**Somfai Zsuzsa: Tanár Úr, elakadtam…Tanárnő, jó ez így?**

**(Miért fontos felsőbb matematikát tanulnunk?)**

**Azért, hogy matematikai szemléletünk, majd ennek birtokában matematika-tanári szemléletünk alakuljon ki.**

Ezt illusztrálom néhány feladattal.

1. **feladat**

**Adott két halmaz: A={ 1, 2, 3, 4, 5 } és B={ 1, 2, 3 }. Az f(x) függvény értelmezési tartomány A, és minden A-beli x esetén f(x)€A. Hány olyan f(x) függvény van, amelyre**

**{ f(f(x))**׀ **x€A }=B ?**

**Megoldás:**

A keresett függvények halmazában pl. f(1)=4 nem lehetséges a következők miatt: mivel f(f(x)) értékkészlete B, ezért létezik olyan y€A, amelyre f(f(y))=1. Legyen f(y)=z, ekkor f(f(z))=f(1)=4 lenne, ami nem eleme B-nek.

Ugyanígy látható be, hogy az 1, 2, 3 számok egyikéhez sem rendelhet a keresett f(x) függvény sem 4-et, sem 5-öt.

Meggondoljuk, mi lehet f(4) és f(5.):

* nem lehet f(4)=4, mert ekkor f(f(4))=f(4)=4 lenne, ami nem tartozik B-be. Ugyanígy nem lehet f(5)=5 sem;
* lehetséges, hogy f(4) és f(5) is B-beli elem; (i)
* ha f(4)=5, akkor f(f(4))=f(5) miatt f(5) B-beli elem kell legyen. Ugyanez lehet 4 és 5 szerepcseréjével is. (ii)

A lehetséges függvények csoportjai a következők:

1. f(1), f(2) és f(3) az 1, 2, 3 elemek valamelyik permutációja, és f(4) és f(5) is B-beli elem. Ilyen függvényből 3!.3.3= 54 van.
2. f(1), f(2) és f(3) az 1, 2, 3 elemek valamelyik permutációja, valamint f(4) ill. f(5) értéke (ii) szerint alakul. Ilyen függvényből 3!.2.3=36 van.
3. ha f(1)=f(2)=f(3), akkor (i) esetén f(f(x))értékkészletében egyetlen szám áll, (ii) esetén pedig csak két szám. Ezek az esetek nem jók, tehát azt kell megnézni, mi van, ha f(1), f(2) és f(3) értéke két különböző lehetséges érték, pl. *a* és *b.* Így az (i) esetben f(f(x)) értékkészletében csak két szám áll, tehát nem felel meg. A (ii) esetén f(4) és f(5) valamelyike B-beli, *a*-tól és *b*-től különböző *c* szám kell legyen. Az *a,b* számpárt 3-féleképpen választhatjuk meg, bármelyiket f(1), f(2) és f(3) között 6-féle módon oszthatjuk el, és mindegyik *a,b* számpárhoz *c* értéke már meghatározott. Ezt az értéket vagy a 4-hez, vagy az 5-höz rendelhetjük, ezért 3.6.2= 36 függvény tartozik ebbe a csoportba.

Az összes kért függvény száma tehát 54+36+36=126

Szemléleti elemek: A matematikai nyelv (jelölésrendszer) biztos használata;

annak átlátása, hogy a megoldásban más az 1,2,3 szerepe, mint a 4,5-é.

**2. feladat**

**Jelöljön *p* egy pozitív számot, és tekintsük az 1,végtelen sorozatot. Mely p számokra igaz, hogy minden pozitív szám tetszőleges pontossággal megközelíthető a fenti sorozat véges sok alkalmas elemének összegével?**

**A megoldás vázlata:**

*p*=1-re csak az egész számok állíthatók elő, tehát ez nem felel meg.

A szimmetria miatt elég a *p*>1 esetekkel foglalkozni.

Ekkor az 1/*p* hányadosú konvergens mértani sor bármelyik részletösszege kisebb az összegnél. Ilyenkor az S<*p* fennállásakor a véges sok tagú összeg kisebb S-nél, vagy legalább *p.* Pozitív számok között ez pontosan a *p*>2 esetekben fordul elő, és ilyenkor az S és *p* közötti számok nem közelíthetők tetszőleges pontossággal.

Belátható, hogy az  értékek megfelelnek. Úgy kell eljárni, ahogy egy pozitív egész kettes számrendszerbeli alakját szoktuk felírni: egy tetszőleges x pozitív számot lépésenként a nála nem nagyobb p-hatványok közül a legnagyobbikkal csökkentünk. *p*>1 miatt a közelítés hibája tetszőlegesen kicsi lesz, ha a lépések száma elég nagy.

Szemléleti elemek: a valós számokra vonatkozó ismeretek;

annak felismerése, hogy egy lehetséges *p* és a reciproka egyszerre felel meg, ill. nem jöhet szóba;

a *p*-edes törtekkel való felírásban csak a 0 és az1 jegyek szerepelhetnek.

**3. feladat**

**Az x, y, z pozitív számok átlaga -mal egyenlő, ahol *a* valós paraméter.**

**Az x, y, z számok négyzetének átlaga 4*a*-4.**

**Hogyan válasszuk meg az *a* paraméter értékét, hogy az xy, yz, zx számok átlaga a lehető legkisebb legyen, és mennyi ez a minimum?**

**Megoldás:**

Mivel pozitív számokról beszélünk, biztos, hogy *a*>0 kell legyen, a második összefüggés miatt *a*>1-nek is teljesülnie kell.

A feltételek miatt , I.,

valamint . II.

xy, yz és zx számok átlagát fogjuk előállítani:

I. mindkét oldalát négyzetre emeljük, és mivel mindkét oldal pozitív, ekvivalens átalakítás történik.







Teljes négyzetté kiegészítés után kapjuk, hogy a kérdéses összeg akkor minimális, ha 

Az *a*-ra kapott érték benne van az értelmezési tartományban. Ezen paraméter mellett a legkisebb átlag értéke .

Szemléleti elem: A feladat geometriai interpretációja.

A kapott paraméter értéke mellett a kiinduló összefüggések egyike egy sík egyenlete, a másik egy origó középpontú gömbé. A sík és a gömb metszete egy olyan kör lesz, amelyik nem teljes egészében esik az első térnegyedbe, vagyis nem minden pontjára teljesül, hogy az x, y, z koordináták pozitívak.

Végül egy látszólagos paradoxon:

„A matematikában az ember nem megérti a dolgokat, hanem megszokja.”

Neumann János

A paradoxon feloldása: Csak ott tudunk megszokásból eljárni, ahol otthon vagyunk, vagyis a matematika tanárnak a matematikában otthon kell lennie.