A véletlen permutációk és a kínai étterem

Surányi László[[1]](#footnote-1)

„Ezt a könyvet a tanítványaimtól tanultam”, kezdi Schönberg a *Harmóniatanát*. Nos, én is elmondha­tom, hogy az itt következőket a tanítványaimtól tanultam. A valószínűségszámítást a középiskolában erősen kombinatorikus alapon tanítjuk – már amennyire tanítjuk. Viszont egykori tanítványommal, [*Virág Bálinttal*](http://www.math.toronto.edu/balint/), a University of Toronto professzorával a valószínűségszámításról beszélgetve észre kellett vennem, mennyire másképp néz egy vérbeli valszámos a valószínűségszámításra. Ezért felkér­tük őt, hogy a matematika tagozatos tanárok 2015-ös továbbképzésén mondja el, ő hogyan látja azo­kat a fogalmakat, amelyeket mi tanítunk. Erre egy – Gyenes Zoltánnal folytatott – beszélgetés kereté­ben vállalkozott. Az egyik kérdés arra vonatkozott, hogy hogyan néz ő rá a véletlen permutációkra. Válaszul elmondta a „kínai étterem folyamatot” (Chinese restaurant process), ami sok mindent na­gyon szemléletessé tesz. Azóta alaposan átgondoltuk Gyenes Zolival, hogy mit lehet ebből a tanítás­ban hasznosítani és – egyelőre csak szakkörön – ki is próbáltuk. Az ottani tapasztalatokat is felhasználom.

**A permutációk ciklus-szerkezete**

Mindenek előtt szükségünk van a permutációk ún. *ciklus-szerkezetére*. Ez kis csoportelméleti szem­lélettel is beolthatja a kombi­natorikai megközelítésünket. Szeretem az alábbi feladattal kezdeni. A feladatot egy kb. ötven évvel ezelőtti olimpiai felkészítő feladatsorban találtam még évtizedekkel ez­előtt. (A feladatsort emlékezetem szerint Hódi Endre jegyezte, és Reiman tanár úrnál beszéltük meg.)

1. Egy osztály tanulói névsor szerint állnak egyenes sorban. A testnevelés tanár szeretné mi­hamarabb nagyság szerinti sorba állítani őket. Ehhez a következőt eszeli ki: kijelöl párokat úgy, hogy minden tanuló legfeljebb egy párban szerepel. Sípszóra ezek a párok helyet cse­rélnek. Ezután ismét kijelöl párokat (megint mindenki legfeljebb egy párban szerepel), akik újabb sípszóra helyet cserélnek. Ezt addig folytatja, amíg nagyság szerinti sorba nem rendezte őket. Szeretné a legkevesebb sípszóval elérni ezt. Segítsünk neki. Feltesszük, hogy látja a nagyság szerinti sorrendet.

MEGOLDÁS: Először próbáljuk kitalálni, merre érdemes keresgélni. Ha minden lépésben csak egy cserét engednénk, akkor, mint ismeretes, *n* – 1 csere elég volna (és kevesebb nem mindig). Itt egy lépésben $\frac{n}{2}$ cserét is végrehajthatunk. Reménykedhetünk, hogy két ilyen lépés is elég? A vá­laszhoz gondolatban készítsünk el egy irányított gráfot, amelyben minden tanulótól ahhoz a tanu­lóhoz indul él, akinek a mostani helyére kell állnia. Ha egy tanuló jó helyen áll, akkor egy irányí­tott hurokél tartozik hozzá. Formálisabban: a csúcsok az 1,2, …, *n* számok, ahol *n* az osztály lét­száma. Ha a névsorban *k*. helyen levő tanuló a nagyság szerinti sorban az *l*., akkor a *k* csúcsból az *l* csúcsba mutat él. Így egy olyan irányított gráfot kapunk, amely irányított körökből áll (körnek te­kintjük a hurokélt és azt is, ha két pont között mindkét irányban fut él). A körök pont- (és él-)disz­junktak. A feladat az, hogy minden ilyen kör mentén az irányítás mentén eggyel arrébb kerüljön minden tanuló.

MEGJEGYZÉS. Bármennyire kézenfekvő ez a gondolat, mégsem könnyen érthető egy, a permutá­ciók szerkezetével most ismerkedő tanulónak. Van benne egy absztrakciós lépés. Közelebbről: egy számsorozatot, az 1, 2, …, *n* számok egy adott sorrendbeli leírását nem „készen adottnak” te­kintjük, hanem egy mozgásnak, függvénynek. A csoportelméletben ez nagyon hasznos szemlélet. Itt a feladat szövege is sugallja ezt az absztraktabb szemléletet. De ettől még igaz marad, ami min­den absztrakciós lépéssel kapcsolatban igaz: aki még nem jutott el hozzá, annak van benne valami megfoghatatlan, míg aki már elsajátította, az nehezen tud emlékezni arra a szituá­cióra, amikor még nem értette. Ez egy olyan *nehézség* a matematika tanításánál, amit ha nem veszünk nagyon komolyan, akkor nem szabad csodálkoznunk, ha a matematikát valami akár el­utasító (ez a gyakoribb), akár ködösen áhítatos borzongás veszi körül. Erre mindig újra figyelmez­tetnünk kell magunkat, ha nem akarunk annak a kollégámnak a sorsára jutni, aki a többi tanárral úgy utáltatta meg magát és a matematikát, hogy egy irodalomból, történelemből igen jó diákot butának titu­lált, „még egy elsőfokú egyenletet sem tud rendezni” felkiáltással. Hogy a mi ese­tünkben mi a nehézség, azt a legegyszerűbb eset részletes elemzésével is szemléltetni fogjuk.

Nézzük tehát először azt az esetet, ha a gráf egyetlen körből áll. Gondolatban ültessük a nyilak szerint egy kör alakú asztalhoz a tanulókat. (Ez persze nagyon megkavarja a tényleges sorrendjü­ket – és ez okozza a fent említett nehézséget –, de ezzel egyelőre ne törődjünk.) A következő fel­adathoz jutunk:

1. Egy osztály tanulói körben állnak. Az a feladat, hogy mindenki a tőle eggyel jobbra álló helyére kerüljön. Egy lépés most is ugyanaz, mint az előző feladatban, a tanulók száma *n*. Hány lépésben (= hány sípszóval) érhető el, ha egy lépés most is az, ami az előző feladatban.

MEGOLDÁS: Feltehetjük, hogy egy szabályos *n* szög csúcsaiban állnak a tanulók. A feladat: el kell forgatni a szabályos sokszöget 360°/n-nel. Ismeretes, hogy ez a sokszög két „szomszédos” tükör­tengelyére való tükrözéssel megvalósítható, amelyek tengelye 180°/n szöget zárnak be. Egy tük­rözésnél diszjunkt párok cserélnek helyet. (Ha *n* páros, akkor az egyik tükrözésnél mindenkinek van párja, a másikban két szemközti csúcsban állónak nincs. Ha *n* páratlan, akkor mindkét alka­lommal egy-egy tanulónak nincs párja.)

Tehát két lépésben célhoz érhetünk. Egy lépés nyilván nem elég.

MEGJEGYZÉS: A fent is említett okokból nagyon érdemes egy konkrét esetben kipróbálni, hogy mit jelent ez a megoldás.

Legyen az egyszerűség kedvéért 8 tanuló az osztályban, és a névsor szerinti sorban álljanak a következő nagyság szerinti sorrendben: 4 3 8 5 2 7 1 6. Azaz az első helyen a negyedik legmaga­sabb áll, a második helyen a harmadik legmagasabb, stb. Amikor gondolatban átrendeztük őket, akkor a következő sor­rendet kapjuk: 1 4 5 2 3 8 6 7 (1). Le kellene rajzolnom egy kör mentén őket, de nem tudom.

Az első lépésben a következő párok cserélnek helyet: (1 4) (5 7) (2 6) (3 8). Most ez lesz a kör: 4 1 7 6 8 3 2 5 (4). Megint le kellene rajzolnom: a 4-es került az 1-es helyére, stb. A második lépésben az 1 és a 3 helyben marad (erre a tengelyre tükrözünk), helyet cserélnek a következő párok: (4 7), (6 5), (8 2). Ha most le tudnám rajzolni, ez lenne a sorrend: 7 1 4 5 2 3 8 6 (7). Mint látjuk, való­ban eggyel elforgattuk a kört. *De mit jelent ez az eredeti feladatunk szempontjából?* Tényleg azt kaptuk, amit akartunk? Ehhez jobban meg kell értenünk, mit is csinálunk.

Nézzük, mi történt valójában az első lépésben. Az eredeti sor így nézett ki: 4 3 8 5 2 7 1 6. Itt he­lyet cserélt az első és a negyedik helyen álló, az ötödik és hetedik helyen álló, a második és hato­dik helyen álló, valamint a harmadik és nyolcadik helyen álló. A tényleges sor most tehát így ala­kult: 5 7 6 4 1 3 2 8. Az előbb felírt 4 1 7 6 8 3 2 5 (4) kör *az eredetileg rendre a 4., 1. 7. stb. helyen állókat* jelenti, tehát a *nagyság szerinti sorrend szerint* írva az 5 4 1 7 6 8 3 2 (5) körről van szó. Amikor azt mondtuk, hogy a második lépésben az 1 és a 3 helyben marad, akkor azt mondtuk, hogy *az eredetileg ezeken a helyeken állók* maradnak a helyükön, vagyis a 4. és 8. legmagasabb. És ez rendben is van: ők valóban a 4., illetve a 8. helyen állnak. A második lépésben lezajló (4 7) csere azt jelenti, hogy *az eredetileg a 4. és 7. helyen álló* helyet cserél, ami az 5. legmagasabb és a legmagasabb helycseréjét jelenti, ez megint csak jó, hiszen most az ötödik legmagasabb áll az első helyen és a legmagasabb az ötödik helyen. Ugyanúgy ellenőrizhető, hogy a további két csere után valóban a nagyság szerinti sorrendet kapjuk.

Ez a példa elég világosan mutatja, hogy csak látszólag egyszerű elvonatkoztatni a konkrét sor­rendtől és áttérni egy gondolatbeli sorrendre. Valójában egy dinamikusabb nyelvre fordítottunk és ezzel tet­tünk egy absztrakciós lépést. Nem könnyű az eredeti nyelven követni, hogy valójában mi is történik. De vigyázzunk: nem akkor sajátítottunk el egy abszt­rakciós lépést, ha problémátlanul vissza tudjuk követni a konkrét esetben – ez korántsem egyszerű általában –, hanem ha biztosnak érezzük magun­kat, hogy a követés nehézségei ellenére is végig tud­juk követni a konkrét történést, „át tudjuk dol­gozni”! Ha *erről* a követésről lemon­dunk, akkor az absztrakció a levegőben fog lebegni, nem fogjuk látni, hova vezet tovább. Ha vi­szont megijedünk, hogy nem megy kapásból, akkor nem fogjuk ma­gunknak igazán elhinni, hogy képesek vagyunk fel­fogni az absztraháló lépést.

Az 1. feladat megoldásának befejezése. Ha az eredeti feladatban az irányított gráf több körből áll, akkor gondolatban minden körnek megfeleltetünk egy-egy ilyen szabályos sokszöget. *Mindegyikben egyszerre* végre tudjuk hajtani a két lépést, hiszen a körök pontdiszjunktak. Tehát összességében is két lépésben célhoz juthatunk. Egy lépés nem mindig elég.

Megint érdemes részletesebben megvizsgálni, hogy mit csináltunk. A névsor szerint sorban álló tanulókat megsorszámoztuk, majd ebből a sorrendből akartunk egy másik sorrendhez, azaz per­mutációhoz eljutni. A permutációk felírásának szokásos módja az, hogy a felső sorba felírjuk az eredeti sorrendet (ezt néha el is hagyjuk), és alá az elérendőt. Legyen ez például a következő (az egyszerűség kedvéért 12 tagú osztályt választunk):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 3 | 8 | 6 | 10 | 7 | 1 | 5 | 11 | 2 | 9 | 12 |

Mi ehelyett elkészítettük a következő, irányított körök diszjunkt uniójából gráfot:

1 4 2 3 8 9 11 12

7 6 10←5

Ezeket a köröket nevezzük a permutáció *ciklusainak*. Most kódolhatjuk ezt a permutációt úgy is, hogy egymás után leírjuk az egyes ciklusokat és zárójellel választjuk őket el egymástól, a fenti esetben: (1 4 6 7) (2 3 8 5 10) (9 11) (12). Ez a permutáció ciklus-szerkezete.

Nyilvánvaló, hogy ebből a felírásból is „visszafejthetjük” a permutáció eredeti felírását. Tetszőleges ilyen ciklus-szerkezetet felírhatunk, csak arra kell vigyáznunk, hogy minden elem pontosan egy ciklus­ban szerepeljen, és akkor egyértelműen „visszafejthető” lesz. (Megjegyezzük, hogy ha ismert a hal­maz, amelyen a permutáció hat, akkor az egyelemű ciklusokat szokás nem kiírni.)

Ugyanannak a permutációnak a ciklus-szerkezetét azonban többféleképpen is felírhatjuk. Két okból is. Egyrészt a ciklusok sorrendje (egyelőre legalábbis) tetszőleges, másrészt *az egyes ciklusokat bármely tagjától kezdve is felírhatjuk*. Az első helyett írhatnánk pl. (6 7 1 4)-et, a második helyett pl. (3 8 5 10 2)-t, a harmadik helyett (11 9)-et is.

Ennek a ciklikus felírási módnak a csoportelmélet­ben is sok hasz­na van (l. erről pl. Hegedüs Pál feladatsorát itt: <http://specmat.wiki/index.php/Kezd%C5%91lap>), de mi most a véletlen permu­tációk felé vesszük az irányt, amelyek szintén jobban megfoghatók innen nézve.

Természetesen, ha tanítani támad kedvünk a ciklikus szerkezetet, akkor érdemes gyakoroltatni konk-rét permutációk felírását. És érdemes azt is kipróbálni, hogy két permutáció szorzatát hogyan kaphat­juk meg ezzel a felírással gyorsan és mechanikusan. De erre itt nincs szükségünk.

**Véletlen permutációk/1: a permutációk újrakódolása**

A következő feladat szintén a permutáció ciklusairól szól, de most már véletlen permutációról van szó. (A kiosztott feladatsorban szereplő feladat ennél kissé bonyolultabb, erre majd a meg­oldások végén térek vissza.)

1. Az osztály most moziba megy. Egy sorba szól a jegyük, egymás mellé. Mindenki el is megy a moziba, de egyesével, véletlen sorrendben érkeznek. Ahogy megjönnek, mindenki leül az el­ső üres székre, függetlenül attól, hogy hova szól a jegye. (Az elsőnek érkező az első helyre, stb.) Amikor már mindenki leült, az utolsó helyen ülőnek eszébe jut, hogy ő mégis ott sze­retne ülni, ahova a jegye szól. Megnézi, hova szól, és ha épp ott ül, akkor nem tesz semmit. Ha nem oda szól, akkor felállítja azt, aki a helyén ül és helyet foglal. Akit felállított, az most már maga is oda akar ülni, ahova a jegye szól. Két eset van: vagy épp az üres helyre szól a jegye, akkor leül oda, vagy foglalt a helye, akkor felállítja az ott ülőt, és leül a helyére. Ez foly­tatódik, amíg ahhoz nem érnek, akinek a jegye a még üres helyre szól. Ő is leül a helyére és kezdődhet az előadás. Mennyi a valószínű­sége, hogy az első helyen ülőnek nem kell felállnia?

1. MEGOLDÁS: Ki tudjuk számolni. Az ellentét eseményt számoljuk ki, azt tehát, hogy hány olyan permutáció van, amelyben az első helyen ülőnek fel kell állnia. *Az a kérdés, hogy hány olyan per­mutáció van, amelyben az utolsó helyen ülő és az első helyen ülő tanulók ugyanabban a ciklusban vannak.* Ha ez a ciklus *k* embert mozgat meg, akkor még *k* – 2 embert kell kiválasztanunk, ezt $\left(\begin{matrix}n-2\\k-2\end{matrix}\right)$ féleképpen tehetjük meg. Utána őket még (*k* – 1)! féleképpen lehet sorba tenni. (Az utolsó helyen ülő jegye a másik *k* – 1 helyének bármelyikére szólhat, a ciklusban következőé még *k* – 2 hely bármelyikére, stb.). A maradó *n* – *k* ember pedig akárhogy permutálható egymás kö­zött, ez (*n* – *k*)! féleképpen lehetséges. Összeszorzásukkal (*n* – 2)!(*k* – 1) adódik. Ezt kell minden lehetséges *k*-ra, tehát *k* = 2, …, *n*-re összeadnunk. Az összeg $\left(n-2\right)!\frac{n\left(n-1\right)}{2}=\frac{n!}{2}$, és ez a permu­tációknak pontosan a fele. Tehát ½ valószínűsége van annak, hogy az első helyen ülő tanuló­nak is fel kell állnia.

2. MEGOLDÁS. Cseréljük meg az első és az utolsó tanuló jegyét. Ezzel párosítjuk a permutációkat. Ha az egyik permutációban az első és utolsó tanuló egy ciklusban volt, akkor a csere után külön ciklusba kerülnek és fordítva – erről a nyilak berajzolásával könnyen meggyőződhetünk. Vagyis minden párból pontosan az egyikben kell felállnia az első tanulónak is. A keresett valószínűség tehát ½.

Ez talán a legegyszerűbb megoldás – és a permutációk elméletében fontos szerepe van az itt használt gondolatnak. A véletlen permutációkhoz azonban érdemes egy újabb megoldást is megismernünk.

3. MEGOLDÁS. Most gondolatban írjuk fel a teljes (véletlen) permutációt ciklikus alakban. Szükségünk lesz a következő trükkre (ezt emlékeim szerint Lovász László könyvében olvastam először):

1. Láttuk, hogy a permutációk ciklikus felírása nem egyértelmű. Egy permutáció sokféleképp is felírható. Az egyes ciklusokon belül is bármelyik elemtől elindulhatunk, de a ciklusokat is tetszőleges sorrendben írhatjuk egymás után. Most szeretnénk egyértelműsíteni a ciklikus felírást – éspedig úgy, hogy el is hagyhatjuk a zárójeleket. Lehetséges ez?

MEGOLDÁS. Feltesszük, hogy az első *n* pozitív szám permutációjáról van szó. A „csel” a követke­ző. Először a ciklusokat rakjuk sorba, mégpedig úgy, hogy a bennük szereplő legkisebb számok növekvő sorrendet adjanak. Az első ciklus tehát az lesz, amelyben szerepel az 1, a második az lesz, amelyikben az első ciklusban nem szereplő számok közül a legkisebb áll, stb. A fenti példánk­ban ez így volt. Most még a ciklus sorrendjét kell úgy felírni, hogy egyben kódoljuk azt is, hol van a vége. A megoldás a következő: minden ciklusban a legkisebb elemet írjuk utoljára. Így az első ciklus végét az 1 szám jelöli, a második ciklus végét az 1 előtt nem szereplő legkisebb szám meg­jelenése jelöli, stb. A fenti példánk tehát így alakul: 4 6 7 1 3 8 5 10 2 11 9 12. (Megjegyezzük, hogy ha a legnagyobb szám áll a legutolsó helyen, akkor az biztosan egyelemű ciklust alkot.) Világos, hogy így az első *n* szám minden permutációját újra kódoltuk, egy-egyértelműen – egy-egy *n* hosszú permutációval!

Gyakorló feladatnak jó lehet a következő:

1. Melyik permutációkon nem változtat a fenti újrakódolás?

MEGOLDÁS. Csak az identitáson, azaz az 1 2 … *n* permutáción nem változtat. Minden más permutációnál az első elmozduló szám hátrébb kerül az újrakódolásnál.

A 3. feladat 3. megoldásának befejezése. A feladat azt kérdezi, hogy mennyi a valószínűsége an­nak, hogy az 1 és az *n* egy ciklusban szerepel. Ez pontosan akkor következik be, ha az újrakódolás során az *n* az 1-es előtt áll. Ez pedig nyilván az esetek felében teljesül, hiszen a kódokat párosít­hatjuk úgy, hogy felcseréljük 1 és *n* helyét.

MEGJEGYZÉS a 3. feladathoz: Egyik megoldásban sem játszik szerepet, hogy épp az utolsó helyen ülő áll fel és épp az első helyen ülőről szól a kérdés. Bárhogy jelölünk ki két tanulót, mindig ½ an­nak a valószínűsége, hogy ők egy ciklusban lesznek (tehát ha az egyik feláll, akkor a másiknak is fel kell állnia). Ebből a megjegyzésből következik, hogy ½ az eredmény annál a kissé bonyolultabb feladatnál is, ami a feladatlapon szerepel.

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a 3. feladatban *mindenkinek* fel kell állnia?

1. MEGOLDÁS. Ha mindenkinek fel kell állnia, akkor az egész permutáció egyetlen ciklus, tehát mind az *n* tanulót megmozgatja. Az elsőnek felálló tanuló jegye most *n* – 1 másik helyre szólhat, a következőé a maradó *n* – 2 helyre, stb., ez összesen (*n* – 1)! lehetőség, a permutációk $\frac{1}{n}$-ed része. Ez a keresett valószínűség.
(A megoldás egy mondatban: *n* elem ciklikus permutációinak száma (*n* – 1)!, vagyis a permutációk *n*-ed része.)

2. MEGOLDÁS. A 3. feladat 3. megoldásánál alkalmazott újrakódolás is egyszerű választ tesz lehe­tővé, amely tovább is visz. Pontosan akkor kell mindenkinek felállnia, ha a permutáció újrakódo­lásában az 1-es áll az utolsó helyen. Minthogy az újrakódolás után az 1-es bármelyik helyen ugyanolyan valószínűséggel áll (hiszen minden permutáció pontosan egyszer szerepel az újra­kódolásnál is!), ezért $1/n$ valószínűséggel áll az utolsó helyen – így ennyi a valószínűsége annak is, hogy mindenkinek fel kell állnia.

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a 3. feladatban pontosan *k* embernek kell felállnia?

MEGOLDÁS. Az előző megoldásban tkp. megadtuk a választ, ehhez mindössze egy valamit kell meggondolnunk. Nyilván ugyanaz marad a válasz, ha nem az utolsó helyen ülő tanuló áll fel elő­ször, hanem az első helyen ülő. És ebben az esetben már az a kérdés, hogy milyen valószínűség­gel szerepel az 1 egy pontosan *k* elemű ciklusban. Amire a válasz az, hogy ahányszor pontosan a *k*-adik helyen áll az újrakódolásban. És ezminden *k*-ra egyforma, tehát $1/n$.

*Bármely tanuló áll fel először,* $1/n$ *annak a valószínűsége, hogy pontosan k embernek kell felállnia.*

Vagy permutációkra átfogalmazva:

*Legyen n és k tetszőleges pozitív szám,* $k\leq n$*. Tekintsük n elem egy véletlen permutációját. Annak a valószínűsége, hogy ebben egy adott elem pontosan k hosszú ciklusban szerepel, k ér­tékétől füg­get­lenül* $1/n$.

1. Most visszatérünk a 3. feladathoz és azt kérdezzük: mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második helyen ülő tanulónak is fel kell állnia?
És mi a valószínűsége annak, hogy mind­kettő megússza, hogy fel kelljen állnia? És általában:
Mi a valószínűsége annak, hogy (előre kijelölt) *s* ember
a) mindegyikének fel kell állnia, illetve hogy
b) mindegyikük megússza, hogy fel kelljen állnia?
(Értelemszerűen az *n*-edik helyen ülőt már nem választhatjuk ki.)

MEGOLDÁS. Az a) kérdés megválaszolására, alkalmazható a 3. feladat első megoldása. A számolás áttekinthetősége érdekében a számolást az *s* = 3 esetben hajtjuk végre.Megint jelölje *k* azt, hogy hány em­ber áll fel összesen. Ezek közül *k* – 4 választható szabadon az *n –* 4további ember közül, ezt $\left(\begin{matrix}n-4\\k-4\end{matrix}\right)$ féleképp tehetjük meg. A *k* ember ismét (*k* – 1)! féleképpen alkothatja a ciklust, a maradó *n* – *k* ember pedig bármilyen sorrendben ülhet a maradó *n* – *k* helyen, ez egy (*n* – *k*)!-os szor­zó. Összességében ez $\left(n-4\right)!\left(k-1\right)\left(k-2\right)\left(k-3\right)=6\left(n-4\right)!\left(\begin{matrix}k-1\\3\end{matrix}\right)$ lehetőséget je­lent, és ezt kell minden *k* = 4, 5, …, *n*-re összeadni. Felhasználjuk, hogy $\sum\_{4}^{n}\left(\begin{matrix}k-1\\3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}n\\4\end{matrix}\right)$, így az összeg $6\left(n-4\right)!\left(\begin{matrix}n\\4\end{matrix}\right)=n!/4.$ Tehát a keresett való­színűség ¼.

Az általános esetben az $\sum\_{s+1}^{n}\left(\begin{matrix}k-1\\s\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}n\\s+1\end{matrix}\right)$ összefüggést kell használni, és a keresett valószínűség $\frac{1}{s+1}$.

Általában a következőt kapjuk:
*Legyen n és k pozitív egész,* $k\leq n$*, és tekintsük n elem egy véletlen permutációját. Annak a valószínűsége, hogy előre kiválasztott k elem egy ciklusban lesz,* $1/k$*.*

A 3. feladat második megoldása közvetlenül nem általánosítható. A harmadik megoldásból viszont a) és b) kérdésére is könnyen válaszolhatunk. Ha például azt akarjuk megnézni, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az első tanulóval indulva másik *s*, előre kijelölt tanulónak is fel kell áll­nia, ez az újrakódolásnál annyit jelent, hogy ennek az *s* tanulónak a számai mind előbb jönnek az 1-nél. Most is csoportosítjuk az újrakódolt permutációkat. Két permutáció akkor kerül azonos csoportba, ha egyrészt az első tanuló és a kijelölt *s* tanuló (sorszáma) összességében ugyanazt az *s* + 1 helyet foglalja el, másrészt a többi tanuló sorszáma a két permutációban ugyanúgy helyez­kedik el. Így minden egyes csoportba (s + 1)! permutáció kerül, hiszen az *s* + 1 kitüntetett tanuló­hoz tartozó számokat ennyiféleképpen lehet permutálni. És ezek közül nyilván *s*! olyan van, ahol az 1 van az utolsó helyen, vagyis mind az *s* kijelölt tanuló sorszáma után. Vagyis megint azt kap­tuk, hogy a permutációk $\frac{1}{s+1}$-ed részében fog mind az *s* kijelölt tanulóra sor kerülni. Ha pedig az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel „ússza meg” mind az *s* kijelölt tanuló, hogy fel kelljen állnia, arra ugyanez a válasz, hiszen csak annyi a különbség, hogy most mind az *s* tanuló sorszámának az 1 után kell jönnie az újrakódolt permutációkban, s ez megint a permutációk $\frac{1}{s+1}$-ed részében következik be.

Ezzel választ adtunk a következő kérdésre:

1. Mi a valószínűsége annak, hogy egy *n* elemű véletlen permutációban két előre kijelölt elem különböző ciklusban legyen? És hogy *s* darab előre kijelölt elem ne legyen egy ciklusban egy előre kijelölt *s* + 1-edikkel?

A megoldás tehát $\frac{1}{s+1}$. Ugyanígy válaszolható meg a következő kérdés is:

1. Mi a valószínűsége annak, hogy egy *n* elemű véletlen permutációban előre kijelölt *k* elem mindegyike más ciklusban legyen?

MEGOLDÁS. Nyilván feltehetjük, hogy az első *n* pozitív egész permutációiról van szó és az első *k* számnak kell más és más ciklusban lennie. Ehhez pedig arra van szükség, hogy az újrakódoláskor fordított sorrendben jöjjenek. Az előző feladatmegoldás gondolatmenete szerint most *k*! elemű csoportokba soroljuk a permutációkat és minden ilyen csoportban pontosan egy permutációra teljesül, hogy az első *k* egész fordított sorrendben szerepel. Vagyis a megoldás $\frac{1}{k!}$.

**Véletlen permutációk/2: a „kínai étterem folyamat” (Chinese restaurant process)**

Most már rátérhetünk a címben szereplő témánkra. Hogyan értjük, hogy a tanulók véletlen sor­rendben ér­keznek? Vagy általánosabban: hogyan modellezhetjük a „véletlen permutációkat”? Nyilván sok­féleképpen képzelhetjük el az előbbit, de talán még szemléletesebb, ha a „karácsonyi ajándéko­zásra” gondolunk. Itt minden tanuló nevét bedobják egy kalapba, jól összekeverik, majd a tanulók egyesével kihúznak egy-egy nevet. Ha itt a sorsolás véget is érne, akkor ez egy jó modell lenne a véletlen permutációra. Azonban a karácsonyi ajándékozásnál vigyázni kell arra is, hogy senki ne húzza önmagát. Ennyiben tehát nekünk nem jó szemléltetés, maradunk az eredetinél, amikor meg van engedve, hogy egyesek önmagukat húzzák.

Ez a modell jó, előállít egy véletlen permutációt – de van vele egy probléma. Ha pl. kiderül, hogy valakit még meg akarnak hívni az osztálykarácsonyra, akkor az egész sorsolást elölről kell kezdeni. A modell nem „dinamikus”. És persze a ciklusok sem fognak közvetlenül látszani. A ciklus-szerke­zet és a (4. feladat megoldásában megadott) újrakódolás alapján azonban lehet dinamikus mo-dellt is csinálni – ez az úgynevezett

1. **„Kínai étterem folyamat” (Chinese restaurant process)**. A továbbiakhoz megjegyezzük, hogy talán onnan kapta a nevét ez a folyamat, hogy úgy képzeljük: a kínai vendéglőben egy-egy asztal körül praktikusan végtelen sokan ülhetnek és bármely két vendég széke közé le lehet tenni még egy széket. Ez fontos eleme a folyamatnak.
Tekintsük egy *n* elemű permutáció újrakódolt alakját. Gondoljuk embereknek a permutáció elemeit, a számuk azt jelzi, hányadikként érkeztek a vendéglőbe. Az első – az 1-gyel véget érő – ciklus tagjait ültessük az első asztalhoz abban a sorrendben, ahogy a ciklusban jönnek. A második – az első asztalhoz le nem ültetettek közül a legkisebb sorszámúval véget érő – cik­lus tagjait ültes­sük a második asztalhoz, szintén a ciklus sorrendjében, és így tovább.
Tegyük fel, hogy van egy eljárás, amely minden újrakódolt permutációt ugyanolyan ($\frac{1}{n!}$) való­színűséggel állít elő. Megérkezik az új vendég, fogja a székét és le akar ülni valamelyik asztal­hoz, vagy új asztalt is kezdhet. Tegyük fel, hogy van egy véletlen szám előállítója. Milyen való­színűséggel üljön az egyes asztalokhoz a székével, hogy most minden *n*+1 elemű újra­kódolt permutáció ugyanolyan valószínűséggel álljon elő, ha azt látja, hogy az *i*-edik asztalnál *ai* szá­mú ember ül?

MEGOLDÁS. Tippelhetnénk arra, hogy valahogy úgy kell a valószínűségeket választani, hogy az egyes asztalnál ülők száma ne nagyon térjen el egymástól. De ez nem jó tipp. Azt kell ugyanis el­érnünk, hogy kijelölve mondjuk a „balra tarts” irányt az új vendég bármely asztalnál ülőtől balra egyforma valószínűséggel üljön le és ugyanilyen valószínűséggel kezdjen új asztalt. Ez összesen *n*+1 helyet jelent, tehát mindegyik helyre $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kell leülnie. Tehát az *i*-edik asztal­hoz $\frac{a\_{i}}{n+1}$ valószínűséggel ül le, új asztalt $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kezd (vagyis úgy vesszük, hogy az első üres asztalnál 0 ember ül). Ez a választás jó, ugyanis azt jelenti, hogy az *n* elemű véletlen permu­táció újrakódolt alakjának bármely két ele­me közé, illetve az elejére vagy a végére ugyanolyan valószínűséggel tesszük az *n*+1 számot. Tehát ha az *n* elemű véletlen permutációk egyforma való­színűséggel álltak elő, akkor valóban egyenlő valószínűséggel áll elő minden *n*+1elemű permu­táció is.

Ez lesz tehát
a „kínai étterem folyamat” (KÉF): Az első vendég leül az első asztalhoz. A második vendég ½-½ való­színűséggel ül az első vendég mellé, vagy kezd új asztalt. Ezután minden új vendég $\frac{a\_{i}}{n+1} $ valószínűség­gel ül az *i*-edik asztalhoz, ha ott *ai* ember ül éppen. (Megállapodtunk abban, hogy az első üres asztal is számít, ott 0 ember ül.)

Beláttuk, hogy ez a modell minden azonos elemszámú permutációt ugyanolyan valószínűséggel állít elő. A leírt folyamat eredménye a véletlen permutációk egy dinamikus modellje. Dinamikus, mert az új ember érkezésekor nem kell mindent elölről kezdenünk, mint a karácsonyi sorsolásnál.

1. Oldjuk meg a „kínai étterem folyamat” alapján a 3. feladatot, illetve a 9. és a 10. feladatot!

MEGOLDÁS. Beláttuk, hogy a KÉF minden *n* elemű véletlen permutációt ugyanolyan valószínű­ség­gel állít elő. De ez azt is jelenti, hogy *bármely két vendégre* ugyanannyi lesz a valószínűsége an­nak, hogy ez a két vendég egy asztalnál ül. Elég tehát az első két vendégre kiszámolni ezt a való­színűséget. Az első vendég biztosan az első asztalhoz ül, a második pedig ½ valószínűséggel ül mellé. Ennyi tehát a valószínűsége, hogy két adott elem egy ciklusban van egy véletlen permutá­cióban.

Természetesen ugyanígy jön ki az is, hogy ½ a valószínűsége annak is, hogy az első két ember kü­lön asztalhoz ül (ez csak a második választásán múlik). Így annak is ½ a valószínűsége, hogy adott két elem egy véletlen permutációban két külön ciklusban lesz. És ha *k* elemről kérdezzük ugyan­ezt, megint elég az első *k* vendégre megnéznünk, hogy milyen valószínűséggel ülnek a) egy asztal­nál, b) mind külön asztalnál. Az a) esetben a második ½ valószínűséggel ül az első mellé. Most már ketten vannak ennél az asztalnál, így a harmadik $\frac{2}{3}$ valószínűséggel ül melléjük. Az *i*-edik ven­dég $\frac{i-1}{i}$ valószínűséggel ül melléjük. Ezeket *i* = 2, 3, …, *k*-ra összeszorozva éppen $\frac{1}{k}$-t kapunk. A b) esetben az első *k* vendég mindegyike új asztalt kezd, amit az *i*-edik vendég $\frac{1}{i}$ valószínűséggel tesz, most tehát ezek szorzata, $\frac{1}{k!}$ a válasz. (Erre a megoldásra a legvégén még visszatérek.)

Mint említettük, rossz várakozás az, hogy a ciklusok hossza egyenletesen fog eloszlani. A KÉF mo­dell ennek az ellenkezőjét mutatja: a „tipikus” esetben a ciklusok nagysága egyáltalán nem lesz egyenletes. Ha egy asztalnál a vendégek száma egyszer nagyobb a többinél, akkor onnantól kezd­ve nagyobb valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni a következő vendég, ami után megint na­gyobb valószínűséggel fog ideülni a következő, stb. Ez persze még csak heurisztikus érv. De a következő feladatban ezt egy módon pontosan is megfogalmazzuk.

1. Várhatóan hány ember fog részt venni a 3. feladat „forgásában”, ha az osztályban *n* tanuló van?

Vagy ugyanez az „éttermes” megfogalmazásban:

1. Az *n*-edik vendég érkezése után várhatóan hány ember fog ülni az első vendég asztalánál?

1. MEGOLDÁS. Felhasználjuk, hogy a várhatóértékek akkor is összeadódnak, ha a változók nem függetlenek. Legyen *Xi* az a valószínűségi változó, amelynek értéke 1, ha az *i*-edik vendég az első asztalhoz ült, és 0, ha nem. (Vagyis *Xi* az „*i*-edik vendég az első asztalnál ül” esemény karakterisz­tikus változója.) Az első asztalnál ekkor *X*1 + *X*2 + … + *Xn*vendég fog ülni. Ennek a változónak a vár­hatóértékét keressük. Ez tehát megegyezik az egyes változók várhatóértékének az összegével. Az első változó mindig 1 (az első vendég az első asztalnál ül), a többi változó várhatóértéke ½, hiszen ennyi a valószínűsége annak, hogy az *i*-edik vendég az első asztalnál ül. A keresett várhatóérték tehát $\frac{n+1}{2}$.

A 8. feladat megoldása során megfogalmazott (kék betűs) állítás alapján egy másik, gyorsabb bizonyítást is adhatunk ugyanerre:

2. MEGOLDÁS. A 7. feladat megoldása után láttuk, hogy minden *k*-ra ($k\leq n$) ugyanannyi, $\frac{1}{n}$ a valószínűsége annak, hogy az első asztalnál *k* vendég ül. Így a várhatóérték $\frac{1}{n}\sum\_{1}^{n}k= \frac{n+1}{2}$.

Állításunkat így is megfogalmazhatjuk:

*Az első n szám egy véletlen permutációjában az 1-et tartalmazó ciklus várható elemszáma* $\frac{n+1}{2}$*.*

1. Állításunk tehát azt mondja, hogy az első asztalnál ülők számának várhatóértéke a vendégek számának felénél ½-del több. Másrészt azt mondja, hogy *bármely* vendégre igaz, hogy ennyi az ő asztalánál ülő vendégek számának várhatóértéke. De lehetetlen, hogy két – vagy pláne több – asztalnál üljenek ennyien. Ha *A* az első vendég asztalánál ülők száma, *B* a második vendég asztalánál ülők száma, akkor e két valószínűségi változó mindegyikének $\frac{n+1}{2} $a várha-tóértéke, így összegük várhatóértéke *n*+1, több, mint a vendégek száma. Hogyan oldható fel ez az ellentmondás?

MEGOLDÁS. Nincs ellentmondás. Az *A*+*B* valószínűségi változó értéke ugyanis akár 2*n* is lehet, ha az összes vendég az első asztalnál ül, azaz az egész permutáció egyetlen ciklus. Ebben az esetben ugyanis, és általában is, ha az első két vendég egy asztalnál ül, azt a ciklust, amelyben ülnek, ez a változó kétszer számolja meg.

1. Következik-e az, hogy a legnagyobb ciklus várható elemszáma (a legfoglaltabb asztalnál ülő vendégek száma) is $\frac{n+1}{2}$?

MEGOLDÁS. Nem. Ez a várhatóérték nyilvánvalóan *nagyobb*, hiszen minden olyan eset, amikor az első elem nem a legnagyobb ciklusban van – nem az első asztalnál ülnek a legtöbben –, a leg­hosszabb ciklus várhatóértékéhez többet ad hozzá, mint az első asztalnál ülők várhatóértéké­hez. A 3. feladat első megoldásában használt számolással könnyen kijön, hogy ha $k>\frac{n}{2}$, akkor $P\left(van pontosan k hosszú ciklus\right)= 1/k$. Másrészt ha van ilyen hosszú ciklus, akkor biztosan ez a leghosszabb, így minden ilyen *k*-ra 1-et ad a „legnagyobb ciklus hossza” valószínűségi változó vár­hatóértékéhez. Ez önmagában $\frac{n+1}{2}$, és ehhez jönnek még azok az esetek, amikor csak kisebb cik­lusok vannak. Páros *n*-re is könnyű látni, hogy $P\left(van pontosan \frac{n}{2} hosszú ciklus\right)> \frac{1}{n}$, tehát a legalább $\frac{n}{2}$ hosszú ciklusok is több, mint $\frac{n+1}{2}$-t adnak a várhatóértékhez.

Az alábbi feladat számolással aránylag nehezen jön ki, a KÉF segítségével egyszerű.

1. Várhatóan hány asztalnál fog vendég ülni az *n*-edik vendég érkezése után? Vagyis várhatóan hány ciklus van egy *n* elemű véletlen permutációban?

MEGOLDÁS. Jelöljük $E(n)$-nel ezt a várhatóértéket. $E\left(1\right)=1, E\left(2\right)= \frac{3}{2}$ nyilvánvaló. Általában ha $E(n-1)$-et már ismerjük, akkor a KÉF szerint az érkező *n*-edik vendég $\frac{1}{n} $valószínűséggel kezd új asztalt, azaz növeli a ciklusok számát. Tehát $E\left(n\right)=E\left(n-1\right)+\frac{1}{n}$. Ebből következik, hogy

*Egy n elemű véletlen permutációban a ciklusszám várhatóértéke* $\sum\_{1}^{n}\frac{1}{n}$*.*

1. A 7. feladat után kimondott állítás szerint ha *n* és *k* pozitív egészek, $k\leq n$, akkor
$P\left(n elem véletlen permutációjában az első elem k elemű ciklusban van\right)= 1/n$, *k*-tól függetlenül. Bizonyítsuk ezt be a kínai étterem folyamattal.

MEGOLDÁS. *n* = 1-re, 2-re könnyen belátható az állítás. Tegyük fel, hogy *n*-re már tudjuk az állí­tást, bebizonyítjuk *n* helyett *n*+1-re is. Az első vendég asztalánál kétféleképp ülhet *k* ember az *n*+1-edik vendég leültetése után:
1) Az utolsó vendég az első asztalhoz ült és így lettek ott *k*-an. Ez akkor van, ha az első *n* vendég közül csak *k* – 1 vendég ül az első asztalnál és az utolsó vendég ehhez az asztalhoz ül. Az előbbi valószínűsége a teljes indukciós feltevés szerint $\frac{1}{n}$, az utolsó vendég pedig $\frac{k-1}{n+1}$ valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni. Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{k-1}{n(n+1)}$.
2) Az utolsó vendég nem ide ült, de már az első *n* vendég után is *k* vendég ült az első asztalnál. Utóbbinak megint $\frac{1}{n} $a valószínűsége az indukciós feltevés szerint, annak a valószínűsége pedig, hogy az utolsó vendég nem ide ült, $\frac{n+1-k}{n+1}$. Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{n+1-k}{n(n+1)}$.

A két esetet összeadva azt kapjuk, hogy a valószínűség éppen $\frac{1}{n+1}$, és ezt akartuk belátni.

**Befejezés**

Egyrészt szeretném még egyszer hangsúlyozni, hogy *Gyenes Zoltánnal együtt* gondoltuk át az itt le­írtak legnagyobb részét. Remélhetőleg sikerült valamennyire érzékeltetni, hogy a „kínai étterem fo­lyamat” segítségével milyen jól szemléltethetők és kezelhetők a véletlen permutációk egyszerű tulaj­donságai. Elegánsan szemlélteti pl. a ciklusszám várhatóértékét, de különösen frappánsnak tűnik a 12. feladat megoldása ebből a szempontból. És érdemes megfontolni a következőt is. Ha a „kínai ét­terem folya­matot” minden előzmény nélkül definiáljuk, és úgy kérdezzük meg, hogy vajon az első két vendég, vagy az utolsó kettő fog-e nagyobb valószínűséggel egy asztalnál ülni, akkor erre – a háttér ismerete nélkül – elég nehéznek látszik a válasz.

1. A 2016. február 17-én a Tanári Klubban tartott előadás szerkesztett változata. Külön köszönet Gyenes Zoltánnak és Virág Bálintnak. [↑](#footnote-ref-1)