Távolságok

Freud Róbert, ELTE Matematikatanár-klub, 2013/04/10

1. Hány pont adható meg a síkon úgy, hogy nincsenek mind egy egyenesen és bármely kettő távolsága egész szám? Megmutatjuk, hogy (A) tetszőlegesen sok ilyen pont található, de (B) végtelen sok már nem.

(A) Elég belátni, hogy akármilyen sok olyan pont létezik, amelyek közül bármely kettő távolsága racionális, mert ebből megfelelő nagyítással egész távolságokat kapunk. Tekintsük az egységkörön a $2k\alpha$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) szöghöz tartozó P_k pontokat, ekkor P_k és P_m távolsága $|2\sin((m-k)\alpha)|$. Legyen $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ is racionális, pl. $\sin\alpha = 2t/(1+t^2)$, $\cos\alpha = (1-t)^2/(1+t^2)$, ahol t egy kis pozitív racionális szám. Ekkor minden n-re $\sin(n\alpha)$ és $\cos(n\alpha)$ is racionális, ez az összegzési képletek alapján teljes indukcióval vagy a $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ komplex számnak a Moivre-formula és a binomiális tétel alapján történő felírásából adódik. A P_k pontok közül tehát bármely kettő távolsága racionális szám.

Megjegyzés: Ha α nem racionális többszöröse π-nek, akkor végtelen sok különböző pontot kapunk, tehát végtelen sok pont is megadható páronként racionális távolsággal. A fenti α-k ilyenek, mert igazolható, hogy racionális $\cos\alpha$ mellett α akkor és csak akkor racionális többszöröse π-nek, ha $\cos\alpha = 0, \pm1$ vagy $\pm1/2$.

(B) Legyen a halmazunkból 3 nem egyenesre eső pont P, Q és R, a köztük levő távolságok $PQ = a$, ill. $QR = b$. Vegyünk egy tetszőleges S másik pontot a halmazból. A háromszögegyenlőtlenség miatt $|SP - SQ|$ egy a-nál nem nagyobb egész szám, azaz S véges sok hiperbola (valamint a PQ szakaszfelező merőlegese, illetve a PQ egyenes egy része) valamelyikén van. Ugyanígy, $|SQ - SR| \le b$ alapján S az előzőekkel nem azonos tengelyű véges sok hiperbola (és két egyenes) valamelyikén található. Mivel a két hiperbolahalmaznak csak véges sok közös pontja lehet, így S-re csak véges sok lehetőséget kapunk.

2. Hány pont adható meg a síkon úgy, hogy bármely kettő távolsága **páratlan** egész szám?

Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcspontjai nyilván megfelelnek. Megmutatjuk, hogy 4 pont már nem adható meg ezzel a tulajdonsággal.

Indirekt bizonyítunk. Legyen az egyik pont az origó, a másik három pontba mutató vektor pedig $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Ekkor a feltételeket a skaláris szorzat segítségével felírva $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{c}^2$, $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$, $(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2$ és $(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$ páratlan négyzetszámok, így mod 8 maradékuk 1. A különbségek négyzetre emelését elvégezve kapjuk, hogy $2\mathbf{ab}$, $2\mathbf{ac}$ és $2\mathbf{bc}$ is (egészek és) 1 maradékot adnak mod 8.

Tekintsük most az $M = \begin{pmatrix} 2\mathbf{a}^2 & 2\mathbf{ab} & 2\mathbf{ac} \\ 2\mathbf{ab} & 2\mathbf{b}^2 & 2\mathbf{bc} \\ 2\mathbf{ac} & 2\mathbf{bc} & 2\mathbf{c}^2 \end{pmatrix}$ mátrixot. Megmutatjuk, hogy a rangja 3, azaz a determinánsa nem 0. A determiánst mod 8 nézve $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \equiv 4$, tehát valóban nem lehet 0.

Másrészt $M = 2\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$, ahol $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok koordinátái, és így M rangja legfeljebb akkora, mint a tényezőinek a rangja, azaz legfeljebb 2. Ez ellentmond az előző bekezdésnek.