Egy negyedikes felvételi feladattól az egyetemi matematikáig

Tassy Gergely
Veres Péter Gimnázium, Budapest

ELTE Matematikatanár-délután
Kombinatorika és gráfelmélet a középiskolában
2015. február 18.

I. rész: 4. osztályos felvételi

(2007. febr. 1., 8. feladat)

A 4. osztályosok klubdélutánra készülődnek. Megegyeztek, hogy mindenki 50 Ft-ot hoz a kellékekre. Ma hatan hozták a pénzt, azonban hármuknak 50, hármuknak 100 forintosa volt. A tanító néni milyen sorrendben veheti el az érméket, ha most nincs nála pénz, de a visszajáró pénzt mindenkinek azonnal át szeretné adni?

Táblázatba gyűjtve keresd meg az összes lehetőséget! (Több sor van, mint ahány lehetőség.)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
50	50	100	50	100	100

4. osztályos felvételi

(2007. febr. 1., 8. feladat)

5 különböző helyes megoldás van:

pl.:	50	50	100	50	100	100
	50	50	50	100	100	100
	50	50	100	100	50	100
	50	100	50	100	50	100
	50	100	50	50	100	100

2007-es felvételi átlagpontszám: 50 / 21,9 (2014-ig a legalacsonyabb)

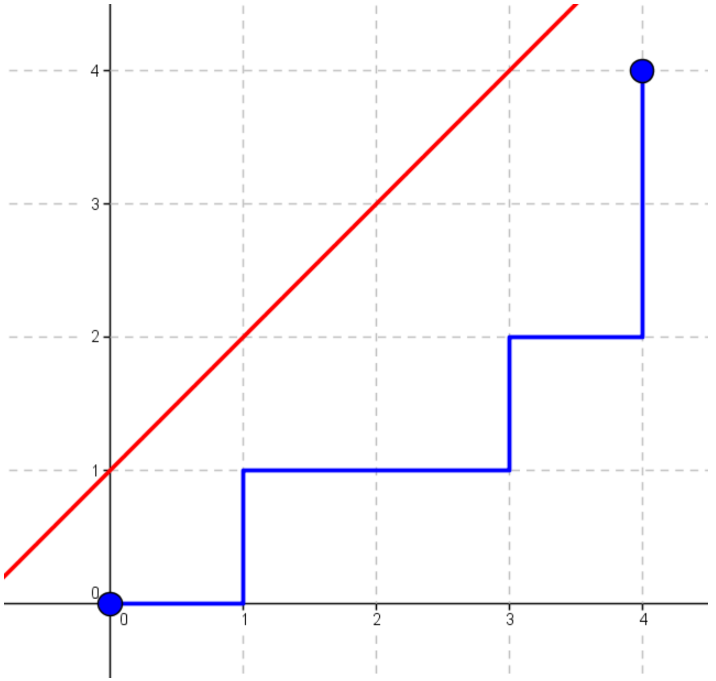
Általánosítás

- Jelöljük $C(n)$-nel (n>0 egész), ahányféle módon n db 50 Ft-os és n db 100 Ft-os a kívánt sorrendbe rakható.
- $C(3)=5$
- Összeszámlálással: $C(1)=1$, $C(2)=2$
- $C(2015)=?$, általában $C(n)=?$

n	1	2	3	4	5	6	7
$C(n)$	1	2	5	14	42	132	429

Mindez koordinátákkal

- Utak száma (0;0)-ból (n;n)-be
- Lépések: jobbra (50-es) / felfelé (100-as)
- Ne érintsük az $y = x+1$ „tiltott egyenest”
- C(n) = az ilyen utak száma



(Példa: n=4, egy lehetséges út)

- Összes lehetőség (tiltás nélkül): $\binom{2n}{n}$
- Rossz esetek: elérjük a tiltott egyenest

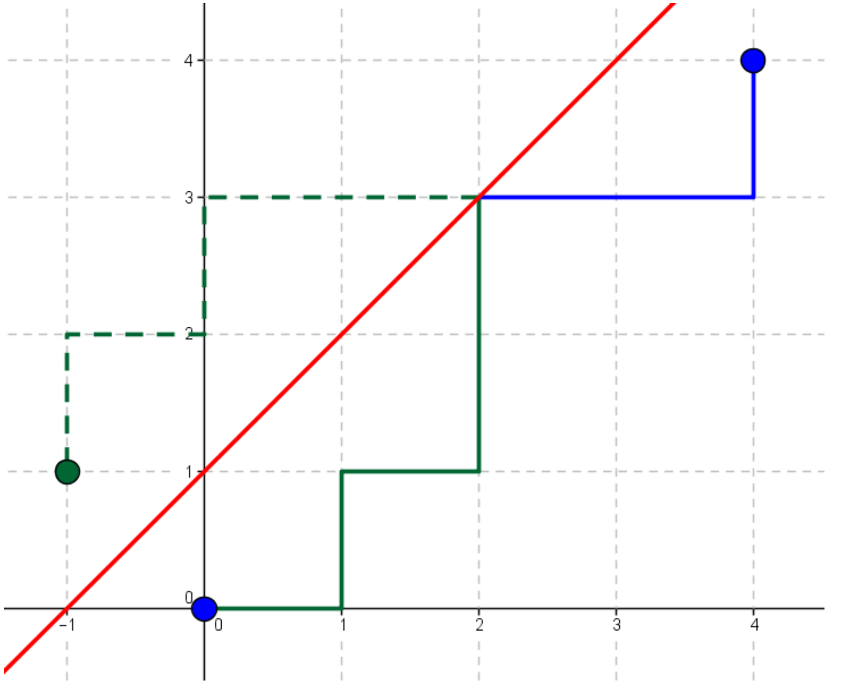
Tükrözési elv: az első metszéspontig terjedő részt tükrözzük a tiltott egyenesre

Ezáltal:

utak (-1;1)-ból (n;n)-be

Az ilyen utak száma:

$$\binom{2n}{n-1}$$



Összes-rossz: $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

Catalan-számok

- *Eugéne Charles Catalan (belga, 1814-1894)*
- $C(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \qquad (n \in \mathbb{Z}^+)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$C(n)$	1	1	2	5	14	42	132	429

- Rekurzív megadás:

$$C(0) = 1; \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

- vagy: $C(0) = 1; \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot C_n$

Catalan-számok

- $C(n)$ = n db A és n db B betűből hány olyan szó alkotható, amelynek semelyik kezdőszeletében nincs több B, mint A *(50/100 Ft-osok)*
- $C(n)$ = n db zárójelpár helyes párosításainak száma (egy n+1 tényezős szorzat zárójelezései)

    pl. n=3, $C(3)$=5:

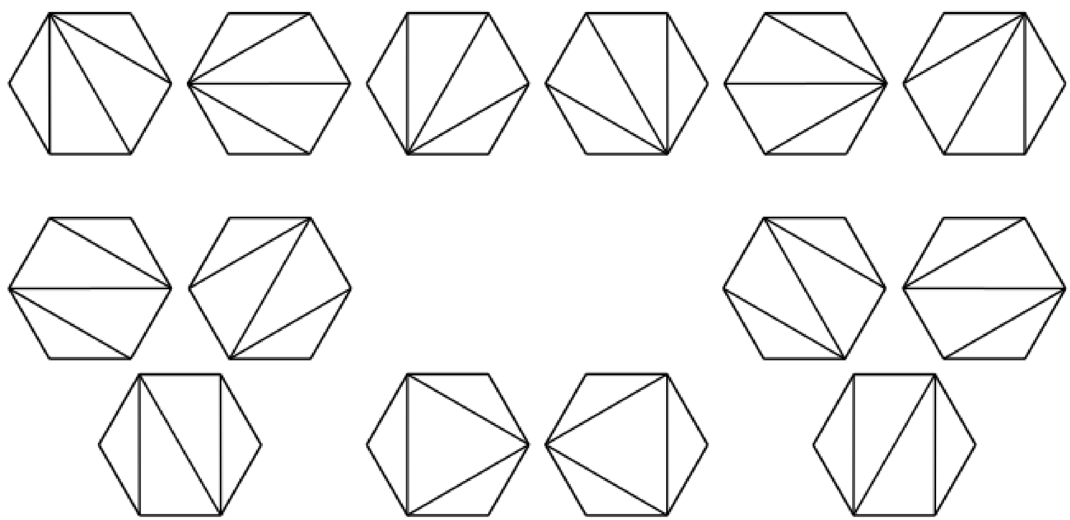
    (a külső zárójelek nélkül)

$$abcd \to \begin{cases} ((ab)c)d \\ (ab)(cd) \\ (a(bc))d \\ a((bc)d) \\ a(b(cd)) \end{cases}$$

Catalan-számok

- $C(n)$ = egy n+2 oldalú konvex sokszög hányféleképpen bontható átlóival háromszögekre

  pl. n=4, $C(4)$=14: (Euler)



- 11. századi japán szépirodalomban is (Murasaki)

II. rész: 7. osztályos feladat

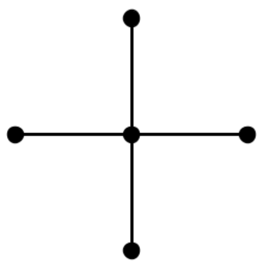
(Zrínyi Ilona Matematikaverseny
2007. megyei forduló, 7. osztály, 30. feladat)

Egy internetszolgáltatónak öt város között négy egyenes vezetékszakaszból álló hálózatot kell kiépítenie úgy, hogy az elektromos jel a vezetékeken bármelyik városból bármelyik városba eljusson (a vezetékszakaszok mindig két várost kötnek össze). A városok elhelyezkedése olyan, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Hány különböző hálózat építhető, ha a szigetelt vezetékek keresztezhetik egymást?

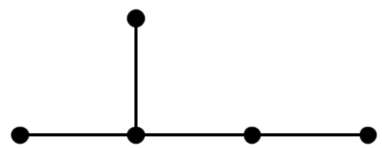
(A) 24 (B) 60 (C) 120 (D) 125 (E) 480

7. osztályos versenyfeladat

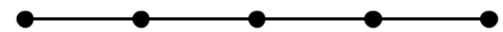
5 különböző pont hányféleképpen alakítható fává?



5



$5 \cdot 4 \cdot 3$



$$\frac{5!}{2}$$

5 + 60 + 60 = 125 lehetőség

(A) 24	(B) 60	(C) 120	(D) 125	(E) 480
17%	*13%*	*11%*	***7%***	*2%*

üres: 50%

Általánosítás

- Jelöljük $T(n)$-nel (n>1 egész), ahányféle módon n „számozott” pont fává alakítható.
- $T(5)=125$
- Összeszámlálással: $T(2)=1$, $T(3)=3$
- $T(2015)=?$, általában $T(n)=?$

n	2	3	4	5	6
$T(n)$	1	3	16	125	1296

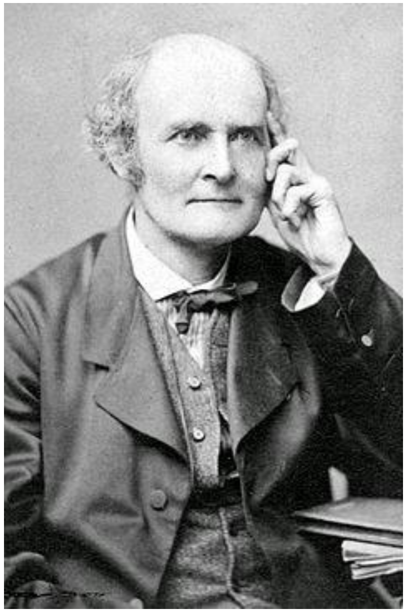
Fák kódolása számsorozatokkal

- Prüfer-kód: n csúcsú fa $\leftrightarrow$ n-2 db szám
- Minden szám 1 és n közötti lehet
- Kölcsönösen egyértelmű:

  n csúcsú fák $\leftrightarrow$ n-2 hosszú sorozatok
- Tétel (Cayley): $T(n)=n^{n-2}$

n	2	3	4	5	6
$T(n)$	2^0	3^1	4^2	5^3	6^4

A Prüfer-kód

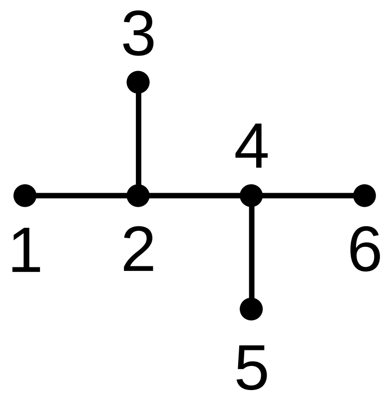


Arthur Cayley
(brit, 1821-1895)

Heinz Prüfer
(német, 1896-1934)

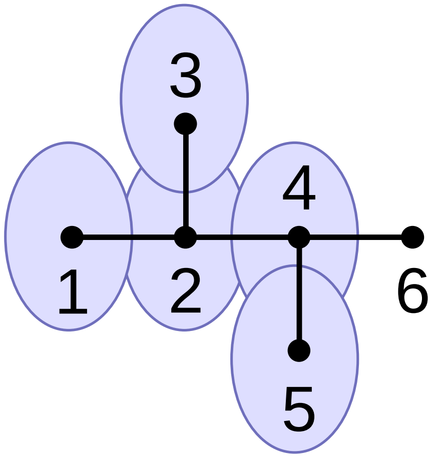
(a képek forrása: Wikimedia Commons)

A Prüfer-kód előállítása



- Töröljük a legkisebb sorszámú elsőfokú csúcsot, és leírjuk a szomszédját.
- Ezt ismételjük, amíg már csak egy csúcs marad.
- (Az utolsó leírt érték mindig *n*, ez elhagyható.)

Törölt csúcs	1	3	2	5	4
Szomszédja	**2**	**2**	**4**	**4**	6



- A fa Prüfer-kódja: 2244

Fa visszaállítása Prüfer-kódból

- *n*-2 jegy, ebből *n* meghatározható
  (a Prüfer-kód végére írhatunk még egy *n*-et)
- törölt csúcsok meghatározása (balról jobbra)
  X = a legkisebb szám, ami nem szerepel -ben

Törölt csúcs			X		
Szomszédja					

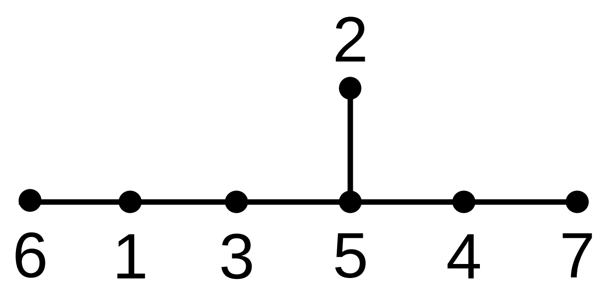
- Példa: 51354 (→ *n*=7)

Törölt csúcs	2	6	1	3	5	4
Szomszédja	**5**	**1**	**3**	**5**	**4**	7

Fa visszaállítása Prüfer-kódból

Törölt csúcs	2	6	1	3	5	4
Szomszédja	**5**	**1**	**3**	**5**	**4**	7

- A táblázat oszlopai a fa éleit adják
  (ha hátulról rajzoljuk be őket, végig összefüggő)



- (Állítás: a Prüfer-kódban minden csúcs 1-gyel kevesebbszer szerepel, mint a fokszáma.)

Fa ↔ Prüfer-kód

- Minden fához → Prüfer-kód (egyértelmű)
- Minden Prüfer-kódhoz → fa? (egyértelmű)
  Miért lesz a kapott gráf fa?

Körmentes, mert: indir. tfh. a élek kört alkotnak

Törölt csúcs	*a*		*b*	*c*		*d*
Szomszédja						

a, b, c, d különböző → az alsó sorban is *a, b, c, d*

de: *a* nem lehet alul helyen → ellentmondás

- Tehát: *n* pont, *n*-1 él, körmentes → fa

Fa $\leftrightarrow$ Prüfer-kód

- Tehát kölcsönösen egyértelmű:

  n csúcsú fák $\leftrightarrow$ n-2 hosszú sorozatok 1…n-ből
- Belátuk: n számozott ponton n^{n-2} fa adható meg

- Hogyan tároljunk egy fát?

  éllista: 2*(n-1) = 2n-2 adat

  Prüfer-kód: n-2 adat

  Belátható: a Prüfer-kód a „legtömörebb” tárolás

- Véletlen fák generálása Prüfer-kóddal

Köszönöm a figyelmet!

tassyg@cs.elte.hu