. ábra. A közelítő megoldás értékei az  $x = 8h$ ,  $x = 16h$ ,  $x = 24h$  rétegeken  $N = 32$  mellett.

$N$	A hiba felső becslése	Relatív hiba
4	0.7333	1
8	0.4169	0.5685
16	0.2336	0.3186
32	0.1452	0.1981
64	0.0808	0.1102

20. ábra. A hiba felső becslése  $N$  függvényében  $p_i \in \{1, 2\}$  esetén.



21. ábra. A közelítő megoldás értékei az  $x = 8h$ ,  $x = 16h$ ,  $x = 24h$  rétegeken  $N = 32$  mellett.

$N$	A hiba felső becslése	Relatív hiba
4	0.7343	1
8	0.4212	0.5736
16	0.2412	0.3285
32	0.1444	0.1966
64	0.0924	0.1259

22. ábra. A hiba felső becslése  $N$  függvényében  $p_i \in \{1, \dots, 6\}$  esetén.

Az fenti táblázatokból jól látszik, hogy  $N$  növelésével a hiba 0-ba tart minden esetben. Továbbá megfigyelhető, hogy a relatív hiba nagyobb, ha a  $p_i$ -k nagyobb értékeket is felvehetnek. A hiba lassabb  $O(h)$ -nál, de utóbbi nem is várható, mert a megoldás nincs  $H^2$ -ben. Ld. 1.0.9. tétel.

# Függelékek

## A. A 3D-s Poisson-együtthatómátrix elemeinek kiszámolása

$$1. \varphi_i = \frac{(h-x)(h-y)(h-z)}{h^3}; \quad \varphi_j = \frac{xyz}{h^3}$$

$$\nabla\varphi_i = \left( \frac{hz+hy-h^2-yz}{h^3}, \frac{hz+hx-h^2-xz}{h^3}, \frac{hy+hx-h^2-xy}{h^3} \right); \quad \nabla\varphi_j = \left( \frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3} \right)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \\ &= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} hyz^2 + hy^2z - h^2yz - y^2z^2 + hxz^2 + hx^2z - h^2xz - x^2z^2 + \\ &+ hxy^2 + hx^2y - h^2xy - x^2y^2 \, dx \, dy \, dz = \\ &= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \left[ hxyz^2 + hxy^2z - h^2xyz - xy^2z^2 + \frac{hx^2z^2}{2} + \frac{hx^3z}{3} - \frac{h^2x^2z}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^3z^2}{3} + \frac{hx^2y^2}{2} + \frac{hx^3y}{3} - \frac{h^2x^2y}{2} - \frac{x^3y^2}{3} \right]_{x=0}^h \, dy \, dz = \\ &= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} h^2yz^2 + h^2y^2z - h^3yz - hy^2z^2 + \frac{h^3z^2}{6} - \frac{h^4z}{6} + \frac{h^3y^2}{6} - \frac{h^4y}{6} \, dy \, dz = \\ &= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \left[ \frac{hy^2z^2}{2} + \frac{h^2y^3z}{3} - \frac{h^3y^2z}{2} - \frac{hy^3z^2}{3} + \frac{h^3yz^2}{6} - \frac{h^4yz}{6} + \frac{h^3y^3}{18} - \frac{h^4y^2}{12} \right]_{y=0}^h \, dz \\ &= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \frac{h^4z^2}{3} - \frac{h^5z}{3} - \frac{h^6}{36} \, dz = \frac{1}{h^6} \left[ \frac{h^4z^3}{9} - \frac{h^5z^2}{6} - \frac{h^6z}{36} \right]_{z=0}^h = -\frac{h}{12} \end{aligned}$$

$$2. \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

$\Omega_1$

$$\varphi_i(x, y, z) = \frac{x(h-y)(h-z)}{h^3}; \quad \varphi_j(x, y, z) = \frac{xyz}{h^3}$$

$$\nabla\varphi_i = \left( \frac{(h-y)(h-z)}{h^3}, \frac{-x(h-z)}{h^3}, \frac{-x(h-y)}{h^3} \right); \quad \nabla\varphi_j = \left( \frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \\
&= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} (yz(h-y)(h-z) - x^2z(h-z) - x^2y(h-y)) \, dx \, dy \, dz = \\
&= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} (h^2yz - h yz^2 - h y^2z + y^2z^2 - h x^2z + x^2z^2 - h x^2y + x^2y^2) \, dx \, dy \, dz = \\
&= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \left[ h^2xyz - hxyz^2 - hxy^2z + xy^2z^2 - \frac{hx^3z}{3} + \frac{x^3z^2}{3} - \frac{hx^3y}{3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^3y^2}{3} \right]_{x=0}^h \, dy \, dz = \\
&= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} (h^3yz - h^2yz^2 - h^2y^2z + hy^2z^2 - \frac{h^4z}{3} + \frac{h^3z^2}{3} - \frac{h^4y}{3} + \frac{h^3y^2}{3}) \, dy \, dz = \\
&= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \left[ \frac{h^3y^2z}{2} - \frac{h^2y^2z^2}{2} - \frac{h^2y^3z}{3} + \frac{hy^3z^2}{3} - \frac{h^4yz}{3} + \frac{h^3yz^2}{3} - \frac{h^4y^2}{6} + \frac{h^3y^3}{9} \right]_{y=0}^h \, dz = \\
&= \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \left( -\frac{h^5z}{6} + \frac{h^4z^2}{6} - \frac{h^6}{18} \right) dz = \frac{1}{h^6} \left[ -\frac{h^5z^2}{12} + \frac{h^4z^3}{18} - \frac{h^6z}{18} \right]_{z=0}^h = -\frac{h}{12}
\end{aligned}$$

Szimmetriai megfontolásokból  $\int_{\Omega_2} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = -\frac{h}{12}$ , így

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = -\frac{h}{6}$$

3.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$\Omega_1$

$$\varphi_i = \frac{yz(h-x)}{h^3}; \quad \varphi_j = \frac{xy(h-z)}{h^3}$$

$$\nabla \varphi_i = (-yz, z(h-x), y(h-x)); \quad \nabla \varphi_j = (y(h-z), x(h-z), -xy)$$

Szimmetriai okokból ez az eset visszavezethető a 2. esetre, mivel a három szorzótényezőből kettő ellentétes.

4.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$\Omega_1$

$$\varphi_i = \frac{z(h-x)(h-y)}{h^3}; \quad \varphi_j = \frac{xyz}{h^3}$$

$$\nabla \varphi_i = \left( -\frac{z(h-y)}{h^3}, -\frac{z(h-x)}{h^3}, \frac{(h-x)(h-y)}{h^3} \right); \quad \nabla \varphi_j = \left( \frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3} \right)$$

Szimmetriai okokból ez az eset visszavezethető a 2. esetre, mivel a három szorzótényezőből kettő ellentétes.

5.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$

$\Omega_2$

$$\varphi_i = \frac{yz(h-x)}{h^3}; \quad \varphi_j = \frac{xyz}{h^3}$$

$$\nabla\varphi_i = \left(-\frac{yz}{h^3}, \frac{z(h-x)}{h^3}, \frac{y(h-x)}{h^3}\right); \quad \nabla\varphi_j = \left(\frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3}\right)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j = \\ & \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} -y^2z^2 + hxz^2 - x^2z^2 + hxy^2 - x^2y^2 \, dx \, dy \, dz = \\ & = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \left[ -xy^2z^2 + \frac{hx^2z^2}{2} - \frac{x^3z^2}{3} + \frac{hx^2y^2}{2} - \frac{x^3y^2}{3} \right]_{x=0}^h \, dy \, dz = \\ & = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} -hy^2z^2 + \frac{h^3z^2}{6} + \frac{h^3y^2}{6} \, dy \, dz = \\ & = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \left[ -\frac{hy^3z^2}{3} + \frac{h^3yz^2}{6} + \frac{h^3y^3}{18} \right]_{y=0}^h \, dz = \\ & = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} -\frac{h^4z^2}{6} + \frac{h^6}{18} \, dz = \frac{1}{h^6} \left[ -\frac{h^4z^3}{18} + \frac{h^6z}{18} \right]_{z=0}^h = 0 \end{aligned}$$

6.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$

$\Omega_1$ -en:

$$\varphi_i = \frac{xy(h-z)}{h^3}; \quad \varphi_j = \frac{xyz}{h^3}$$

$$\nabla\varphi_i = \left(\frac{y(h-z)}{h^3}, \frac{x(h-z)}{h^3}, -\frac{xy}{h^3}\right); \quad \nabla\varphi_j = \left(\frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3}\right)$$

Szimmetriai okokból ez az eset visszavezethető a 5. esetre, mivel a három szorzótényezőből egy ellentétes.

7.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$

$\Omega_1$ -en:

$$\varphi_i = \frac{xz(h-y)}{h^3}; \quad \varphi_j = \frac{xyz}{h}$$

$$\nabla\varphi_i = \left(\frac{hz-yz}{h^3}, -\frac{xz}{h^3}, \frac{hx-xy}{h^3}\right); \quad \nabla\varphi_j = \left(\frac{yz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3}\right)$$

Szimmetriai okokból ez az eset visszavezethető a 5. esetre, mivel a három szorzótényezőből egy ellentétes.

8.  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_8$

$\Omega_1$ -en:

$$p_i = p_j, \varphi_i = \varphi_j = \frac{xyz}{h^3}$$

$$\nabla\varphi_i = \nabla\varphi_j = \left(\frac{xz}{h^3}, \frac{xz}{h^3}, \frac{xy}{h^3}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \\
& \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2 \, dx \, dy \, dz = \\
& = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \left[ xy^2 z^2 + \frac{x^3 z^2}{3} + \frac{x^3 y^2}{3} \right]_{x=0}^h \, dy \, dz = \\
& = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} hy^2 z^2 + \frac{h^3 z^2}{3} + \frac{h^3 y^2}{3} \, dy \, dz = \\
& = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \int_{[0,h]} \left[ \frac{hy^3 z^2}{3} + \frac{h^3 y z^2}{3} + \frac{h^3 y^3}{9} \right]_{y=0}^h \, dz = \\
& = \frac{1}{h^6} \int_{[0,h]} \frac{2h^4 z^2}{3} + \frac{h^6}{9} \, dz = \\
& = \frac{1}{h^6} \left[ \frac{2h^4 z^3}{9} + \frac{h^6 z}{9} \right]_{z=0}^h = \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

Szimmetriai megfontolásokból  $\int_{\Omega_k} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \frac{h}{3}$ , minden  $k \in \{1, \dots, 8\}$  esetén, így

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = \frac{8h}{3}.$$



## B. A négyzeteken számolandó értékekhez szükséges együttthatók kiszámolása a 3D-s posteriori hibabecsléshez

1. eset: az alsó indexben szereplő 1-es a bal oldali, a 2-es a jobb oldali kockára vontakozó értékekre mutat.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 \\
 p_2 &= 2b_1e_1 + 2b_2e_2 - 2b_1e_2 - 2b_2e_1 \\
 p_3 &= 2b_1f_1 + 2b_2f_2 - 2b_1f_2 - 2b_2f_1 \\
 p_4 &= 2b_2h_2 + 2e_2f_2 + 2b_1h_1 + 2b_1f_1 - 2e_2f_1 - 2f_2e_1 - 2b_2h_1 - 2h_2b_1 \\
 p_5 &= e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \\
 p_6 &= f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2 \\
 p_7 &= 2e_1h_1 + 2e_2h_2 - 2e_2h_1 - 2h_2e_1 \\
 p_8 &= 2f_1h_1 + 2f_2h_2 - 2f_2h_1 - 2h_2f_1 \\
 p_9 &= h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 &= p_1((j+1)h) - p_1(jh) + \frac{1}{2}p_2((j+1)h)^2 - \frac{1}{2}p_2(jh)^2 + \frac{1}{3}p_5((j+1)h)^3 - \frac{1}{3}p_5(jh)^3 \\
 q_2 &= p_3((j+1)h) - p_3(jh) + \frac{1}{2}p_4((j+1)h)^2 - \frac{1}{2}p_4(jh)^2 + \frac{1}{3}p_7((j+1)h)^3 - \frac{1}{3}p_7(jh)^3 \\
 q_3 &= p_6((j+1)h) - p_6(jh) + \frac{1}{2}p_8((j+1)h)^2 - \frac{1}{2}p_8(jh)^2 + \frac{1}{3}p_9((j+1)h)^3 - \frac{1}{3}p_9(jh)^3
 \end{aligned}$$

$$\text{ertek}_1 = q_1 \cdot ((k+1)h - kh) + \frac{1}{2}q_2 \cdot ((k+1)h)^2 - \frac{1}{2}q_2 \cdot (kh)^2 + \frac{1}{3}q_3 \cdot ((k+1)h)^3 - \frac{1}{3}q_3 \cdot (kh)^3$$

A 2. és a 3. eset szimmetriai okokból az 1. eset alapján betűcserével írható fel.

## Hivatkozások

- [1] ELMAN, H. C., SILVESTER, D. J., WATHERN, A. J. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2005.
- [2] KARÁTSÓN JÁNOS, HORVÁTH RÓBERT, IZSÁK FERENC *Numerical Methods for Elliptic Partial Differential Equations*
- [3] LUDOVIC CHAMOIN & FRÉDÉRIC LEGOLL *A pedagogical review on a posteriori error estimation in Finite Element computations*  
<https://arxiv.org/abs/2110.02160>
- [4] DOUGLAS N. ARNOLD *Lecture notes on Numerical Analysis of Partial Differential Equations*  
<https://www-users.cse.umn.edu/~arnold/8445-8446.17-18/notes.pdf>
- [5] Matlab Dokumentáció  
<https://www.mathworks.com/help/matlab/>
- [6] Wikipedia  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Hp-FEM#Example:\\_the\\_Fichera\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Hp-FEM#Example:_the_Fichera_problem)