

Néhány egyszerű, de szokatlan bizonyítás

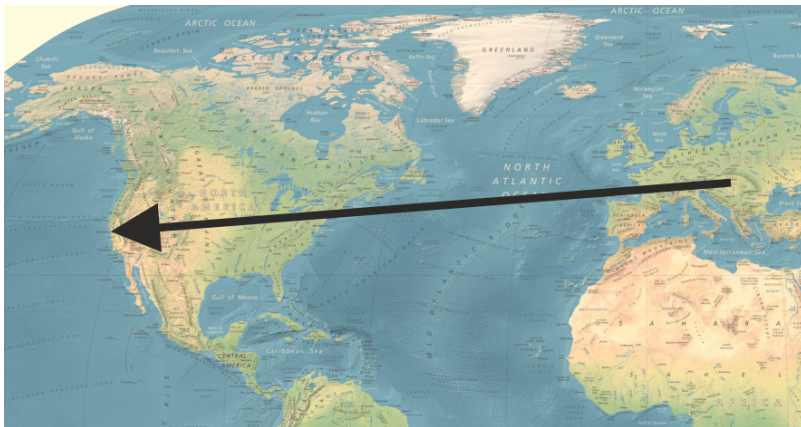
Juhász Péter



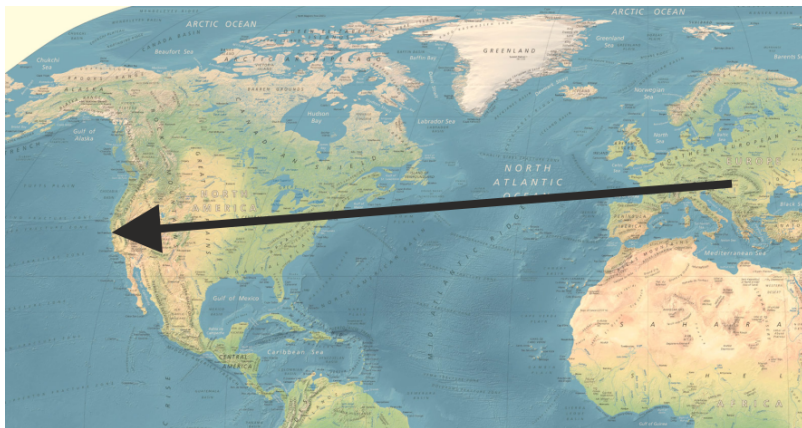
ELTE Matematikai Intézet
Számítógéptudományi Tanszék

2013. április 10.

Budapestről San Fransiscoba

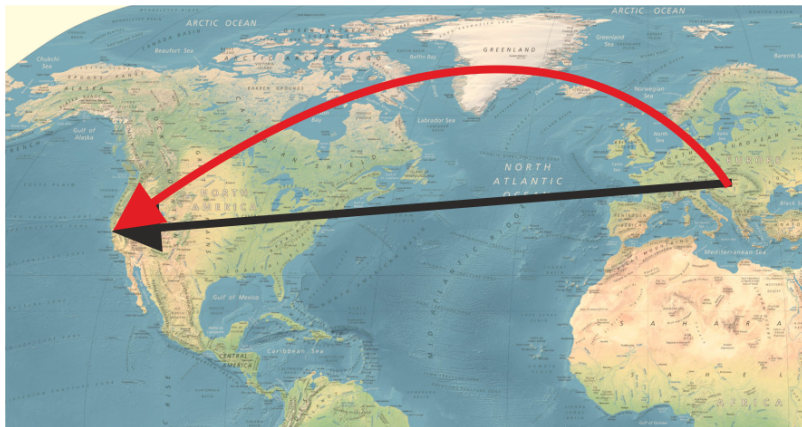


Budapestről San Fransiscoba



De miért láttuk Grönlandot?

Grönlandot?



De miért láttuk Grönlandot?

Miért ilyenek a térképek?

Miért ilyenek a térképek?

Tétel

A gömb nem síkbafejthető felület.

Miért ilyenek a térképek?

Tétel

A gömb nem síkbafejthető felület.

Bizonyítás.

Gauss: Theorema egregium, 1827.

Miért ilyenek a térképek?

Tétel

A gömb nem síkbafejthető felület.

Bizonyítás.

Gauss: Theorema egregium, 1827.

A tétel következménye, hogy nem lehet a gömböt „síkra fejteni”.

Miért ilyenek a térképek?

Ennél kevesebbet lássunk be:

Miért ilyenek a térképek?

Ennél kevesebbet lássunk be:

Tétel

Nem lehet a gömb felületét távolságtartóan a síkba leképezni.

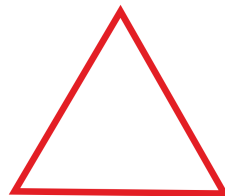
Nem síkba fejthető



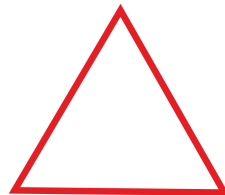
Nem síkba fejthető



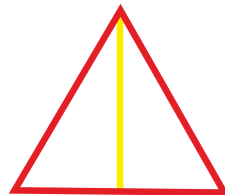
Nem síkba fejthető



Nem síkba fejthető



Nem síkba fejthető



Öt város tétel

Öt város tétel

Tétel

A Föld bármely 5 városa között mindig van legalább 4, amelyek egy félgömbön vannak.

Tömörítés

Tömörítés

Definíció

Egy tömörítést **veszteségmentesnek** nevezünk, ha a tömörített fájlból egyértelműen dekódolható az eredeti fájl.

Tömörítés

Definíció

Egy tömörítést **veszteségmentesnek** nevezünk, ha a tömörített fájlból egyértelműen dekódolható az eredeti fájl.

Ilyen például a népszerű ZIP és GZIP algoritmus.

Tömörítés

Tömörítés

Tétel

*Minden „értelmes” veszteségmentes tömörítő algoritmus, legalább egy fájl méretét **növelni** fogja.*

Tömörítés

Tétel

*Minden „értelmes” veszteségmentes tömörítő algoritmus, legalább egy fájl méretét **növelni** fogja.*

Bizonyítás.

Tömörítés

Tétel

*Minden „értelmes” veszteségmentes tömörítő algoritmus, legalább egy fájl méretét **növelni** fogja.*

Bizonyítás.

Tekintsük az összes olyan fájlt, aminek csökken a mérete.

Tömörítés

Tétel

*Minden „értelmes” veszteségmentes tömörítő algoritmus, legalább egy fájl méretét **növelni** fogja.*

Bizonyítás.

Tekintsük az összes olyan fájlt, aminek csökken a mérete. Vegyük ezeknek a fájloknak a „képeit” (vagyis a tömörített verziójukat).

Tömörítés

Tétel

*Minden „értelmes” veszteségmentes tömörítő algoritmus, legalább egy fájl méretét **növelni** fogja.*

Bizonyítás.

Tekintsük az összes olyan fájlt, aminek csökken a mérete. Vegyük ezeknek a fájloknak a „képeit” (vagyis a tömörített verziójukat).

Legyen a legkisebb ilyen tömörített fájl mérete M .

Tömörítés

Tömörítés

Az M méretű fájlok mérete nem nőhet, hiszen akkor készen lennének.

Tömörítés

Az M méretű fájlok mérete nem nőhet, hiszen akkor készen lennének.

Nem is csökkenhet, mert akkor nem M lenne a minimális, az „érdemben” tömörített fájlok között.

Tömörítés

Az M méretű fájlok mérete nem nőhet, hiszen akkor készen lennénk.

Nem is csökkenhet, mert akkor nem M lenne a minimális, az „érdemben” tömörített fájlok között.

Minden M hosszú fájl (2^M darab) a „tömörítés” után is M hosszú.

Viszont akkor legalább $2^M + 1$ olyan fájl van, aminek a tömörítés után M a hossza.

Tömörítés

Az M méretű fájlok mérete nem nőhet, hiszen akkor készen lennénk.

Nem is csökkenhet, mert akkor nem M lenne a minimális, az „érdemben” tömörített fájlok között.

Minden M hosszú fájl (2^M darab) a „tömörítés” után is M hosszú.

Viszont akkor legalább $2^M + 1$ olyan fájl van, aminek a tömörítés után M a hossza.

Skatulyaelv miatt lesz két fájl, aminek a tömörített változata megegyezik.

Skatulyaelv

Feladat.

Egy $T = 9,2$ területű sokszöget le lehet helyezni a síkra úgy, hogy legalább 10 rácspontot fed.

Skatulyaelv

Feladat.

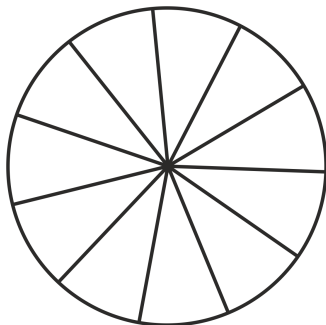
Egy $T = 9,2$ területű sokszöget le lehet helyezni a síkra úgy, hogy legalább 10 rácspontot fed.

Nem szokványos geometriai skatulyaelv.

Körcikkek színezése

Feladat.

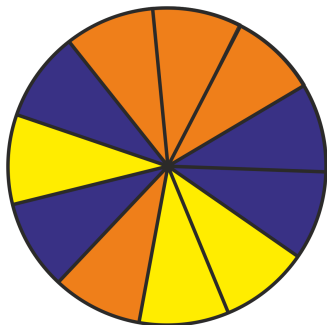
Egy kört 11 egyenlő körcikkre osztottunk. Van 8 színünk, amivel színezhajuk a körcikkeket. Hány különböző végeredmény képzelhető el?



Körcikkek színezése

Feladat.

Egy kört 11 egyenlő körcikkre osztottunk. Van 8 színünk, amivel színezhajuk a körcikkeket. Hány különböző végeredmény képzelhető el?



Körcikkek színezése

8 szín, 11 helyen egymástól függetlenül: 8^{11}

Körcikkek színezése

8 szín, 11 helyen egymástól függetlenül: 8^{11}

De így sok mindent sokszor számoltunk.

Körcikkek színezése

8 szín, 11 helyen egymástól függetlenül: 8^{11}

De így sok mindent sokszor számoltunk.

Amit sokszor számoltunk, azt éppen 11-szer.

Körcikkek színezése

8 szín, 11 helyen egymástól függetlenül: 8^{11}

De így sok mindent sokszor számoltunk.

Amit sokszor számoltunk, azt éppen 11-szer.

Mit nem számoltunk többször?

Körcikkek színezése

8 szín, 11 helyen egymástól függetlenül: 8^{11}

De így sok mindent sokszor számoltunk.

Amit sokszor számoltunk, azt éppen 11-szer.

Mit nem számoltunk többször?

A homogéneket.

Körcikkek színezése

8 szín, 11 helyen egymástól függetlenül: 8^{11}

De így sok mindent sokszor számoltunk.

Amit sokszor számoltunk, azt éppen 11-szer.

Mit nem számoltunk többször?

A homogéneket.

Vagyis a megoldás:

$$\frac{8^{11} - 8}{11} + 8$$

Gráfok

Gráfok

A gráf **csúcsai** legyenek p hosszúságú sorozatok, amiknek az elemei az első k pozitív egész számból kerülnek ki.

Pl. $p = 3$ és $k = 4$ esetén csúcsok a következők:

$(1, 3, 2), (4, 4, 4)$.

Gráfok

A gráf **csúcsai** legyenek p hosszúságú sorozatok, amiknek az elemei az első k pozitív egész számból kerülnek ki.

Pl. $p = 3$ és $k = 4$ esetén csúcsok a következők:

$(1, 3, 2), (4, 4, 4)$.

Él van két csúcs között, ha ilyen alakúak:

$(a_1, a_2, \dots, a_p)$ és $(a_p, a_1, \dots, a_{p-1})$.

Gráfok

A gráf **csúcsai** legyenek p hosszúságú sorozatok, amiknek az elemei az első k pozitív egész számból kerülnek ki.

Pl. $p = 3$ és $k = 4$ esetén csúcsok a következők:

$(1, 3, 2), (4, 4, 4)$.

Él van két csúcs között, ha ilyen alakúak:

$(a_1, a_2, \dots, a_p)$ és $(a_p, a_1, \dots, a_{p-1})$.

Feladat: Vizsgáljuk meg ezeket a gráfokat. Hogyan néznek ki?

Gráfok

Van k^p csúcsa a gráfnak.

Gráfok

Van k^p csúcsa a gráfnak.

Mindenképpen van k darab izolált pontunk.

Gráfok

Van k^p csúcsa a gráfnak.

Mindenképpen van k darab izolált pontunk.

Ha p prím, akkor viszont minden egyéb pont foka 2, ami azt jelenti, hogy a gráf diszjunkt körökből áll.

Gráfok

Van k^p csúcsa a gráfnak.

Mindenképpen van k darab izolált pontunk.

Ha p prím, akkor viszont minden egyéb pont foka 2, ami azt jelenti, hogy a gráf diszjunkt körökből áll.

A körök éppen p hosszúak.

Gráfok

Van k^p csúcsa a gráfnak.

Mindenképpen van k darab izolált pontunk.

Ha p prím, akkor viszont minden egyéb pont foka 2, ami azt jelenti, hogy a gráf diszjunkt körökből áll.

A körök éppen p hosszúak.

Vagyis

$$\frac{k^p - k}{p}$$

körből áll a gráf (és k izolált pontból).

Köszönöm a figyelmet.